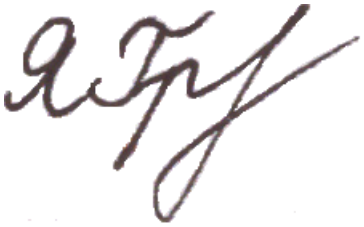
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



ГРАНОВСКИЙ ЯРОСЛАВ ИГОРЕВИЧ

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Специальность 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк.

Научный руководитель: **Маламуд Марк Мордкович**
доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Официальные оппоненты: **Россовский Леонид Ефимович**
доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Каплицкий Виталий Маркович
кандидат физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»

Защита состоится «5» декабря 2023 года в 16:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 на базе Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21-ж и на сайте https://hub.sfedu.ru/diss/show/1319162/

Автореферат разослан «___» _____ 2023 г.

Отзыв на автореферат в 2-х экз. (с указанием даты, Фамилии Имени Отчества, ученой степени, специальности, звания, организации, подразделения, должности, адреса, телефона, e-mail), заверенный печатью организации, просим направлять по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 111, учёному секретарю диссертационного совета ЮФУ801.01.02 Кряквину В.Д., а также в формате .pdf на e-mail: kryakvin@sfedu.ru.

Учёный секретарь
диссертационного совета ЮФУ801.01.02 Кряквин Вадим Донатович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Спектральная теория представляет значительный интерес в различных разделах математической физики и особенно в квантовой механике. Согласно классическому результату Титчмарша, реализация Дирихле оператора Штурма-Лиувилля

$$-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + q$$

с суммируемым потенциалом $q(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ имеет лебеговский спектр постоянной кратности 1.

Одной из целей диссертационной работы является обобщение теоремы Титчмарша на случай операторов с суммируемыми матричными потенциалами, операторов с дельта-взаимодействиями и операторов Шрёдингера с суммируемыми матричными потенциалами на квантовых графах, а также на случай трёхчленных дифференциальных операторов 2-го порядка с матричными потенциалами-распределениями.

Дифференциальные операторы с точечными взаимодействиями возникают в различных физических приложениях в качестве точно решаемых моделей, описывающих сложные физические явления. Многочисленные результаты, а также достаточно полную библиографию можно найти в монографии С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крона, Х. Хольдена[1] — см. также приложение П. Экснера в[1]. По этой тематике отметим также монографию С. Альбеверио и П. Курасова[2] и обзор А.С. Костенко и М.М. Маламуда[3]. В одномерном случае, наиболее известной моделью является оператор Шрёдингера $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$, ассоциированный с формальным дифференциальным выражением вида:

$$\ell_{X,\alpha,q} := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x) + \sum_{x_n \in X} \alpha_n \delta(x - x_n), \tag{0.0.1}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Этот оператор описывает δ-взаимодействия на дискретном множестве точек

[1] Albeverio, S. Solvable models in quantum mechanics. Second edition / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. — AMS Chelsea Publishing, Providence, R.I, 2005. — 452 p. With an Appendix by P. Exner.

[2] Albeverio, S. Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger-type operators / S. Albeverio, P. Kurasov. — LMS Lecture Note Series. — Vol. 271. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 429 p.

[3] Kostenko, A. 1-D Schröodinger operators with local point interactions: a review / A. Kostenko, M. Malamud // Spectral analysis, differential equations and mathematical physics: a festschrift in honor of Fritz Gesztesy's 60$^{\text{th}}$ birthday. Proc. of Symp. in Pure Math. AMS, Providence, R.I. — 2013. — Vol. 87. — P. 235 – 262.

$X = \{x_n\}_{n\in I} \subset \mathcal{I} = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, а коэффициенты $\alpha_n (\in \mathbb{R})$ называют интенсивностями взаимодействий в точках $x = x_n$.

Спектральные свойства гамильтонианов $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$, ассоциированных с (0.0.1), хорошо изучены в предположении, что существует положительная равномерная нижняя граница между центрами взаимодействия,

$$d_* := \inf_{i,j} |x_i - x_j| > 0,$$

см. об этом монографии С. Альбеверио, Ф. Гестези и др.[1], С. Альбеверио и П. Курасова[2], статьи Д. Бушмана, Г. Штольца и Дж. Вейдмана[4], Ф. Гестези и Х. Хольдена[5], Ф. Гестези и В. Кирша[6], К. Шубиной и Г. Штольца[7], Р.С. Исмагилова и А.Г. Костюченко[8], В.С. Рабиновича и др.[9] [10], ссылки в них, а также недавние работы А.С. Костенко и М.М. Маламуда[11], В.С. Будыки и М.М. Маламуда[12], в которых исследован случай $d_* = 0$. В этих работах систематически применяется аппарат граничных троек и соответствующих им функций Вейля.[13] [14] [15]

Отметим, что в работах А.М. Савчука и А.А. Шкаликова[16] [17] и после-

[4]Buschmann, D. One-dimensional Schrödinger operators with local point interactions / D. Buschmann, G. Stolz, J. Weidmann // J. Reine Angew. Math. — 1995. — Vol. 467. — P. 169 – 186.

[5]Gesztesy, F. A new class of solvable models in quantum mechanics describing point interactions on the line / F. Gesztesy, H. Holden // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20, № 15. — P. 5157 – 5177.

[6]Gesztesy, F. One-dimensional Schrödinger operators with interactions singular on a discrete set / F. Gesztesy, W. Kirsch // J. Reine Angew. Math. — 1985. — Vol. 362. — P. 27 – 50.

[7]Shubin Christ, C. Spectral theory of one-dimentional Schrödinger operators with point interactions / C. Shubin Christ, G. Stolz // J. Math. Anal. Appl. — 1994. — Vol. 184, № 3. — P. 491 – 516.

[8]Исмагилов Р.С. Об асимптотике спектра оператора Штурма–Лиувилля с точечным взаимодействием / Р.С. Исмагилов, А.Г. Костюченко // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44, № 4. — С. 14 – 20.

[9]Rabinovich V.S. Numerical calculation of the discrete spectra of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions / V.S. Rabinovich, V. Barrera-Figueroa // Math Meth Appl Sci. — 2019. — Vol. 42. — P. 5072 – 5093.

[10]Rabinovich V.S. On the spectra of one-dimensional Schrödinger operators with singular potentials / V.S. Rabinovich, V. Barrera-Figueroa, L. Olivera Ramirez // Front. Phys. — 2019. — Vol. 7, № 57.

[11]Kostenko, A.S. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set / A.S. Kostenko, M.M. Malamud // J. Differential Equations. — 2010. — Vol. 249, № 2. — P. 253 – 304.

[12]Budyka V.S. Deficiency indices and discretness property of block Jacobi matrices and Dirac operators with point interactions / V.S. Budyka, M.M. Malamud // J. Math. Anal. and Appl. — 2022. — Vol. 506:125582.

[13]Деркач, В.О. Теорія розширень симетричних операторів і граничні задачі / В.О. Деркач, М.М. Маламуд. — Праці Інституту математики НАН України. — Т. 104. — К.: Інститут математики НАН України, 2017. — 573 с.

[14]Derkach, V.A. Generalised resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps / V.A. Derkach, M.M. Malamud // J. Funct. Anal. — 1991. — Vol. 95, № 1. — P. 1 – 95.

[15]Горбачук, В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. — Киев: Наук. думка, 1984. — 284 с.

[16]Савчук А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897 – 912.

[17]Савчук А.М. Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами-распределениями / А.М. Савчук, А.А.

дующих за ними работами К.А. Мирзоева и др.[18] [19] [20] предложен другой подход к исследованию операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями.

Необходимо также отметить, что в последние 3 десятилетия активно развивается спектральная теория квантовых графов с конечным или бесконечным числом рёбер, исследуемых как физическими, так и математическими методами. (см. монографии Г. Берколайко и П.А. Кучмента[21] [22], О. Поста[23], а также статьи Н.И. Герасименко и Б.С. Павлова[24], П. Экснера, А.С. Костенко, М.М. Маламуда, Х. Найдхардта[25], К.В. Панкрашкина[26]).

Наряду со спектральной теорией большой интерес вызывает и теория расширений симметрических операторов. Пусть A — полуограниченный симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве. Хорошо известно, что оператор A допускает самосопряжённые расширения с сохранением нижней границы. Согласно классическому результату М.Г. Крейна, во множестве $\mathrm{Ext}_A(0,\infty)$ всех неотрицательных самосопряжённых расширений оператора A существуют два «экстремальных» расширения $\widehat{A}_F$ и $\widehat{A}_K$. Расширение $\widehat{A}_F$ называется фридрихсовым (или жёстким), а расширение $\widehat{A}_K$ — крейновским (или мягким). Исследованию указанных расширений посвящены статьи В.А. Деркача и М.М. Маламуда[14], Х. Кальфа и У. Эверитта[27], Дж. Эк-

Шкаликов // Труды московского математического общества. — 2003. — Т. 64. — С. 159 – 212.

[18]Бройтигам И.Н. Об индексе дефекта некоторых векторных дифференциальных операторов второго порядка / И.Н. Бройтигам, К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Уфимск. матем. журн. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 18 – 28.

[19]Бройтигам И.Н. О дефектных числах операторов, порожденных якобиевыми матрицами с операторными элементами / И.Н. Бройтигам, К.А. Мирзоев // Алгебра и анализ. — 2018. — Т. 30, вып. 4. — С. 1 – 26.

[20]Мирзоев К.А. Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля / К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, вып. 2. — С. 262 – 277.

[21]Berkolaiko, G. Quantum graphs and their applications / G. Berkolaiko, R. Carlson, S. Fulling, P. Kuchment (editors). — Contemp. Math. — Vol. 415. — AMS, Providence, R.I., 2006. — 307 p.

[22]Berkolaiko, G. Introduction to quantum graphs / G. Berkolaiko, P. Kuchment. — Math. surveys and monograhs. — Vol. 186. — AMS, Providence, R.I., 2013. — 270 p.

[23]Post, O. Spectral analysis on graph-like spaces / O. Post. — In Lecture Notes in Mathematics. — Berlin: Springer Verlag, 2012. — 431 p.

[24]Герасименко, Н.И. Задача рассеяния на некомпактных графах / Н.И. Герасименко, Б.С. Павлов // ТМФ. – 1988. — Т. 74, № 3. — С. 345 – 359.

[25]Exner, P. Spectral theory of infinite quantum graphs / P. Exner, A.S. Kostenko, M.M. Malamud, H. Neidhardt // Ann. Henri Poincaré. — 2018. — Vol. 19, № 11. — P. 3457 – 3510.

[26]Pankrashkin, K. Unitary dimension reduction for a class of self-adjoint extensions with applications to graph-like structures / K. Pankrashkin // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 396. — P. 640 – 655.

[27]Everitt, W.N. The Bessel differential equation and the Hankel transform / W.N. Everitt, H. Kalf // J. Comput. and App. Math. — 2007. — Vol. 208, № 1. — P. 3 – 19.

хардта, Ф. Гестези и др.[28], А.Ю. Ананьевой и В.С. Будыки[29], А.А. Лунёва[30] и других авторов.

В диссертационной работе изучаются расширения операторов Штурма-Лиувилля и Шрёдингера с суммируемыми, а также сингулярными потенциалами, исследуются их непрерывные и дискретные спектры. Также для простейшего минимального дифференциального оператора чётного порядка на конечном интервале описываются его крейновское расширение в терминах граничных условий, а также расширения с конечным числом отрицательных квадратов.

Цель работы. *Цели* данной диссертационной работы:

1. Изучение абсолютно непрерывного и точечного спектров, а также доказательство отсутствия сингулярного непрерывного спектра у оператора Штурма-Лиувилля с суммируемым матричным потенциалом на полуоси.

2. Изучение абсолютно непрерывного и точечного спектров, а также доказательство отсутствия сингулярного непрерывного спектра у оператора Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом на конечном некомпактном графе. Изучение положительного спектра матричного гамильтониана с конечным числом точек дельта-взаимодействий, в частности, на оси.

3. Нахождение оценки типа Баргмана для конечного некомпактного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом.

4. Изучение спектральных свойств конечного некомпактного звёздного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом (отсутствие сингулярного непрерывного спектра, оценки отрицательного спектра, вычисление матрицы рассеяния).

5. Доказательство абсолютной непрерывности положительной части оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным матричным потенциалом на полуоси. В частности, это доказано для оператора Шрёдингера с матричными дельта-взаимодействиями на оси.

6. Описание крейновского расширения простейшего минимального дифференциального оператора чётного порядка на конечном промежутке в терминах граничных условий.

---

[28] Eckhardt, J. Weyl-Titchmarsh theory for Sturm-Liouville operators with distributional potentials / J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl // Opuscula Math. — 2013. — Vol. 33, № 3. — P. 467 – 563.

[29] Ananieva, A.Yu. To the spectral theory of the Bessel operator on finite interval and half-line / A.Yu. Ananieva, V.S. Budyika // J. Math. Scien. — 2015. — Vol. 211, № 5. — P. 624 – 645.

[30] Lunyov, A. Spectral functions of the simplest even order ordinary differential operator / A. Lunyov // Methods Funct. Anal. Topol. — 2013. — Vol. 19, № 4. — P. 319 – 326.

Объектом исследования являются дифференциальные операторы.

Предметом исследования является спектральный анализ граничных задач для матричного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами.

Методы исследования. В работе используются методы вещественного и функционального анализа, метод граничных троек и соответствующих функций Вейля, методы и результаты спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве.

Научная новизна полученных результатов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы специалистами, работающими в областях спектральной теории дифференциальных операторов и теории расширений симметрических операторов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Доказательство лебеговости неотрицательного спектра оператора Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом на положительной полуоси.

2. Описание абсолютно непрерывного и точечного спектров, доказательство отсутствия сингулярного непрерывного спектра оператора Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом на конечном некомпактном графе. Изучение положительного спектра матричного гамильтониана с конечным и бесконечным числом точек дельта-взаимодействий, в частности, на оси.

3. Оценка типа Баргмана для конечного некомпактного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом.

4. Результаты спектрального анализа конечного некомпактного звёздного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом (описание отрицательного спектра, вычисление матрицы рассеяния и детерминанта возмущения).

5. Доказательство лебеговости неотрицательного спектра оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным матричным потенциалом на полуоси. В частности, это доказано для оператора Шрёдингера с матричными дельта-взаимодействиями на оси.

6. Описание крейновского расширения простейшего минимального дифференциального оператора чётного порядка на конечном промежутке в терминах граничных условий, его связь с тёплицевыми матрицами.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертационной работы были представлены на следующих конференциях: международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2019" (Москва, 2019), международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IX" (Ростов-на-Дону, 2019), международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения X" (Ростов-на-Дону, 2020 — в онлайн-режиме), международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2021" (Москва, 2021, на семинаре профессора А.А. Шкаликова — в онлайн-режиме), международная научная конференция "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVI. Теория операторов и дифференциальные уравнения" (Владикавказ, 2021 — в онлайн-режиме).

Также результаты диссертационной работы докладывались на научном семинаре по спектральной теории самосопряжённых операторов в Донецком национальном университете (руководитель — М.М. Маламуд) в 2014 – 2022 годах, на научном семинаре по спектральной теории в Российском университете дружбы народов в 2019 году, на научном семинаре "Spectral analysis of self-adjoint operators" в Российском университете дружбы народов в 2021 – 2023 годах (в онлайн-режиме), на объединённом научном семинаре по анализу и дифференциальным уравнениям Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (руководитель — профессор А.В. Абанин) в 2023 году.

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях в научных журналах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] из списка литературы, и в 5 тезисах международных конференций.

5 научных статей [2, 3, 4, 6, 7] опубликованы в журналах, которые входят в международную наукометрическую базу данных Scopus.

2 научные статьи [1, 5] опубликованы в журнале, рекомендованном ВАК ДНР.

Работы [2, 3, 4, 6, 7] опубликованы в соавторстве.

Из работ [2] и [3] в диссертационную работу включены результаты, полученные лично автором диссертации. Л.Л. Оридороге принадлежит доказательство Предложения 2 из работы [2] и Теоремы 3.2 из работы [3] в частном

случае $n = 2$, $a = 0$, $b = 1$.

В совместных работах [4], [6] и [7] научному руководителю М.М. Маламуду принадлежит постановка задач, указание методов исследования, а также общее руководство; реализация всех результатов и формулировки вспомогательных утверждений принадлежат автору. Х. Найдхардту принадлежит результат о матрице рассеяния для двойного звёздного квантового графа, который в диссертационную работу не вошёл.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения, перечня условных сокращений, списка цитированной литературы и двух приложений.

Общий объём работы составляет 157 страниц, библиография — 112 источников.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1 состоит из шести параграфов. В параграфе 1.1 введены понятия линейного отношения, граничной тройки, гамма-поля, функции Вейля.

В параграфе 1.2 характеризуется спектр расширения A_0 в терминах предельного поведения функции Вейля вблизи вещественной оси.

В параграфе 1.3 рассматривается функция кратности $N_{A_0^{ac}}(\cdot)$ и её связь с функцией Вейля.

Параграф 1.4 содержит необходимые факты о связи матрицы рассеяния с функцией Вейля и состоит из двух разделов. В разделе 1.4.1 вводится понятие прямого интеграла и спектрального представления, а в разделе 1.4.2 приведена формула, выражающая зависимость матрицы рассеяния системы $\{A_\Theta, A_0\}$ с соответствующей функцией Вейля.

Параграф 1.5 содержит необходимые факты о соболевских пространствах с отрицательными показателями.

В параграфе 1.6 введены понятия крейновского и фридрихсова расширений и раскрывается их связь с функцией Вейля.

Основным объектом **Главы 2**, состоящей из двух параграфов, является дифференциальное выражение Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом:

$$\mathcal{L}_Q := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q, \qquad Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}). \tag{2.0.1}$$

В параграфе 2.1 получена асимптотика решений $S(x, z)$ и $C(x, z)$, а также доказаны специальные тождества. (см. Леммы 2.1.1 – 2.1.4).

Основными результатами параграфа 2.2 являются следующие Теорема 2.2.1 и Следствие 2.2.1.

Теорема 2.2.1 *Пусть* $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$. *Пусть также* L^D — *реализация Дирихле выражения* $\mathcal{L}_Q$. *Тогда:*

(i) *Неотрицательная часть оператора* L^D *является чисто абсолютно непрерывной со спектром, заполняющим полуось* $[0,\infty)$ *и имеющим постоянную кратность* m. *В частности,* $L^D_{ac} = E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ *и* $N_{L^D_{ac}}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\sigma_{ac}(L^D) = [0,\infty)$, $\sigma_{sc}(L^D) = \sigma_{pp}(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$;

(ii) *Оператор* L^D *является полуограниченным снизу, и его отрицательная часть либо конечномерна, либо компактна.*

Следствие 2.2.1 *Пусть* $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$. *Пусть также* $\widetilde{A} = \widetilde{A^*}$ — *произвольное самосопряжённое расширение минимального оператора* A, *ассоциированного с выражением* (2.0.1). *Тогда операторы* $E_{\widetilde{A}}(\mathbb{R}_+)\widetilde{A}$ *и* $E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ *унитарно эквивалентны и, следовательно,* $\widetilde{A}^{ac} = E_{\widetilde{A}}(\mathbb{R}_+)\widetilde{A}$, *а также* $N_{\widetilde{A}^{ac}}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Кроме того,* $\sigma_{ac}(\widetilde{A}) = [0,\infty)$ *и* $\sigma_{sc}(\widetilde{A}) = \sigma_{pp}(\widetilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Также оператор $\widetilde{A}$ *является полуограниченным снизу и его отрицательная часть либо конечномерна, либо компактна.*

Полученный результат обобщает классический результат Титчмарша на случай оператора Шрёдингера с матричнозначным суммируемым потенциалом и совпадает с указанным результатом в скалярном случае ($m = 1$). Подчеркнём, что главным ингредиентом наших результатов является чистая абсолютная непрерывность положительной части *произвольной реализации* выражения (2.0.1) (произвольного расширения минимального оператора, ассоциированного с выражением $\mathcal{L}_Q$).

В **Главе 3** обобщаются результаты **Главы 2** на случай квантовых графов. Именно, рассматриваются некомпактные связные графы $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ с конечным числом рёбер $\mathcal{E}$ и вершин $\mathcal{V}$, предполагая, что по крайней мере одно ребро имеет бесконечную длину. Также мы предполагаем, что граф $\mathcal{G}$ не имеет «петель» и кратных рёбер, т.е. ни для какого ребра начало и конец не совпадают, и нет различных рёбер, соединяющих одни и те же две вершины; это всегда может быть достигнуто с помощью введения дополнительных вершин, если необходимо. Основным объектом **Главы 3** является гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$, ассоциированный в $L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$ с матричным выра-

жением Шрёдингера $\mathcal{A} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q$ с суммируемым матричным потенциалом $Q \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m\times m})$ и граничными условиями дельта-взаимодействия во всех вершинах $v \in \mathcal{V}$:

$$\begin{cases} f \quad \text{непрерывна в} \quad v, \\ \sum_{e\in\mathcal{E}_v} f'_e(v) = \alpha(v) f(v), \end{cases} \qquad v \in \mathcal{V}, \tag{3.3.1}$$

где $\alpha : \mathcal{V} \to \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot)^*$ — матричная функция. При $\alpha = 0$ условие (3.3.1) — хорошо известное условие Кирхгофа, и соответствующий гамильтониан мы будем обозначать $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}} := \mathbf{H}_{0,Q}$. Чтобы трактовать гамильтониан $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ в рамках теории расширений, мы вводим минимальный оператор $A_{\min} = A = \bigoplus_{e\in\mathcal{E}} A_e$, ассоциированный с выражением $\mathcal{A}$ на графе $\mathcal{G}$, и являющийся прямой суммой минимальных операторов A_e на каждом ребре $e \in \mathcal{E}$.

Глава 3 состоит из пяти параграфов. В параграфе 3.1 описано построение квантового графа. В параграфе 3.2 доказывается первый главный результат главы — Теорема 3.2.1.

Теорема 3.2.1 *Пусть граф $\mathcal{G}$ состоит из $p_1 > 0$ бесконечных рёбер и $p_2 \geq 0$ конечных рёбер, пусть $Q(\cdot) \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m\times m})$. Тогда для произвольной самосопряжённой реализации $\widetilde{A}$ выражения $\mathcal{A}$ (расширения минимального оператора A, порождённого выражением $\mathcal{A}$ на графе $\mathcal{G}$) выполняются следующие утверждения:*

(i) *Сингулярный непрерывный спектр $\sigma_{sc}(\widetilde{A})$ является пустым, т.е. $\sigma_{sc}(\widetilde{A}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$;*

(ii) *Абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(\widetilde{A})$ заполняет полуось $\mathbb{R}_+$, $\sigma_{ac}(\widetilde{A}) = [0, \infty)$, и имеет постоянную кратность mp_1.*

В частности, гамильтонианы $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ не имеют sc-спектра.

В частном случае при $Q = 0$ Теорема 3.2.1 была доказана Б.-С. Онгом с помощью принципа предельного поглощения.

Отметим, что предположение $p_1 > 0$ является существенным, поскольку в противном случае спектр квантового графа является чисто дискретным.

В параграфе 3.3 мы получаем условия, гарантирующие чистую абсолютную непрерывность положительной части гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$, т.е. отсутствие вложенных положительных собственных значений. В частности, это справедливо для операторов Шрёдингера с дельта-взаимодействиями на прямой $\mathbb{R}$ (см. раздел 3.3.1).

Однако, в условиях Теоремы 3.2.1 не исключаются вложенные положительные собственные значения, лежащие на $\sigma_{ac}(\widetilde{A}) = [0, \infty)$ (см. Следствие 3.3.3 (iv)).

Параграф 3.4 посвящён нахождению оценки для числа отрицательных квадратов оператора $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ (оценка типа Баргмана). В разделе 3.4.1 приводятся и доказываются необходимые факты из теории квадратичных форм. В разделе 3.4.2 формулируется и доказывается абстрактная версия принципа Бирмана-Швингера, а затем доказывается классическая оценка типа Баргмана. Наконец, в разделе 3.4.3 мы доказываем следующую оценку типа Баргмана для гамильтониана $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$, предполагая, что $xQ \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m\times m})$ (см. Теорему 3.4.1):

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \sum_{e\in\mathcal{E}} \left[\int_e x_e \cdot \operatorname{tr}(Q_{e,-}(x))\, dx \right] + m|\mathcal{V}|. \tag{3.4.17}$$

Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа $a \in \mathbb{R}$, и $Q_{e,-}(\cdot)$ обозначает «отрицательную часть» потенциальной матрицы $Q_e(\cdot)$ на ребре e.

Мы также дополняем эту формулу, показывая, что для чисел отрицательных квадратов гамильтонианов $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ и $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}$ выполняется неравенство:

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \kappa_-(\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}) \ + \ \sum_{v\in\mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v)). \tag{3.4.23}$$

В частности, если реализация Кирхгофа $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}}$ оператора $\mathcal{A}$ неотрицательна, $\mathbf{H}_{\mathrm{kir}} \geq 0$, то $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \sum_{v\in\mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v))$. Отметим, что доказательство оценок (3.4.17) и (3.4.23) основывается на формуле для квадратичной формы, ассоциированной с гамильтонианом $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ (см. Предложение 3.4.1).

В параграфе 3.5 мы рассматриваем только квантовые *звёздные графы* с конечным числом рёбер. Как и ранее, предполагается, что звёздный граф состоит из $p_1 > 0$ бесконечных рёбер и $p_2 \geq 0$ конечных рёбер. В разделе 3.5.1 вводятся граничные тройки и соответствующие функции Вейля для квантовых звёздных графов. В разделе 3.5.2, предполагая, что *минимальный оператор A является неотрицательным* и применяя аппарат функций Вейля, мы обосновываем равенство $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(T)$, где T — некоторая квадратная матрица порядка $m(p_2+1)$ (см. Теорему 3.5.1), уточняя и дополняя оценки (3.4.17) и (3.4.23). Отсюда следует, что $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq (p_2+1)m$. Более того, дополнительно предполагая, что звёздный граф $\mathcal{G}$ не имеет конечных рёбер

$(p_2 = 0)$, мы показываем справедливость оценки

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_- \left(\alpha(0) - \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) \right) \leq m. \tag{3.5.15}$$

В частности, $\mathbf{H}_{\alpha,Q} \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha(0) \geq \sum_{e\in\mathcal{E}} M_e(0)$, где $M_e(0)$ — предельное значение в нуле функции Вейля, соответствующей оператору Дирихле в $L^2(e;\mathbb{C}^m)$ для каждого *бесконечного ребра* $e \in \mathcal{E}_\infty$. Например, мы показываем, что оценки типа Баргмана (3.4.17) и (3.4.23) не являются точными. Помимо этого, предполагая, что потенциальная матрица является нулевой, $Q = 0$, мы доказываем соотношения $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,0}) = \kappa_-(T_1) \leq \sum_{k=0}^{p_2} \kappa_-(\alpha(v_k))$.

В разделе 3.5.3 мы находим матрицу рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ для пары операторов $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D\}$, где $\mathbf{H}^D := \mathbf{H}^D_Q$ — реализация Дирихле на звёздном графе $\mathcal{G}$. Именно, мы показываем, что относительно спектрального представления $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathcal{H}_{ac})$, матрица рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ допускает следующее представление для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} &S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D; \lambda) = \\ &= I_{\mathcal{H}_{ac}} + \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} (N_0(\lambda)^*)^{-1} \left((\alpha(0) - K(\lambda))^{-1} \otimes E_{p_1} \right) \cdot N_0(\lambda)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.5.46}$$

Здесь $K(\lambda) = \sum_{j=1}^{p_1} M_j(\lambda + i0)$, и $M_j(\lambda + i0)$ — предельное значение функции Вейля $M_j(\cdot)$, соответствующей оператору Дирихле в $L^2(e_j;\mathbb{C}^m)$ для *бесконечного ребра* $e_j \in \mathcal{E}_\infty$, $E_{p_1} \in \mathbb{C}^{p_1\times p_1}$ — матрица, состоящая из p_1^2 единиц, и $N_0(\lambda)$ — матричнозначная функция, выражающаяся через потенциальную матрицу $Q(\cdot)$ (см. Теорему 3.5.2).

В разделе 3.5.4 мы находим детерминант возмущения $\widetilde{\Delta}^{\widehat{\Pi}}_{\mathbf{H}_\alpha/\mathbf{H}^D}(\zeta, z)$ пары $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D\}$ в граничной тройке $\widehat{\Pi}$.

Глава 4 обобщает результаты глав **2** и **3** на случай сингулярных потенциалов. Основным объектом является трёхчленное дифференциальное матричное выражение Штурма-Лиувилля вида:

$$\mathcal{L}(P, Q, R)y := R^{-1}(x)\big(-(P(x)y')' + Q(x)y\big), \qquad y = (y_1, \dots, y_m)^\top. \tag{4.0.1}$$

Здесь матричные коэффициенты $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$ предполагаются локально суммируемыми, а потенциальная матрица $Q(\cdot)$ — сингулярной и принадлежащей соболевскому пространству $W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$. При этом операторы, порождённые выражением (4.0.1), рассматриваются в весовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$.

Глава 4 состоит из трёх параграфов. В параграфе 4.1, состоящем из двух разделов, рассматривается общий случай сингулярного $W^{-1,1}$-потенциала. В разделе 4.1.1 мы трактуем дифференциальное выражение (4.0.1), пользуясь регуляризацией, предложенной в работах А.М. Савчука и А.А. Шкаликова. Раздел 4.1.2 содержит первый основной результат главы — обобщение теоремы Титчмарша на случай матричных сингулярных потенциалов. Именно, мы показываем, что при условии $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ и некоторых необременительных условиях на $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$, неотрицательный спектр реализации Дирихле L^D, как и любой другой самосопряжённой реализации выражения $\mathcal{L}(P,Q,R)$, является лебеговским постоянной кратности m, её сингулярный непрерывный спектр – пуст, а отрицательная часть реализации Дирихле L^D — компактна. Полученный результат значительно усиливает все предыдущие результаты в этом направлении.

В параграфе 4.2 мы рассматриваем весьма важный подкласс операторов, порождённых выражением (4.0.1) в $L^2(\mathbb{R}_+;R;\mathbb{C}^m)$, — операторы Шрёдингера с дельта-взаимодействиями, т.е. операторы вида:

$$\mathbf{H}_{X_+,\alpha,Q} := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q(\cdot) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(\cdot - x_k), \qquad X_+ = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+. \tag{4.2.7}$$

Эти операторы являются объектами многочисленных исследований последних четырёх десятилетий. Мы показываем, что для оператора (4.2.7) условие $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ эквивалентно условиям

$$Q_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m}), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty. \tag{4.2.9}$$

Поэтому при этих условиях реализация Дирихле $\mathbf{H}^D$ выражения (4.2.7) имеет неотрицательный лебеговский спектр постоянной кратности m, а её сингулярный непрерывный спектр — пуст.

В параграфе 4.3 мы исследуем спектральные свойства минимального оператора $L_{\min} = L := L(P,Q,R)$, порождённого выражением (4.0.1) на оси $\mathbb{R}$. Именно, мы показываем, что если минимальный оператор L в пространстве $L^2(\mathbb{R};R;\mathbb{C}^m)$ самосопряжён, то при условии

$$Q(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$$

и необременительных условиях на $P(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ и $R(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ неотрицательный спектр оператора L является лебеговским постоянной кратности $2m$. Подчеркнём обнаруженный здесь любопытный эффект: абсолютная непрерывность спектра «положительной части» оператора $L = L^*$ в $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$ зависит лишь от поведения матричных коэффициентов $P(\cdot)$, $Q(\cdot)$ и $R(\cdot)$ на одной из полуосей $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$ и не зависит от их поведения на дополнительной полуоси.

В частности, самосопряжённый в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ оператор Шрёдингера $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ вида:

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_{X,\alpha,Q} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q(\cdot) := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\cdot - x_k), \\ X = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R},\end{gathered} \tag{4.3.4}$$

имеет лебеговский спектр на $\overline{\mathbb{R}}_+$ постоянной кратности $2m$ при следующих условиях на «положительную (отрицательную) часть» матрицы $Q(\cdot)$:

$$\begin{gathered}Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty \\ \left(Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_-; \mathbb{C}^{m\times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty\right).\end{gathered} \tag{4.3.6}$$

Эти условия совпадают с условиями (4.2.9) для $X_+ := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ — «положительной части» множества X. И здесь результат зависит лишь от поведения потенциальной матрицы $Q(\cdot)$ на одной из полуосей $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$ и не зависит от её поведения на дополнительной полуоси.

Весьма частный случай этого результата получен ранее другим методом в работе К. Шубиной и Г. Штольца[7]. Именно, считая в (4.3.4) $X = \mathbb{Z}$ и $Q_1(\cdot) = 0$, они доказали, что при условии $\sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty$ положительная часть спектра скалярного ($m = 1$) гамильтониана $\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}$ абсолютно непрерывна и заполняет положительную полуось $\mathbb{R}_+$.

Мы показываем, что соответствующая (неортогональная) спектральная мера из интегрального представления функции Вейля исследуемого оператора абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Этот факт вместе с известным результатом о спектральной эквивалентности ортогональной и неортогональной спектральных мер самосопряжённого оператора позволяет получить упомянутые результаты об абсолютной непрерывности спектра самосопряжённых реализаций выражения $\mathcal{L}(P, Q, R)$.

Глава 5 посвящена крейновскому расширению простейшего дифференциального оператора чётного порядка и состоит из одного параграфа. В параграфе 5.1 мы исследуем минимальный оператор $A := A_{\min}$, ассоциированный с выражением

$$\mathcal{A} := (-1)^n \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}, \qquad \operatorname{dom} A = W_0^{2n,2}[a,b], \qquad n \in \mathbb{N},$$

на отрезке $[a,b]$, и описываем его крейновское расширение в терминах граничных условий. Используя технику граничных троек и соответствующих функций Вейля, мы описываем все неотрицательные расширения оператора $A_{\min}$ и расширения с конечным отрицательным спектром.

В **Приложении А** мы доказываем Теорему 4.3.1, а в **Приложении Б** приводим примеры описания крейновского расширения на отрезке $[0,1]$ для простейших дифференциальных операторов второго, четвёртого, шестого и восьмого порядков.

В **заключении** диссертационной работы приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Описаны абсолютно непрерывный и точечный спектры, доказано отсутствие сингулярного непрерывного спектра у оператора Шрёдингера с суммируемым потенциалом на положительной полуоси.

2. Описаны абсолютно непрерывный и точечный спектры, доказано отсутствие сингулярного непрерывного спектра у оператора Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом на конечном некомпактном графе. Дано описание положительного спектра матричного гамильтониана с конечным числом точек дельта-взаимодействий, в частности, на оси.

3. Найдена оценка типа Баргмана для конечного некомпактного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом.

4. Для конечного некомпактного звёздного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом получены оценки отрицательного спектра, найдено явное выражение для матрицы рассеяния и детерминанта возмущения.

5. Доказана лебеговость неотрицательного спектра у оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на полуоси и у оператора Шрёдингера со счётным числом точек дельта-взаимодействий на оси.

6. Получено описание крейновского расширения простейшего минимального дифференциального оператора чётного порядка на конечном промежутке в терминах граничных условий.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Granovskyi, Ya.I. To the spectral theory of vector-valued Sturm-Liouville operators with summable potentials / Ya.I. Granovskyi // Труды ИПММ. — 2017. — Vol. 31. — P. 50 – 65.

2. Грановский, Я.И. Крейновское расширение дифференциального оператора чётного порядка / Я.И. Грановский, Л.Л. Оридорога // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 4. — С. 556 – 560.

3. Granovskyi, Ya.I. Krein-von Neumann extension of an even order differential operator on a finite interval / Ya.I. Granovskyi, L.L. Oridoroga // Opuscula Math. — 2018. — Vol. 38, № 5. — P. 681 – 698.

4. Грановский, Я.И. Квантовые графы с суммируемыми матричными потенциалами / Я.И. Грановский, М.М. Маламуд, Х. Найдхардт // ДАН. — 2019. — Т. 488, № 1. — С. 5 – 10.

5. Granovskyi, Ya.I. To the spectral theory of quantum graphs with summable matrix potentials / Ya.I. Granovskyi // Труды ИПММ. — 2020. — Vol. 34. — P. 35 – 50.

6. Granovskyi, Ya. Non-compact quantum graphs with summable matrix potentials / Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt // Ann. Henri Poincaré. — 2021. — Vol. 22. — P. 1 – 47.

7. Грановский, Я.И. Операторы Штурма-Лиувилля с $W^{-1,1}$-матричными потенциалами / Я.И. Грановский, М.М. Маламуд // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2022. — Т. 516. — С. 20 – 39.

8. Грановский Я.И. Крейновское расширение дифференциального оператора чётного порядка / Я.И. Грановский // Международная научная конференция студентов и молодых учёных «Ломоносов». Материалы конференции [Электронный ресурс]. — Москва: МАКС Пресс. — 2019.

9. Грановский Я.И. К спектральной теории звёздных графов / Я.И. Грановский // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IX». Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону. — 2019. — С. 33 – 34.

10. Грановский Я.И. К спектральной теории конечных некомпактных графов с суммируемыми матричными потенциалами / Я.И. Грановский // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения X». Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону. — 2020. — С. 33.

11. Грановский Я.И. Квантовые графы с суммируемыми матричными потенциалами / Я.И. Грановский // Международная научная конференция студентов и молодых учёных «Ломоносов». Материалы конференции [Электронный ресурс]. — Москва: МАКС Пресс. — 2021.

12. Грановский Я.И. Оценка Баргмана для некомпактных конечных квантовых графов с суммируемыми потенциалами / Я.И. Грановский // Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVI. Теория операторов и дифференциальные уравнения». Тезисы докладов. — Владикавказ. — 2021. — С. 29 – 30.