

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Грановский Ярослав Игоревич

**К спектральной теории матричных операторов Штурма-Лиувилля
с сингулярными коэффициентами**

Специальность 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный
анализ

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Маламуд Марк Мордкович

Донецк – 2023

Оглавление

Введение	4
ГЛАВА 1 Предварительные сведения	28
1.1 Линейные отношения, граничные тройки и функция Вейля . . .	28
1.2 Функция Вейля и спектр	34
1.3 Функция Вейля и спектральная кратность	36
1.4 Функция Вейля и матрица рассеяния	37
1.4.1 Прямой интеграл и спектральное представление	37
1.4.2 Матрица рассеяния	39
1.5 Соболевские пространства с отрицательными показателями . .	41
1.6 Крейновское расширение	42
ГЛАВА 2 Операторы Штурма-Лиувилля с суммируемыми матричными потенциалами	44
2.1 Асимптотические представления решений и специальные тождества	45
2.2 Исследование функции Вейля	52
ГЛАВА 3 Квантовые графы с суммируемыми матричными потенциалами	63
3.1 Построение квантового графа	63
3.2 Отсутствие сингулярного непрерывного спектра	65
3.3 Гамильтониан с дельта-взаимодействиями	72
3.3.1 Гамильтонианы с дельта-взаимодействиями на прямой .	82
3.4 Оценка типа Баргмана	86
3.4.1 Квадратичная форма	86
3.4.2 Классическая оценка типа Баргмана	90
3.4.3 Оценка типа Баргмана для графов	92

3.5	Звёздные графы	95
3.5.1	Граничные тройки и функции Вейля	95
3.5.2	Отрицательный спектр	96
3.5.3	Матрица рассеяния	103
3.5.4	Детерминант возмущения	113
ГЛАВА 4 Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными матричными потенциалами		115
4.1	Общий случай сингулярного $W^{-1,1}$ -потенциала	115
4.1.1	Регуляризация	115
4.1.2	Функции Вейля самосопряжённых реализаций	117
4.2	Операторы Шрёдингера с дельта-взаимодействиями на полуоси	122
4.3	Операторы Шрёдингера с дельта-взаимодействиями на оси . . .	125
ГЛАВА 5 Крейновское расширение дифференциального оператора чётного порядка		128
5.1	Основной результат	128
Заключение		135
ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ		136
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ		137
Приложение А: Доказательство Теоремы 4.3.1		150
Приложение Б: Примеры крейновского расширения для простейших дифференциальных операторов второго, четвёртого, шестого и восьмого порядка		154

Введение

Актуальность темы исследования

Среди разделов теории дифференциальных операторов наибольший интерес представляют спектральная теория и теория расширений. Дифференциальные операторы с точечными взаимодействиями возникают в различных физических приложениях в качестве точно решаемых моделей, которые описывают сложные физические явления (см. [35, 37] и цитируемую там литературу). Важными представителями таких операторов являются дифференциальные операторы с коэффициентами, имеющими сингулярный носитель на дискретном множестве изолированных точек. Наиболее известным примером является оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$, ассоциированный с формальным дифференциальным выражением

$$\ell_{X,\alpha,q} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + \sum_{x_n \in X} \alpha_n \delta(x - x_n). \quad (0.0.1)$$

Данный оператор описывает дельта-взаимодействие на дискретном множестве $X = \{x_n\}_{n \in I} \subset \mathbb{R}$, а коэффициенты α_n называются силами взаимодействия в точке $x = x_n$. Исследование этой модели было начато Р. Кронигом и У. Пенни [94], а также А. Гроссманом и другими [83] (см. также [73]). В частности, модель Кронига-Пенни ($\ell_{X,\alpha,q}$, где $X = \mathbb{Z}$, $\alpha_n \equiv \alpha$ и $q \equiv 0$) является простой моделью нерелятивистского движения электрона в фиксированной кристаллической решётке.

Существует несколько возможных способов ассоциировать оператор с выражением $\ell_{X,\alpha,q}$. В дальнейшем мы будем рассматривать гамильтониан (0.0.1) в рамках теории расширений симметрических операторов.

Минимальный симметрический оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$ естественно ассоциируется с выражением (0.0.1) в $L^2(\mathbb{R}_+)$. А именно, определим оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}^0$ следующим дифференциальным выражением:

$$\ell_q := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty), \quad (0.0.2)$$

на области

$$\text{dom } \mathbf{H}_{X,\alpha,q}^0 = \left\{ \begin{array}{l} f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \\ n \in \mathbb{Z}_+ \end{array} : \begin{array}{l} f(0) = 0, f(x_n+) = f(x_n-) \\ f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n) \end{array} \right\}. \quad (0.0.3)$$

Ясно, что оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}^0$ является симметрическим и, следовательно, допускает замыкание $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$. В общем случае, оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$ является симметрическим, но отсюда автоматически не вытекает его самосопряжённость даже в случае $q \equiv 0$. Отметим, что гамильтониан $\mathbf{H}_q := \mathbf{H}_{X,0,q}$ с нулевыми коэффициентами $\alpha = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} = 0$ определяется как реализация Дирихле выражения (0.0.2) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$. Положим:

$$d_* := \inf_n d_n \quad \text{и} \quad d^* := \sup_n d_n, \quad d_n := x_n - x_{n-1}, \quad x_0 := 0.$$

Множество работ посвящено спектральному анализу операторов $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$, см. монографии [35, 37] и обзорные статьи [53, 61, 92]. Спектральный анализ оператора подразумевает описание его абсолютно непрерывного и сингулярного спектра. Далее мы проведём спектральный анализ матричных гамильтонианов $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$. Для скалярного случая известно несколько результатов, описанных в литературе. Приведём их.

Теорема 0.0.1 ([36, 91]). *Пусть $q(\cdot) = \overline{q(\cdot)} \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, и пусть $d^* < \infty$. Тогда равенство $\sigma_{ac}(\mathbf{H}_{X,\alpha,q}) = \sigma_{ac}(\mathbf{H}_q)$ влечёт выполнение следующего условия:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{d_{n+1}} < \infty. \quad (0.0.4)$$

Если дополнительно $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то $\sigma_{ac}(\mathbf{H}_{X,\alpha,q}) = [0, \infty)$.

Для $d_* > 0$ данный результат был установлен ранее в работе В.А. Михайлеца [23]. Условие (0.0.4) принимает вид: $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. Доказательство в статье [36] базируется на применении граничных троек к расширениям. Именно, было показано, что $(\mathbf{H}_{X,\alpha,q} - i)^{-1} - (\mathbf{H}_{X,0,q} - i)^{-1}$ является оператором следа. Тогда результат следует из теоремы Бирмана-Крейна, обобщающей классический результат Като-Розенблюма (см. [42, Теорема 16.1], [2, раздел 99]).

Однако Теорема 0.0.1 не гарантирует отсутствие сингулярной части $\sigma_s(\mathbf{H}_{X,\alpha,q})$ спектра $\sigma(\mathbf{H}_{X,\alpha,q})$. Хорошо известно, что эта задача требует особого исследования, и результат нельзя получить с помощью теоремы Като-Розенблюма. Более того, насколько нам известно, чистая абсолютная непрерывность спектра оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha,q}$ была доказана только в нескольких случаях, например, в работе К. Шубиной (С. Shubin Christ) и Г. Штольца [109].

Теорема 0.0.2 ([109]). *Пусть $X = \mathbb{Z}$, т.е. $X = \{n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- (i) *Если $q(x) = 0$ и $\sum_{n=-\infty}^0 |\alpha_n| < \infty$, или $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$, то положительная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}}(\mathbb{R}_+) \mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}$ оператора $\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}$ является чисто абсолютно непрерывной, т.е.*

$$\sigma(\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}) \cap [0, +\infty) = \sigma_{ac}(\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}) = [0, +\infty) \quad \text{и} \quad \sigma_s(\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset.$$

- (ii) *Если $q(x) = x$ и $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{|\alpha_n|}{\sqrt{|n|}} < \infty$, то*

$$\sigma(\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,x}) = \sigma_{ac}(\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,x}) = \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \sigma_s(\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,x}) = \emptyset.$$

Для доказательства приведенного результата авторы обобщили метод подчинённости, созданный и развитый Д. Гильбертом и Д. Пирсоном [76, 77] (см. также [110]).

Также упомянем статьи П. Экснера (Р. Exner) и М. Фрааса [66, 67], посвящённые исследованию ac -спектра операторов Шрёдингера в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, с сингулярным взаимодействием, имеющим носитель, состоящий из бесконечного семейства концентрических оболочек,

$$\mathbf{H}_{r,\alpha} = -\Delta + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(|x| - r_k), \quad \alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}. \quad (0.0.5)$$

Опираясь на работу Р. Хемпеля, А. Хинца и Х. Кальфа [87], П. Экснер и М. Фраас в [66, 67] получили полное описание спектра гамильтониана $\mathbf{H}_{r,\alpha}$ с радиально периодическими взаимодействиями: $\alpha_k \equiv \alpha$ и $r_k = r_0 + Tk$.

В последнее время огромный интерес представляют квантовые графы, исследуемые как физическими, так и математическими методами. Спектральная теория квантовых графов с конечным или бесконечным числом рёбер активно развивается в последние 2-3 десятилетия (см. монографии [48, 49, 108], работы [9, 10, 60, 68, 107] и цитируемую в них литературу). В частности, исследуются операторы Шрёдингера и Лапласа на решётках, углеродные наноструктуры и периодические метрические графы (см., например, [89, 90, 95, 96]).

Согласно классическому результату Э.Ч. Титчмарша (см. монографию [30, гл. 5]), реализация Дирихле оператора Штурма-Лиувилля $-d^2/dx^2 + q$ с суммируемым потенциалом $q(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ имеет неотрицательный лебеговский спектр постоянной кратности (см. Определение 4.1.1). На матричный случай этот результат был распространён разными методами в работах [80, 81] и [111] (см. также монографию [33]). Отметим, что в [81] рассматривался также случай матричного оператора Шрёдингера с конечным числом точек дельта-взаимодействий, а в [80] результаты статьи [81] обобщены на случай конечных некомпактных квантовых графов.

Наряду со спектральной теорией большой интерес вызывает и теория расширений симметрических операторов. Пусть A — полуограниченный симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Хорошо известно, что оператор A имеет самосопряжённые расширения с сохранением нижней границы (см. [2, гл. VIII], [18, I]). Согласно классическому результату М.Г. Крейна [18, I], во множестве $\text{Ext}_A(0, \infty)$ неотрицательных самосопряжённых расширений оператора A существуют два «экстремальных» расширения $\hat{A}_F$ и $\hat{A}_K$, выделяемые неравенствами:

$$\left(\hat{A}_F + x\right)^{-1} \leq \left(\tilde{A} + x\right)^{-1} \leq \left(\hat{A}_K + x\right)^{-1}, \quad x \in (0, \infty), \quad \tilde{A} \in \text{Ext}_A(0, \infty). \quad (0.0.6)$$

Расширение $\hat{A}_F$ называется фридрихсовым (или жёстким), а расширение $\hat{A}_K$ — крейновским (или мягким), см. [18, I]. В случае положительно определённого

ного оператора, $A > \varepsilon I > 0$, М.Г. Крейном показано [18, I], что

$$\widehat{A}_K = A^* \upharpoonright (\operatorname{dom} A \dot{+} \ker A^*). \quad (0.0.7)$$

В случае положительно определённого оператора расширения вида (0.0.7) впервые были введены и исследованы Дж. фон Нейманом в его основополагающей работе [105]. Однако, экстремальные свойства этих расширений, описанные неравенствами (0.0.6), были открыты позже.

В случае неотрицательного оператора, $A \geq 0$, расширения $\widehat{A}_F$ и $\widehat{A}_K$ впервые были описаны в терминах абстрактных граничных условий в работе [62]. Именно, там показано, что

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} \widehat{A}_K &= \{f \in \operatorname{dom} A^* : \Gamma_1 f = M(0)\Gamma_0 f\}, \\ \operatorname{dom} \widehat{A}_F &= \{f \in \operatorname{dom} A^* : \Gamma_1 f = M(-\infty)\Gamma_0 f\}, \end{aligned} \quad (0.0.8)$$

где $M(0) = M(0-)$ — предельное значение функции Вейля в нуле (см. Определение 1.1.3 в **Главе 1**).

Описание фридрихсова расширения вне связи с соотношениями (0.0.8) известно во многих случаях. Например, М.Г. Крейном показано (см. [18, II]), что для обыкновенных дифференциальных операторов на конечном промежутке и полуоси это приводит к задаче Дирихле.

Х. Кальф в работе [88] исследовал трёхчленное дифференциальное выражение Штурма-Лиувилля общего вида

$$\tau u = \frac{1}{k} [-(pu')' + qu] \quad (0.0.9)$$

на интервале $(0, \infty)$, предполагая, что для коэффициентов выполняются следующие условия:

- (i) $k, p > 0$ п.в. на $(0, \infty)$; $k, 1/p \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$; $q \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$ является вещественнозначной.
- (ii) Существует константа $\mu \in \mathbb{R}$ и функции $g_0, g_\infty \in AC_{\text{loc}}(0, \infty)$, причём $pg'_0, pg'_\infty \in AC_{\text{loc}}(0, \infty)$, и $g_0 > 0$ вблизи нуля, $g_\infty > 0$ вблизи бесконечности, причём

$$\int_0^\infty \frac{1}{pg_0^2} = \int_0^\infty \frac{1}{pg_\infty^2} = \infty, \quad (0.0.10)$$

и

$$\begin{aligned} q &\geq \frac{(pg'_0)'}{g_0} - \mu k \quad \text{вблизи нуля,} \\ q &\geq \frac{(pg'_\infty)'}{g_\infty} - \mu k \quad \text{вблизи бесконечности.} \end{aligned} \quad (0.0.11)$$

Главным результатом работы [88] является следующее описание фридрихсова расширения $\widehat{T}_F$ минимального оператора $T_{\min}$, ассоциированного с выражением (0.0.9):

$$\text{dom } \widehat{T}_F = \left\{ u \in \text{dom } T_{\max} : \int_0^\infty pg_0^2 \left| \left(\frac{u}{g_0} \right)' \right|^2 < \infty, \int^\infty pg_\infty^2 \left| \left(\frac{u}{g_\infty} \right)' \right|^2 < \infty \right\} \quad (0.0.12)$$

(см. [88, Теорема 1] и соответствующие замечания).

Этот результат был обобщён в работе [64] на случай сингулярных дифференциальных операторов, ассоциированных на произвольных интервалах $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ с четырёхчленными дифференциальными выражениями общего вида:

$$\tau u = \frac{1}{k} \left(-(u^{[1]})' + su^{[1]} + qu \right), \quad (0.0.13)$$

где

$$u^{[1]} := p[u' + su], \quad (0.0.14)$$

и коэффициенты p, q, k, s являются вещественнозначными и измеримыми по Лебегу на (a, b) , причём $p \neq 0, k > 0$ п.в. на (a, b) , и $p^{-1}, q, k, s \in L^1_{\text{loc}}((a, b); dx)$, а коэффициент u удовлетворяет условиям:

$$u \in AC_{\text{loc}}(a, b), \quad u^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(a, b). \quad (0.0.15)$$

В частности, данные условия означают, что выражение τ содержит потенциал из пространства распределений, в том числе, это могут быть потенциалы из класса $H^{-1}_{\text{loc}}(a, b)$.

Накладывая дополнительные к условиям (0.0.10) – (0.0.11) предположения на коэффициенты, авторы описывают фридрихсово расширение оператора $T_{\min}$ в терминах условий, аналогичных условиям (0.0.12) (см. [64, Теоремы 11.17 и 11.19]).

Также в статье [64] описано крейновское расширение оператора $T_{\min}$ на конечном интервале (a, b) в частном случае, когда выражение τ является регулярным (т.е. p^{-1}, q, k и s интегрируемы вблизи a и b). Указанное описание задаётся следующим образом:

$$\operatorname{dom} \widehat{T}_K = \left\{ g \in \operatorname{dom} T_{\max} : \begin{pmatrix} g(b) \\ g^{[1]}(b) \end{pmatrix} = R_K \begin{pmatrix} g(a) \\ g^{[1]}(a) \end{pmatrix} \right\}, \quad (0.0.16)$$

где

$$R_K = \frac{1}{u_1^{[1]}(a)} \begin{pmatrix} -u_2^{[1]}(a) & 1 \\ u_1^{[1]}(a)u_2^{[1]}(b) - u_1^{[1]}(b)u_2^{[1]}(a) & u_1^{[1]}(b) \end{pmatrix}, \quad (0.0.17)$$

и $u_j(\cdot), j \in \{1, 2\}$, — положительные решения уравнения $\tau u = 0$, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{aligned} u_1(a) &= 0, & u_1(b) &= 1, \\ u_2(a) &= 1, & u_2(b) &= 0 \end{aligned} \quad (0.0.18)$$

(см. [64, Теорема 12.3]).

Несколько работ (см. [17, 64, 65, 71, 72, 88] и цитируемую в них литературу) посвящены спектральному анализу граничных задач для однопараметрического дифференциального выражения Бесселя:

$$\tau_\nu = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad \nu \in [0, 1) \setminus \{1/2\}. \quad (0.0.19)$$

Особо отметим статьи Х. Кальфа и У. Эверитта [65, 88], в которых был найден явный вид m -коэффициента Вейля-Титчмарша выражения τ_ν в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

В работах [38, 54, 65, 88] были описаны области фридрихсова расширения минимального оператора $A_{\nu, \infty}$, ассоциированного с выражением (0.0.19) в $L^2(\mathbb{R}_+)$. В статье [65] то же самое было сделано для всех самосопряжённых расширений оператора $A_{\nu, \infty}$. Наиболее полный результат был получен в [38]. А именно, было показано, что $\widehat{A}_{\nu, \infty, F}$ и $\widehat{A}_{\nu, \infty, K}$ являются сужениями максимального оператора $A_{\nu, \infty}^* = A_{\nu, \infty, \max}$ на области

$$\operatorname{dom} \widehat{A}_{\nu, \infty, F} = \left\{ f \in \operatorname{dom} A_{\nu, \infty}^* : [f, x^{\frac{1}{2}+\nu}]_0 = 0 \right\} \quad (0.0.20)$$

и

$$\text{dom } \widehat{A}_{\nu,\infty,K} = \begin{cases} \{f \in \text{dom } A_{\nu,\infty}^* : [f, x^{\frac{1}{2}-\nu}]_0 = 0\}, & \nu \in (0, 1) \\ \{f \in \text{dom } A_{0,\infty}^* : [f, x^{\frac{1}{2}}]_0 = 0\}, & \nu = 0 \end{cases} \quad (0.0.21)$$

соответственно, где

$$\text{dom } A_{\nu,\infty}^* = \begin{cases} H_0^2(\mathbb{R}_+) \dot{+} \text{span}\{x^{1/2+\nu}\xi(x), x^{1/2-\nu}\xi(x)\}, & \nu \in (0, 1) \\ H_0^2(\mathbb{R}_+) \dot{+} \text{span}\{x^{1/2}\xi(x), x^{1/2}\log(x)\xi(x)\}, & \nu = 0. \end{cases} \quad (0.0.22)$$

Здесь $[f, g]_x := f(x)\overline{g'(x)} - f'(x)\overline{g(x)}$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$, и $\xi \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$ является такой функцией, что $\xi(x) = 1$ при $x \in [0, 1]$ (см. [38, Предложение 5.7 и Замечание 5.8]).

Также были описаны фридрихсово и крейновское расширения $\widehat{A}_{\nu,b,F}$ и $\widehat{A}_{\nu,b,K}$ минимального оператора, соответствующего выражению (0.0.19) на конечном интервале $(0, b)$ (см. [38, Предложение 4.5]).

М.Г. Крейн ([18, II]) исследовал расширения минимального оператора $T_{\min}$, ассоциированного в $L^2(a, b)$ со следующим квазидифференциальным выражением:

$$Tf := f^{[2n]}. \quad (0.0.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f^{[k]}(x) &= f^{(k)}(x), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad f^{[n]}(x) = p_0(x)f^{(n)}(x), \\ f^{[n+k]}(x) &= p_k(x)f^{(n-k)}(x) - \frac{d}{dx}f^{[n+k-1]}(x), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (0.0.24)$$

В случае достаточно гладких коэффициентов $p_k, k \in \{0, 1, \dots, n\}$, выражение (0.0.23) можно представить в форме Якоби-Бертрана:

$$f^{[2n]} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_{n-k} \frac{d^k f}{dx^k} \right). \quad (0.0.25)$$

В работе [18, II] показано, что фридрихсово расширение минимального оператора $T_{\min}$ совпадает с реализацией Дирихле:

$$\text{dom } \widehat{T}_F = \{f \in \text{dom } T_{\max} : f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}. \quad (0.0.26)$$

В статье А.А. Лунёва [97] исследуются спектральные свойства оператора A , порождённого в $L^2(\mathbb{R}_+)$ дифференциальным выражением

$$l := (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}, \quad (0.0.27)$$

а также описано крейновское расширение соответствующего минимального оператора $A_{\min}$ в терминах граничных условий:

$$y^{(n)}(0) = y^{(n+1)}(0) = \dots = y^{(2n-1)}(0) = 0. \quad (0.0.28)$$

Используя аппарат граничных троек и соответствующих функций Вейля, автор нашёл явный вид характеристической матрицы и соответствующей спектральной функции для фридрихсова и крейновского расширений минимального оператора $A_{\min}$ (см. [97, Теоремы 1 и 2]).

В статье [102] показано, что если $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность плотно определённых замкнутых симметрических и неотрицательных операторов в $\mathfrak{H}_j$, а $\hat{A}_{j,F}$ и $\hat{A}_{j,K}$ — фридрихсово и крейновское расширения операторов A_j соответственно, и $A := \bigoplus_{j=1}^{\infty} A_j$, то

$$\hat{A}_F = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \hat{A}_{j,F} \quad \text{и} \quad \hat{A}_K = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \hat{A}_{j,K} \quad (0.0.29)$$

(см. [102, Следствие 3.10]).

В работе [40] доказана унитарная эквивалентность обратного крейновского расширения (на ортогональном дополнении его ядра) плотно определённого замкнутого строго положительного оператора, $S \geq \varepsilon I_{\mathcal{H}}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и оператора абстрактной задачи продольного изгиба.

Фридрихсово и крейновское расширения для эллиптических операторов на ограниченных и неограниченных областях исследованы среди прочих задач в нескольких статьях. К примеру, эти вопросы рассматривались М.Ш. Бирманом [5], Г. Грубб [84] и М.М. Маламудом [99] (эллиптические операторы на ограниченных и неограниченных областях с гладкой компактной границей), Ю. Берндтом и другими [43, 47] (эллиптические операторы на липшицевых

областях), Ф. Гестези (F. Gesztesy) и М. Митрей [74] (лапласиан на областях с негладкой границей).

В работе [39] авторами изучены спектральные свойства крейновского расширения $\hat{H}_{K,\Omega}$ возмущённого лапласиана $-\Delta + V$, определённого на $C_0^\infty(\Omega)$, где V — измеримый ограниченный и неотрицательный оператор на ограниченном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ из класса негладких областей, которые содержат все выпуклые области, в том числе, все области из класса $C^{1,r}$, $r > 1/2$.

См. также работы [16, 41, 55, 75, 85, 86] и цитируемую в них литературу.

Однако, задача явного нахождения $M(0)$ является нетривиальной даже в случае положительно определённого оператора. В некоторых случаях это значение известно — см. например, статьи [54, Теорема 1.1], [38, Предложение 4.5 (ii) и Предложение 5.7 (ii)] (оператор Бесселя), [55, Теорема 1], [97, Теорема 2] (оператор $Ay = (-1)^n y^{(2n)}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$), упомянутые выше.

Цель работы

Цели данной диссертационной работы:

1. Изучение абсолютно непрерывного, сингулярного непрерывного и точечного спектров оператора Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом на положительной полуоси.
2. Изучение абсолютно непрерывного, сингулярного непрерывного и точечного спектров оператора Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом на конечном некомпактном графе, а также изучение положительного спектра матричного гамильтониана с конечным числом точек дельта-взаимодействий, в частности, на оси.
3. Нахождение оценки типа Баргмана для конечного некомпактного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом.
4. Изучение конечного некомпактного звёздного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом (описание отрицательного спектра,

вычисление матрицы рассеяния, а также детерминанта возмущения).

5. Изучение абсолютно непрерывного, сингулярного непрерывного и точечного спектров оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным матричным потенциалом на положительной полуоси, в частности, оператора Шрёдингера с матричными дельта-взаимодействиями на полуоси и оси.
6. Описание крейновского расширения простейшего минимального дифференциального оператора чётного порядка на конечном промежутке в терминах граничных условий.

Методы исследования

В диссертации используются методы вещественного и функционального анализа, метод граничных троек и соответствующих функций Вейля, методы и результаты спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве.

Теоретическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы специалистами, работающими в областях спектральной теории дифференциальных операторов и теории расширений симметрических операторов.

Апробация диссертационной работы

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

- Научный семинар Донецкого национального университета по спектральной теории самосопряжённых операторов под руководством проф. М.М. Маламуда, Донецк (неоднократно 2014 – 2022).
- Научный семинар по спектральной теории самосопряжённых операторов под руководством проф. М.М. Маламуда, РУДН (Москва, 2019).

- Научный онлайн-семинар «Spectral analysis of self-adjoint operators» под руководством проф. М.М. Маламуда, РУДН (неоднократно 2021 – 2023).
- Объединённый научный семинар по анализу и дифференциальным уравнениям Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета под руководством проф. А.В. Абанина (Ростов-на-Дону, 2023).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях.

- XXVI международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019», Москва, 8 – 12 апреля 2019.
- IX международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IX», Ростов-на-Дону, 21 – 26 апреля 2019.
- X международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения X», Ростов-на-Дону, 24 – 25 августа 2020 (в онлайн-режиме).
- XXVIII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021», Москва, 12 – 23 апреля 2021 (в онлайн-режиме).
- Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVI. Теория операторов и дифференциальные уравнения», Республика Северная Осетия-Алания, Владикавказ, 20 – 24 сентября 2021 (в онлайн-режиме).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах, из них 8 статей в научных журналах [12, 13, 14, 78, 79, 80, 81, 82] из списка литературы, и в 5 тезисах международных конференций.

6 научных статей [12, 13, 14, 80, 81, 82] опубликованы в журналах, которые входят в международную наукометрическую базу данных Scopus.

2 научные статьи [78, 79] опубликованы в журнале, рекомендованном ВАК ДНР.

Работы [12, 13, 14, 80, 81, 82] опубликованы в соавторстве.

В работе [12] автору диссертации принадлежат Лемма 2.1, Предложение 2.2, Теорема 2.3, Следствие 2.5, Теорема 2.7, Предложение 3.1, Следствие 3.2 и Следствие 4.3. Теорема 4.1 принадлежит соавтору.

В работе [13] автору диссертации принадлежат Теорема 1, Предложение 1, Теорема 2, Предложение 2. Теорема 3 и Следствие 1 принадлежат первому соавтору. Теорема 4 принадлежит второму соавтору.

В работе [14] автору диссертации принадлежат Теорема 1 и Теорема 2. Предложение 2 принадлежит соавтору.

В работе [80] автору диссертации принадлежат Теорема 4.1, Следствие 4.5, Предложение 4.7, Теорема 6.1, Следствие 6.2, Следствие 6.3, Следствие 6.4, Следствие 6.6, Следствие 6.8, Следствие 6.10, Следствие 6.12, Следствие 6.16, Следствие 6.17, Предложение 6.20. Первому соавтору принадлежат Предложение 5.1, Предложение 5.2, Предложение 5.3, Теорема 5.4, Следствие 5.5, Следствие 5.6. Второму соавтору принадлежит Теорема 6.14.

В работе [81] автору диссертации принадлежат Лемма 3.1, Лемма 3.2, Лемма 3.3, Лемма 3.4, Лемма 3.5, Предложение 3.6, Лемма 3.7, Теорема 3.8, Следствие 3.9. Из статьи [81] в диссертационную работу включены только те результаты, которые получены лично автором диссертации.

В работе [82] автору диссертации принадлежат Теорема 3.1, Теорема 3.4, Следствие 3.5. Теорема 3.2 и Предложение 3.3 принадлежат соавтору.

Постановка задач и указание методов исследования принадлежат М.М. Маламуду.

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обусловлена строгостью приведенных доказательств, применением общеприня-

тых методов исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, выступлениями на семинарах и конференциях, а также имеющимися публикациями в изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, перечня условных сокращений, списка цитированной литературы из 112 наименований и двух приложений. Общий объём диссертации составляет 157 страниц.

Краткое содержание работы

Глава 1 состоит из шести параграфов. В параграфе 1.1 введены понятия линейного отношения, граничной тройки, гамма-поля, функции Вейля.

В параграфе 1.2 мы характеризуем спектр расширения A_0 в терминах предельного поведения функции Вейля вблизи вещественной оси.

В параграфе 1.3 рассматривается функция кратности $N_{A_0^{ac}}(\cdot)$ и её связь с функцией Вейля.

Параграф 1.4 содержит необходимые факты о связи матрицы рассеяния с функцией Вейля и состоит из двух разделов. В разделе 1.4.1 вводится понятие прямого интеграла и спектрального представления, а в разделе 1.4.2 приведена формула, выражающая зависимость матрицы рассеяния системы $\{A_\Theta, A_0\}$ с соответствующей функцией Вейля (см. (1.4.4)).

Параграф 1.5 содержит необходимые факты о соболевских пространствах с отрицательными показателями.

В параграфе 1.6 введены понятия крейновского и фридрихсова расширений и раскрывается их связь с функцией Вейля.

Основным объектом **Главы 2**, состоящей из двух параграфов, является дифференциальное выражение Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом:

$$\mathcal{L}_Q := -\frac{d^2}{dx^2} + Q, \quad Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}). \quad (0.0.30)$$

В параграфе 2.1 получена асимптотика решений $S(x, z)$ и $C(x, z)$, а также доказаны специальные тождества (см. Леммы 2.1.1 – 2.1.4).

В параграфе 2.2 мы доказываем Теорему 2.2.1 и Следствие 2.2.1. Приведём их формулировку частично.

Теорема 0.0.3. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также L^D — реализация Дирихле выражения (0.0.30). Тогда оператор L^D является полуограниченным снизу и его отрицательный спектр либо конечен, либо является счётным с предельной точкой в нуле. Неотрицательная часть оператора L^D является чисто абсолютно непрерывной, т.е. $L_{ac}^D = E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ и $N_{L_{ac}^D}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. В частности, $\sigma_{ac}(L^D) = [0, \infty)$, $\sigma_{sc}(L^D) = \sigma_{pp}(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Следствие 0.0.1. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ — произвольное самосопряжённое расширение минимального оператора A , ассоциированного с выражением (0.0.30). Тогда операторы $E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_+)\tilde{A}$ и $E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ унитарно эквивалентны и, следовательно, $\tilde{A}^{ac} = E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_+)\tilde{A}$, а также $N_{\tilde{A}^{ac}}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Кроме того, $\sigma_{ac}(\tilde{A}) = [0, \infty)$ и $\sigma_{sc}(\tilde{A}) = \sigma_{pp}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Также оператор $\tilde{A}$ является полуограниченным снизу и его отрицательный спектр либо конечен, либо образует счётную последовательность с предельной точкой в нуле.

Полученный результат обобщает классический результат Титчмарша (см. [30, гл. 5]) на случай оператора Шрёдингера с матричнозначным суммируемым потенциалом и совпадает с указанным результатом в скалярном случае ($m = 1$). Подчеркнём, что главным ингредиентом наших результатов является чистая абсолютная непрерывность положительной части произвольной реализации выражения (0.0.30) (произвольного расширения минимального оператора, ассоциированного с выражением $\mathcal{L}_Q$).

В Главе 3 обобщаются результаты Главы 2 на случай квантовых графов. Мы рассматриваем некомпактный связный граф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ с конечным чис-

лом рёбер $\mathcal{E}$ и вершин $\mathcal{V}$, предполагая, что по крайней мере одно ребро имеет бесконечную длину. Также мы предполагаем, что граф $\mathcal{G}$ не имеет «петель» и кратных рёбер, т.е. ни для какого ребра начало и конец не совпадают, и нет различных рёбер, соединяющих одни и те же две вершины; это всегда может быть достигнуто с помощью введения дополнительных вершин, если необходимо. Основным объектом **Главы 3** является гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$, ассоциированный в $L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$ с матричным выражением Шрёдингера $\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q$ с суммируемым матричным потенциалом $Q(\cdot) \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$ и граничными условиями дельта-взаимодействия во всех вершинах $v \in \mathcal{V}$:

$$\begin{cases} f \text{ непрерывна в } v, \\ \sum_{e \in \mathcal{E}_v} f'_e(v) = \alpha(v)f(v), \end{cases} \quad v \in \mathcal{V}, \quad (0.0.31)$$

(см. [49, 108] и формулу (3.3.1)), где $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$, $\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot)^*$ — матричная функция. При $\alpha = 0$ условие (0.0.31) — хорошо известное условие Кирхгофа, и соответствующий гамильтониан мы будем обозначать $\mathbf{H}_{\text{kir}} := \mathbf{H}_{0,Q}$. Чтобы трактовать гамильтониан $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ в рамках теории расширений, мы вводим минимальный оператор $A_{\min} = A = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} A_e$, ассоциированный с выражением $\mathcal{A}$ на графе $\mathcal{G}$, и являющийся прямой суммой минимальных операторов A_e на каждом ребре $e \in \mathcal{E}$.

Глава 3 состоит из пяти параграфов. В параграфе 3.1 описано построение квантового графа. В параграфе 3.2 доказывается первый главный результат **Главы 3** — Теорема 3.2.1. Здесь мы приведём её частично.

Теорема 0.0.4. *Пусть граф $\mathcal{G}$ состоит из $p_1 > 0$ бесконечных рёбер и $p_2 (\geq 0)$ конечных рёбер, пусть $Q(\cdot) \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$. Тогда для произвольной самосопряжённой реализации $\tilde{A}$ выражения $\mathcal{A}$ (расширения минимального оператора A , порождённого выражением $\mathcal{A}$ на графе $\mathcal{G}$) выполняются следующие утверждения:*

- (i) *Сингулярный непрерывный спектр $\sigma_{sc}(\tilde{A})$ является пустым, т.е. $\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$;*

- (ii) Абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(\tilde{A})$ заполняет полуось $\mathbb{R}_+$, $\sigma_{ac}(\tilde{A}) = [0, \infty)$, и имеет постоянную кратность tr_1 .

В частности, гамильтонианы $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ не имеют sc -спектра.

Теорема 0.0.4 обобщает главный результат работы [81] на случай вышеуказанных квантовых графов. В частном случае при $Q = 0$ Теорема 0.0.4 была доказана Б.-С. Онгом в статье [106] с помощью принципа предельного поглощения.

В параграфе 3.3 мы получаем условия, гарантирующие чистую абсолютную непрерывность положительной части гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$, т.е. отсутствие (положительных) собственных значений, присоединённых к ac -спектру $\sigma_{ac}(\mathbf{H}_\alpha) = \mathbb{R}_+$. В частности, это справедливо для операторов Шрёдингера с дельта-взаимодействиями на прямой $\mathbb{R}$ (см. раздел 3.3.1). Отметим, что утверждения вида $\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ сильнее, чем утверждения вида

$$\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \sigma_p(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset \quad (0.0.32)$$

для произвольного самосопряжённого расширения $\tilde{A}$ некоторых минимальных симметрических дифференциальных операторов с бесконечными индексами дефекта, уже доказанные ранее. Например, свойство (0.0.32), т.е. тот факт, что положительная часть остаётся чисто абсолютно непрерывной для произвольного расширения, был открыт для операторов Штурма-Лиувилля $-\frac{d^2}{dx^2} + T$ с ограниченными или неограниченными операторными потенциалами T (см. [102]), также как и для операторов Шрёдингера в $\mathbb{R}^3$ с бесконечным числом точек взаимодействий $X = \{x_n\}$, которые образуют разреженную последовательность (см. [104]).

Однако, в отличие от (0.0.32), существуют расширения $\tilde{A}$ оператора $A_{\min}$, имеющие положительные собственные значения, присоединённые к абсолютно непрерывному спектру $\sigma_{ac}(\tilde{A}) = [0, \infty)$ (см. Следствие 3.3.3 (iv)).

Параграф 3.4 посвящён нахождению оценки для числа отрицательных квадратов оператора $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ (оценка типа Баргмана). В разделе 3.4.1 приводятся и доказываются необходимые факты из теории квадратичных форм.

В разделе 3.4.2 формулируется и доказывается абстрактная версия принципа Бирмана-Швингера, а затем доказывается классическая оценка типа Баргмана. Наконец, в разделе 3.4.3 мы доказываем следующую оценку типа Баргмана для гамильтониана $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$, предполагая, что $xQ \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$ (см. Теорему 3.4.1):

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} \left[\int_e x_e \cdot \operatorname{tr}(Q_{e,-}(x)) dx \right] + m|\mathcal{V}|. \quad (0.0.33)$$

Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа $a \in \mathbb{R}$, и $Q_{e,-}(\cdot)$ обозначает «отрицательную часть» потенциальной матрицы $Q_e(\cdot)$ на ребре e .

Мы также дополняем эту формулу, показывая, что для чисел отрицательных квадратов гамильтонианов $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ и $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ выполняется неравенство:

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \kappa_-(\mathbf{H}_{\text{kir}}) + \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v)). \quad (0.0.34)$$

В частности, если реализация Кирхгофа $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ оператора $\mathcal{A}$ неотрицательна, $\mathbf{H}_{\text{kir}} \geq 0$, то $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v))$. Отметим, что доказательство оценок (0.0.33) – (0.0.34) основывается на формуле (3.4.1) для квадратичной формы, ассоциированной с гамильтонианом $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ (см. Предложение 3.4.1).

В параграфе 3.5 мы рассматриваем только квантовые *звёздные графы* с конечным числом рёбер. В разделе 3.5.1 вводятся граничные тройки и соответствующие функции Вейля для квантовых звёздных графов. В разделе 3.5.2, предполагая, что *минимальный оператор A является неотрицательным* и применяя аппарат функций Вейля, мы обосновываем неравенство $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(T)$, где $T \in \mathbb{M}((p_2 + 1)m)$ — некоторая матрица (см. Теорему 3.5.1), уточняя и дополняя оценки (0.0.33) и (0.0.34). Отсюда следует, что $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq (p_2 + 1)m$. Более того, дополнительно предполагая, что звёздный граф $\mathcal{G}$ не имеет конечных рёбер ($p_2 = 0$), мы показываем, что

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_- \left(\alpha(0) - \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) \right) \leq m. \quad (0.0.35)$$

В частности, $\mathbf{H}_{\alpha,Q} \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha(0) \geq \sum_{e \in \mathcal{E}} M_e(0)$, где $M_e(0)$ — предельное значение в нуле функции Вейля, соответствующей опера-

тору Дирихле в $L^2(e; \mathbb{C}^m)$ для каждого *бесконечного ребра* $e \in \mathcal{E}_\infty$. Например, мы показываем, что оценки типа Баргмана (0.0.33) – (0.0.34) не являются точными. Помимо этого, предполагая, что потенциальная матрица является нулевой, $Q = 0$, мы доказываем соотношения $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,0}) = \kappa_-(T_1) \leq \sum_{k=0}^{p_2} \kappa_-(\alpha(v_k))$ (см. (3.5.20) – (3.5.21)).

В разделе 3.5.3 мы находим матрицу рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ для пары операторов $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D\}$, где $\mathbf{H}^D := \mathbf{H}_Q^D$ — реализация Дирихле на звёздном графе $\mathcal{G}$. Именно, мы показываем, что относительно спектрального представления $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathcal{H}_{ac})$, матрица рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ допускает следующее представление для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda) &= \\ &= I_{\mathcal{H}_{ac}} + \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} (N_0(\lambda)^*)^{-1} ((\alpha(0) - K(\lambda))^{-1} \otimes E_{p_1}) \cdot N_0(\lambda)^{-1}. \end{aligned} \quad (0.0.36)$$

Здесь $K(\lambda) = \sum_{j=1}^{p_1} M_j(\lambda + i0)$, и $M_j(\lambda + i0)$ — предельное значение функции Вейля $M_j(\cdot)$, соответствующей оператору Дирихле в $L^2(e_j; \mathbb{C}^m)$ для *бесконечного ребра* $e_j \in \mathcal{E}_\infty$, $E_{p_1} \in \mathbb{C}^{p_1 \times p_1}$ — матрица, состоящая из p_1^2 единиц (см. (3.5.44)), и $N_0(\lambda)$ — матричнозначная функция, выражающаяся через потенциальную матрицу $Q(\cdot)$. Доказательство существенно опирается на результаты работ [45, 46] (см. Теорему 3.5.2).

В разделе 3.5.4 мы находим детерминант возмущения $\tilde{\Delta}_{\mathbf{H}_\alpha/\mathbf{H}^D}^{\hat{\Pi}}(\zeta, z)$ пары $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D\}$ в граничной тройке $\hat{\Pi}$ (см. (3.5.37)).

Глава 4 обобщает результаты **Главы 2** и **Главы 3** на случай сингулярных потенциалов. Основным объектом **Главы 4** является трёхчленное дифференциальное матричное выражение Штурма-Лиувилля вида:

$$\mathcal{L}(P, Q, R)y := R^{-1}(x) \left(-(P(x)y')' + Q(x)y \right), \quad y = (y_1, \dots, y_m)^\top. \quad (0.0.37)$$

Здесь матричные коэффициенты $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$ предполагаются локально суммируемыми, а потенциальная матрица $Q(\cdot)$ — сингулярной и принадлежащей соболевскому пространству $W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. При этом операторы, порождённые выражением (0.0.37), рассматриваются в весовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$.

Глава 4 состоит из трёх параграфов. В параграфе 4.1, состоящем из двух разделов, рассматривается общий случай сингулярного $W^{-1,1}$ -потенциала. В разделе 4.1.1 мы трактуем дифференциальное выражение (0.0.37), пользуясь регуляризацией, предложенной в работах [28, 29]. Впоследствии эта регуляризация использовалась для исследования спектральных свойств операторов вида (0.0.37) во многих работах (см., например, статью [64] и литературу в ней). Раздел 4.1.2 содержит первый основной результат **Главы 4** — обобщение теоремы Титчмарша на случай матричных сингулярных потенциалов. Именно, мы показываем, что при условии $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ и некоторых необременительных условиях на $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$, неотрицательный спектр реализации Дирихле L^D , как и любой другой самосопряжённой реализации выражения $\mathcal{L}(P, Q, R)$, является лебеговским постоянной кратности m , её сингулярный положительный спектр — пуст, а отрицательная часть реализации Дирихле L^D — компактна. Полученный результат значительно усиливает все предыдущие результаты в этом направлении.

В параграфе 4.2 мы рассматриваем весьма важный подкласс операторов, порождённых выражением (0.0.37) в $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$, — операторы Шрёдингера с дельта-взаимодействиями, т.е. операторы вида:

$$\mathbf{H}_{X_+, \alpha, Q} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q(\cdot) = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(\cdot - x_k), \quad (0.0.38)$$

$$X_+ = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+.$$

Как уже подчёркивалось выше, эти операторы являются объектами многочисленных исследований последних четырёх десятилетий (см., например, монографии [35, 37], обзор [92] и литературу в них). Мы показываем, что для оператора (0.0.38) условие $Q \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ эквивалентно условиям

$$Q_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty. \quad (0.0.39)$$

Поэтому при этих условиях реализация Дирихле $\mathbf{H}^D$ выражения (0.0.38) имеет неотрицательный лебеговский спектр постоянной кратности m , а её сингуляр-

ный положительный спектр — пуст.

В параграфе 4.3 мы исследуем спектральные свойства минимального оператора $L_{\min} = L := L(P, Q, R)$, порождённого выражением (0.0.37) на оси $\mathbb{R}$. Именно, мы показываем, что если минимальный оператор L в пространстве $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$ самосопряжён, то при условии

$$Q(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$$

и необременительных условиях на $P(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ и $R(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ неотрицательный спектр оператора L является лебеговским постоянной кратности $2m$. Подчёркнём обнаруженный здесь любопытный эффект: абсолютная непрерывность спектра «положительной части» оператора $L = L^*$ в $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$ зависит лишь от поведения матричных коэффициентов $P(\cdot)$, $Q(\cdot)$ и $R(\cdot)$ на одной из полуосей $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$ и не зависит от их поведения на дополнительной полуоси.

В частности, самосопряжённый в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ оператор Шрёдингера $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ вида:

$$\mathbf{H}_{X,\alpha,Q} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(\cdot) := -\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\cdot - x_k), \quad (0.0.40)$$

$$X = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R},$$

имеет лебеговский спектр на $\overline{\mathbb{R}}_+$ постоянной кратности $2m$ при следующих условиях на «положительную (отрицательную) часть» матрицы $Q(\cdot)$:

$$\left(\begin{array}{l} Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty \\ Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_-; \mathbb{C}^{m \times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty \end{array} \right). \quad (0.0.41)$$

Эти условия совпадают с условиями (0.0.39) для $X_+ := \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ — «положительной части» множества X . И здесь результат зависит лишь от поведения потенциальной матрицы $Q(\cdot)$ на одной из полуосей $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$ и не зависит от её поведения на дополнительной полуоси.

Весьма частный случай этого результата получен ранее другим методом в работе К. Шубиной и Г. Штольца [109]. Именно, считая в (0.0.40) $X = \mathbb{Z}$ и

$Q_1(\cdot) = 0$, они доказали, что при условии $\sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty$ положительная часть спектра скалярного ($m = 1$) гамильтониана $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}, \alpha, 0}$ абсолютно непрерывна и заполняет положительную полуось $\mathbb{R}_+$ (см. Теорему 0.0.2).

Мы показываем, что соответствующая (неортогональная) спектральная мера из интегрального представления функции Вейля исследуемого оператора абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Этот факт вместе с известным результатом о спектральной эквивалентности ортогональной и неортогональной спектральных мер самосопряжённого оператора (см. [101]) позволяет получить упомянутые результаты об абсолютной непрерывности спектра самосопряжённых реализаций выражения $\mathcal{L}(P, Q, R)$.

Глава 5 посвящена крейновскому расширению простейшего дифференциального оператора чётного порядка и состоит из одного параграфа. В параграфе 5.1 мы исследуем минимальный оператор $A := A_{\min}$, ассоциированный с выражением

$$\mathcal{A} := (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}, \quad \text{dom } A = W_0^{2n, 2}[a, b], \quad n \in \mathbb{N},$$

на отрезке $[a, b]$, и описываем его крейновское расширение в терминах граничных условий. Используя технику граничных троек и соответствующих функций Вейля, разработанную в работе [62], мы описываем все неотрицательные расширения оператора $A_{\min}$ и расширения с конечным отрицательным спектром.

В **Приложении А** мы доказываем Теорему 4.3.1, а в **Приложении Б** приводим примеры описания крейновского расширения на отрезке $[0, 1]$ для простейших дифференциальных операторов второго, четвёртого, шестого и восьмого порядков.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах

1. Грановский, Я.И. Операторы Штурма-Лиувилля с $W^{-1,1}$ -матричными потенциалами / Я.И. Грановский, М.М. Маламуд // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2022. — Т. 516. — С. 20 – 39.
2. Грановский, Я.И. Квантовые графы с суммируемыми матричными потенциалами / Я.И. Грановский, М.М. Маламуд, Х. Найдхардт // ДАН. — 2019. — Т. 488., № 1. — С. 5 – 10.
3. Грановский, Я.И. Крейновское расширение дифференциального оператора чётного порядка / Я.И. Грановский, Л.Л. Оридорога // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 4. — С. 556 – 560.
4. Granovskyi, Ya.I. To the spectral theory of vector-valued Sturm-Liouville operators with summable potentials / Ya.I. Granovskyi // Труды ИПММ. — 2017. — Vol. 31. — P. 50 – 65.
5. Granovskyi, Ya.I. To the spectral theory of quantum graphs with summable matrix potentials / Ya.I. Granovskyi // Труды ИПММ. — 2020. — Vol. 34. — P. 35 – 50.
6. Granovskyi, Ya. Non-compact quantum graphs with summable matrix potentials / Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt // Ann. Henri Poincaré. — 2021. — Vol. 22. — P. 1 – 47.
7. Granovskyi, Ya. To the spectral theory of vector-valued Sturm-Liouville operators with summable potentials and point interactions / Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt, A. Posilicano // Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics. — 2017. — Pavel Exner Anniversary Volume. EMS Series of Congress Reports. — Vol. 12. — P. 271 – 313.

8. Granovskyi, Ya.I. Krein-von Neumann extension of an even order differential operator on a finite interval / Ya.I. Granovskyi, L.L. Oridoroga // Opuscula Math. — 2018. — Vol. 38, № 5. — P. 681 – 698.

Тезисы конференций

1. Грановский Я.И. Крейновское расширение дифференциального оператора чётного порядка / Я.И. Грановский // Международная научная конференция студентов и молодых учёных «Ломоносов». Материалы конференции [Электронный ресурс]. — Москва: МАКС Пресс. — 2019.
2. Грановский Я.И. К спектральной теории звёздных графов / Я.И. Грановский // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IX». Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону. — 2019. — С. 33 – 34.
3. Грановский Я.И. К спектральной теории конечных некомпактных графов с суммируемыми матричными потенциалами / Я.И. Грановский // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения X». Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону. — 2020. — С. 33.
4. Грановский Я.И. Квантовые графы с суммируемыми матричными потенциалами / Я.И. Грановский // Международная научная конференция студентов и молодых учёных «Ломоносов». Материалы конференции [Электронный ресурс]. — Москва: МАКС Пресс. — 2021.
5. Грановский Я.И. Оценка Баргмана для некомпактных конечных квантовых графов с суммируемыми потенциалами / Я.И. Грановский // Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVI. Теория операторов и дифференциальные уравнения». Тезисы докладов. — Владикавказ. — 2021. — С. 29 – 30.

ГЛАВА 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Линейные отношения, граничные тройки и функция Вейля

В этом параграфе мы приведём некоторые базовые понятия и факты из теории абстрактных граничных троек и соответствующих функций Вейля, см. [11, 62, 63].

Множество $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ замкнутых линейных отношений в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является множеством замкнутых линейных подпространств пространства $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Следующие множества $\text{dom } \Theta = \{f : \{f, f'\} \in \Theta\}$, $\text{ran } \Theta = \{f' : \{f, f'\} \in \Theta\}$ и $\text{mul } \Theta = \{f' : \{0, f'\} \in \Theta\}$ называются областью определения, областью значений и многозначной частью линейного отношения Θ . Замкнутый линейный оператор T в $\mathcal{H}$ отождествляется со своим графиком $\text{gr}(T) := \{\{f, Tf\} : f \in \text{dom } T\}$, поэтому множество $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ замкнутых линейных операторов в $\mathcal{H}$ рассматривается как подмножество множества $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. В частности, линейное отношение Θ является оператором тогда и только тогда, когда многозначная часть $\text{mul } \Theta$ тривиальна. Сопряжённое отношение $\Theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ определяется следующим образом:

$$\Theta^* = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} : (f', h)_{\mathcal{H}} = (f, h')_{\mathcal{H}} \text{ для всех } \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \in \Theta \right\}.$$

Линейное отношение Θ называется симметрическим, если $\Theta \subset \Theta^*$ и самосопряжённым, если $\Theta = \Theta^*$.

Для симметрического линейного отношения $\Theta \subseteq \Theta^*$ в $\mathcal{H}$ многозначная часть $\text{mul } \Theta$ является ортогональным дополнением к области определения $\text{dom } \Theta$ в $\mathcal{H}$. Поэтому, полагая $\mathcal{H}_{\text{op}} := \overline{\text{dom } \Theta}$ и $\mathcal{H}_{\infty} := \text{mul } \Theta$, получаем ортогональное разложение $\Theta = \Theta_{\text{op}} \oplus \Theta_{\infty}$, где Θ_{op} является симметрическим оператором в $\mathcal{H}_{\text{op}}$, т.е. Θ_{op} — операторная часть отношения Θ , а $\Theta_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f' \end{pmatrix} : f' \in \text{mul } \Theta \right\}$ — «чистое» линейное отношение в $\mathcal{H}_{\infty}$.

Пусть A — плотно определённый замкнутый симметрический оператор в

сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с равными индексами дефекта $n_{\pm}(A) = \dim \mathfrak{N}_{\pm i} \leq \infty$, где $\mathfrak{N}_z := \ker(A^* - z)$ — дефектное подпространство.

Определение 1.1.1 ([11]). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ — вспомогательное гильбертово пространство, называется граничной тройкой для сопряжённого оператора A^* , если $\Gamma_0, \Gamma_1 : \operatorname{dom} A^* \rightarrow \mathcal{H}$ — линейные отображения, такие что справедлива формула Грина:

$$(A^*f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^*g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \operatorname{dom} A^*, \quad (1.1.1)$$

и отображение $\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \operatorname{dom} A^* \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно.

Отметим, что граничная тройка для A^* существует, если индексы дефекта равны, т.е. $n_+(A) = n_-(A)$. Более того, $n_{\pm}(A) = \dim \mathcal{H}$ и $\ker \Gamma = \ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1 = \operatorname{dom} A$. Также отметим, что Γ является ограниченным отображением из области $\mathfrak{H}_+ = \operatorname{dom} A^*$, оснащённой нормой графика оператора A^* , во множество $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Граничная тройка для A^* не является единственной.

Определение 1.1.2.

(i) Замкнутое расширение A' симметрического оператора A называется *собственным*, если $A \subsetneq A' \subsetneq A^*$. Множество всех собственных расширений оператора A , пополненное (несобственными) расширениями A и A^* , обозначают Ext_A .

(ii) Два расширения $A', A'' \in \operatorname{Ext}_A$ называются *дизъюнктными*, если $\operatorname{dom} A' \cap \operatorname{dom} A'' = \operatorname{dom} A$, и *трансверсальными*, если дополнительно $\operatorname{dom} A' + \operatorname{dom} A'' = \operatorname{dom} A^*$.

Каждое самосопряжённое расширение $\tilde{A}$ оператора A является собственным, т.е. $\tilde{A} \in \operatorname{Ext}_A$. Фиксируя граничную тройку Π , можно параметризовать множество Ext_A следующим образом.

Предложение 1.1.1 ([63]). Пусть A — оператор, определённый выше, и пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* . Тогда отображение

$$\operatorname{Ext}_A \ni \tilde{A} \rightarrow \Gamma \operatorname{dom} \tilde{A} = \{\{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} : f \in \operatorname{dom} \tilde{A}\} =: \Theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \quad (1.1.2)$$

устанавливает биективное соответствие между множествами Ext_A и $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Положим $A_\Theta := \tilde{A}$, где Θ определено соотношением (1.1.2), т.е. $A_\Theta := A^* \upharpoonright \Gamma^{-1}\Theta = A^* \upharpoonright \{f \in \text{dom } A^* : \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta\}$. Более того:

(i) A_Θ является симметрическим (самосопряжённым) тогда и только тогда, когда Θ является симметрическим (самосопряжённым), т.е. $\Theta \subseteq \Theta^*$ ($\Theta = \Theta^*$). Кроме того, $n_\pm(A_\Theta) = n_\pm(\Theta)$.

(ii) Расширения A_Θ и A_0 являются дизъюнктными (трансверсальными) тогда и только тогда, когда Θ является графиком оператора $B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. В этом случае расширение $A_B := A_\Theta$ задаётся следующим образом:

$$\tilde{A} = A_B = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0). \quad (1.1.3)$$

Более того, расширения A_B и A_0 являются трансверсальными тогда и только тогда, когда $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Линейное отношение Θ (оператор B) в отображении (1.1.2) (соответственно, (1.1.3)) называется *граничным отношением* (*граничным оператором*). Подчеркнём, что для дифференциальных операторов параметризация (1.1.2) – (1.1.3) даёт прямое описание множества собственных расширений в терминах граничных условий.

Из Предложения 1.1.1(i) немедленно следует, что расширения

$$A_0 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0 \quad \text{и} \quad A_1 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_1 \quad (1.1.4)$$

являются самосопряжёнными. Действительно, $A_j = A_{\Theta_j}$, $j \in \{0, 1\}$, где подпространства $\Theta_0 := \{0\} \times \mathcal{H}$ и $\Theta_1 := \mathcal{H} \times \{0\}$ являются самосопряжёнными отношениями в $\mathcal{H}$.

Кроме того, для каждого самосопряжённого расширения $\tilde{A} := \tilde{A}^* \in \text{Ext}_A$ существует граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^* , такая что $\ker \Gamma_0 = \text{dom } \tilde{A}$.

Далее, следуя [62, 63], введём понятие абстрактной функции Вейля. Подчеркнём, что её роль в теории расширений аналогична роли классической

m -функции Вейля-Титчмарша в спектральной теории сингулярных операторов Штурма-Лиувилля.

Определение 1.1.3 ([62]). Пусть A — плотно определённый замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с равными индексами дефекта, и пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* . Операторнозначные функции $\gamma(\cdot) : \rho(A_0) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ и $M(\cdot) : \rho(A_0) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, определённые равенствами

$$\gamma(z) := (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z)^{-1} \quad \text{и} \quad M(z) := \Gamma_1 \gamma(z), \quad z \in \rho(A_0), \quad (1.1.5)$$

называются γ -полем и *функцией Вейля*, соответствующими граничной тройке Π . Здесь $\rho(A_0)$ — резольвентное множество оператора A_0 (см. Определение 1.2.1).

В случае оператора Шрёдингера в областях (внутренних или внешних) с компактной границей, отображения Γ_0 и Γ_1 могут быть выбраны в виде регуляризованных следов Дирихле и Неймана (см. [84] и [99]). В этом случае соответствующая функция Вейля $M(\cdot)$ совпадает с одним из видов отображения Дирихле-Неймана, зависящего от z , см. [99]. Для оператора Штурма-Лиувилля этот факт является более простым и сразу вытекает из Леммы 2.2.1. Для квантового графа это утверждение также верно, но устанавливается труднее (см. доказательство Теоремы 3.2.1).

Функция Вейля $M(\cdot)$ и γ -поле $\gamma(\cdot)$ в формуле (1.1.5) корректно определены и голоморфны в $\rho(A_0)$. Функция Вейля $M(\cdot)$ принимает значения в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и является *неванлинновской* ($M(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$), т.е. голоморфной функцией в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, удовлетворяющей соотношениям:

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} M(z) \geq 0, \quad M(z)^* = M(\bar{z}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (1.1.6)$$

Более того, $M(\cdot) \in R^u[\mathcal{H}]$, т.е. справедливо включение $0 \in \rho(\operatorname{Im} M(i))$.

Хорошо известно, что произвольная $R[\mathcal{H}]$ -функция, в частности, функция Вейля $M(\cdot)$, допускает интегральное представление (см., например, [2, 7]):

$$M(z) = C_0 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\Sigma_M(t), \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\Sigma_M(t)}{1 + t^2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (1.1.7)$$

при $z \in \rho(A_0)$, где $\Sigma_M(\cdot)$ является операторнозначной борелевской мерой на $\mathbb{R}$, и $C_0 = C_0^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Интеграл в представлении (1.1.7) понимается в смысле сильной сходимости. Отметим, что в представлении (1.1.7) пропущено линейное слагаемое $C_1 z$, поскольку оператор A плотно определён (см. [62]).

Предложение 1.1.2 ([16], гл. 7). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ и $\tilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ — две граничные тройки для оператора A^* , пусть также $M(\cdot)$ и $\tilde{M}(\cdot)$ — соответствующие функции Вейля, $\tilde{A}_0 := A^* \upharpoonright \ker \tilde{\Gamma}_0$, и

$$J := i \begin{pmatrix} 0 & -I_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) Существует $J_{\mathcal{H}}$ -унитарный оператор $X = (X_{ij})_{i,j=1}^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, т.е. $X^* J X = J$, такой что

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_1 \\ \tilde{\Gamma}_0 \end{pmatrix}. \quad (1.1.8)$$

- (ii) $0 \in \rho(X_{21}M(z) + X_{22})$ при $z \in \rho(\tilde{A}_0)$. Функции Вейля $\tilde{M}(\cdot)$ и $M(\cdot)$ связаны следующим дробно-линейным преобразованием:

$$\tilde{M}(z) = X(M(z)) := (X_{11}M(z) + X_{12})(X_{21}M(z) + X_{22})^{-1}, \quad z \in \rho(\tilde{A}_0). \quad (1.1.9)$$

Симметрический оператор A в $\mathfrak{H}$ называется *простым*, если он не допускает нетривиального ортогонального разложения $A = A' \oplus S$, где A' — симметрический оператор, и $S = S^*$. Хорошо известно, что A является простым тогда и только тогда, когда замкнутая линейная оболочка подпространств $\{\mathfrak{N}_z(A) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ совпадает с $\mathfrak{H}$.

Если A является простым, то функция Вейля $M(\cdot)$ определяет граничную тройку Π единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности (см. [62]). В частности, $M(\cdot)$ содержит полную информацию о спектральных свойствах оператора A_0 . Более того, спектр произвольного собственного (не

обязательно самосопряжённого) расширения $A_\Theta \in \text{Ext}_A$ может быть описан в терминах функции Вейля $M(\cdot)$ и граничного отношения Θ .

Предложение 1.1.3 ([62, Теорема 2.2]). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* , и пусть $M(\cdot)$ и $\gamma(\cdot)$ — соответствующие функция Вейля и γ -поле. Пусть также $\tilde{A} = A_\Theta \in \text{Ext}_A$ и $\rho(A_\Theta) \neq \emptyset$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(i) Имеет место формула Крейна для резольвент:

$$(A_\Theta - z)^{-1} - (A_0 - z)^{-1} = \gamma(z)(\Theta - M(z))^{-1}\gamma^*(\bar{z}), \quad z \in \rho(A_0) \cap \rho(A_\Theta). \quad (1.1.10)$$

(ii) Если A является простым, то для всех $z \in \rho(A_0)$ справедлива следующая эквивалентность:

$$z \in \sigma_j(A_\Theta) \iff 0 \in \sigma_j(\Theta - M(z)), \quad j \in \{pp, c, r\}$$

(см. параграф 1.2).

Дополним формулу (1.1.10) для отношения $\Theta = \ker(C \ D)$, где $C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (см. [100, 16]). Тогда:

$$(\Theta - M(z))^{-1} = (C - DM(z))^{-1} D. \quad (1.1.11)$$

Формула (1.1.10) обобщает классическую формулу Крейна для канонических резольвент (см. [18, I] и [16]). Она устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством собственных расширений $\tilde{A} = A_\Theta$, где $\rho(A_\Theta) \neq \emptyset$, и множеством линейных отношений Θ в $\mathcal{H}$. Также отметим, что все параметры, входящие в (1.1.10), выражаются в терминах граничной тройки Π (см. формулы (1.1.3) и (1.1.5), а также [62, 63]).

Замечание 1.1.1 ([2, гл. VIII], [27]). В случае $n_\pm(A) = m < \infty$, множество всех самосопряжённых расширений оператора A параметризуется следующим образом:

$$\text{Ext}_A \ni \tilde{A} = \tilde{A}^* = A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \quad (1.1.12)$$

где $CD^* = DC^*$, $0 \in \rho(CC^* + DD^*)$, $C, D \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

1.2 Функция Вейля и спектр

Определение 1.2.1. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, и оператор T — замкнут в $\mathfrak{H}$, т.е. $T \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$.

(i) Точка z называется *точкой регулярного типа* для оператора $T \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$, $z \in \widehat{\rho}(T)$, если выполняется неравенство

$$\|(T - z)h\| \geq c_0(z)\|h\|, \quad h \in \operatorname{dom} T, \quad c_0(z) > 0.$$

(ii) Если $z \in \widehat{\rho}(T)$ и $\dim(\mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(T - z)) = 0$, то z называют *регулярной точкой* оператора T .

(iii) Совокупность регулярных точек оператора T называют его *резольвентным множеством* и обозначают $\rho(T)$.

(iv) Множество $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ называют *спектром* оператора T .

(v) Множество $\widehat{\sigma}(T) = \mathbb{C} \setminus \widehat{\rho}(T)$ называют *ядром спектра* оператора T .

Определение 1.2.2. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, и оператор T — замкнут в $\mathfrak{H}$.

(i) Чисто точечным спектром оператора T называют множество его собственных значений:

$$\sigma_{pp}(T) = \{z \in \mathbb{C} : \ker(T - z) \neq \{0\}\}. \quad (1.2.1)$$

(ii) Непрерывным спектром оператора T называют множество

$$\sigma_c(T) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{ran}(T - z) \neq \overline{\operatorname{ran}(T - z)}\}. \quad (1.2.2)$$

(iii) Остаточным спектром оператора T называют множество

$$\sigma_r(T) = \sigma(T) \setminus \widehat{\sigma}(T) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{pp}(T) : \operatorname{ran}(T - z) = \overline{\operatorname{ran}(T - z)} \neq \mathfrak{H}\}.$$

В этом параграфе мы характеризуем спектр расширения A_0 с помощью функции Вейля. Пусть $\Phi(\cdot)$ — скалярная R -функция. Далее, запись $\lim_{z \rightarrow x} \Phi(z)$ означает, что предел $\lim_{r \downarrow 0} \Phi(x + re^{i\theta})$, $x \in \mathbb{R}$, существует и является равномерным по $\theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ для каждого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$. Введём следующие

множества:

$$\Omega_s(\Phi) := \{x \in \mathbb{R} : |\Phi(z)| \rightarrow +\infty \text{ при } z \rightarrow\gg x\}, \quad (1.2.3)$$

$$\Omega_{pp}(\Phi) := \{x \in \mathbb{R} : \lim_{z \rightarrow\gg x} (z - x)\Phi(z) \neq 0\}, \quad (1.2.4)$$

$$\Omega_{sc}(\Phi) := \{x \in \mathbb{R} : |\Phi(z)| \rightarrow +\infty \text{ и } (z - x)\Phi(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow\gg x\} \quad (1.2.5)$$

$$\Omega_{ac}(\Phi) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < \operatorname{Im}(\Phi(x + i0)) < +\infty\}, \quad \Phi(x + i0) = \lim_{y \downarrow 0} \Phi(x + iy). \quad (1.2.6)$$

Произвольная R -функция $\Phi(\cdot)$ допускает представление (1.1.7) с константами $C_0 \in \mathbb{R}$, $C_1 \geq 0$, и скалярной борелевской мерой $\Sigma_\Phi(\cdot)$, удовлетворяющей соотношению $\int_{\mathbb{R}} (1 + t^2)^{-1} d\Sigma_\Phi(t) < \infty$.

Предложение 1.2.1 ([51, Предложение 4.2]). *Пусть A — простой замкнутый симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с $n_\pm(A) = n < \infty$. Далее, пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* с соответствующей функцией Вейля $M(\cdot)$.*

Если $\mathcal{T} = \{h_k\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathcal{H}$, то абсолютно непрерывный спектр самосопряжённого расширения $A_0 := A^ \upharpoonright \ker \Gamma_0$ имеет вид:*

$$\sigma_{ac}(A_0) = \overline{\cup_{k=1}^n \operatorname{cl}_{ac}(\Omega_{ac}(M_{h_k}))}, \quad (1.2.7)$$

где $\operatorname{cl}_{ac}(K)$ — ac -замыкание множества K .

Теорема 1.2.1 ([51, Теорема 4.3]). *Пусть A — простой замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с $n_\pm(A) = n < \infty$. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* , а $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля, $M_h(z) := (M(z)h, h)$, $h \in \mathcal{H}$. Пусть также $\mathcal{T} = \{h_k\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathcal{H}$. Тогда:*

- (i) *Расширение A_0 не имеет точечного спектра в интервале (a, b) , т.е. $\sigma_{pp}(A_0) \cap (a, b) = \emptyset$, тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{y \downarrow 0} y M_{h_k}(x + iy) = 0 \quad \text{для каждого } k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.2.8)$$

при всех $x \in (a, b)$. В этом случае имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \sigma(A_0) \cap (a, b) &= \sigma_c(A_0) \cap (a, b) = \\ &= \left(\overline{\bigcup_{k=1}^n \Omega_{sc}(M_{h_k})} \cup \overline{\bigcup_{k=1}^n \Omega_{ac}(M_{h_k})} \right) \cap (a, b). \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

(ii) Оператор A_0 не имеет сингулярного непрерывного спектра в интервале (a, b) , т.е. $\sigma_{sc}(A_0) \cap (a, b) = \emptyset$, если для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ множество $\Omega_{sc}(M_{h_k}) \cap (a, b)$ не более чем счетно. В частности, это имеет место, если множество $(a, b) \setminus \Omega_{ac}(M_{h_k})$ не более чем счётно.

(iii) Расширение A_0 не имеет абсолютно непрерывного спектра в интервале (a, b) , т.е. $\sigma_{ac}(A_0) \cap (a, b) = \emptyset$, если и только если для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ условие

$$\operatorname{Im}(M_{h_k}(x + i0)) = 0 \quad (1.2.10)$$

выполняется при п.в. $x \in (a, b)$.

1.3 Функция Вейля и спектральная кратность

В работе [101] показано, что функция кратности $N_{A_0^{ac}}(\cdot)$ абсолютно непрерывной части самосопряжённого расширения $A_0 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0$ может быть выражена через функцию Вейля $M(\cdot)$. Чтобы сформулировать соответствующий результат, выберем произвольный оператор T из класса Неймана-Шаттена $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и введём новую функцию Вейля $M^T(\cdot)$:

$$M^T(z) := T^* M(z) T, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Хорошо известно (см. [42]), что предел $M^T(t) := s - \lim_{y \downarrow 0} M^T(t + iy)$ существует при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Поэтому следующая функция является корректно определённой.

$$d_{M^T}(t) := \operatorname{rank}(\operatorname{Im}(M^T(t))) = \dim(\operatorname{ran}(\operatorname{Im}(M^T(t)))) \quad \text{для п.в.} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Определение 1.3.1 ([101, Определение 2.3]). Операторные меры Σ_1 и Σ_2 называются спектрально эквивалентными, $\Sigma_1 \approx \Sigma_2$, если $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$, т.е. Σ_1 и Σ_2

эквивалентны (т.е. взаимно подчинены) и их функции кратности совпадают, т.е. $N_{\Sigma_1}(t) = N_{\Sigma_2}(t)(\text{mod}(\Sigma_2))$.

Определение функции кратности $N_{\Sigma}(\cdot)$ меры Σ можно найти, например, в работе [22].

Предложение 1.3.1 ([101, Предложение 3.1]). Пусть A — плотно определённый замкнутый симметрический оператор, пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — B -обобщенная граничная тройка для A^* , и $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля. Пусть также Σ_M — мера из представления (1.1.7) со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Если E_{A_0} — спектральная мера оператора A_0 , то $\Sigma_M \approx E_{A_0}$ и $\Sigma_M^{ac} \approx E_{A_0}^{ac}$.

Предложение 1.3.2 ([101, Предложение 3.2]). Пусть A — простой плотно определённый замкнутый симметрический оператор, пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — B -обобщенная граничная тройка для A^* , и $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля. Далее, пусть $E_{A_0}(\cdot)$ — спектральная мера оператора A_0 . Если $T \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\ker T = \ker T^* = \{0\}$, то

$$N_{A_0^{ac}}(t) = d_{M^T}(t) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \sigma_{ac}(A_0) = \text{cl}_{ac}(\text{supp}(d_{M^T})), \quad (1.3.1)$$

где $\text{supp}(d_{M^T}) = \{\lambda \in \mathbb{R} : d_{M^T}(\lambda) > 0\}$.

Если дополнительно предел $M(t) := s - \lim_{y \rightarrow +0} M(t + iy)$ существует при почти всех $t \in \mathbb{R}$, то $N_{A_0^{ac}}(t) = d_M(t)$ при почти всех $t \in \mathbb{R}$, и $\sigma_{ac}(A_0) = \text{cl}_{ac}(\text{supp}(d_M))$.

1.4 Функция Вейля и матрица рассеяния

1.4.1 Прямой интеграл и спектральное представление

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и пусть $\mathcal{T} = \{\mathcal{H}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — семейство замкнутых подпространств, $\mathcal{H}_\lambda \subseteq \mathcal{H}$. Будем предполагать, что семейство ортогональных проекций $P(\lambda)$ из $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}_\lambda$ определяет слабо измеримое семейство проекций,

$$(Pf)(\lambda) := P(\lambda)f(\lambda), \quad f \in L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}).$$

Указанное семейство определяет измеримое семейство $\{\mathcal{H}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ подпространств. Положим $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda) := PL^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H})$ и отметим, что P определяет ортогональную проекцию из $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H})$ на $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$. Напомним, что $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$ называется прямым интегралом, ассоциированным с измеримым семейством подпространств $\mathcal{T}$ (см. [6, гл. 7]).

В прямом интеграле $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$ определим оператор умножения $\mathcal{M}_\mathcal{T}$:

$$(\mathcal{M}_\mathcal{T}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda),$$

$$\text{dom}(\mathcal{M}_\mathcal{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda) : \lambda f(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H})\}.$$

Хорошо известно (см. [6, гл. 7]), что оператор $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ является самосопряжённым.

Пусть $T = T^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ — оператор с ac -спектром. Тогда прямой интеграл $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$ называется спектральным представлением оператора T , если существует изометрическое отображение V из $\mathfrak{H}$ в $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$, такое что $VTV^* = \mathcal{M}_\mathcal{T}$. Это означает, что для произвольного оператора $G (\in \mathcal{B}(\mathfrak{H}))$, коммутирующего с T , оператор $\mathcal{M}_\mathcal{T}(G) := VGV^*$ коммутирует с $\mathcal{M}_\mathcal{T}$, следовательно, является оператором умножения:

$$(\mathcal{M}_\mathcal{T}(G)f)(\lambda) := G_\mathcal{T}(\lambda)f(\lambda), \quad f \in L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda). \quad (1.4.1)$$

Здесь $\{G_\mathcal{T}(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — измеримое семейство операторов, $G_\mathcal{T}(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\lambda)$.

Также известно (см. [6]), что коммутант $\{\mathcal{M}_\mathcal{T}\}'$ оператора $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ состоит из ограниченных операторов вида (1.4.1), которые называются разложимыми. Оператор G в $\mathfrak{H}$ является унитарным тогда и только тогда, когда $G_\mathcal{T}(\lambda)$ является унитарным при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Замечание 1.4.1.

(i) Если $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, то в этом случае $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda) = L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H})$.

(ii) Пусть

$$\mathcal{F}_\mathcal{T} := \{\lambda \in \mathbb{R} : \dim \mathcal{H}_\lambda > 0\}.$$

Положим: $L^2(\mathcal{F}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda) := L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$. Если $\mathcal{H}_\lambda = \{0\}$ при $\lambda \in (-\infty, 0)$, и $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}$ при $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то тогда $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda) = L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda, \mathcal{H})$.

1.4.2 Матрица рассеяния

Как и выше, пусть A — плотно определённый замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с конечными индексами дефекта $n_{\pm}(A) = n < \infty$. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* , а $\gamma(\cdot)$ и $M(\cdot)$ — соответствующие γ -поле и функция Вейля соответственно. Пусть $A_0 = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0) = A_0^*$ и $A_{\Theta} = A^* \upharpoonright \Gamma^{-1}\Theta \in \text{Ext}_A$, где $\Theta = \Theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ (см. формулу (1.1.2)).

Поскольку $n_{\pm}(A) = n < \infty$, теорема Като-Розенблюма (см. [2, 26, 31]) гарантирует существование *волновых операторов*

$$W_{\pm}(A_{\Theta}, A_0) := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itA_{\Theta}} e^{-itA_0} P^{ac}(A_0)$$

и их полноту. Здесь $P^{ac}(A_0)$ обозначает ортогональную проекцию на ac -подпространство $\mathfrak{H}^{ac}(A_0)$ расширения A_0 . Полнота означает совпадение образов операторов $W_{\pm}(A_{\Theta}, A_0)$ с ac -подпространством $\mathfrak{H}^{ac}(A_{\Theta})$ расширения A_{Θ} , см. [17, 42, 112]. Оператор рассеяния $S(A_{\Theta}, A_0)$ системы рассеяния $\{A_{\Theta}, A_0\}$ определяется следующим образом:

$$S(A_{\Theta}, A_0) := W_{+}(A_{\Theta}, A_0)^* W_{-}(A_{\Theta}, A_0). \quad (1.4.2)$$

Оператор рассеяния рассматривается как оператор в $\mathfrak{H}^{ac}(A_0)$, является унитарным и коммутирует с ac -частью $A_0^{ac} := A_0 \upharpoonright \text{dom } A_0 \cap \mathfrak{H}^{ac}(A_0)$ оператора A_0 .

Поскольку индексы дефекта оператора A конечны, то пределы $M(\lambda) := \lim_{y \downarrow 0} M(\lambda + iy)$ существуют при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ в операторной норме пространства $\mathcal{H}$. Полагая

$$\mathcal{H}_{\lambda} := \overline{\text{ran}(\text{Im}(M(\lambda)))}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.4.3)$$

введём семейство $\mathcal{T} = \{\mathcal{H}_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ подпространств пространства $\mathcal{H}$, которые корректно определены для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ и измеримы. Пусть $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_{\lambda})$ — соответствующий прямой интеграл, ассоциированный с семейством подпространств $\{\mathcal{H}_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Тогда оператор рассеяния $S(A_{\Theta}, A_0)$ пары $\{A_{\Theta}, A_0\}$ индуцирует разложимый оператор ($S(A_{\Theta}, A_0)$ -матрицу) в $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_{\lambda})$ вида (1.4.1):

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(S(A_{\Theta}, A_0))f)(\lambda) := S_{\mathcal{T}}(A_{\Theta}, A_0; \lambda)f(\lambda), \quad f \in L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_{\lambda}).$$

Теорема 1.4.1 ([45, Теорема 3.8]). Пусть A — оператор, определённый выше, и пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* с соответствующей функцией Вейля $M(\cdot)$. Далее, пусть $\mathcal{T} = \{\mathcal{H}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — семейство, определённое формулой (1.4.3), $A_0 = A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0$, $A_\Theta = A^* \upharpoonright \Gamma^{-1}\Theta = A_\Theta^*$, и $S(A_\Theta, A_0)$ — оператор рассеяния системы $\{A_\Theta, A_0\}$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) Прямой интеграл $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$ является спектральным представлением A_0^{ac} .
- (ii) Пусть $\{S_{\mathcal{T}}(A_\Theta, A_0; \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — матрица рассеяния системы $\{A_\Theta, A_0\}$ относительно $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$. Тогда для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{T}}(A_\Theta, A_0; \lambda) \\ = I_{\mathcal{H}_\lambda} + 2i\sqrt{\operatorname{Im}(M(\lambda))}(\Theta - M(\lambda))^{-1}\sqrt{\operatorname{Im}(M(\lambda))} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\lambda). \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Замечание 1.4.2. В разделе 3.5.3 получилось так, что $\operatorname{Im}(M(\lambda))$ допускает разложение:

$$\operatorname{Im}(M(\lambda)) = Z(\lambda)^* Z(\lambda) \quad \text{для п.в.} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где $\{Z(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ является измеримым семейством ограниченных операторов $Z(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\lambda)$. В этом случае существует измеримое семейство $\{V(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ частичных изометрий из $\mathcal{Z}_\lambda := \overline{\operatorname{ran} Z(\lambda)}$ в $\mathcal{H}_\lambda$, таких что верно полярное разложение:

$$\sqrt{M(\lambda)} = V(\lambda)Z(\lambda) \quad \text{для п.в.} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.4.5)$$

Объединяя равенство (1.4.5) с представлением (1.4.4), получаем:

$$S_{\mathcal{T}}(A_\Theta, A_0)(\lambda) = I_{\mathcal{H}_\lambda} + 2iV(\lambda)Z(\lambda)(\Theta - M(\lambda))^{-1}Z(\lambda)^*V(\lambda)^*$$

для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Семейство подпространств $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ является измеримым. Введём прямой интеграл $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{Z}_\lambda)$ и оператор умножения:

$$(\mathcal{V}f)(\lambda) := V(\lambda)f(\lambda), \quad f \in L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{Z}_\lambda).$$

Действительно, $\mathcal{V}$ является изометрией из $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{Z}_\lambda)$ в $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}_\lambda)$, и $\mathcal{V}^* \mathcal{M}_\mathcal{T} \mathcal{V} = \mathcal{M}_\mathcal{Z}$, следовательно, прямой интеграл $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{Z}_\lambda)$ является также спектральным представлением A_0^{ac} . Далее, пусть $\{S_\mathcal{Z}(A_\Theta, A_0)(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ является $S(A_\Theta, A_0)$ -матрицей относительно $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{Z}_\lambda)$. Тогда

$$S_\mathcal{Z}(A_\Theta, A_0)(\lambda) = I_{\mathcal{Z}_\lambda} + 2iZ(\lambda)(\Theta - M(\lambda))^{-1}Z(\lambda)^* \quad \text{для п.в.} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Сравнивая с равенством (1.4.4), имеем:

$$S_\mathcal{T}(A_\Theta, A_0)(\lambda) = V(\lambda)S_\mathcal{Z}(A_\Theta, A_0)(\lambda)V(\lambda)^* \quad \text{для п.в.} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.5 Соболевские пространства с отрицательными показателями

В этом параграфе мы приведём некоторые факты о соболевских пространствах с отрицательными показателями, следуя [32, гл. 3]. В случае $1 < p < \infty$ существует два эквивалентных определения соболевских пространств с отрицательными показателями.

Определение 1.5.1. $W^{-k,p}(\Omega)$ является сопряжённым (дуальным) к пространству $W_0^{k,p'}(\Omega)$, где $p' = \frac{p}{p-1}$. Указанное пространство снабжено стандартной операторной нормой.

Определение 1.5.2. $W^{-k,p}(\Omega)$ является пространством распределений, представимых в следующем виде:

$$f(\cdot) = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\alpha(\cdot), \quad (1.5.1)$$

где каждое слагаемое $f_\alpha(\cdot) \in L^p(\Omega)$. Ассоциированная норма определяется следующим образом:

$$\|f\|_{W^{-k,p}(\Omega)} := \inf \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{L^p(\Omega)} \right\}. \quad (1.5.2)$$

Здесь точная нижняя грань берётся по всем представлениям вида (1.5.1).

Эквивалентность определений 1.5.1 и 1.5.2 (с точностью до изоморфизма) можно показать следующим образом. Пусть $u(\cdot) \in W_0^{k,p'}(\Omega)$. Тогда имеем дуальную пару:

$$(f, u) = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f_\alpha, u) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_\alpha(x) D^\alpha u(x) dx. \quad (1.5.3)$$

Строго говоря, равенство (1.5.3) выполняется для всех $u(\cdot) \in \mathcal{D}(\Omega)$ по определению обобщённой производной. В силу плотности пространства $\mathcal{D}(\Omega)$, равенство (1.5.3) выполняется для всех $u(\cdot) \in W_0^{k,p'}(\Omega)$. В свою очередь, это определяет ограниченное линейное отображение:

$$T : W^{-k,p}(\Omega) \longrightarrow \left(W_0^{k,p'}(\Omega) \right)^*. \quad (1.5.4)$$

Используя тот факт, что $L^p(\Omega) \cong \left(L^{p'}(\Omega) \right)^*$ (это показывается с помощью аналогичной дуальной пары), заключаем, что T — изоморфизм.

Отметим, что второе определение (см. Определение 1.5.2) является более естественным определением пространства Соболева с отрицательными показателями и остаётся верным при $1 \leq p \leq \infty$.

1.6 Крейновское расширение

Пусть A — плотно определённый замкнутый симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с равными индексами дефекта $n_\pm(A) = \dim \mathfrak{N}_\pm \leq \infty$, где $\mathfrak{N}_z := \ker(A^* - z)$ — дефектное подпространство.

Предположим, что оператор $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ является неотрицательным. Тогда во множестве $\text{Ext}_A(0, \infty)$ его неотрицательных расширений существуют максимальное (фридрихсово) и минимальное (крейновское) расширения, обозначаемые $\hat{A}_F$ и $\hat{A}_K$ соответственно.

Определение 1.6.1. Пусть T — самосопряжённый оператор в $\mathfrak{H}$ и $E_T(\cdot)$ — его разложение единицы (спектральная мера). Положим $\kappa_-(T) = \dim E_T(-\infty, 0)$. Говорят, что оператор T имеет κ отрицательных собственных значений, если $\kappa_-(T) = \kappa$.

В следующем предложении описываются все самосопряжённые расширения оператора $A \geq 0$ с конечным отрицательным спектром, в том числе, и неотрицательные расширения.

Предложение 1.6.1 ([62, 63]). Пусть A — плотно определённый неотрицательный симметрический оператор с конечными индексами дефекта в $\mathfrak{H}$, $n_{\pm}(A) = m < \infty$, и пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* . Пусть также $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) Существуют сильные резольвентные пределы:

$$M(0) := s - R - \lim_{x \uparrow 0} M(x), \quad M(-\infty) := s - R - \lim_{x \downarrow -\infty} M(x). \quad (1.6.1)$$

(ii) $\text{dom } A_0 \cap \text{dom } \hat{A}_K = \text{dom } A$ ($\text{dom } A_0 \cap \text{dom } \hat{A}_F = \text{dom } A$ соответственно) $\iff M(0) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ($M(-\infty) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ соответственно). Кроме того,

$$\begin{aligned} \text{dom } \hat{A}_K &= \text{dom } A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - M(0)\Gamma_0) \\ (\text{dom } \hat{A}_F &= \text{dom } A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - M(-\infty)\Gamma_0) \text{ соответственно}). \end{aligned}$$

(iii) $A_0 = \hat{A}_K$ ($A_0 = \hat{A}_F$) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 0} (M(x)f, f) &= +\infty, \quad f \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \\ (\lim_{x \downarrow -\infty} (M(x)f, f) &= -\infty, \quad f \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \text{ соответственно}). \end{aligned}$$

(iv) Если $A_0 = \hat{A}_F$, то имеет место следующее равенство:

$$\kappa_-(A_{C,D}) = \kappa_-(CD^* - DM(0)D^*). \quad (1.6.2)$$

В частности, $A_{C,D} \geq 0 \iff CD^* - DM(0)D^* \geq 0$.

Следствие 1.6.1 ([18, I, Теорема 14]). Если неотрицательный симметрический оператор A имеет замкнутое множество $\text{ran } A$, то $\text{dom } \hat{A}_K = \text{dom } A \dot{+} \mathfrak{N}_0$, и

$$\hat{A}_K(f + f_0) = Af \quad \text{для всех } f \in \text{dom } A, \quad f_0 \in \mathfrak{N}_0. \quad (1.6.3)$$

ГЛАВА 2

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СУММИРУЕМЫМИ МАТРИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

В этой главе предполагается, что потенциальная матрица $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, т.е. является самосопряжённой и суммируемой. Отметим, что самосопряжённость матрицы $Q(\cdot)$ подразумевает равенство $Q(x) = Q(x)^*$ для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим дифференциальное выражение:

$$\mathcal{L}_Q(f(x)) := -\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + Q(x)f(x), \quad f = (f_1, \dots, f_m)^\top, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.0.1)$$

В данной главе мы исследуем функцию Вейля, соответствующую расширению Дирихле $L^D := L_Q^D$ минимального оператора, порождённого выражением $\mathcal{L}_Q$. В частности, мы показываем, что положительная часть произвольного самосопряжённого расширения является чисто абсолютно непрерывной. Этот факт хорошо известен в случае скалярного оператора (см. [30, раздел 5.3]).

Также данный результат известен для матричного случая при условии, что $|Q|$ имеет конечный первый момент (см. [1, раздел 4.1]). Далее, мы показываем, что все реализации выражения $\mathcal{L}_Q$, в том числе, реализация Дирихле, имеют не более чем счётное число отрицательных собственных значений.

Отметим, что спектральной теории матричных операторов Штурма-Лиувилля посвящено множество работ. К примеру, в [56] была получена асимптотика матриц Вейля-Титчмарша, ассоциированных с матричнозначными операторами Шрёдингера общего вида, на полуоси. Несколько работ посвящены обратным задачам. Например, в [57] было получено обобщение классического результата Г. Борга с класса периодических скалярных потенциалов на случай безотражательных матричных потенциалов (см. также цитируемую литературу в [57]).

2.1 Асимптотические представления решений и специальные тождества

Рассмотрим следующее уравнение с неизвестной матричнозначной функцией $Y(x, z)$:

$$\mathcal{L}_Q(Y(x, z)) = zY(x, z), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.1.1)$$

Пусть $C(x, z)$ и $S(x, z)$ — решения уравнения (2.1.1), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$C(0, z) = S'(0, z) = I_m \quad \text{и} \quad S(0, z) = C'(0, z) = \mathbb{O}_m, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 2.1.1. Пусть $Q(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ и $Q(x) = Q(x)^*$ для п.в. $x \in \mathbb{R}_+$. При каждом $z = \lambda \in \mathbb{R}_+$ решения $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ представимы в следующем виде:

$$S(x, \lambda) = a_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} o_m(1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.1.2)$$

$$C(x, \lambda) = b_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} o_m(1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.1.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\lambda) &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \sin(t\sqrt{\lambda}) Q(t) S(t, \lambda) dt, \\ a_2(\lambda) &= I_m + \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\lambda}) Q(t) S(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

и

$$\begin{aligned} b_1(\lambda) &= I_m - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \sin(t\sqrt{\lambda}) Q(t) C(t, \lambda) dt, \\ b_2(\lambda) &= \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\lambda}) Q(t) C(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

а $o_m(1)$ — матрица порядка m с элементами $o(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widehat{\mathbb{C}}$ — комплексная плоскость с разрезом вдоль $[0, \infty)$. Для всех $z \in \widehat{\mathbb{C}}_0 := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ решение $S(x, z)$ уравнения (2.1.1) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$S(x, z) = \frac{\sin(x\sqrt{z})}{\sqrt{z}} I_m + \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^x \sin\{(x-t)\sqrt{z}\} Q(t) S(t, z) dt, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0. \quad (2.1.6)$$

Пусть $\sqrt{z} = \rho + i\beta$, где $\beta \geq 0$. Обозначим: $S_1(x, z) := e^{-\beta x} S(x, z)$. Подставляя данное выражение в (2.1.6), имеем:

$$S_1(x, z) = e^{-\beta x} \frac{\sin(x\sqrt{z})}{\sqrt{z}} I_m + \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^x e^{-\beta(x-t)} \sin\{(x-t)\sqrt{z}\} Q(t) S_1(t, z) dt.$$

Поскольку $|\cos x\sqrt{z}| \leq e^{\beta x}$ и $|\sin x\sqrt{z}| \leq e^{\beta x}$, получаем неравенство:

$$|S_1(x, z)| \leq \frac{1}{|\sqrt{z}|} + \frac{1}{|\sqrt{z}|} \int_0^x |Q(t)| \cdot |S_1(t, z)| dt, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где $|S_1(t, z)| = |S_1(t, z)|_m$ — матричная норма. Используя лемму Гронуолла, получаем:

$$|S_1(x, z)| \leq \frac{1}{|\sqrt{z}|} \exp \left\{ \frac{1}{|\sqrt{z}|} \int_0^x |Q(t)| dt \right\}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1.7)$$

Так как $Q \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, то матричнозначная функция $S_1(x, z)$ является ограниченной для всех $x \in \mathbb{R}_+$ и $z \in \widehat{\mathbb{C}}_0$.

Далее, пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда матричнозначная функция $S(x, \lambda)$ также ограничена. Поэтому из (2.1.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} S(x, \lambda) &= \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} I_m + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \sin\{(x-t)\sqrt{\lambda}\} Q(t) S(t, \lambda) dt + \\ &\quad + O_m \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_x^\infty |Q(t)| dt \right) = \\ &= a_1(\lambda) \cos x(\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

при $x \rightarrow \infty$, где $O_m(\alpha)$ — матрица порядка m с элементами $O(\alpha)$, а матрицы $a_1(\cdot)$ и $a_2(\cdot)$ заданы формулами (2.1.4). Поскольку интегралы сходятся равномерно по $\lambda \geq \varepsilon > 0$, функции $a_1(\cdot)$ и $a_2(\cdot)$ являются непрерывными по $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Чтобы доказать соотношение (2.1.3), заметим, что решение $C(\cdot, z)$ уравнения (2.1.1) удовлетворяет интегральному уравнению:

$$C(x, z) = \cos(x\sqrt{z})I_m + \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^x \sin\{(x-t)\sqrt{z}\} Q(t)C(t, z)dt, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0. \quad (2.1.9)$$

Полагая $C_1(x, z) := e^{-\beta x} C(x, z)$, подставляя это выражение в (2.1.9) и применяя лемму Гронуолла, получаем:

$$|C_1(x, z)| \leq \frac{1}{|\sqrt{z}|} \exp \left\{ \frac{1}{|\sqrt{z}|} \int_0^x |Q(t)| dt \right\}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1.10)$$

Подставляя полученное неравенство в (2.1.9), получаем (2.1.3). $\square$

Лемма 2.1.2. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $a_j(\cdot), b_j(\cdot), j \in \{1, 2\}$, — матричнозначные функции, заданные выражениями (2.1.4) и (2.1.5). Тогда верны следующие тождества:

$$a_1(\lambda)b_1(\lambda)^* = b_1(\lambda)a_1(\lambda)^*, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1.11)$$

$$a_2(\lambda)b_2(\lambda)^* = b_2(\lambda)a_2(\lambda)^*, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1.12)$$

$$a_2(\lambda)b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda)a_1(\lambda)^* = b_1(\lambda)a_2(\lambda)^* - a_1(\lambda)b_2(\lambda)^*, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя уравнение (2.1.6) по x , имеем:

$$S'(x, z) = \cos(x\sqrt{z})I_m + \int_0^x \cos\{(x-t)\sqrt{z}\} Q(t)S(t, z)dt, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в Лемме 2.1.1, приходим к соотношению:

$$S'(x, \lambda) = -a_1(\lambda)\sqrt{\lambda}\sin(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda)\cos(x\sqrt{\lambda}) + o_m(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.1.14)$$

$\lambda \in \mathbb{R}_+$. Аналогично получаем соотношение:

$$C'(x, \lambda) = -b_1(\lambda)\sqrt{\lambda}\sin(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda)\cos(x\sqrt{\lambda}) + o_m(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.1.15)$$

$\lambda \in \mathbb{R}_+$. Далее, введём фундаментальное матричное решение $W(x, z)$ уравнения (2.1.1), а также матрицу симметрии J :

$$W(x, z) := \begin{pmatrix} C(x, z) & S(x, z) \\ C'(x, z) & S'(x, z) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что имеют место следующие тождества:

$$W(z)JW(\bar{z})^* = W(\bar{z})^*JW(z) = J, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0, \quad (2.1.16)$$

см. [98]. Первое из этих соотношений приводит к следующим трём «скалярным» тождествам:

$$C(x, z)S(x, \bar{z})^* = S(x, z)C(x, \bar{z})^*, \quad (2.1.17)$$

$$C'(x, z)S'(x, \bar{z})^* = S'(x, z)C'(x, \bar{z})^*, \quad (2.1.18)$$

и

$$I_m = C(x, z)S'(x, \bar{z})^* - S(x, z)C'(x, \bar{z})^*. \quad (2.1.19)$$

Пусть $z = \lambda \in \mathbb{R}_+$. Подставляя выражения (2.1.2) и (2.1.3) для решений $S(x, z)$ и $C(x, z)$ в (2.1.17), получаем:

$$\begin{aligned} & \left(b_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) \times \\ & \times \left(a_1(\lambda)^* \cos(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda)^* \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) = \\ & = \left(a_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) \times \\ & \times \left(b_1(\lambda)^* \cos(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda)^* \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Данное тождество легко преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& \cos^2(x\sqrt{\lambda})(b_1(\lambda)a_1(\lambda)^* - a_1(\lambda)b_1(\lambda)^*) + \\
& + \frac{\sin^2(x\sqrt{\lambda})}{\lambda}(b_2(\lambda)a_2(\lambda)^* - a_2(\lambda)b_2(\lambda)^*) + \\
& + \frac{\sin(2x\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}(b_1(\lambda)a_2(\lambda)^* - a_1(\lambda)b_2(\lambda)^* + b_2(\lambda)a_1(\lambda)^* - a_2(\lambda)b_1(\lambda)^*) + \\
& + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}}\cos(x\sqrt{\lambda})(b_1(\lambda) - a_1(\lambda)) + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}(b_2(\lambda) - a_2(\lambda)) + \quad (2.1.20) \\
& + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}}\cos(x\sqrt{\lambda})(a_1(\lambda)^* - b_1(\lambda)^*) + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}(a_2(\lambda)^* - b_2(\lambda)^*) = 0.
\end{aligned}$$

Фиксируя $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и полагая в (2.1.20) $x_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{\lambda}}$, получаем:

$$\begin{aligned}
& b_1(\lambda)a_1(\lambda)^* - a_1(\lambda)b_1(\lambda)^* + \\
& + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}}(b_1(\lambda) - a_1(\lambda)) + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}}(a_1(\lambda)^* - b_1(\lambda)^*) = 0. \quad (2.1.21)
\end{aligned}$$

Переходя в полученном тождестве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем тождество (2.1.11).

Далее, полагая в (2.1.20) $x_k = \frac{2\pi k + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}$, имеем:

$$\begin{aligned}
& b_2(\lambda)a_2(\lambda)^* - a_2(\lambda)b_2(\lambda)^* + \\
& + \frac{o_m(1)}{\lambda}(b_2(\lambda) - a_2(\lambda)) + \frac{o_m(1)}{\lambda}(a_2(\lambda)^* - b_2(\lambda)^*) = 0. \quad (2.1.22)
\end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем тождество (2.1.12).

Наконец, полагая в (2.1.20) $x_k = \frac{\pi k + \frac{\pi}{4}}{\sqrt{\lambda}}$, и устремляя $k \rightarrow \infty$, получаем (2.1.13). $\square$

Лемма 2.1.3. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $a_j(\cdot)$ и $b_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, — матрицы, заданные соотношениями (2.1.4) и (2.1.5) соответственно. Тогда имеет место следующее тождество:

$$a_2(\lambda)b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda)a_1(\lambda)^* = b_1(\lambda)a_2(\lambda)^* - a_1(\lambda)b_2(\lambda)^* = I_m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя выражения (2.1.2) и (2.1.3) для $S(x, z)$ и $C(x, z)$ в (2.1.19) и полагая $z = \lambda \in \mathbb{R}_+$, получаем:

$$\begin{aligned} & \left(b_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) \times \\ & \times \left(-a_1(\lambda)^* \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda)^* \cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) - \\ & - \left(a_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) \times \\ & \times \left(-b_1(\lambda)^* \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda)^* \cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) = I_m. \end{aligned}$$

Данное соотношение очевидно эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} & a_2(\lambda) b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda) a_1(\lambda)^* + \\ & + \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) \sin(x\sqrt{\lambda}) (a_1(\lambda) b_1(\lambda)^* - b_1(\lambda) a_1(\lambda)^*) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(x\sqrt{\lambda}) \sin(x\sqrt{\lambda}) (b_2(\lambda) a_2(\lambda)^* - a_2(\lambda) b_2(\lambda)^*) + \\ & + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \cos(x\sqrt{\lambda}) (b_1(\lambda) + a_2(\lambda)^* - a_1(\lambda) - b_2(\lambda)) + \\ & + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) (b_1(\lambda)^* - a_1(\lambda)^*) + \\ & + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} (b_2(\lambda) - a_2(\lambda)) = I_m. \end{aligned}$$

С учетом тождеств (2.1.11) и (2.1.12), имеем:

$$\begin{aligned} & a_2(\lambda) b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda) a_1(\lambda)^* + \\ & + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \cos(x\sqrt{\lambda}) (b_1(\lambda) + a_2(\lambda)^* - a_1(\lambda) - b_2(\lambda)^*) + \\ & + o_m(1) \sin(x\sqrt{\lambda}) (b_1(\lambda)^* - a_1(\lambda)^*) + \\ & + \frac{o_m(1)}{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) (b_2(\lambda) - a_2(\lambda)) = I_m. \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и положим $x_k = \frac{2\pi k + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}$, $k \in \mathbb{N}$. Переходя в тождестве (2.1.24) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем:

$$a_2(\lambda) b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda) a_1(\lambda)^* = I_m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1.25}$$

т.е. первое тождество в (2.1.23). Второе тождество в (2.1.23) вытекает из первого тождества и соотношения (2.1.13). $\square$

В дальнейшем нам также понадобится вторая группа тождеств.

Лемма 2.1.4. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $a_j(\cdot)$ и $b_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, — матричнозначные функции, заданные выражениями (2.1.4) и (2.1.5). Тогда имеют место следующие тождества:

$$b_1(\lambda)^* a_2(\lambda) - b_2(\lambda)^* a_1(\lambda) = I_m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1.26)$$

$$b_1(\lambda)^* b_2(\lambda) = b_2(\lambda)^* b_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1.27)$$

$$a_1(\lambda)^* a_2(\lambda) = a_2(\lambda)^* a_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из второго тождества в (2.1.16) вытекает, что

$$C(x, \bar{z})^* S'(x, z) - C'(x, \bar{z})^* S(x, z) = I_m, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0, \quad (2.1.29)$$

и

$$C(x, \bar{z})^* C'(x, z) = C'(x, \bar{z})^* C(x, z), \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0, \quad (2.1.30)$$

$$S(x, z)^* S'(x, z) = S'(x, z)^* S(x, z), \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0. \quad (2.1.31)$$

Докажем тождество (2.1.26). Подставляя асимптотические выражения (2.1.2) – (2.1.3) и (2.1.14) – (2.1.15) для $S(x, z)$ и $C(x, z)$, а также для их производных, в (2.1.29), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(b_1(\lambda)^* \cos(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda)^* \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) \times \\ & \quad \times \left(-a_1(\lambda)\sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) - \\ & - \left(-b_1(\lambda)^* \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda)^* \cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) \times \\ & \quad \times \left(a_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \right) = I_m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Данное тождество легко преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& b_1(\lambda)^* a_2(\lambda) - b_2(\lambda)^* a_1(\lambda) + \\
& + \frac{o_m(1)}{\sqrt{\lambda}} \cos(x\sqrt{\lambda})(b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda)^* + a_2(\lambda) - a_1(\lambda)) + \\
& + o_m(1) \sin(x\sqrt{\lambda})(b_1(\lambda)^* - a_1(\lambda)) - \\
& - \frac{o_m(1)}{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda})(a_1(\lambda) + a_2(\lambda)) = I_m.
\end{aligned} \tag{2.1.32}$$

Переходя здесь к пределу при $x \rightarrow \infty$, получаем тождество (2.1.26).

Докажем тождество (2.1.27). Подставляя асимптотические выражения (2.1.2) – (2.1.3) и (2.1.14) – (2.1.15) для $S(x, \lambda)$, $C(x, \lambda)$, а также для их производных, в (2.1.30), имеем:

$$\begin{aligned}
& \left(b_1(\lambda)^* \cos(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda)^* \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + o_m(1) \right) \times \\
& \times \left(-b_1(\lambda) \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + o_m(1) \right) = \\
& = \left(-b_1(\lambda)^* \sqrt{\lambda} \sin(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda)^* \cos(x\sqrt{\lambda}) + o_m(1) \right) \times \\
& \times \left(b_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + o_m(1) \right).
\end{aligned}$$

Полагая здесь $x_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{\lambda}}$ и устремляя $k \rightarrow \infty$, получаем тождество (2.1.27).

Аналогичным образом из (2.1.31) вытекает тождество (2.1.28). $\square$

2.2 Исследование функции Вейля

Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Обозначим через $AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ множество локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$, т.е. $f \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, если $f \in AC[0, b]$ для всех $b \in \mathbb{R}_+$. Положим:

$$\begin{aligned}
Af &:= \mathcal{L}_Q(f), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad f \in \text{dom } A, \\
\text{dom } A &:= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}_Q(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \quad f(0) = f'(0) = 0 \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

и заметим (см. [2, 24]), что оператор A совпадает с минимальным оператором $L_{\min} := L_{Q,\min}$, ассоциированным с выражением $\mathcal{L}_Q$. Сопряжённый оператор A^* имеет вид:

$$\begin{aligned} A^*f &:= \mathcal{L}_Q(f), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad f \in \operatorname{dom} A^*, \\ \operatorname{dom} A^* &:= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}_Q(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

и совпадает с максимальным оператором $L_{\max} := L_{Q,\max}$, ассоциированным с $\mathcal{L}_Q$ (см. [2, 24]). Важно отметить, что оператор A является простым.

Далее, определим реализацию (расширение) Дирихле $L^D := L_Q^D$ выражения (2.0.1) следующим образом:

$$\operatorname{dom} L^D := \{f \in \operatorname{dom} A^* : f(0) = 0\}. \quad (2.2.3)$$

Лемма 2.2.1. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Тогда совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0 f = f(0), \quad \Gamma_1 f = f'(0), \quad f = (f_1, \dots, f_m)^\top \in \operatorname{dom} L_{\max}, \quad (2.2.4)$$

образует граничную тройку для оператора $A^* = L_{\max}$.

Доказательство Леммы 2.2.1 проводится прямым вычислением по Определению 1.1.1.

Предложение 2.2.1. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $M(\cdot)$ — функция Вейля, соответствующая граничной тройке (2.2.4). Тогда верны следующие утверждения:

(i) Матричнозначные функции

$$N_0(z) = \frac{I_m}{2i\sqrt{z}} + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} Q(t) S(t, z) dt, \quad (2.2.5)$$

и

$$N_1(z) = \frac{I_m}{2} - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} Q(t) C(t, z) dt, \quad (2.2.6)$$

являются корректно определёнными в $\widehat{\mathbb{C}}_0$, а также непрерывны и голоморфны в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

(ii) Имеет место равенство:

$$N_0(z)M(z) = N_1(z), \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (2.2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Свойства функций $N_0(\cdot)$ и $N_1(\cdot)$ напрямую вытекают из оценок (2.1.7) и (2.1.10).

(ii) Зафиксируем $z \in \mathbb{C}_+$ и будем рассматривать $\sqrt{z} = \rho + i\beta$, $\beta > 0$ — главную ветвь функции квадратного корня. Тогда из (2.1.6) следует, что

$$\begin{aligned} S(x, z) = & -\frac{e^{-ix\sqrt{z}}}{2i\sqrt{z}}I_m + O_m(e^{-\beta x}) - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{-i(x-t)\sqrt{z}} Q(t)S(t, z)dt + \\ & + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_x^\infty e^{-i(x-t)\sqrt{z}} Q(t)S(t, z)dt + O_m\left(\int_0^x e^{-\beta(x-t)} |Q(t)S(t, z)| dt\right) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

при $x \rightarrow \infty$. Поскольку $Q \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, из (2.1.7) вытекает следующая оценка, верная при $x \rightarrow \infty$ и всех $z \in \mathbb{C}_+$:

$$|S(x, z)| = e^{\beta x} |S_1(x, z)| \leq \frac{1}{|\sqrt{z}|} e^{\beta x} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^x |Q(t)| dt\right) = O_m(e^{\beta x}). \quad (2.2.9)$$

Из очевидного тождества $|e^{-i(x-t)\sqrt{z}}| = e^{(x-t)\beta}$ следует, что

$$\begin{aligned} O_m\left(\int_0^x e^{-\beta(x-t)} |Q(t)S(t, z)| dt\right) &= O_m\left(\int_0^x e^{\beta(2t-x)} |Q(t)| dt\right) = \\ &= O_m\left(e^{\beta(x-2\delta)} \int_0^{x-\delta} |Q(t)| dt\right) + O_m\left(e^{\beta x} \int_{x-\delta}^x |Q(t)| dt\right) = o_m(e^{\beta x}) \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{C}_+$. Кроме того, неравенство (2.2.9) влечёт соотношение:

$$\int_x^\infty e^{-i(x-t)\sqrt{z}} Q(t)S(t, z)dt = O_m\left(e^{\beta x} \int_x^\infty |Q(t)| dt\right) = o_m(e^{\beta x}),$$

выполняющееся при $x \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{C}_+$. Учитывая полученные соотношения, получаем следующую асимптотическую оценку:

$$S(x, z) = e^{-ix\sqrt{z}} \{-N_0(z) + o_m(1)\}, \quad x \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (2.2.10)$$

где $N_1(\cdot)$ задаётся выражением (2.2.5).

Аналогичным образом из (2.1.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} C(x, z) = & \frac{e^{-ix\sqrt{z}}}{2z} I_m + O_m(e^{-\beta x}) - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{-i(x-t)\sqrt{z}} Q(t) C(t, z) dt + \\ & + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_x^\infty e^{-i(x-t)\sqrt{z}} Q(t) C(t, z) dt + O_m\left(\int_0^x e^{-\beta(x-t)} |Q(t) C(t, z)| dt\right) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

при $x \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{C}_+$. Кроме того, неравенство (2.1.10) влечёт соотношение $|C(x, z)| = O_m(e^{\beta x})$, выполняющееся при $x \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{C}_+$. Используя полученные соотношения и повторяя те же рассуждения, что и выше, имеем аналогичную асимптотическую оценку для решения $C(\cdot, z)$:

$$C(x, z) = e^{-ix\sqrt{z}} \{N_1(z) + o_m(1)\}, \quad x \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (2.2.12)$$

где $N_1(\cdot)$ задаётся выражением (2.2.6).

Подчеркнём, что в отличие от функций $a_k(\cdot)$, $b_k(\cdot)$, $k \in \{1, 2\}$, определённых на полуоси $\mathbb{R}_+$, функции $N_j(\cdot)$, $j \in \{0, 1\}$, являются корректно определёнными и голоморфными в полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

Нетрудно видеть, что решение Вейля уравнения (2.1.1) имеет вид:

$$Y(x, z) = C(x, z) + S(x, z)M(z) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}),$$

где $M(\cdot)$ — функция Вейля, соответствующая граничной тройке (2.2.4). Вместе с асимптотическими соотношениями (2.2.10) и (2.2.12) данное представление влечёт соотношение:

$$e^{-ix\sqrt{z}}(N_2(z) - N_1(z)M(z) + o_m(1)) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}).$$

Поскольку $e^{-ix\sqrt{z}} \notin L^2(0, \infty)$ при $z \in \mathbb{C}_+$, то из последней оценки вытекает равенство (2.2.7). $\square$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства функций $N_0(\cdot)$ и $N_1(\cdot)$.

Лемма 2.2.2. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $N_0(\cdot)$ и $N_1(\cdot)$ — функции, заданные выражениями (2.2.5) и (2.2.6) соответственно. Тогда верны утверждения:

(i) Следующие некасательные пределы

$$\begin{aligned} N_0(\lambda) &= \lim_{z \rightarrow \infty} N_0(z) = -\frac{1}{2}a_1(\lambda) - \frac{ia_2(\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}, \\ N_1(\lambda) &= \lim_{z \rightarrow \infty} N_1(z) = \frac{1}{2}b_1(\lambda) + \frac{ib_2(\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

существуют и являются обратимыми матричнозначными функциями при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Для каждого отрезка $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ существует прямоугольник $\mathcal{R}(a, b, \varepsilon) := [a, b] \times [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, такой что $N_0(\cdot)^{-1}$ и $N_1(\cdot)^{-1}$ существуют и непрерывны в $\mathcal{R}(a, b, \varepsilon)$. В частности, при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ верны соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} N_0(z)^{-1} &= N_0(\lambda)^{-1}, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} N_1(z)^{-1} &= N_1(\lambda)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

(iii) При всех $\lambda \in \mathbb{R}_- := (-\infty, 0)$ верны равенства:

$$\begin{aligned} N_0(\lambda) &= \lim_{z \rightarrow \infty} N_0(z) = -\frac{I_m}{2\sqrt{|\lambda|}} - \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{|\lambda|}t} Q(t) S(t, \lambda) dt, \\ N_1(\lambda) &= \lim_{z \rightarrow \infty} N_1(z) = \frac{I_m}{2} + \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{|\lambda|}t} Q(t) C(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Вторые равенства в (2.2.13) вытекают из определений (2.1.4) и (2.1.5).

(ii) Покажем, что $\ker N_0(\lambda) = \{0\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Из (2.2.13) и тождества (2.1.28) следует, что

$$\begin{aligned} N_0(\lambda)^* N_0(\lambda) &= \frac{1}{4} \left(a_1(\lambda)^* - i \frac{a_2(\lambda)^*}{\sqrt{\lambda}} \right) \left(a_1(\lambda) + i \frac{a_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\lambda} (\lambda a_1(\lambda)^* a_1(\lambda) + a_2(\lambda)^* a_2(\lambda)) + \frac{i}{4\sqrt{\lambda}} (a_1(\lambda)^* a_2(\lambda) - a_2(\lambda)^* a_1(\lambda)) = \\ &= \frac{1}{4\lambda} \left[\lambda a_1(\lambda)^* a_1(\lambda) + a_2(\lambda)^* a_2(\lambda) \right] \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

В то же время, из (2.1.26) вытекает, что $\ker a_1(\lambda) \cap \ker a_2(\lambda) = \{0\}$. С учётом (2.2.16) получаем, что $\ker N_0(\lambda) = \{0\}$ при $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Поэтому для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ существует обратная матрица $N_0(\lambda)^{-1}$. Поскольку $N_0(z)$ непрерывна в $\widehat{\mathbb{C}}_0$, получаем, что для произвольного замкнутого промежутка $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ найдётся достаточно малое $\varepsilon > 0$, такое что матричнозначная функция $N_0(z)$ является обратимой и непрерывной в прямоугольнике $\mathcal{R}(a, b, \varepsilon)$.

Покажем, что $\ker N_1(\lambda) = \{0\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Из второго тождества в (2.2.13) аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned} N_1(\lambda)^* N_1(\lambda) &= \frac{1}{4} \left(b_1(\lambda)^* - i \frac{b_2(\lambda)^*}{\sqrt{\lambda}} \right) \left(b_1(\lambda) + i \frac{b_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\lambda} (\lambda b_1(\lambda)^* b_1(\lambda) + b_2(\lambda)^* b_2(\lambda)) + \frac{i}{4\sqrt{\lambda}} (b_1(\lambda)^* b_2(\lambda) - b_2(\lambda)^* b_1(\lambda)) = \\ &= \frac{1}{4\lambda} \left[\lambda b_1(\lambda)^* b_1(\lambda) + b_2(\lambda)^* b_2(\lambda) \right] \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Далее, сопрягая тождество (2.1.26), имеем: $\ker b_1(\lambda) \cap \ker b_2(\lambda) = \{0\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. С учётом (2.2.17) получаем, что $\ker N_1(\lambda) = \{0\}$ при $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Существование прямоугольника $\mathcal{R}(a, b, \varepsilon)$ может быть показано аналогично (см. доказательство выше). Далее, соотношения (2.2.14) следуют напрямую из существования $\mathcal{R}(a, b, \varepsilon)$.

(iii) Соотношения (2.2.15) вытекают из определений (2.2.5) и (2.2.6). □

Теорема 2.2.1. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также L^D — реализация Дирихле, заданная выражением (2.2.3), и пусть $M(\cdot)$ — функция

Вейля, соответствующая граничной тройке (2.2.4). Тогда верны следующие утверждения:

- (i) Некасательные пределы $M(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} M(z)$ существуют для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и равны

$$\begin{aligned} M(\lambda + i0) &= N_0(\lambda)^{-1} N_1(\lambda) = \\ &= - \left(\sqrt{\lambda} a_1(\lambda) + i a_2(\lambda) \right)^{-1} \left(\sqrt{\lambda} b_1(\lambda) + i b_2(\lambda) \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

В частности, верно соотношение:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(M(\lambda + i0)) &= \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} (N_1(\lambda)^* N_1(\lambda))^{-1} = \\ &= \sqrt{\lambda} (\lambda a_1(\lambda)^* a_1(\lambda) + a_2(\lambda)^* a_2(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

- (ii) Детерминант $d_0(z) = \det(N_0(z))$ — голоморфная в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ функция и множество её нулей Λ_0 является дискретным. Функция Вейля допускает представление:

$$M(z) = N_0(z)^{-1} N_1(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_1. \quad (2.2.20)$$

- (iii) Соответствующая спектральная мера $\Sigma_M(\cdot)$ (см. (1.1.7)) на полуоси $\mathbb{R}_+$ задаётся выражением:

$$\begin{aligned} \Sigma_M(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \sqrt{t} (t a_1(t)^* a_1(t) + a_2(t)^* a_2(t))^{-1} dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{t}} (N_0(t)^* N_0(t))^{-1} dt. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

В частности, $\Sigma_M(\cdot)$ является абсолютно непрерывной с непрерывной плотностью $d\Sigma_M(\lambda)/d\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, максимального ранга.

- (iv) Оператор L^D является полуограниченным снизу и его отрицательный спектр либо конечен, либо является счётным с предельной точкой в

нуле. Неотрицательная часть оператора L^D является чисто абсолютно непрерывной, т.е. $L_{ac}^D = E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ и $N_{L_{ac}^D}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. В частности, $\sigma_{ac}(L^D) = [0, \infty)$, $\sigma_{sc}(L^D) = \sigma_{pp}(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$, и $\sigma_{pp}(L^D) \cap \mathbb{R}_- \subseteq \Lambda_1 \cap \mathbb{R}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для произвольного замкнутого промежутка $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ найдется $\varepsilon > 0$, такое что обратная матрица $N_0(z)^{-1}$ существует и непрерывна. Из (2.2.7) следует представление функции Вейля:

$$M(z) = N_0(z)^{-1}N_1(z), \quad z \in \mathcal{R}(a, b, \varepsilon).$$

Из (2.2.14) следует существование предела $M(\lambda + i0) = \lim_{z \rightarrow \lambda} M(z)$ и

$$M(\lambda + i0) = \lim_{z \rightarrow \lambda} M(z) = N_0(\lambda)^{-1}N_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2.22)$$

Подставляя (2.2.13) в (2.2.22), получаем (2.2.18).

Вычислим мнимую часть: $M_I(\lambda + i0) := \text{Im}(M(\lambda + i0))$. Из (2.2.18) вытекает, что

$$M_I(\lambda + i0) = \frac{1}{2i}N_0(\lambda)^{-1} \left(N_1(\lambda)N_0(\lambda)^* - N_0(\lambda)N_1(\lambda)^* \right) (N_0(\lambda)^*)^{-1}.$$

Также заметим, что

$$\begin{aligned} & N_1(\lambda)N_0(\lambda)^* - N_0(\lambda)N_1(\lambda)^* = \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(b_1(\lambda) + i \frac{b_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \right) \left(-a_1(\lambda)^* + i \frac{a_2(\lambda)^*}{\sqrt{\lambda}} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(a_1(\lambda) + i \frac{a_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \right) \left(b_1(\lambda)^* - i \frac{b_2(\lambda)^*}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[(a_1(\lambda)b_1(\lambda)^* - b_1(\lambda)a_1(\lambda)^*) + \frac{a_2(\lambda)b_2(\lambda)^* - b_2(\lambda)a_2(\lambda)^*}{\lambda} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \left(b_1(\lambda)a_2(\lambda)^* - a_1(\lambda)b_2(\lambda)^* + a_2(\lambda)b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda)a_1(\lambda)^* \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя тождества (2.1.11), (2.1.12), (2.1.23) и (2.1.28), имеем:

$$N_1(\lambda)N_0(\lambda)^* - N_0(\lambda)N_1(\lambda)^* = \frac{2i}{4\sqrt{\lambda}}I_m,$$

что влечёт

$$M_I(\lambda + i0) = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} N_0(\lambda)^{-1} (N_0(\lambda)^*)^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} (N_0(\lambda)^* N_0(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2.23)$$

Таким образом доказано первое равенство в (2.2.19). Подставляя (2.2.16) в это выражение, получаем второе равенство в (2.2.19).

Отметим, что функции $a_j(\cdot)$ являются непрерывными на полуоси $\mathbb{R}_+$.

(ii) Поскольку функция $N_0(\cdot)$ является голоморфной в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, её детерминант $d_0(\cdot)$ также является голоморфной в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ функцией. Следовательно, множество её нулей Λ_0 является дискретным. Следовательно, соотношение (2.2.20) вытекает из (2.2.7).

(iii) Так как нормальный предел $M(\lambda + i0)$ существует при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, формула (2.2.21) следует из обратной формулы Стильеса, или же из теоремы Фату.

(iv) Поскольку предел $M(\lambda + i0)$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ является обратимым, из Предложения 1.2.1 вытекает, что $[0, \infty) \subseteq \sigma_{ac}(L^D)$. Также из Теоремы 1.2.1 (i) следует, что $\sigma_{pp}(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$. Наконец, Теорема 1.2.1 (ii) влечёт, что $\sigma_{sc}(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$. Следовательно, L^D не имеет положительного сингулярного спектра, и положительная часть $E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ является чисто абсолютно непрерывной. Из Предложения 1.3.2 следует, что $N_{A_0^{ac}}(\lambda) = N_{L^D}(\lambda) = m$ при $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Отсюда вытекает, что положительная часть $E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ является чисто абсолютно непрерывной с постоянной кратностью m .

Так как представление (2.2.20) является верным для всех точек из $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, не лежащих в Λ_0 , нетрудно видеть, что

$$M(\lambda + i0) = \lim_{z \rightarrow \lambda} M(z) = N_0(\lambda)^{-1} N_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_- \setminus \Lambda_0, \quad \mathbb{R}_- := (-\infty, 0),$$

где $N_0(\lambda)$ и $N_1(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_-$, задаются выражениями (2.2.15). Следовательно, $M(\cdot)$ является голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \{(\Lambda_0 \cap \mathbb{R}_-) \cup [0, \infty)\}$. Это сразу же влечёт, что $\text{Im}(M(\lambda + i0)) = 0$ при $\lambda \in \mathbb{R}_- \setminus \Lambda_0$. Из Теоремы 1.2.1 (ii) – (iii) вытекает, что $\sigma_{sc}(L^D) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$ и $\sigma_{ac}(L^D) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$. Следовательно, $\sigma_{sc}(L^D) = \emptyset$, $\sigma_{ac}(L^D) = [0, \infty)$ и $\sigma_{pp}(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$. Однако, $\sigma_{pp}(L^D) \subseteq \Lambda_0 \cap \mathbb{R}_-$.

Остаётся показать, что L^D является полуограниченным. Для этого покажем, что множество Λ_0 является ограниченным снизу. Из (2.2.15) и оценки (2.1.7) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 2\sqrt{|\lambda|}N_0(\lambda) = -I_m. \quad (2.2.24)$$

Предположим, что Λ_0 не является ограниченным снизу. Тогда найдётся последовательность $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\lambda_k \in \Lambda_0 \cap \mathbb{R}_-$, стремящаяся к $-\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает: $\lim_{k \rightarrow \infty} 2\sqrt{|\lambda_k|}N_0(\lambda_k) = 0$, что противоречит (2.2.24). $\square$

Следствие 2.2.1. Пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ — произвольное самосопряжённое расширение минимального оператора A , и $\tilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ — граничная тройка для A^* , такая что $\tilde{A} = A^* \upharpoonright \ker \tilde{\Gamma}_0$. Пусть $\tilde{M}(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) Предел $\tilde{M}(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} \tilde{M}(z)$ существует при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и его мнимая часть $\tilde{M}_I(\lambda + i0)$ является положительно определённой. Кроме того, соответствующая спектральная мера $\Sigma_{\tilde{M}}$ имеет вид:

$$\Sigma_{\tilde{M}}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda (M(t)^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} M_I(t) (X_{21} M(t) + X_{22})^{-1} dt, \quad \lambda > 0. \quad (2.2.25)$$

- (ii) Операторы $E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_+) \tilde{A}$ и $E_{L^D}(\mathbb{R}_+) L^D$ унитарно эквивалентны и, следовательно, $\tilde{A}^{ac} = E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_+) \tilde{A}$, а также $N_{\tilde{A}^{ac}}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Кроме того, $\sigma_{ac}(\tilde{A}) = [0, \infty)$ и $\sigma_{sc}(\tilde{A}) = \sigma_{pp}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Также оператор $\tilde{A}$ является полуограниченным снизу и его отрицательный спектр либо конечен, либо образует счётную последовательность с предельной точкой в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Выберем граничную тройку $\tilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ для A^* так, чтобы $\tilde{A} = A^* \upharpoonright \ker \tilde{\Gamma}_0$. Согласно Предложению 1.1.2, существует J -унитарная матрица $X = (X_{ij})_{i,j=1}^2$, такая что имеет место соотношение

(1.1.8). Если $\widetilde{M}(\cdot)$ — функция Вейля, соответствующая граничной тройке $\widetilde{P}$, то тогда $0 \in \rho(X_{21}M(z) + X_{22})$, и

$$\widetilde{M}(z) = X(M(z)) := (X_{11}M(z) + X_{12})(X_{21}M(z) + X_{22})^{-1}, \quad z \in \rho(\widetilde{A}). \quad (2.2.26)$$

Обозначим через $\mathbb{C}_+^{m \times m}$ множество строго диссипативных матриц порядка m , т.е.

$$\mathbb{C}_+^{m \times m} := \{T \in \mathbb{C}^{m \times m} : T_I = (2i)^{-1}(T - T^*) \geq \varepsilon = \varepsilon(T) > 0\}.$$

По Теореме 2.2.1 предел $M(\lambda) := \lim_{z \rightarrow \infty} M(z)$ существует для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $M(\lambda) \in \mathbb{C}_+^{m \times m}$. С учётом теоремы Крейна-Шмудляна (см. [19, Теорема 4.1]), получаем:

$$0 \in \rho(X_{21}M(\lambda) + X_{22}) \quad \text{и} \quad X(M(\lambda)) \in \mathbb{C}_+^{m \times m}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2.27)$$

Следовательно,

$$\widetilde{M}(\lambda) := \lim_{z \rightarrow \infty} \widetilde{M}(z) = (X_{11}M(\lambda) + X_{12})(X_{21}M(\lambda) + X_{22})^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2.28)$$

С учётом свойства J -унитарности матрицы $X = (X_{ij})_{i,j=1}^2$, из (2.2.28) следует, что

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_I(\lambda) &:= (2i)^{-1} \widetilde{M}(\lambda) = \\ &= (M(\lambda)^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} M_I(\lambda) (X_{21}M(\lambda) + X_{22})^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Теперь (2.2.25) следует из (2.2.29) и формулы обращения Стилтеса.

(ii) Доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения (iv) Теоремы 2.2.1. $\square$

Замечание 2.2.1. Теорема 2.2.1 обобщает классический результат Титчмарша (см. [30, раздел 5.3]) на случай оператора Шрёдингера с матричным суммируемым потенциалом и совпадает с ним в скалярном случае ($m = 1$).

Замечание 2.2.2. Если потенциальная матрица $Q(\cdot)$ имеет конечный первый момент, т.е. $\int_{\mathbb{R}_+} x|Q(x)|dx < \infty$, то тогда положительная часть $E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ оператора L^D является чисто абсолютно непрерывной постоянной кратности m . Кроме того, в этом случае точечный спектр $\sigma_p(L^D) = \sigma_p(L^D) \cap \mathbb{R}_-$ является конечным (см. [1, Теорема 2.1.1]).

ГЛАВА 3

КВАНТОВЫЕ ГРАФЫ С СУММИРУЕМЫМИ МАТРИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

В данной главе мы обобщаем результаты предыдущей главы на случай квантовых графов. Будем рассматривать случай конечного некомпактного графа, т.е. имеющего конечное число вершин и рёбер (как конечной длины, так и бесконечной). Предполагается, что на каждом ребре такого графа задан суммируемый матричный потенциал.

3.1 Построение квантового графа

Прежде всего опишем построение квантового графа. Пусть $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ — некомпактный метрический связный граф, состоящий из конечного числа рёбер $\mathcal{E}$ и вершин $\mathcal{V}$. Поскольку граф $\mathcal{G}$ является некомпактным, найдётся хотя бы одно ребро бесконечной длины. Для двух вершин $v, u \in \mathcal{V}$ будем обозначать $v \sim u$, если существует ребро $e_{u,v} \in \mathcal{E}$, соединяющее вершину v с вершиной u . Для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ обозначим множество инцидентных ей рёбер через $\mathcal{E}_v$, а величину

$$\deg(v) := |\mathcal{E}_v| = \#\{e : e \in \mathcal{E}_v\} \quad (3.1.1)$$

будем называть степенью вершины $v \in \mathcal{V}$. Вершины, для которых $\deg(v) = 1$, называются висячими. Обозначим через $\mathcal{P}$ путь длины $n \in \mathbb{N}$, представляющий собой подмножество вершин $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset \mathcal{V}$, таких что n вершин $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ являются попарно различными, и $v_{k-1} \sim v_k$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Граф $\mathcal{G}$ называется связным, если для любых двух вершин u и v существует путь $\mathcal{P} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, соединяющий u и v , т.е. $u = v_0$ и $v = v_n$.

Каждое конечное ребро $e \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$ будем ассоциировать с его длиной $|e| \in (0, \infty)$ и направлением, т.е. каждое конечное ребро $e \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$ имеет начальную вершину v_o и конечную вершину v_{in} . Также будем ассоциировать каждое бесконечное ребро $e \in \mathcal{E}_{\infty}$ с промежутком $[0, \infty)$, а конечное ребро $e \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$ — с отрезком $[0, |e|]$; обозначим также $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{fin}} \cup \mathcal{E}_{\infty}$. В дальнейшем будем предпола-

гатель, что граф $\mathcal{G}$ состоит из $p_1 > 0$ бесконечных рёбер и $p_2 \geq 0$ конечных рёбер, т.е. $|\mathcal{E}_\infty| = p_1$ и $|\mathcal{E}_{\text{fin}}| = p_2$, также положим $p := p_1 + p_2$. Обозначим через $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ максимальный компактный подграф метрического графа $\mathcal{G}$, т.е. состоящий из p_2 конечных рёбер. Кроме того, на каждом конечном ребре введем координату x , рассматривая данное ребро в качестве ограниченного промежутка. Рассмотрим подмножество $\mathcal{V}_{\text{ext}}$ вершин графа $\mathcal{G}_0$, к которым «присоединена» одна или более «копий» полуоси $[0, \infty)$. Такие вершины будем называть внешними; точка 0 на каждом бесконечном ребре ассоциируется с соответствующей внешней вершиной. Обозначим через $\mathcal{V}_{\text{int}} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_{\text{ext}}$ множество внутренних вершин.

Теперь введём гильбертово пространство $L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$, состоящее из функций $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}^m$, следующим образом:

$$L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m) = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} L^2(e; \mathbb{C}^m) = \{f = \{f_e\}_{e \in \mathcal{E}} : f_e \in L^2(e; \mathbb{C}^m)\}, \quad (3.1.2)$$

где

$$f_e = (f_{e,1}, \dots, f_{e,m})^\top = \begin{pmatrix} f_{e,1} \\ \vdots \\ f_{e,m} \end{pmatrix} \in L^2(e; \mathbb{C}^m). \quad (3.1.3)$$

Введём оператор Штурма-Лиувилля на графе $\mathcal{G}$. Будем предполагать, что на каждом ребре $e \in \mathcal{E}$ (конечном и бесконечном) задана потенциальная матричнозначная функция

$$Q_e(\cdot) = Q_e(\cdot)^* \in L^1(e; \mathbb{C}^{m \times m}), \quad (3.1.4)$$

и равенство (3.1.4) выполняется для п.в. $x \in e$.

На каждом ребре $e \in \mathcal{E}$ рассмотрим максимальный оператор $A_{e,\text{max}}$, ассоциированный с дифференциальным выражением Штурма-Лиувилля

$$\mathcal{A}_e := -\frac{d^2}{dx^2} + Q_e \quad (3.1.5)$$

на области:

$$\text{dom } A_{e,\text{max}} = \left\{ f_e \in L^2(e; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f_e, f'_e \in AC_{\text{loc}}(e; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{A}_e(f_e) \in L^2(e; \mathbb{C}^m), \end{array} \right\}, \quad e \in \mathcal{E}. \quad (3.1.6)$$

Хорошо известно (см., например, [16, Предложение 9.5(i)]), что для каждого конечного ребра $e \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$ оператор $A_{e,\text{max}}$ имеет следующее свойство регулярности:

$$\text{dom } A_{e,\text{max}} = \{f_e \in W^{2,1}(e; \mathbb{C}^m) : \mathcal{A}_e(f_e) \in L^2(e; \mathbb{C}^m)\} \subset W^{2,1}(e; \mathbb{C}^m). \quad (3.1.7)$$

Поэтому существуют предельные значения $f_e(v_o), f_e(v_{in}), f'_e(v_o), f'_e(v_{in})$ для каждого ребра $e \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$. Кроме того, свойство регулярности, аналогичное соотношению (3.1.7), остаётся верным для бесконечных рёбер $e \in \mathcal{E}_{\infty}$, если $Q_e \in L^1(e; \mathbb{C}^{m \times m})$. Поэтому существуют предельные значения $f_e(v), f'_e(v)$ для всех рёбер $e \in \mathcal{E}_{\infty}$ и внешних вершин $v \in \mathcal{V}_{\text{ext}}$.

Также для каждого ребра $e \in \mathcal{E}$ определим минимальный оператор $A_e := A_{e,\text{min}}$, ассоциированный в $L^2(e; \mathbb{C}^m)$ с дифференциальным выражением (3.1.5). В случае бесконечного ребра $e \in \mathcal{E}_{\infty}$ область минимального оператора A_e имеет вид:

$$\text{dom } A_e = \{f_e \in \text{dom } A_{e,\text{max}} : f_e(v) = f'_e(v) = 0, \quad v \in \mathcal{V}_{\text{ext}}\}. \quad (3.1.8)$$

В случае конечного ребра $e \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$ область оператора A_e имеет вид:

$$\text{dom } A_e = \{f_e \in \text{dom } A_{e,\text{max}} : f_e(v_o) = f_e(v_{in}) = f'_e(v_o) = f'_e(v_{in}) = 0\}. \quad (3.1.9)$$

Ясно, что A_e является замкнутым симметрическим оператором, и $A_e^* = A_{e,\text{max}}$.

Также отметим, что в случае потенциала $Q_e(\cdot) \in L^2(e; \mathbb{C}^{m \times m})$, вместо (3.1.7) имеем соотношение: $\text{dom } A_{e,\text{max}} = W^{2,2}(e; \mathbb{C}^m)$, $e \in \mathcal{E}$.

Наконец, в пространстве $L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$ определим замкнутый минимальный симметрический оператор

$$A := A_{\text{min}} := \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} A_e = A_{\mathcal{E}_{\infty}} \bigoplus A_{\mathcal{E}_{\text{fin}}}, \quad (3.1.10)$$

ассоциированный с выражением $\mathcal{A} := \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} \mathcal{A}_e$. Поскольку $A_{e,\text{max}} = A_e^*$, $e \in \mathcal{E}$, то сопряжённый оператор имеет вид: $A^* = A_{\text{max}} = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} A_e^*$.

3.2 Отсутствие сингулярного непрерывного спектра

Теперь сформулируем основной результат данного параграфа. Главный эффект состоит в том, что произвольное самосопряжённое расширение

$\tilde{A} \in \text{Ext}_A$ не обладает сингулярным непрерывным спектром.

Теорема 3.2.1. Пусть граф $\mathcal{G}$ состоит из $p_1 > 0$ бесконечных рёбер и $p_2 \geq 0$ конечных рёбер. Пусть $Q_{e_j} := Q_j \in L^1(e_j; \mathbb{C}^{m \times m})$ при $j \in \{1, \dots, p\}$. Пусть также $\tilde{A}$ — произвольное самосопряжённое расширение минимального оператора $A := \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} A_e$, заданного выражением (3.1.10). Тогда:

- (i) Сингулярный непрерывный спектр $\sigma_{sc}(\tilde{A})$ является пустым, т.е. $\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.
- (ii) Абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(\tilde{A})$ заполняет полуось $\mathbb{R}_+$, $\sigma_{ac}(\tilde{A}) = [0, \infty)$, и имеет постоянную кратность mp_1 .
- (iii) Оператор $\tilde{A}$ является полуограниченным снизу и его отрицательный спектр либо конечен, либо является счётной последовательностью, стремящейся к нулю.
- (iv) Возможные положительные собственные значения, присоединённые к абсолютно непрерывному спектру $\sigma_{ac}(\tilde{A})$, представляют собой дискретное множество, т.е. множество $\sigma_{pp}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+$ является дискретным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i)₁. Пусть A_j — минимальный оператор, ассоциированный с дифференциальным выражением $\mathcal{A}_j$ в $L^2(e_j; \mathbb{C}^m)$, $j \in \{1, \dots, p_1\}$, для каждого бесконечного ребра $e_j \in \mathcal{E}_\infty$. Поскольку $Q_j \in L^1(e_j; \mathbb{C}^{m \times m})$, то $n_\pm(A_j) = m$. Кроме того, нетрудно видеть, что оператор A_j , $j \in \{1, \dots, p_1\}$, является унитарно эквивалентным минимальному оператору, определённого в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ дифференциальным выражением (2.2.1) с матричным потенциалом $Q_j(\cdot)$.

Согласно Лемме 2.2.1, множество $\Pi_j = \{\mathcal{H}_j, \Gamma_0^{(j)}, \Gamma_1^{(j)}\}$, где

$$\mathcal{H}_j = \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0^{(j)} f_{e_j} = f_{e_j}(v), \quad \Gamma_1^{(j)} f_{e_j} = f'_{e_j}(v), \quad v \in \mathcal{V}_{\text{ext}}, \quad (3.2.1)$$

является граничной тройкой для оператора A_j^* . Пусть $M_j(\cdot)$, $j \in \{1, \dots, p_1\}$, — соответствующая функция Вейля. Согласно Предложению 2.2.1, каждая

функция $M_j(\cdot)$ допускает следующее представление:

$$N_{0,j}(z)M_j(z) = N_{1,j}(z), \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}_0, \quad j \in \{1, \dots, p_1\}, \quad (3.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} N_{0,j}(z) &:= \frac{I_m}{2i\sqrt{z}} + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_{e_j} e^{i\sqrt{z}t} Q_j(t) S_j(t, z) dt, \\ N_{1,j}(z) &:= \frac{I_m}{2} - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_{e_j} e^{i\sqrt{z}t} Q_j(t) C_j(t, z) dt, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

и $S_j(\cdot, z)$, $C_j(\cdot, z)$ — решения уравнений:

$$\mathcal{A}_j(S_j(x, z)) = zS_j(x, z) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_j(C_j(x, z)) = zC_j(x, z), \quad x \in e_j, \quad (3.2.4)$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$C_j(v, z) = S'_j(v, z) = I_m \quad \text{и} \quad S_j(v, z) = C'_j(v, z) = \mathbb{O}_m, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.2.5)$$

Пусть A_j — минимальный оператор, ассоциированный с дифференциальным выражением $\mathcal{A}_j$ в пространстве $L^2(e_j; \mathbb{C}^m)$, $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$, т.е. на конечном ребре $e_j \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$. Поскольку $Q_j \in L^1(e_j; \mathbb{C}^{m \times m})$, то $\text{n}_{\pm}(A_j) = 2m$, $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$. С учётом (3.1.7), для каждой функции $f_{e_j} \in \text{dom } A_j^*$ существуют предельные значения $f_{e_j}(v_o)$, $f_{e_j}(v_{in})$, $f'_{e_j}(v_o)$, $f'_{e_j}(v_{in})$. Поэтому граничную тройку $\Pi_j = \{\mathcal{H}_j, \Gamma_0^{(j)}, \Gamma_1^{(j)}\}$ для оператора A_j^* можно выбрать в следующем виде:

$$\mathcal{H}_j = \mathbb{C}^{2m}, \quad \Gamma_0^{(j)} f_{e_j} = \begin{pmatrix} f_{e_j}(v_o) \\ f_{e_j}(v_{in}) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1^{(j)} f_{e_j} = \begin{pmatrix} f'_{e_j}(v_o) \\ f'_{e_j}(v_{in}) \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

Соответствующая функция Вейля задаётся выражением:

$$M_j(z) = \begin{pmatrix} -S_j(v_{in}, z)^{-1} C_j(v_{in}, z) & S_j(v_{in}, z)^{-1} \\ (S_j(v_{in}, \bar{z})^*)^{-1} & -S'_j(v_{in}, z) S_j(v_{in}, z)^{-1} \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}_{\pm}. \quad (3.2.7)$$

Полагая $\Pi := \bigoplus_{j=1}^p \Pi_j = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{j=1}^p \mathcal{H}_j := \mathcal{H}_{\infty} \bigoplus \mathcal{H}_{\text{fin}}, \quad \Gamma_a := \bigoplus_{j=1}^p \Gamma_a^{(j)}, \quad a \in \{0, 1\}, \quad (3.2.8)$$

и $\Gamma_a^{(j)}$ заданы формулами (3.2.1) и (3.2.6) для $j \leq p_1$ и $j > p_1$ соответственно, имеем граничную тройку для A^* . Ясно, что

$$n_{\pm}(A) = \dim \left(\mathcal{H}_{\infty} \bigoplus \mathcal{H}_{\text{fin}} \right) = (p_1 + 2p_2)m. \quad (3.2.9)$$

Нетрудно видеть, что функция Вейля, соответствующая граничной тройке Π , допускает разложение $M(z) = M_{\infty}(z) \bigoplus M_{\text{fin}}(z)$, где

$$M_{\infty}(z) := \bigoplus_{j=1}^{p_1} M_j(z) \quad \text{и} \quad M_{\text{fin}}(z) := \bigoplus_{j=p_1+1}^p M_j(z). \quad (3.2.10)$$

Функция Вейля $M_{\text{fin}}(\cdot)$ является мероморфной матричной функцией в $\mathbb{C}$, так как согласно (3.2.7), каждая функция $M_j(\cdot)$, $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$, мероморфна. Следовательно, особые точки функции $M_{\text{fin}}(\cdot)$ образуют не более чем счётное дискретное множество $\Omega_{\text{fin}} := \{\omega_r\}_{r=1}^{\infty}$ вещественных полюсов.

(i)₂. Сперва предположим, что расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ и $A_0 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0$ являются дизъюнктными. Тогда, согласно Предложению 1.1.1(ii), существует граничный оператор $B = B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, такой что

$$\tilde{A} = A^* \upharpoonright \ker (\Gamma_1 - B\Gamma_0) = A_B, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Далее, пусть

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix} = B^*, \quad B_{11} \in \mathbb{C}^{mp_1 \times mp_1}, \quad B_{22} \in \mathbb{C}^{2mp_2 \times 2mp_2}, \quad (3.2.11)$$

— блочно-матричное представление оператора B относительно ортогонального разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\infty} \bigoplus \mathcal{H}_{\text{fin}}$.

Тогда

$$B - M(z) = \begin{pmatrix} B_{11} - M_{\infty}(z) & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} - M_{\text{fin}}(z) \end{pmatrix}. \quad (3.2.12)$$

Поскольку $M(\cdot)$ является функцией Вейля, её мнимая часть $M_I(\cdot)$ является положительно определённой в $\mathbb{C}_+$, т.е. $M_I(z) \geq \varepsilon(z) > 0$, и $0 \in \rho(M_I(z))$ при $z \in \mathbb{C}_+$. Отсюда вытекает, что обе матрицы

$$\text{Im}(M(z) - B) = \text{Im}(M(z)) = M_I(z) \quad \text{и} \quad \text{Im}(M_{\text{fin}}(z) - B_{22}) = \text{Im}(M_{\text{fin}}(z))$$

также являются положительно определёнными при $z \in \mathbb{C}_+$. Следовательно, матрицы $M(z) - B$ и $M_{\text{fin}}(z) - B_{22}$ обратимы при $z \in \mathbb{C}_+$. Поэтому обратная матрица $(B - M(z))^{-1}$ существует при каждом $z \in \mathbb{C}_+$ и может быть найдена по формуле Фробениуса (см. [8, гл. II]):

$$(B - M(z))^{-1} = \begin{pmatrix} M_B^{-1}(z) & K_{12}(z) \\ K_{21}(z) & K_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (3.2.13)$$

где

$$M_B(z) := B_{11} - M_\infty(z) - B_{12} (B_{22} - M_{\text{fin}}(z))^{-1} B_{12}^*, \quad (3.2.14)$$

$$K_{12}(z) = -M_B^{-1}(z) B_{12} (B_{22} - M_{\text{fin}}(z))^{-1}, \quad (3.2.15)$$

$$K_{21}(z) = - (B_{22} - M_{\text{fin}}(z))^{-1} B_{12}^* M_B^{-1}(z), \quad (3.2.16)$$

$$K_{22}(z) = (B_{22} - M_{\text{fin}}(z))^{-1} + (B_{22} - M_{\text{fin}}(z))^{-1} B_{12}^* M_B^{-1}(z) B_{12} (B_{22} - M_{\text{fin}}(z))^{-1}. \quad (3.2.17)$$

Покажем, что $\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$. Поскольку матричная функция $B_{22} - M_{\text{fin}}(\cdot)$ мероморфна в $\mathbb{C}$ и обратима в $\mathbb{C}_+$, её детерминант $d_1(z) := \det(B_{22} - M_{\text{fin}}(z))$ имеет не более чем счётное множество изолированных нулей в $\mathbb{R} \setminus \Omega_{\text{fin}}$. Обозначая данное множество через Ω , получаем:

$$\lim_{z \rightarrow \lambda} (B_{22} - M_{\text{fin}}(z))^{-1} = (B_{22} - M_{\text{fin}}(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}}). \quad (3.2.18)$$

Из соотношений (3.2.14), (3.2.18) и Теоремы 2.2.1 (i) следует, что предел $M_B(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} M_B(z)$ существует при каждом $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}})$, и

$$M_B(\lambda + i0) = B_{11} - M_\infty(\lambda + i0) - B_{12} (B_{22} - M_{\text{fin}}(\lambda))^{-1} B_{12}^*, \quad (3.2.19)$$

$\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}})$. Поскольку $B_{22} = B_{22}^*$, $B_{11} = B_{11}^*$, и $M_{\text{fin}}(\lambda) = M_{\text{fin}}(\lambda)^*$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}})$, то

$$\text{Im}(-M_B(\lambda + i0)) = \text{Im}(M_\infty(\lambda + i0)), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}}). \quad (3.2.20)$$

Так как матрица $\text{Im}(M_\infty(\lambda + i0))$ обратима при $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}})$, то предельная матрица $M_B(\lambda + i0)$ является также обратимой при каждом

$\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}})$, и

$$M_B(\lambda + i0)^{-1} = \left(B_{11} - M_\infty(\lambda + i0) - B_{12} (B_{22} - M_{\text{fin}}(\lambda))^{-1} B_{12}^* \right)^{-1} \quad (3.2.21)$$

при $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}})$. Из обратимости предела $M_B(\lambda + i0)$ и формул (3.2.18), (3.2.21), а также соотношений (3.2.13) – (3.2.17) вытекает, что предельная матрица $B - M(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} (B - M(z))$ существует, для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}})$ является обратимой и имеет вид:

$$B - M(\lambda + i0) = \begin{pmatrix} B_{11} - M_\infty(\lambda + i0) & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} - M_{\text{fin}}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (3.2.22)$$

Кроме того, имеет место соотношение:

$$(B - M(\lambda + i0))^{-1} = \lim_{z \rightarrow \lambda} (B - M(z))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus (\Omega \cup \Omega_{\text{fin}}). \quad (3.2.23)$$

Далее, нетрудно убедиться, что тройка $\Pi_B = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^B, \Gamma_1^B\}$, где

$$\Gamma_0^B := \Gamma_1 - B\Gamma_0 \quad \text{и} \quad \Gamma_1^B := -\Gamma_0,$$

является граничной тройкой для A^* и $A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0^B = \tilde{A}$. Соответствующая функция Вейля равняется $M_B(z) = (B - M(z))^{-1}$, $z \in \mathbb{C}_\pm$. Поскольку множество $\Omega \cup \Omega_{\text{fin}}$ не более чем счётно, Теорема 1.2.1(ii) применима и влечёт $\sigma_{sc}(A_B) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Покажем, что $\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$. Обозначим через $\mathbf{H}_j^D$ расширение (реализацию) Дирихле дифференциального выражения $\mathcal{A}_j$, $j \in \{1, \dots, p\}$, и положим $\mathbf{H}^D := \bigoplus_{j=1}^p \mathbf{H}_j^D$. По Теореме 2.2.1(iv) $\sigma_{sc}(\mathbf{H}_j^D) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$ при всех $j \in \{1, \dots, p_1\}$. Кроме того, каждый оператор $\mathbf{H}_j^D$ при $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$ имеет дискретный спектр. Таким образом, прямая сумма $\mathbf{H}^D = \bigoplus_{j=1}^p \mathbf{H}_j^D$ также имеет пустой сингулярный непрерывный спектр на полуоси $\mathbb{R}_-$ т.е. $\sigma_{sc}(\mathbf{H}^D) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$.

С другой стороны, резольвентная разность

$$(\tilde{A} - i)^{-1} - (\mathbf{H}^D - i)^{-1} \quad \text{является конечномерной.} \quad (3.2.24)$$

Теперь тот факт, что $\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$, следует из теоремы Вейля о стабильности непрерывного спектра при компактных возмущениях.

Остаётся рассмотреть случай, когда $\tilde{A}$ и A_0 не являются дизъюнктивными. Требуемое утверждение вытекает из Леммы 2.12 статьи [101].

(ii) – (iii). Аналогичный результат для расширения Дирихле $\mathbf{H}^D$ был доказан в **Главе 2** (см. Теорему 2.2.1, а также Теорему 3.8 в [81], или аналогичный результат в [78]). Теперь требуемый результат следует из (3.2.24) и теорем Като-Розенблюма и Вейля о стабильности абсолютно непрерывного и непрерывного спектра оператора $\mathbf{H}^D$ при возмущении операторами следа (см. [2, 25]).

(iv). Поскольку матричная функция $M_{\text{fin}}(z)$ мероморфна, а множество $\Omega \cup \Omega_{\text{fin}}$ дискретно, то из (3.2.19) следует, что возможные положительные собственные значения оператора $\tilde{A}$ могут иметь предельной точкой лишь бесконечность. $\square$

Замечание 3.2.1. Отметим, что предположение $p_1 > 0$ является существенным, поскольку в противном случае (т.е. когда граф состоит лишь из конечного числа конечных рёбер) спектр квантового графа является чисто дискретным.

Замечание 3.2.2. Подчеркнём, что в отличие от абсолютно непрерывного спектра, сингулярный спектр неустойчив относительно одномерных возмущений. Так, существуют операторы $-\frac{d^2}{dx^2} + Q$ в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, для которых задача Дирихле имеет абсолютно непрерывный спектр, а задача Неймана содержит sc -компоненту. В условиях Теоремы 3.2.1 этот эффект невозможен.

Замечание 3.2.3. Для скалярного квантового графа ($m = 1$) с нулевым потенциалом $Q = 0$ Теорема 3.2.1 получена ранее Б.-С. Онгом [106] с помощью принципа предельного поглощения.

Замечание 3.2.4. Теорема 3.2.1 обобщает один из основных результатов работы [81, Теорема 4.6] на случай конечных некомпактных графов.

3.3 Гамильтониан с дельта-взаимодействиями

Пусть $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$, $\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot)^*$ — заданная матричная функция. В этом параграфе мы будем рассматривать квантовые графы с граничными условиями дельта-взаимодействий во всех вершинах $v \in \mathcal{V}$ (см. параграф 3.1):

$$\begin{cases} f \text{ непрерывна в } v, \\ \sum_{e \in \mathcal{E}_v} f'_e(v) = \alpha(v)f(v), \end{cases} \quad v \in \mathcal{V}. \quad (3.3.1)$$

Подчеркнём, что производные в (3.3.1) являются **исходящими**, т.е.

$$f'_e(v) = \begin{cases} f'_e(v_o), & v = v_o \\ -f'_e(v_{in}), & v = v_{in}. \end{cases}$$

Пусть также $Q(\cdot) = \bigoplus_{j=1}^p Q_j(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$.

Определим гамильтониан с дельта-взаимодействиями $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha, Q}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\alpha &:= \mathbf{H}_{\alpha, Q} = A_{\max} \upharpoonright \text{dom } \mathbf{H}_\alpha, \quad A_{\max} = A^*, \\ \text{dom } \mathbf{H}_\alpha &= \{f \in \text{dom } A^* : f \text{ удовлетворяет (3.3.1), } v \in \mathcal{V}\}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

В этом параграфе наша цель — дополнить Теорему 3.2.1, найдя условия, гарантирующие отсутствие/наличие положительного точечного спектра у гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$.

Поскольку выполняется равенство $\text{dom } A_{\max} = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} \text{dom } A_{e, \max}$, из (3.1.7) следует, что $\text{dom } A_{\max} \subset W^{2,1}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$. Отметим, что если $Q \in L^2(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$, то тогда $\text{dom } A_{\max} = W^{2,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$.

Так как $\alpha = \alpha^*$, то гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha$ является симметрическим расширением минимального оператора A . Учитывая соотношение (3.2.9), а также то, что количество условий в (3.3.1) равняется $(p_1 + 2p_2)m$, заключаем, что гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha$ является самосопряжённым, т.е. $\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha^*$. В частности, при $\alpha = 0$ условие (3.3.1) — известное условие Кирхгофа, а соответствующий оператор $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{\text{kir}}$ называется оператором Кирхгофа.

В дальнейшем $\deg_\infty(v)$ обозначает число бесконечных рёбер, инцидентных вершине $v \in \mathcal{V}_{\text{ext}}$, а $\deg(v) - \deg_\infty(v)$ — число конечных рёбер, инцидентных

вершине $v \in \mathcal{V}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \deg_\infty(v) &:= \#\{e \in \mathcal{E}_\infty : e \in \mathcal{E}_{v,\infty}\}, \quad \deg_\infty(v) = 0 \quad \text{для} \quad v \in \mathcal{V}_{\text{int}}, \\ \deg(v) - \deg_\infty(v) &:= \#\{e \in \mathcal{E}_{\text{fin}} : e \in \mathcal{E}_{v,\text{fin}}\}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Первый результат об отсутствии положительного точечного спектра формулируется следующим образом.

Предложение 3.3.1. *Пусть $Q \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ — гамильтониан вида (3.3.2). Будем предполагать, что имеют место следующие условия:*

- (i) *Для каждой вершины $v \in \mathcal{V}_{\text{int}}$ число инцидентных конечных рёбер не превосходит двух, т.е.*

$$\deg(v) \leq 2 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{V}_{\text{int}}. \quad (3.3.4)$$

- (ii) *Для каждой вершины $v \in \mathcal{V}_{\text{ext}}$ число инцидентных конечных рёбер не превосходит единицы, т.е.*

$$\deg(v) - \deg_\infty(v) \leq 1 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{V}_{\text{ext}}. \quad (3.3.5)$$

Тогда оператор $\mathbf{H}_\alpha$ не имеет положительных собственных значений, т.е. $\sigma_p(\mathbf{H}_\alpha) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\lambda_0 \in \sigma_p(\mathbf{H}_\alpha) \cap \mathbb{R}_+$, а также

$$f_j = (f_{j,1}, \dots, f_{j,m})^\top \in L^2(e_j; \mathbb{C}^m), \quad j \in \{1, \dots, p\}, \quad (3.3.6)$$

является соответствующей собственной функцией. По определению f удовлетворяет условию

$$\mathbf{H}_\alpha f = \lambda_0 f \quad (3.3.7)$$

на графе $\mathcal{G}$. Здесь функции $f_1, \dots, f_p$ заданы формулой (3.1.3) на каждом ребре. Векторное уравнение (3.3.7) разделяется на следующие p «скалярных» уравнений

$$-\frac{d^2 f_j(x)}{dx^2} + \{Q_j(x) - \lambda_0 I_m\} f_j(x) = 0, \quad j \in \{1, \dots, p\}, \quad (3.3.8)$$

на каждом ребре $e_j \in \mathcal{E}$.

Рассмотрим произвольное бесконечное ребро $e \in \mathcal{E}_\infty$. Согласно Предложению 4.1 из работы [81], соответствующий максимальный оператор A_e^* не имеет положительных собственных значений. Таким образом, $f_e \equiv 0$, для каждого бесконечного ребра $e \in \mathcal{E}_\infty$.

2. Остаётся показать, что $f_e \equiv 0$ для каждого конечного ребра $e \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$. Выберем вершину v_1 такую, что $\deg(v_1) - \deg_\infty(v_1) = 1$, и рассмотрим конечное ребро $e_1 \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$, инцидентное вершине v_1 . Согласно условиям (3.3.4) – (3.3.5), а также условию связности графа, существует конечный путь $\mathcal{P} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, соединяющий вершины v_1 и v_k с помощью рёбер $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$. Согласно (3.3.1), включение $f \in \text{dom } \mathbf{H}_\alpha$ влечёт

$$f_{e_1}(v_1) = f_e(v_1) = 0, \quad f'_{e_1}(v_1) = \alpha(v_1)f_{e_1}(v_1) - \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} f'_e(v_1) = 0 \quad (3.3.9)$$

для каждого бесконечного ребра $e \in \mathcal{E}_\infty$, инцидентного вершине v_1 . Поэтому уравнение (3.3.8) на конечном ребре e_1 приводит к задаче Коши:

$$-f''_{e_1}(x) + Q_{e_1}(x)f_{e_1}(x) = \lambda_0 f_{e_1}(x), \quad x \in e_1, \quad f_{e_1}(v_1) = f'_{e_1}(v_1) = 0. \quad (3.3.10)$$

По теореме существования и единственности, задача Коши (3.3.10) имеет только тривиальное решение на ребре e_1 , т.е. $f_{e_1}(x) = 0$ при $x \in e_1$. Далее, учитывая условие (3.3.1) и рассматривая уравнение (3.3.8) на следующем конечном ребре $e_2 \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$, имеем:

$$-f''_{e_2}(x) + Q_{e_2}(x)f_{e_2}(x) = \lambda_0 f_{e_2}(x), \quad x \in e_2, \quad f_{e_2}(v_2) = f'_{e_2}(v_2) = 0. \quad (3.3.11)$$

Снова применяя теорему существования и единственности, заключаем, что $f_{e_2}(x) = 0$ при $x \in e_2$. Повторяя описанную процедуру $k - 2$ раз, получаем по индукции, что $f \equiv 0$ на графе $\mathcal{G}$. Таким образом, $\lambda_0 \notin \sigma_p(\mathbf{H}_\alpha) \cap \mathbb{R}_+$. $\square$

Замечание 3.3.1. Предложение 3.3.1 обобщает Предложение 4.1 из работы [81] на случай специального квантового графа, для которого выполняются условия (3.3.4) – (3.3.5).

Из Теоремы 3.2.1 и Предложения 3.3.1 вытекают следующие основные результаты, касающиеся спектра гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$.

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены условия Теоремы 3.2.1. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) Сингулярный непрерывный спектр гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$ является пустым, т.е. $\sigma_{sc}(\mathbf{H}_\alpha) = \emptyset$.
- (ii) Возможные положительные собственные значения (присоединённые к ас-спектру) образуют дискретное множество.
- (iii) Пусть дополнительно выполняются условия (3.3.4) – (3.3.5). Тогда положительная часть $\mathbf{H}_{\alpha,+} := \mathbf{E}_{\mathbf{H}_\alpha}(0, \infty)\mathbf{H}_\alpha$ оператора $\mathbf{H}_\alpha$ является его чисто абсолютно непрерывной частью, т.е. $\mathbf{H}_{\alpha,+} = \mathbf{H}_{\alpha,+}^{ac} = \mathbf{H}_\alpha^{ac}$. Кроме того, ас-спектр гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$ имеет постоянную кратность mr_1 , т.е. $N_{\mathbf{H}_\alpha^{ac}}(t) = mr_1$ при $t \in \mathbb{R}_+$.
- (iv) Отрицательный спектр оператора $\mathbf{H}_\alpha$ либо конечен, либо дискретен с единственной возможной предельной точкой в нуле. Включение $0 \in \sigma_p(\mathbf{H}_\alpha)$ также возможно.

Замечание 3.3.2. Согласно Теореме 3.3.1(iii), $0 \in \sigma_{ac}(\mathbf{H}_\alpha)$, в то время как включение $0 \in \sigma_p(\mathbf{H}_\alpha)$ также возможно, т.е. ноль может быть и собственным значением кратности $k \leq mr_1$. Например, это так для оператора, ассоциированного с выражением:

$$\mathcal{A} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q, \quad Q := -\text{diag} \{ (x + a_1)^{-2}, \dots, (x + a_m)^{-2} \}, \quad (3.3.12)$$

$$a_j > 0, \quad j \in \{1, \dots, m\},$$

и граничным условием $y'(0) = Ty(0)$, $T = -\text{diag}\{a_1, \dots, a_m\}$.

Далее мы покажем, что свойство отсутствия положительного точечного спектра является ситуацией общего положения.

Предложение 3.3.2. Пусть $\mathcal{G}$ — звёздный граф с центром в вершине $v_0 := 0$, имеющий $p_1(> 0)$ бесконечных рёбер и $p_2(\geq 2)$ конечных рёбер. Пусть также $Q_{l_k} \in L^1(l_k; \mathbb{C}^{m \times m})$ для каждого бесконечного ребра $l_k \in \mathcal{E}_\infty$,

$k \in \{1, \dots, p_1\}$, и $Q_{e_j} \equiv 0$ для каждого конечного ребра $e_j \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, $j \in \{1, \dots, p_2\}$. Будем предполагать, что для каждой пары конечных рёбер отношение их длин является иррациональным. Тогда положительная часть $\mathbf{H}_{\alpha,+}$ оператора $\mathbf{H}_\alpha$ является его чисто абсолютно непрерывной частью, $\mathbf{H}_{\alpha,+} = \mathbf{H}_\alpha^{ac} = \mathbf{H}_{\alpha,+}^{ac}$. Кроме того, ас-спектр гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$ имеет постоянную кратность tr_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{G}$ является звёздным графом с центром в вершине $v_0 := 0$, имеют место следующие неравенства:

$$\begin{cases} \deg_\infty(v_0) = p_1 > 0, \\ \deg(v_0) - \deg_\infty(v_0) = p_2 \geq 2. \end{cases} \quad (3.3.13)$$

Пусть $e_j = \overrightarrow{v_0 v_j}$, $j \in \{1, \dots, p_2\}$.

Покажем, что для произвольного $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ следующая система имеет только тривиальное L^2 -решение.

$$\begin{aligned} -f_e''(x) + Q_e(x)f_e(x) &= \lambda_0 f_e(x), \quad x \in e, \quad e \in \mathcal{E}, \\ \sum_{e \in \mathcal{E}} f_e'(0) &= 0, \quad f_{e_j}'(|e_j|) = 0, \quad j \in \{1, \dots, p_2\}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

По Предложению 4.1 из работы [81] предположение $\lambda_0 > 0$ влечёт $f_{l_k} \equiv 0$ для каждого бесконечного ребра $l_k \in \mathcal{E}_\infty$, $k \in \{1, \dots, p_1\}$. В частности, $f_{l_k}(0) = 0$ для каждого бесконечного ребра $l_k \in \mathcal{E}_\infty$, $k \in \{1, \dots, p_1\}$. Следовательно, по условию непрерывности в вершине $v_0 := 0$ (см. первое условие в (3.3.1)), $f_{e_j}(0) = f_{l_1}(0) = 0$ для каждого $j \in \{1, \dots, p_2\}$. Поэтому система (3.3.14) сводится к следующей системе на конечных рёбрах:

$$\begin{aligned} -f_{e_j}''(x) &= \lambda_0 f_{e_j}(x), \quad x \in e_j, \quad j \in \{1, \dots, p_2\}, \\ \sum_{j=1}^{p_2} f_{e_j}'(0) &= 0, \quad f_{e_j}(0) = 0, \quad f_{e_j}'(|e_j|) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Нетрудно видеть, что задача (3.3.15) имеет нетривиальное решение если и только если существуют $n_j \in \mathbb{N}$ и $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, p_2\}$, $\sum_{j=1}^{p_2} |c_j| > 0$, такие

что

$$\lambda_0 = \left(\frac{\pi(2n_1 + 1)}{2|e_1|} \right)^2, \quad n_1 \in \mathbb{N}, \quad (3.3.16)$$

$$f_{e_j}(x) = c_j \sin \left(\frac{\pi(2n_1 + 1)}{2|e_1|} x \right), \quad x \in e_j, \quad \sum_{j=1}^{p_2} c_j = 0, \quad (3.3.17)$$

$$\frac{|e_1|}{|e_j|} = \frac{2n_1 + 1}{2n_j + 1}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j \in \{1, \dots, p_2\}. \quad (3.3.18)$$

Если хотя бы один (значит, и хотя бы два) из коэффициентов c_j отличен от нуля, то имеем: $c_{j_1} c_{j_2} \neq 0$. Поэтому из (3.3.18) вытекает, что $\frac{|e_{j_1}|}{|e_{j_2}|} = \frac{2n_{j_1} + 1}{2n_{j_2} + 1}$. Полученное соотношение противоречит предположению об иррациональности такого отношения, и, таким образом, предложение полностью доказано. $\square$

Далее мы покажем, что условия Предложения 3.3.2 являются точными.

Следствие 3.3.1. Пусть $\mathcal{G}$ — звёздный граф, описанный в Предложении 3.3.2. Дополнительно предположим, что выполняются условия (3.3.18). Тогда положительная точечная часть гамильтониана $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ является нетривиальной, т.е. $\sigma_p(\mathbf{H}_{\text{kir}}) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$. Кроме того, положительный точечный спектр гамильтониана $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ является дискретным, т.е. $\sigma_p(\mathbf{H}_{\text{kir}}) \cap (0, \infty) = \sigma_d(\mathbf{H}_{\text{kir}}) \cap (0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку выполнены условия (3.3.18), то задача (3.3.15) имеет нетривиальное L^2 -решение, заданное условиями (3.3.16) – (3.3.17). Ясно, что наряду с $\lambda_0 = \left(\frac{\pi(2n_1+1)}{2|e_1|} \right)^2$ произвольное $\lambda_k = \left(\frac{\pi(2n_1+1)(2k+1)}{2|e_1|} \right)^2$, $k \in \mathbb{N}$, также является собственным значением оператора $\mathbf{H}_{\text{kir}}$. Более того, для каждого $k \in \mathbb{N}$ система функций

$$f_{e_j,k}(x) = c_j \sin \left(\frac{\pi(2n_1 + 1)(2k + 1)}{2|e_1|} x \right), \quad x \in e_j, \quad \sum_{j=1}^{p_2} c_j = 0 \quad (3.3.19)$$

является решением задачи (3.3.15) с λ_k вместо λ_0 .

Таким образом, вектор $f_k := (0, \dots, 0, f_{e_1,k}, \dots, f_{e_{p_2},k})^\top (\in \mathbb{C}^{mp})$ является собственным вектором оператора $\mathbf{H}_{\text{kir}}$, соответствует собственному значению λ_k , $k \in \mathbb{N}_0$, и $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \subseteq \sigma_p(\mathbf{H}_{\text{kir}}) \cap (0, \infty)$. Чтобы показать дискретность положительного точечного спектра, заметим, что $\sigma_p(\mathbf{H}_{\text{kir}}) \cap (0, \infty)$ является частью

спектра задачи Дирихле-Неймана для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ на каждом конечном ребре e_j , $j \in \{1, \dots, p_2\}$. $\square$

По определению, двойной звёздный граф — это граф, являющийся объединением двух звёздных графов, а также конечного ребра, соединяющего их центры. Следующий результат является аналогом Предложения 3.3.2 для квантового двойного звёздного графа определённого вида.

Предложение 3.3.3. Пусть $\tilde{\mathcal{G}}$ — двойной звёздный граф, состоящий из $p_1 > 0$ бесконечных рёбер $l_1, \dots, l_{p_1}$, инцидентных центру v_0 , а также из $p_2 > 2$ конечных рёбер, инцидентных центру v_1 (включая «соединяющее» ребро $e_1 := \overrightarrow{v_0 v_1}$). Пусть также $Q_e \in L^1(e; \mathbb{C}^{m \times m})$ для каждого бесконечного ребра $e \in \mathcal{E}_\infty$ и конечного ребра $e_1 \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, и пусть $Q_{e_j} \equiv 0$ для каждого конечного ребра $e_j \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, $j \in \{2, \dots, p_2\}$. Будем предполагать, что для каждой пары конечных рёбер e_1 и e_j , $j \in \{2, \dots, p_2\}$, отношение их длин является иррациональным.

Тогда положительная часть оператора Кирхгофа $\mathbf{H}_{\text{kir}} = \mathbf{H}_{0,Q}$ является его чисто абсолютно непрерывной частью, $\mathbf{H}_{\text{kir},+} = \mathbf{H}_{\text{kir}}^{ac}$. Кроме того, ас-спектр расширения $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ имеет постоянную кратность tr_1 .

Доказательство аналогично доказательству Предложения 3.3.2.

Следствие 3.3.2. Пусть $\tilde{\mathcal{G}}$ — двойной звёздный граф, описанный в Предложении 3.3.3. Пусть также выполнены следующие условия:

$$\frac{|e_1|}{|e_j|} = \frac{2n_1}{2n_j + 1}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j \in \{2, \dots, p_2\}. \quad (3.3.20)$$

Тогда положительная часть гамильтониана $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ является нетривиальной и дискретной, т.е. $\sigma_p(\mathbf{H}_{\text{kir}}) \cap (0, \infty) = \sigma_d(\mathbf{H}_{\text{kir}}) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$.

Доказательство аналогично доказательству Следствия 3.3.1.

Замечание 3.3.3.

(i) Пусть $\tilde{\mathcal{G}}$ — граф, описанный в Предложении 3.3.3. Пусть также $Q_{e_j}(x) \neq 0$, $j \in \{2, \dots, p_2\}$. Для конечного ребра e_j имеем задачу

Дирихле-Неймана:

$$-f''_{e_j}(x) + Q_{e_j}(x)f_{e_j}(x) = \lambda_0 f_{e_j}(x), \quad \begin{cases} f_{e_j}(|e_1|) = 0, \\ f'_{e_j}(|e_j|) = 0. \end{cases} \quad (3.3.21)$$

Поскольку собственное значение λ_0 непрерывно зависит от длины $|e_j|$, то уменьшение $|e_j|$ влечёт возрастание λ_0 . Поэтому оператор Кирхгофа имеет положительные собственные значения (т.е. $\sigma_p(\mathbf{H}_{\text{kir}}) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$) только в исключительных случаях.

(ii) Из доказательств Предложений 3.3.1, 3.3.2 и 3.3.3 следует, что возможные собственные функции, соответствующие положительным собственным значениям, имеют носителем максимальный компактный подграф $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$.

Замечание 3.3.4. В заключение упомянем о нескольких работах, посвящённых исследованию абсолютно непрерывного спектра некоторых реализаций дифференциального выражения Шрёдингера на графах с *бесконечным числом рёбер*. В частности, в статье Е.Л. Коротяева и Н.Ю. Сабуровой [90] показано, что спектр операторов Шрёдингера на периодических дискретных графах состоит из абсолютно непрерывной части и конечного числа собственных значений бесконечной кратности. Абсолютно непрерывный спектр имеет зонную структуру с конечным числом лакун.

В статье П.А. Кучмента и О. Поста [95] исследован спектр оператора графена H . А именно, начиная с оператора Хилла $H^{\text{per}} := -\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$ в $L^2(\mathbb{R})$ с чётным (на $[0, 1]$) периодическим потенциалом $q_0(x) = q_0(x+1)$, предполагая, что $q_0(\cdot) \in L^2[0, 1]$ и ассоциируя рёбра с отрезком $[0, 1]$, авторы достраивают функцию $q_0(x)$ до потенциала $q(x)$ на графене. Показано, что sc -спектр $\sigma_{sc}(H)$ является пустым, $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$, а ac -спектр $\sigma_{ac}(H)$ имеет лакунную структуру и задаётся выражением:

$$\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ac}(H^{\text{per}}) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |D(\lambda)| \leq 2\},$$

где $D(\lambda)$ — дискриминант оператора H^{per} (см. [95, Теорема 3.6]).

Помимо этого, чисто точечный спектр $\sigma_{pp}(H)$ совпадает со спектром реализации Дирихле выражения $-\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$ в $L^2(0, 1)$, и, таким образом, согласно чётности $q_0(\cdot)$, принадлежит объединению крайних точек лакун спектра $\sigma(H^{\text{per}}) = \sigma_{ac}(H)$. Кроме того, все собственные значения имеют бесконечную кратность.

Также упомянем работы [69] и [93], в которых исследуются спектры радиальных деревьев и радиальных антидеревьев соответственно.

В первой статье авторы рассматривают корневое радиально симметричное метрическое дерево $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ с корнем $O \in \mathcal{V}$. Для произвольной вершины $v \in \mathcal{V}$ $b(v)$ обозначает число ответвлений вершины v , т.е. количество передних ближайших соседних вершин вершины v , а $t_n(> 0)$ — длину простого пути, соединяющего вершину v с корнем O . Предполагая, что выполнены условия

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} (t_{n+1} - t_n) > 0 \quad \text{и} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n > 1, \quad (3.3.22)$$

а также, что последовательности $\{t_{n+1} - t_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются конечными, в работе [69] авторы показывают, что для гамильтониана $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ наличие непустого ac -спектра является необходимым, чтобы последовательность $\{t_{n+1} - t_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ являлась в конечном счёте периодической, т.е. для определённого $N \in \mathbb{N}$ последовательность $\{t_{n+1} - t_n, b_n\}_{n=N}^{\infty}$ являлась периодической. Это дополняет предыдущий результат Дж. Брюера и Р. Франка [52, Теорема 1] для дискретного лапласиана Δ на графе $\mathcal{G}$ и для редких деревьев в метрическом случае.

С другой стороны, А.С. Костенко и Н. Николусси (N. Nicolussi) в работе [93] нашли достаточные условия для лапласиана Кирхгофа $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ на бесконечном радиально симметричном антидереве для выполнения соотношения $\sigma_{ac}(\mathbf{H}_{\text{kir}}) = [0, \infty)$. Отметим, что в данном случае наличие положительного sc -спектра не исключается.

Упомянутые результаты показывают сходство между гамильтонианами $\mathbf{H}_{\alpha}$, где $\alpha(v) = \alpha_0 \deg(v)$ (с некоторым $\alpha_0 \in \mathbb{R}$) и дискретными лапласианами Δ на равнобедренных метрических графах $\mathcal{G}$, обнаруженное К.В. Панкраш-

киным (см. работу [107]). А именно, используя аппарат функций Вейля, он установил унитарную эквивалентность гамильтониана $\mathbf{E}_{\mathbf{H}_\alpha}(J)\mathbf{H}_\alpha$, являющегося сужением оператора $\mathbf{H}_\alpha$ на произвольную лауну J реализации Дирихле, с одной стороны, и определённой функции $\eta_\alpha^{-1}(\Delta)$ взвешенного дискретного оператора смежности Δ , — с другой стороны. В частности, $\mathbf{E}_{\mathbf{H}_\alpha}(J)\mathbf{H}_\alpha$ и $\eta_\alpha^{-1}(\Delta)$ являются абсолютно непрерывными только одновременно.

В данной связи упомянем, что автор работы [107] обобщил и расширил результат работы [34], в которой рассматривается симметрический оператор A в $\mathfrak{H}$ с лауной (a, b) и исследуется спектр самосопряжённых расширений $A_B \in \text{Ext}_A$ вне лауны (a, b) в предположении, что функция Вейля является фактически скалярной, т.е. $M(\lambda) = m(\lambda) \cdot I_{\mathcal{H}}$, что является более существенным ограничением, чем предположение, касающееся функции Вейля $M(\cdot)$ в [107]. Предполагая, что оператор $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ удовлетворяет условию $\sigma(T) \subset (a, b)$, а также $B = m(T)$, авторы статьи [34] показывают, что операторы $E_{A_B}(a, b)A_B$ и $B = m(T)$ являются унитарно эквивалентными.

Также отметим, что соотношения $\sigma_{ac}(\mathbf{H}_\alpha) = \mathbb{R}_+$ и $\sigma_{sc}(\mathbf{H}_\alpha) = \emptyset$ не исключают возможности существования присоединённых собственных значений у гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$. В связи с этим упомянем статью Г. Берколайко и В. Лю [50], посвящённую исследованию общности условий простоты спектра квантового графа. Главный результат этой работы сформулирован следующим образом.

Теорема 3.3.2 ([50, Теорема 3.6]). *Пусть $\mathcal{G}$ — связный граф с нулевым потенциалом $Q = 0$ и условием дельта-взаимодействий в вершинах. Если $\mathcal{G}$ не эквивалентен кольцу, то существуют малые изменения длин рёбер, после которых новый граф $\tilde{\mathcal{G}}$ будет удовлетворять следующим условиям общего положения:*

- (i) *Спектр $\sigma(\tilde{\mathcal{G}})$ является простым.*
- (ii) *Для каждой собственной функции f графа $\tilde{\mathcal{G}}$ либо $f(v) \neq 0$ для каждой вершины v , либо $\text{supp } f = L$ только для одной петли L графа $\tilde{\mathcal{G}}$.*

Более точно, в пространстве всех возможных длин рёбер множество, на котором выполняются условия (i) – (ii), является остаточным.

Данная теорема говорит о том, что в скалярном случае ($m = 1$) положительный точечный спектр гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$ для графов с числом $p_1 > 0$ бесконечных рёбер и $Q = 0$ в общем случае отсутствует, т.е. положительная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}_\alpha}(0, \infty)$ оператора $\mathbf{H}_\alpha$ является, вообще говоря, чисто абсолютно непрерывной. По всей видимости, Теорема 3.3.2, как и только что упомянутая последовательность присоединённых положительных собственных значений, остаётся верной и в случае матричного суммируемого потенциала $Q \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$. Этот вопрос оставим открытым.

Также отметим, что Л.Ф. Фридлендер [70] показал, что множество $\mathcal{M}$ в параметрическом пространстве $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$ метрик, для которого все собственные значения связного метрического графа $\mathcal{G}$ — простые, является остаточным при определённых простых условиях.

И. Колен де Вердьё (Y. Colin de Verdière) и Ф. Трук [58, 59] дали явную классификацию графов, у которых возможно наличие присоединённых собственных значений. Также описано множество ненормализованных полукласических мер на квантовых графах и изучено множество резонансов $\text{Res}_{\mathcal{G}}^{\vec{l}}$ лапласиана $\Delta_{\mathcal{G}}^{\vec{l}}$.

3.3.1 Гамильтонианы с дельта-взаимодействиями на прямой

В данном разделе мы применим предыдущие результаты к операторам с дельта-взаимодействиями на прямой (полупрямой). Для этого рассмотрим следующее формальное дифференциальное выражение:

$$\mathcal{A}_{X,\alpha,Q} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q + \sum_{n=1}^N \alpha_n \delta(x - x_n). \quad (3.3.23)$$

Оператор, ассоциированный с данным выражением, описывает дельта-взаимодействия на конечном множестве $X := \{x_n\}_{n=1}^N (\subset \mathbb{R}_+)$ с матричными (самосопряжёнными) коэффициентами $\{\alpha_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{C}^{m \times m}$,

$N \in \mathbb{N}$. В скалярном случае $\{\alpha_n\}$ описывает *силу* взаимодействия в точке $x = x_n$ и называется *интенсивностью* (см. [35]).

Рассмотрим максимальный оператор $A_{\max}$, ассоциированный в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ с выражением (3.3.23). Он задаётся выражением $-\frac{d^2}{dx^2} + Q$ на области:

$$\text{dom } A_{\max} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{A}_{X, \alpha, Q}(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m) \end{array} \right\}. \quad (3.3.24)$$

Область определения минимального оператора $A := A_{\min}$ имеет вид:

$$\text{dom } A = \left\{ f \in \text{dom}(A_{\max}) : \begin{array}{l} f(0) = 0, \quad f(x_n \pm) = 0, \quad n \in \{1, \dots, N\}, \\ f'(0) = 0, \quad f'(x_n \pm) = 0, \quad n \in \{1, \dots, N\} \end{array} \right\}. \quad (3.3.25)$$

Известно, что $A^* = A_{\max}$. Сначала мы применим Теорему 3.2.1.

Следствие 3.3.3 ([81, Теорема 4.6]). *Пусть A — минимальный симметрический оператор в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, заданный выражением (3.3.25), и $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $\tilde{A}$ — произвольное самосопряжённое расширение оператора A . Тогда:*

- (i) *Сингулярный непрерывный спектр $\sigma_{sc}(\tilde{A})$ является пустым, т.е. $\sigma_{sc}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.*
- (ii) *Абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(\tilde{A})$ заполняет полуось $\mathbb{R}_+$, $\sigma_{ac}(\tilde{A}) = [0, \infty)$, и имеет постоянную кратность m .*
- (iii) *Оператор $\tilde{A}$ является полуограниченным снизу, и его отрицательный спектр либо конечен, либо является счётной последовательностью, стремящейся к нулю.*
- (iv) *Возможные положительные собственные значения, присоединённые к ac -спектру $\sigma_{ac}(\tilde{A})$, являются дискретным множеством, т.е. множество $\sigma_{pp}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+$ дискретно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полуось $\mathbb{R}_+$ вместе с точками X порождает граф $\mathcal{G}_+ = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} := X$, а множество $\mathcal{E}$ состоит из N конечных рёбер

$(0, x_1), \dots, (x_{N-1}, x_N)$ и одного бесконечного ребра (x_N, ∞) . Поскольку $Q(\cdot)$ суммируема, соответствующий квантовый граф удовлетворяет условиям Теоремы 3.2.1, что влечёт выполнение утверждений (i) – (iv). $\square$

Далее мы рассмотрим гамильтониан $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$, ассоциированный с формальным выражением (3.3.23) либо в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, либо в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$. Данный оператор имеет несколько важных особенностей, отсутствующих у общих реализаций выражения $\mathcal{A}_{X,\alpha,Q}$.

Гамильтониан $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ на прямой $\mathbb{R}$ задаётся выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{X,\alpha,Q} &= A^* \upharpoonright \text{dom } \mathbf{H}_{X,\alpha,Q}, \quad \text{где} \\ \text{dom } \mathbf{H}_{X,\alpha,Q} &= \left\{ f \in \text{dom } A^* : \begin{aligned} &f(x_n+) = f(x_n-), \quad n \leq N, \\ &f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n), \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Хорошо известно, что $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ является самосопряжённым. Ясно, что если $\alpha_n = 0$ для всех $n \in \{1, \dots, N\}$, то тогда $\mathbf{H}_{X,0,Q}$ совпадает с реализацией Дирихле выражения $\mathcal{A}_{X,\alpha,Q}$ на прямой $\mathbb{R}$.

Следствие 3.3.3 также верно для самосопряжённых расширений минимального оператора A , ассоциированного с выражением (3.3.23) на прямой $\mathbb{R}$. В данном случае кратность ac -спектра равняется $2m$. Ниже мы формулируем Теорему 3.3.1 только для гамильтонианов $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ с дельта-взаимодействиями на прямой $\mathbb{R}$.

Следствие 3.3.4. Пусть гамильтониан $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ задаётся выражением (3.3.26), и пусть $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{m \times m})$. Тогда:

- (i) $\sigma_{sc}(\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}) \cap \mathbb{R} = \sigma_p(\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.
- (ii) Положительная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}}(0, \infty)\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ гамильтониана $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ является чисто абсолютно непрерывной с постоянной кратностью $2m$.
- (iii) $\sigma(\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}) \cap \mathbb{R}_-$ является либо конечным, либо стремящейся к нулю последовательностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать прямую $\mathbb{R}$ с точками $X = \{x_n\}_{n=1}^N$ как граф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} := X$, а множество $\mathcal{E}$ состоит

из $N - 1$ конечных рёбер $(x_1, x_2), \dots, (x_{N-1}, x_N)$, и двух бесконечных рёбер $(-\infty, x_1), (x_N, \infty)$ с естественной ориентацией (направлением). В этом случае производная $f'(x_n+)$ является **исходящей**, в то время как производная $f'(x_n-)$ является **входящей** и имеет противоположный знак по отношению к **исходящей** производной в вершине x_n на ребре с началом в вершине $v_o := x_n$ и концом в вершине $v_{in} := x_{n-1}$. Поскольку все производные в (3.3.1) являются **исходящими**, данное условие в каждой вершине x_n принимает вид $f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n)$, т.е. становится условием дельта-взаимодействия в вершине x_n .

Ясно, что граф $\mathcal{G}$ удовлетворяет условиям (3.3.4) – (3.3.5). Именно,

$$\begin{aligned} \deg(v) &= 2, \quad \text{если } v \in \{x_2, \dots, x_{n-1}\} = \mathcal{V}_{\text{int}}, \\ \deg(v) - \deg_{\infty}(v) &= 2 - 1 = 1, \quad \text{если } v \in \{x_1, x_n\} = \mathcal{V}_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

Теорема 3.3.1 завершает доказательство. $\square$

Также имеет место аналогичный результат для гамильтонианов $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ с дельта-взаимодействиями на полупрямой $\mathbb{R}_+$.

Следствие 3.3.5 ([81, Теорема 4.8]). *Пусть $\mathcal{G}_+$ — граф, порождённый полупрямой $\mathbb{R}_+$ с конечным числом вершин $\mathcal{V} = X = \{x_n\}_{n=1}^N$, пусть также $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Тогда положительный спектр расширения $\mathbf{H}_{X, \alpha, Q}$ является чисто абсолютно непрерывным с постоянной кратностью t . Кроме того, гамильтониан $\mathbf{H}_{X, \alpha, Q}$ является полуограниченным снизу, и его отрицательный спектр либо конечен, либо является последовательностью, сходящейся к нулю.*

Доказательство аналогично доказательству Следствия 3.3.4.

Замечание 3.3.5. Отсутствие дельта-взаимодействий ($\alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$) влечёт абсолютную непрерывность спектра как оператора задачи Дирихле, так и произвольного самосопряжённого расширения минимального оператора Штурма-Лиувилля с потенциальной матрицей $Q \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. В свою очередь, данный результат обобщает классический результат Титчмарша для ска-

лярного оператора, ассоциированного в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с выражением $\mathcal{A} := -\frac{d^2}{dx^2} + q$, где $q = \bar{q} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ (см. главу 5 в [30]).

3.4 Оценка типа Баргмана

В этом параграфе мы находим оценку для числа отрицательных квадратов оператора $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$, заданного выражением (3.3.2), при дополнительном условии $xQ \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$. Напомним, что $W^{1,2}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{V}; \mathbb{C}^m) = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} W^{1,2}(e; \mathbb{C}^m)$.

3.4.1 Квадратичная форма

Наряду с оператором $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ рассмотрим следующую форму:

$$\mathfrak{t}_{\alpha,Q}[f] = \int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx + \int_{\mathcal{G}} \langle Qf, f \rangle dx + \sum_{v \in \mathcal{V}} \langle \alpha(v)f(v), f(v) \rangle, \quad (3.4.1)$$

с областью определения:

$$\begin{aligned} \text{dom } \mathfrak{t}_{\alpha,Q} &= W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m) := \\ &:= \left\{ f \in W^{1,2}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{V}; \mathbb{C}^m) : f \text{ непрерывна в каждой } v \in \mathcal{V} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Покажем, что данная форма корректно определена и является замыканием формы $\mathfrak{t}'_{\alpha,Q}[f] := (\mathbf{H}_{\alpha,Q}f, f)$, $\text{dom } \mathfrak{t}'_{\alpha,Q} = \text{dom } \mathbf{H}_{\alpha,Q}$, естественным образом порождённой оператором $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$.

Предложение 3.4.1. Пусть $\mathbf{H}_{\alpha,Q} = \mathbf{H}_{\alpha,Q}^*$ — гамильтониан, заданный выражением (3.3.2), и $Q \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $\mathfrak{t}_{\alpha,Q}$ — форма, заданная выражениями (3.4.1) – (3.4.2). Тогда:

(i) Форма $\mathfrak{t}_{\alpha,Q}$ является полуограниченной снизу и замкнутой.

(ii) $\text{dom } \mathbf{H}_{\alpha,Q} \subset W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$ и

$$\mathfrak{t}'_{\alpha,Q}[f, g] = (\mathbf{H}_{\alpha,Q}f, g) = \mathfrak{t}_{\alpha,Q}[f, g], \quad f \in \text{dom } \mathbf{H}_{\alpha,Q}, \quad g \in W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m). \quad (3.4.3)$$

(iii) Оператор, ассоциированный с формой (3.4.1), согласно первой теореме о представлении, совпадает с гамильтонианом $\mathbf{H}_{\alpha,Q} = \mathbf{H}_{\alpha,Q}^*$.

(iv) Область определения $\text{dom } \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ является ядром для формы $\mathbf{t}_{\alpha,Q}$, т.е. замыкание формы $\mathbf{t}'_{\alpha,Q}$ является формой $\mathbf{t}_{\alpha,Q}$, $\bar{\mathbf{t}}_{\alpha,Q} = \mathbf{t}_{\alpha,Q}$. В частности, для произвольных $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ и $Q \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$ область определения $\text{dom } \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ является плотной в $W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). Сначала покажем, что форма (3.4.1) является полуограниченной снизу и замкнутой. Для этого заметим, что согласно теореме вложения Соболева, $W^{1,2}(e; \mathbb{C}^m) \hookrightarrow C(e; \mathbb{C}^m)$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $C_1 := C_1(\varepsilon) > 0$, такая что на каждом ребре $e \in \mathcal{E}$ (конечном или бесконечном) имеет место следующая оценка:

$$\|f_e\|_{C(e; \mathbb{C}^m)}^2 \leq \varepsilon \|f'_e\|_{L^2(e; \mathbb{C}^m)}^2 + \varepsilon^{-1} C_1 \|f_e\|_{L^2(e; \mathbb{C}^m)}^2, \quad f_e \in W^{1,2}(e; \mathbb{C}^m). \quad (3.4.4)$$

Здесь $C(e; \mathbb{C}^m)$ обозначает банахово пространство непрерывных вектор-функций на ребре e . Поскольку $Q_e \in L^1(e; \mathbb{C}^{m \times m})$, то из оценки (3.4.4) следует, что для произвольной функции $f \in W^{1,2}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{V}; \mathbb{C}^m)$

$$\begin{aligned} \left| \int_e \langle Q_e(x) f_e(x), f_e(x) \rangle dx \right| &\leq \int_e |Q_e(x)| \cdot |f_e(x)|^2 dx \leq \\ &\leq \|Q_e\|_{L^1(e)} \cdot \|f_e\|_{C(e)}^2 \leq \|Q_e\|_{L^1(e)} \left(\varepsilon \|f'_e\|_{L^2(e)}^2 + \varepsilon^{-1} C_1 \|f_e\|_{L^2(e)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Здесь $|Q_e(x)| := |Q_e(x)|_{\mathbb{C}^{m \times m}}$ обозначает матричную норму, и для краткости положено $C(e) := C(e; \mathbb{C}^m)$, $\|Q_e\|_{L^1(e)} := \|Q_e\|_{L^1(e; \mathbb{C}^{m \times m})}$.

Аналогично из (3.4.4) вытекает, что для произвольной функции $f \in W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v \in \mathcal{V}} \langle \alpha(v) f(v), f(v) \rangle \right| &\leq \sum_{v \in \mathcal{V}} |\alpha(v)| \cdot |f(v)|^2 \leq \\ &\leq C_2(\alpha) \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\varepsilon \|f'_e\|_{L^2(e)}^2 + \varepsilon^{-1} C_1 \|f_e\|_{L^2(e)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

где $C_2(\alpha) := \max\{|\alpha(v)| : v \in \mathcal{V}\}$.

Далее мы будем рассматривать форму $\mathbf{t}_{\alpha,Q}$ как возмущение простейшей (невозмущённой) формы $\mathbf{t}_{0,0}$, имеющей вид:

$$\mathbf{t}_{0,0}[f] = \int_{\mathcal{G}} |f'(x)|^2 dx = \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e |f'_e(x)|^2 dx, \quad \text{dom } \mathbf{t}_{0,0} = W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m).$$

С этой целью будем рассматривать возмущения форм $\mathbf{t}_Q$ и $\mathbf{t}_\alpha$, заданные вторым и третьим слагаемыми в выражении (3.4.1), на области $W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$. Отметим, что несмотря на то, что форма $\mathbf{t}_Q$ является естественно определённой на более широкой области $W^{1,2}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{V}; \mathbb{C}^m)$, определение формы $\mathbf{t}_\alpha$ требует непрерывности функций f в каждой вершине $v \in \mathcal{V}$, следовательно, форма $\mathbf{t}_Q$ не может быть расширена на большее подмножество пространства $W^{1,2}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{V}; \mathbb{C}^m)$.

Полагая $\varepsilon := 2^{-1} (\|Q\|_{L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})} + C_2(\alpha))^{-1}$ и объединяя оценки (3.4.5) и (3.4.6) с указанным ε , мы получаем следующую оценку для всех $f \in W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}_Q[f] + \mathbf{t}_\alpha[f]| &= \left| \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e \langle Q_e(x) f_e(x), f_e(x) \rangle dx + \sum_{v \in \mathcal{V}} \langle \alpha(v) f(v), f(v) \rangle \right| \leq \\ &\leq \|Q\|_{L^1(\mathcal{G})} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}} \varepsilon \|f'_e\|_{L^2(e; \mathbb{C}^m)}^2 + \varepsilon^{-1} C_1 \|f_e\|_{L^2(e; \mathbb{C}^m)}^2 \right) + \\ &+ C_2(\alpha) \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\varepsilon \|f'_e\|_{L^2(e; \mathbb{C}^m)}^2 + \varepsilon^{-1} C_1 \|f_e\|_{L^2(e; \mathbb{C}^m)}^2 \right) = \\ &= 2^{-1} \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\|f'_e\|_{L^2(e; \mathbb{C}^m)}^2 + 4C_3 \|f_e\|_{L^2(e; \mathbb{C}^m)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

где $C_3 = C_1(\|Q\|_{L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})} + C_2(\alpha))^2$. Согласно KLMN-теореме (см. [17, гл. 6] и [26, Теорема X.17], а также [16, Теорема 3.38]), форма $\mathbf{t}_{\alpha, Q} := \mathbf{t}_{0,0} + \mathbf{t}_Q + \mathbf{t}_\alpha$ является полуограниченной снизу и замкнутой на области $\text{dom } \mathbf{t}_{\alpha, Q} = W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$.

(ii). Включение $\text{dom } \mathbf{H}_{\alpha, Q} \subset W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$ очевидно. Докажем тождество (3.4.3). Пусть $l \in \mathcal{E}_{v, \infty}$ — бесконечное ребро, инцидентное вершине v . Поскольку $Q_l \in L^1(l; \mathbb{C}^{m \times m})$, индексы дефекта минимального оператора Шрёдингера $A_{l, \min}$ в $L^2(l; \mathbb{C}^m)$ являются минимальными, т.е. $n_\pm(A_{l, \min}) = m$. Следовательно, вронскиан $\langle f_l(x), g'_l(x) \rangle - \langle f'_l(x), g_l(x) \rangle$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty, x \in l$. Поэтому, интегрируя по частям вдоль ребра l и учитывая последнее соотношение, мы получаем, что для всех функций $f_l \in \text{dom } A_{l, \max}$ и $g_l \in W^{1,2}(l; \mathbb{C}^m)$ верно соотношение:

$$\int_l (-\langle f''_l, g_l \rangle + \langle Q_l f_l, g_l \rangle) dx = \int_l (f'_l \bar{g}'_l + \langle Q_l f_l, g_l \rangle) dx + \langle f'_l(v), g_l(v) \rangle. \quad (3.4.8)$$

Далее, пусть $e_k = \overrightarrow{vv_k} \in \mathcal{E}_{v, \text{fin}}$ — произвольное конечное ребро, инцидентное вершине v , и $f := f_{e_k} \in \text{dom } A_{e_k, \text{max}}$. Поскольку производные в каждой вершине являются **исходящими**, имеем $f'_{\overrightarrow{vv_k}}(v_k) = -f'_{\overrightarrow{v_k v}}(v_k)$. Поэтому, интегрируя по частям вдоль ребра $e_k = \overrightarrow{vv_k}$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{e_k} (-\langle f'', g \rangle + \langle Q_k f, g \rangle) dx &= \int_{e_k} (f' \overline{g'} + \langle Q_k f, g \rangle) dx - \\ &\quad - \langle f'_{\overrightarrow{vv_k}}(v_k), g(v_k) \rangle + \langle f'_{\overrightarrow{v_k v}}(v), g(v) \rangle = \\ &= \int_{e_k} (f' \overline{g'} + \langle Q_k f, g \rangle) dx + \langle f'_{\overrightarrow{v_k v}}(v_k), g(v_k) \rangle + \langle f'_{\overrightarrow{vv_k}}(v), g(v) \rangle. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Суммируя по всем бесконечным и конечным рёбрам $e \in \mathcal{E}$, используя определение (3.4.1) формы $\mathbf{t}_{\alpha, Q}$, и учитывая тождества (3.4.8) – (3.4.9) и условие (3.3.1), получаем, что для всех функций $f \in \text{dom } \mathbf{H}_{\alpha, Q}$ и $g \in W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$ верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'_{\alpha, Q}[f, g] &= \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e (-\langle f''_e, g_e \rangle + \langle Q_e f_e, g_e \rangle) dx = \\ &= \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e \left(f'_e(x) \overline{g'_e(x)} + \langle Q_e(x) f_e(x), g_e(x) \rangle \right) dx + \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{fin}}} (\langle f'_{-e}(v_{in}), g_e(v_{in}) \rangle + \langle f'_e(v_o), g_e(v_o) \rangle) + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\infty}} \langle f'_e(v), g_e(v) \rangle = \\ &= \int_{\mathcal{G}} f'(x) \overline{g'(x)} dx + \int_{\mathcal{G}} \langle Q f, g \rangle dx + \sum_{v \in \mathcal{V}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_v} \langle f'_e(v), g_e(v) \rangle \right) = \\ &= \int_{\mathcal{G}} f'(x) \overline{g'(x)} dx + \int_{\mathcal{G}} \langle Q f, g \rangle dx + \sum_{v \in \mathcal{V}} \langle \alpha(v) f(v), g(v) \rangle = \mathbf{t}_{\alpha, Q}[f, g]. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Полученное тождество совпадает с (3.4.3) и, таким образом, утверждение (ii) доказано.

(iii) – (iv). Поскольку форма $\mathbf{t}_{\alpha, Q}$ является замкнутой (см. (i)), то первая теорема о представлении ([17, Теорема VI.2.1.(ii)]), гарантирует, что область $\text{dom } \mathbf{H}_{\alpha, Q}$ является ядром формы $\mathbf{t}_{\alpha, Q}$, что доказывает (iv).

Кроме того, из указанной теоремы, вместе с утверждением (i) и тождеством (3.4.3) следует, что оператор $\mathbf{H}_{\alpha, Q} = \mathbf{H}_{\alpha, Q}^*$ является ассоциированным с (замкнутой) формой $\mathbf{t}_{\alpha, Q}$. Это доказывает утверждение (iii). $\square$

3.4.2 Классическая оценка типа Баргмана

Сначала, по аналогии с работой [20], мы сформулируем абстрактную версию принципа Бирмана-Швингера.

Для произвольного оператора $T = T^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ будем обозначать через $\kappa_{\mp}(T) := \dim E_T(\mathbb{R}_{\mp})$ размерность «отрицательного/положительного» спектрального подпространства.

Предложение 3.4.2. Пусть A_0 – неотрицательный самосопряжённый оператор в $\mathfrak{H}$, $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, пусть $A_1 = A_0 - K^*K$. Пусть также $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{ran} K} = (\ker K^*)^{\perp}$, и

$$M(z) := -I_{\mathcal{H}} + K(A_0 - z)^{-1}K^*, \quad z \in \rho(A_0), \quad (3.4.11)$$

является операторнозначной функцией со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $K^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ трактуется как операторная норма из пространства $\mathcal{H}$ в пространство $\mathfrak{H}$, и $M(0-) := s - R - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} M(\varepsilon)$. Тогда

$$\kappa_{-}(A_1) = \kappa_{+}(M(0-)). \quad (3.4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ – последовательность отрицательных собственных значений оператора A_1 . Фиксируя $\lambda_j \in \sigma_p(A_1) \cap \mathbb{R}_{-}$, имеем $0 = (A_1 - \lambda_j I)h = (A_0 - \lambda_j I)h - K^*Kh$ на некотором векторе $h \in \mathcal{H}$. Данное равенство эквивалентно равенству $h = (A_0 - \lambda_j)^{-1}K^*Kh$, т.е. $1 \in \sigma_p((A_0 - \lambda_j)^{-1}K^*K) = \sigma_p(K(A_0 - \lambda_j)^{-1}K^*)$. Кроме того (см. [6, раздел 3.10]),

$$\dim \ker((A_0 - \lambda_j)^{-1}K^*K - I) = \dim \ker(K(A_0 - \lambda_j)^{-1}K^* - I).$$

В свою очередь, это равенство эквивалентно соотношению $\dim \ker(A_1 - \lambda_j I) = \dim \ker M(\lambda_j) \neq \{0\}$. Согласно результатам работы [62] (см. также [16, Лемма 8.69]), получаем:

$$\kappa_{-}(A_1) = \sum_j \dim \ker(A_1 - \lambda_j I) = \sum_j \dim \ker M(\lambda_j) = \kappa_{+}(M(0-)),$$

что доказывает исходное утверждение. $\square$

Далее мы сформулируем классическую оценку типа Баргмана в матричном виде. Она хорошо известна в скалярном случае и может быть доказана аналогичным методом. Для полноты мы приведём доказательство, следуя работе [20] (другие подходы можно найти в статьях [3, 4, 36]).

Обозначим через $P_{\pm}(x) = E_{Q(x)}$, $x \in \mathbb{R}_+$, спектральную проекцию матрицы $Q(\cdot) (\in C(\mathbb{R}_+))$ на положительную/отрицательную часть её спектра и положим $Q_{\pm}(x) := \pm P_{\pm}(x)Q(x)$. Нетрудно видеть, что $Q_{\pm}(x) \geq 0$ и $Q(x) = Q_+(x) - Q_-(x)$.

Предложение 3.4.3. Пусть $Q = Q^*$ непрерывна и $xQ \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, а $\mathbf{H}^D := \mathbf{H}_Q^D$ — реализация Дирихле выражения $-d^2/dx^2 + Q$. Тогда верна следующая оценка:

$$\kappa_-(\mathbf{H}^D) \leq \int_{\mathbb{R}_+} x \cdot \text{tr}(Q_-(x)) dx. \quad (3.4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\kappa_-(\mathbf{H}_Q^D) \leq \kappa_-(\mathbf{H}_{Q_-}^D)$, то достаточно рассмотреть случай отрицательной матрицы $Q = -Q_-$. Тогда функция Вейля (3.4.11) принимает вид:

$$(I_{\mathcal{H}} + M(\lambda))h = \int_0^{\infty} Q_-^{1/2}(t)G(x, t; \lambda)Q_-^{1/2}(t)h(t) dt =: G(\lambda)h, \quad h \in \mathcal{H}, \quad (3.4.14)$$

где $\mathcal{H} = L^2(\text{supp } Q_-)$, $\text{supp } Q_- = \overline{\{x \in \mathbb{R}_+ : Q_-(x) \neq 0\}}$, а

$$G(x, t; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \begin{cases} \text{sh}(t\sqrt{-\lambda}) \cdot \exp(-x\sqrt{-\lambda}) \cdot I_m, & t \leq x \\ \text{sh}(x\sqrt{-\lambda}) \cdot \exp(-t\sqrt{-\lambda}) \cdot I_m, & t \geq x, \end{cases} \quad (3.4.15)$$

является функцией Грина расширения Дирихле $\mathbf{H}_0^D$ при $Q = 0$ и $\lambda < 0$.

Очевидно, что $G(x, t; 0) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G(x, t; -\varepsilon) = t$ при $t \leq x$. В силу предположения о матрице Q , интегральный оператор $G(-\varepsilon)$ принадлежит классу операторов следа с непрерывным ядром, следовательно, $\text{tr}(G(-\varepsilon)) = \int_0^{\infty} \text{sh}(t\sqrt{\varepsilon}) \cdot \exp(-t\sqrt{\varepsilon}) \cdot \text{tr}(Q_-(t)) dt$. Применяя данные факты вместе с Предложением 3.4.2 и обозначая через $\{\lambda_j(-\varepsilon)\}_{j=1}^{\infty}$ последователь-

ность (положительных) собственных значений оператора $G(-\varepsilon)$, имеем:

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{E}_{\mathbf{H}^D}(-\infty, -\varepsilon) &= \kappa_+(M(-\varepsilon)) = \sum_{\lambda_j(-\varepsilon) > 1} 1 \leq \sum_{\lambda_j(-\varepsilon) > 1} \lambda_j(-\varepsilon) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(-\varepsilon) = \operatorname{tr}(G(-\varepsilon)) \leq \int_0^{\infty} t \cdot \operatorname{tr}(Q_-(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Заметим, что правая часть последнего неравенства в (3.4.16) не зависит от ε и, переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, мы получаем искомую оценку (3.4.13). $\square$

3.4.3 Оценка типа Баргмана для графов

Теперь сформулируем и докажем оценку типа Баргмана для гамильтониана $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$, что будет являться главным результатом данного раздела.

Для симметрической квадратичной формы $\mathbf{t}$ положим:

$$\kappa_-(\mathbf{t}) = \{\max \dim L_- : L_- \subset \operatorname{dom}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t}[f] < 0 \quad \text{для всех} \quad f \in L_- \setminus \{0\}\}.$$

Если форма $\mathbf{t}$ является замкнутой, и $T = T^*$ — оператор, ассоциированный с нею, то тогда $\kappa_-(\mathbf{t}) = \kappa_-(T)$ в силу принципа минимакса.

Теорема 3.4.1. Пусть $Q = \bigoplus_{j=1}^p Q_j = Q^*$ и $x_e Q_e \in L^1(e; \mathbb{C}^{m \times m})$, $e \in \mathcal{E}$. Тогда в случае произвольной матричнозначной функции $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$, $\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot)^*$, для оператора $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ верна следующая оценка:

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha, Q}) \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} \left[\int_e x_e \cdot \operatorname{tr}(Q_{e,-}(x)) dx \right] + m|\mathcal{V}|. \quad (3.4.17)$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа $a \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с гамильтонианом $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ рассмотрим оператор Дирихле $\mathbf{H}^D := \mathbf{H}_Q^D = \bigoplus_{j=1}^p \mathbf{H}_j^D$, где $\mathbf{H}_j^D$ является реализацией Дирихле дифференциального выражения $\mathcal{A}_j$, $j \in \{1, \dots, p\}$ (см. шаг (i)₂ в доказательстве Теоремы 3.2.1). Полагая $W_0^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m) = \bigoplus_{e_j \in \mathcal{E}} W_0^{1,2}(e_j; \mathbb{C}^m)$, т.е.

$$W_0^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m) = \{f \in W^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m) : f(v) = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{V}\},$$

рассмотрим следующую форму:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^D[f] &= \mathbf{t}_Q^D[f] = \sum_{j=1}^p \left(\int_{e_j} |f'_j(x)|^2 dx + \int_{e_j} \langle Q_j f_j, f_j \rangle dx \right) = \\ &= \int_{\mathcal{G}} \left(|f'(x)|^2 + \langle Qf, f \rangle \right) dx, \quad \text{dom } \mathbf{t}^D = W_0^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Хорошо известно ([18], см. также [16, гл. 3]), что форма $\mathbf{t}^D$ является замкнутой, и оператор, ассоциированный с $\mathbf{t}^D$, является оператором Дирихле $\mathbf{H}^D$.

Согласно Предложению 3.4.3, для каждого оператора $\mathbf{H}_j^D$ выполняется соотношение:

$$\kappa_-(\mathbf{t}_j^D) = \kappa_-(\mathbf{H}_j^D) \leq \left[\int_{e_j} x \cdot \text{tr}(Q_{j,-}(x)) dx \right], \quad j \in \{1, \dots, p\}. \quad (3.4.19)$$

Суммируя по всем рёбрам, получаем следующую оценку для оператора Дирихле $\mathbf{H}^D$ на графе $\mathcal{G}$:

$$\kappa_-(\mathbf{t}^D) = \kappa_-(\mathbf{H}^D) \leq \sum_{j=1}^p \left[\int_{e_j} x \cdot \text{tr}(Q_{j,-}(x)) dx \right]. \quad (3.4.20)$$

Далее, рассмотрим форму $\mathbf{t}_{\alpha,Q}$ заданную выражениями (3.4.1) – (3.4.2). Из соотношения (3.4.18) следует, что сужение формы $\mathbf{t}_{\alpha,Q}$ на область $\text{dom } \mathbf{t}^D = W_0^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$ совпадает с формой Дирихле $\mathbf{t}^D$, т.е. $\mathbf{t}_{\alpha,Q} \upharpoonright \text{dom } \mathbf{t}^D = \mathbf{t}^D$.

Поэтому

$$\dim(\text{dom } \mathbf{t}_{\alpha,Q} / \text{dom } \mathbf{t}^D) = m|\mathcal{V}|. \quad (3.4.21)$$

Применяя данное соотношение вместе с оценкой (3.4.20), а также с принципом минимакса, получаем:

$$\kappa_-(\mathbf{t}_{\alpha,Q}) \leq \kappa_-(\mathbf{t}^D) + m|\mathcal{V}| \leq \sum_{j=1}^p \left[\int_{e_j} x \cdot \text{tr}(Q_{j,-}(x)) dx \right] + m|\mathcal{V}|. \quad (3.4.22)$$

С другой стороны, согласно Предложению 3.4.1, оператор, ассоциированный с формой $\mathbf{t}_{\alpha,Q}$, является гамильтонианом $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$. Поэтому $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(\mathbf{t}_{\alpha,Q})$. Применяя данное равенство вместе с неравенством (3.4.22), мы получаем требуемую оценку (3.4.17). $\square$

Отметим, что оценка (3.4.17) не отличается для расширения $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ и реализации Кирхгофа $\mathbf{H}_{0,Q}$ выражения $\mathcal{A}$.

Следствие 3.4.1. Пусть $\mathbf{H}_{\text{kir}} = \mathbf{H}_{0,Q}$ — реализация Кирхгофа расширения $\mathcal{A}$. Тогда

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \kappa_-(\mathbf{H}_{\text{kir}}) + \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v)). \quad (3.4.23)$$

В частности, если реализация Кирхгофа $\mathbf{H}_{\text{kir}}$ выражения $\mathcal{A}$ является неотрицательной, $\mathbf{H}_{\text{kir}} \geq 0$, то $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\mathbf{t}_{\text{kir}} := \mathbf{t}_{\mathbf{H}_{\text{kir}}}$, перепишем форму $\mathbf{t}_{\alpha,Q}$ (см. (3.4.1) – (3.4.2)) в следующем виде:

$$\mathbf{t}_{\alpha,Q}[f] = \mathbf{t}_{\text{kir}}[f] + \sum_{v \in \mathcal{V}} \langle \alpha(v)f(v), f(v) \rangle, \quad f \in \text{dom } \mathbf{t}_{\alpha,Q} = \text{dom } \mathbf{t}_{\text{kir}}. \quad (3.4.24)$$

Отметим, что Предложение 3.4.1 влечёт равенства $\kappa_-(\mathbf{t}_{\text{kir}}) = \kappa_-(\mathbf{H}_{\text{kir}})$ и $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(\mathbf{t}_{\alpha,Q})$. Применяя данные равенства вместе с (3.4.24), имеем:

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(\mathbf{t}_{\alpha,Q}) \leq \kappa_-(\mathbf{t}_{\text{kir}}) + \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v)) = \kappa_-(\mathbf{H}_{\text{kir}}) + \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v)).$$

Это доказывает требуемую оценку. $\square$

Наряду с гамильтонианом $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ рассмотрим оператор Неймана $\mathbf{H}^N := \mathbf{H}_Q^N = \bigoplus_{j=1}^p \mathbf{H}_j^N$, где $\mathbf{H}_j^N$ являются реализациями Неймана дифференциальных выражений $\mathcal{A}_j$ соответственно, $j \in \{1, \dots, p\}$. Хорошо известно, что квадратичная форма $\mathbf{t}_j^N := \mathbf{t}_{\mathbf{H}_j^N}$, соответствующая оператору $\mathbf{H}_j^N$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_j^N[f_j] &= \int_{e_j} \left(|f_j'(x)|^2 + \langle Q_j(x)f_j(x), f_j(x) \rangle \right) dx, \\ f_j &\in \text{dom } \mathbf{t}_j^N = W^{1,2}(e_j; \mathbb{C}^m). \end{aligned}$$

Поэтому квадратичная форма $\mathbf{t}^N := \mathbf{t}_{\mathbf{H}_Q^N}$, соответствующая оператору $\mathbf{H}^N$, определяется выражением:

$$\mathbf{t}^N[f] = \mathbf{t}_{\mathbf{H}_Q^N}[f] = \int_{\mathcal{G}} \left(|f'(x)|^2 + \langle Qf, f \rangle \right) dx, \quad \text{dom } \mathbf{t}^N = W^{1,2}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{V}; \mathbb{C}^m). \quad (3.4.25)$$

Следствие 3.4.2. Пусть $\mathbf{H}^N$ — реализация Неймана выражения $\mathcal{A}$. Тогда

$$\mathbf{H}^N \leq \mathbf{H}_{\text{kir}} \leq \mathbf{H}^D, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{t}^N \leq \mathbf{t}_{\text{kir}} \leq \mathbf{t}^D. \quad (3.4.26)$$

Более того, $\mathfrak{t}^N[f] = \mathfrak{t}_{\text{kir}}[f] = \mathfrak{t}^D[f]$ для $f \in \text{dom } \mathfrak{t}^D = W_0^{1,2}(\mathcal{G}; \mathbb{C}^m)$.

Замечание 3.4.1. Отметим, что предположение $\mathbf{H}_{\text{kir}} \geq 0$ является существенным. А именно, простые примеры (см. Замечания 3.5.1, 3.5.3 и 3.5.4 из параграфа 3.5) показывают, что оценка (3.4.23) становится неверной, если условие $\mathbf{H}_{\text{kir}} \geq 0$ заменить условием $\mathbf{H}^D = \widehat{A}_F \geq 0$.

3.5 Звёздные графы

3.5.1 Граничные тройки и функции Вейля

Рассмотрим звёздный граф $\mathcal{G}$, состоящий из общей (центральной) вершины $v_0 := 0$, $p_1 > 0$ бесконечных рёбер и $p_2 \geq 0$ конечных рёбер, $p := p_1 + p_2$. Как и раньше, мы задаём на графе $\mathcal{G}$ минимальный оператор Штурма-Лиувилля A , определённый выражением (3.1.10).

Выберем граничную тройку для оператора A^* в соответствии с выражениями (3.2.1), (3.2.6) и (3.2.8):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j &= \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0^{(j)} f_{e_j} = f_{e_j}(0), \quad \Gamma_1^{(j)} f_{e_j} = f'_{e_j}(0), \quad j \leq p_1, \\ \mathcal{H}_j &= \mathbb{C}^{2m}, \quad \Gamma_0^{(j)} f_{e_j} = \begin{pmatrix} f_{e_j}(0) \\ f_{e_j}(|e_j|) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1^{(j)} f_{e_j} = \begin{pmatrix} f'_{e_j}(0) \\ f'_{e_j}(|e_j|) \end{pmatrix}, \quad j > p_1, \\ \mathcal{H} &:= \bigoplus_{j=1}^p \mathcal{H}_j := \mathcal{H}_\infty \oplus \mathcal{H}_{\text{fin}}, \quad \Gamma_a := \bigoplus_{j=1}^p \Gamma_a^{(j)}, \quad a \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом введём соответствующую функцию Вейля (см. параграф 3.2):

$$M(z) = \left(\bigoplus_{j=1}^{p_1} M_j(z) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=p_1+1}^p M_j(z) \right) := M_\infty(z) \oplus M_{\text{fin}}(z), \quad (3.5.1)$$

где для каждого бесконечного ребра $e_j \in \mathcal{E}_\infty$, т.е. при $j \in \{1, \dots, p_1\}$

$$N_{0,j}(z)M_j(z) = N_{1,j}(z), \quad (3.5.2)$$

см. (3.2.2) – (3.2.3), и для каждого конечного ребра $e_j \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$, т.е. при

$$j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$$

$$\begin{aligned} M_j(z) &:= \begin{pmatrix} -S_j(|e_j|, z)^{-1} C_j(|e_j|, z) & S_j(|e_j|, z)^{-1} \\ (S_j(|e_j|, \bar{z})^*)^{-1} & -S'_j(|e_j|, z) S_j(|e_j|, z)^{-1} \end{pmatrix} := \\ &:= \begin{pmatrix} M_{e_j}^{11}(z) & M_{e_j}^{12}(z) \\ M_{e_j}^{21}(z) & M_{e_j}^{22}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{e_j}^{11}(z) & M_{e_j}^{12}(z) \\ M_{e_j}^{12}(\bar{z})^* & M_{e_j}^{22}(z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

см. (3.2.7).

3.5.2 Отрицательный спектр

В этом разделе мы уточняем и существенно дополняем Теорему 3.4.1 на случай звёздного графа в предположении, что минимальный оператор A является неотрицательным, $A \geq 0$. В частности, мы показываем, что оценка типа Баргмана (3.4.23) не является точной.

Теорема 3.5.1. *Пусть $\mathcal{G}$ — звёздный граф, состоящий из конечного числа $p_1(> 0)$ бесконечных рёбер и $p_2(\geq 0)$ конечных рёбер. Пусть также $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ — гамильтониан, заданный выражениями (3.3.1) – (3.3.2), и пусть минимальный оператор A , определённый выражением (3.1.10), является неотрицательным, $A \geq 0$. Далее, пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* , определённая выражением (3.2.8), и $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда:*

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha, Q}) = \kappa_-(T), \quad (3.5.4)$$

где $T \in \mathbb{M}((p_2 + 1)t)$ — матрица следующего вида:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha(0) - \left(\sum_{j=1}^{p_1} M_{l_j}(0) + \sum_{j=p_1+1}^p M_{e_j}^{11}(0) \right) & -M_{e_{p_1+1}}^{12}(0) & \dots & -M_{e_p}^{12}(0) \\ -M_{e_{p_1+1}}^{21}(0) & \alpha(v_1) - M_{e_{p_1+1}}^{22}(0) & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ -M_{e_p}^{21}(0) & \mathbb{O}_m & \dots & \alpha(v_{p_2}) - M_{e_p}^{22}(0) \end{pmatrix}. \quad (3.5.5)$$

Здесь все нетривиальные «недиагональные» элементы матрицы T расположены только в первом «ряду» и в первом «столбце».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы применить аппарат функции Вейля, найдём параметризацию гамильтониана $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ с учетом граничной тройки Π в соответствии с общей формулой (1.1.12). Для этого введём блочные матрицы

$C, D \in \mathbb{C}^{m_p \times m_p}$, где $m_p := (p_1 + 2p_2)m$. Положим:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha(0) & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m \\ C_m^1 & -\mathbb{I}_{11} & \dots & -\mathbb{I}_{p_1-1,1} & -\mathbb{I}_{p_1,1} & \mathbb{O}_{(p-1) \times m} & \dots & -\mathbb{I}_{p-1,1} & \mathbb{O}_{(p-1) \times m} \\ C_m^2 & -\mathbb{I}_{12} & \dots & -\mathbb{I}_{p_1-1,2} & -\mathbb{I}_{p_1,2} & \mathbb{O}_{(p-1) \times m} & \dots & -\mathbb{I}_{p-1,2} & \mathbb{O}_{(p-1) \times m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^m & -\mathbb{I}_{1,m} & \dots & -\mathbb{I}_{p_1-1,m} & -\mathbb{I}_{p_1,m} & \mathbb{O}_{(p-1) \times m} & \dots & -\mathbb{I}_{p-1,m} & \mathbb{O}_{(p-1) \times m} \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \alpha(v_1) & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \alpha(v_{p_2}) \end{pmatrix}. \quad (3.5.6)$$

Здесь $C_m^r (\in \mathbb{C}^{(p-1) \times m})$ — матрица, состоящая из единиц, расположенных в r -м столбце, остальные элементы равны нулю. Далее, $\mathbb{I}_{k_1, k_2} (\in \mathbb{R}^{(p-1) \times m})$ обозначает матрицу с единицей на месте (k_1, k_2) , остальные элементы также равны нулю. Ясно, что матрицы $\{\mathbb{I}_{k_1, k_2}\}$ образуют стандартный базис в $\mathbb{R}^{(p-1) \times m}$. Далее, положим:

$$D = \begin{pmatrix} I_m & I_m & \dots & I_m & I_m & \mathbb{O}_m & \dots & I_m & \mathbb{O}_m \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & I_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & I_m \end{pmatrix}, \quad (3.5.7)$$

где $I_m (\in \mathbb{C}^{m \times m})$ обозначает стандартную единичную матрицу порядка m .

Отметим, что $p - 1$ блочных рядов матрицы D , соответствующих $p - 1$ блочным рядам матрицы C , содержащих элементы C_m^r , являются тождественными нулями. Также в последних p_2 блочных рядах матрицы C матрицы $\alpha(v_j), j \in \{1, \dots, p_2\}$, соответствуют единичным матрицам I_m в последних p_2 блочных рядах матрицы D .

Нетрудно видеть, что в граничной тройке $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ вида (3.2.8) гамильтониан $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ задаётся следующим образом:

$$\mathbf{H}_{\alpha, Q} := A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \quad (3.5.8)$$

т.е. матричная пара $\{C, D\}$ определяет граничное отношение гамильтониана $\mathbf{H}_{\alpha, Q}$ в соответствии с общей параметризацией (1.1.12).

Из соотношений (3.2.8) вытекает, что $A_0 = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} \mathbf{H}_e^D$ является расширением Дирихле выражения $\mathcal{A}$, где $\mathbf{H}_e^D$ является расширением Дирихле выражения

$\mathcal{A}_e$ на каждом ребре $e \in \mathcal{E}$. Хорошо известно, что $\mathbf{H}_e^D$ является фридрихсовым расширением оператора A_e , следовательно, $A_0 = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} \mathbf{H}_e^D = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} \hat{A}_{e,F} = \hat{A}_F$ является фридрихсовым расширением оператора A (см., напр., [102, Следствие 3.10]).

Теперь, применяя Предложение 1.6.1 вместе с определением (3.5.8), имеем:

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(CD^* - DM(0)D^*), \quad (3.5.9)$$

где матрицы C и D заданы соотношениями (3.5.6) и (3.5.7) соответственно. Далее, нетрудно видеть, что

$$CD^* = DC^* = \text{diag}\{\alpha(0) \quad \mathbb{O}_{m(p-1)} \quad \alpha(v_1) \quad \dots \quad \alpha(v_{p_2})\}. \quad (3.5.10)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} DM(0)D^* &= \\ &= \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{p_1} M_{l_j}(0) + \sum_{j=p_1+1}^p M_{e_j}^{11}(0) \right) & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & M_{e_{p_1+1}}^{12}(0) & \dots & M_{e_p}^{12}(0) \\ & \mathbb{O}_m & & & \dots & & \mathbb{O}_m \\ & \vdots & & & \dots & & \vdots \\ & \mathbb{O}_m & & & \dots & & \mathbb{O}_m \\ M_{e_{p_1+1}}^{21}(0) & & & & M_{e_{p_1+1}}^{22}(0) & & \\ & \vdots & & & & \ddots & \\ M_{e_p}^{21}(0) & & & & & & M_{e_p}^{22}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Объединяя равенства (3.5.10) и (3.5.11), находим явное выражение для матрицы $\hat{T}_0 = CD^* - DM(0)D^*$. С другой стороны, ясно, что матрица $\hat{T}_0$ является унитарно эквивалентной матрице

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \end{pmatrix} = T \oplus \mathbb{O}_{m(p-1)} \in \mathbb{C}^{m_p \times m_p}, \quad (3.5.12)$$

где T определена равенством (3.5.5). В свою очередь, объединяя этот факт с равенством (3.5.9), получаем:

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(CD^* - DM(0)D^*) = \kappa_-(\hat{T}) = \kappa_-(T), \quad (3.5.13)$$

что завершает доказательство. $\square$

Следствие 3.5.1. Пусть выполнены условия Теоремы 3.5.1. Тогда

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq (p_2 + 1)t. \quad (3.5.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое неравенство следует из соотношения (3.5.4), если учесть размер матрицы T . $\square$

Следующее утверждение уточняет Теорему 3.5.1 на случай звёздных графов без конечных рёбер, т.е. при $p_2 = 0$.

Следствие 3.5.2. Пусть выполнены условия Теоремы 3.5.1. Пусть также $p_2 = 0$. Тогда

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_- \left(\alpha(0) - \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) \right) \leq t. \quad (3.5.15)$$

В частности, $\mathbf{H}_{\alpha,Q} \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha(0) \geq \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку конечные рёбра отсутствуют, матрица $\hat{T}$ вида (3.5.12) сводится к блочному элементу: $T = \alpha(0) - \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Теорема 3.5.1 завершает доказательство. $\square$

Следствие 3.5.3. Пусть выполнены условия Следствия 3.5.2. Если $\kappa_-(\mathbf{H}_{\text{kir}}) = t$, то $M(0) = \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbf{H}_{\text{kir}} = \mathbf{H}_{0,Q}$, то из (3.5.15) вытекает, что

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\text{kir}}) = \kappa_- \left(- \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) \right) = \kappa_+ \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) \right) = t. \quad (3.5.16)$$

Так как $M_e(0) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ для всех e , мы получаем искомое соотношение. $\square$

Замечание 3.5.1. Существуют матричные функции $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$, такие что $\alpha(v) > 0$ для всех $v \in \mathcal{V}$, несмотря на то, что $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) > 0$. Действительно, достаточно выбрать функцию α удовлетворяющей условию $0 < \alpha(v) < \sum_{e \in \mathcal{E}} M_e(0)$ для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$. Тогда $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(\hat{T}_0) > 0$. Поэтому оценка $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \leq \sum_{v \in \mathcal{V}} \kappa_-(\alpha(v))$ нарушается.

В следующем следствии мы рассматриваем особый случай звёздного графа общего вида.

Следствие 3.5.4. *Пусть выполнены условия Теоремы 3.5.1. Пусть также $p_2 = 1$, $\det T_{11} \neq 0$, где*

$$\begin{aligned} T_{11} &= \alpha(v_0) - \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) - M_e^{11}(0), \\ T_{12} &= -M_e^{12}(0), \quad T_{22} = \alpha(v_1) - M_e^{22}(0). \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Тогда

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(T_{11}) + \kappa_-(T_{22} - T_{12}^* T_{11}^{-1} T_{12}). \quad (3.5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае матрица T принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha(0) - \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) - M_e^{11}(0) & -M_e^{12}(0) \\ -M_e^{12}(0)^* & \alpha(v_1) - M_e^{22}(0) \end{pmatrix}. \quad (3.5.19)$$

Применяя критерий Сильвестра (см. [16, гл. 4]) вместе с соотношениями (3.5.17), получаем требуемое равенство (3.5.18). $\square$

Замечание 3.5.2.

(i) Пусть $\det T_{12} \neq 0$ и $\alpha(v_1) = M_e^{22}(0)$, т.е. $T_{22} = \mathbb{O}_m$. Тогда $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \text{rank } T_{11}$.

(ii) Пусть $\det T_{12} \neq 0$ и $\alpha(0) = \sum_{e \in \mathcal{E}_\infty} M_e(0) + M_e^{11}(0)$, т.е. $T_{11} = \mathbb{O}_m$. Тогда $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \text{rank } T_{22}$.

Следствие 3.5.5. *Пусть выполнены условия Теоремы 3.5.1. Пусть также $Q = \mathbb{O}_m$. Тогда:*

(i) $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,0}) = \kappa_-(T_1)$, где матрица T_1 имеет вид:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \alpha(0) + \sum_{k=1}^{p_2} a_k & -a_1 & \dots & -a_{p_2} \\ -a_1 & \alpha(v_1) + a_1 & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{p_2} & \mathbb{O}_m & \dots & \alpha(v_{p_2}) + a_{p_2} \end{pmatrix}, \quad (3.5.20)$$

и $a_k := \frac{1}{|e_{p_1+k}|} \cdot I_m$ при $k \in \{1, \dots, p_2\}$.

(ii) *Имеет место следующее неравенство:*

$$\kappa_{-}(\mathbf{H}_{\alpha,0}) = \kappa_{-}(T_1) \leq \sum_{k=0}^{p_2} \kappa_{-}(\alpha(v_k)). \quad (3.5.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). В случае $Q = \mathbb{O}_m$ имеем:

$$M_{l_j}(0) = \mathbb{O}_m, \quad M_{e_j}(0) = -\frac{1}{|e_j|} \begin{pmatrix} I_m & -I_m \\ -I_m & I_m \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, \dots, p\}. \quad (3.5.22)$$

Используя соотношения (3.5.12), получаем:

$$\widehat{T}_0 = \begin{pmatrix} \alpha(0) + \sum_{k=1}^{p_2} a_k & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & -a_1 & \dots & -a_{p_2} \\ \mathbb{O}_m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbb{O}_m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbb{O}_m \\ -a_1 & \dots & \dots & \dots & \alpha(v_1) + a_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_{p_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha(v_{p_2}) + a_{p_2} \end{pmatrix}. \quad (3.5.23)$$

С другой стороны, матрица $\widehat{T}_0 = CD^* - DM(0)D^*$ является унитарно эквивалентной матрице $T_1 \oplus \mathbb{O}_{m(p-1)}$, где T_1 определена выражением (3.5.20). Поэтому $\kappa_{-}(\mathbf{H}_{\alpha,0}) = \kappa_{-}(CD^* - DM(0)D^*) = \kappa_{-}(T_1)$.

(ii). Отметим, что неравенство (3.5.21) является частным случаем неравенства (3.4.23). Однако, мы здесь приведём простое алгебраическое доказательство. Ясно, что, $T_1 = T_2 + T_3$, где

$$T_2 = \text{diag}\{\alpha(0), \alpha(v_1), \dots, \alpha(v_{p_2})\},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p_2} a_k & -a_1 & \dots & -a_{p_2} \\ -a_1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{p_2} & & & a_{p_2} \end{pmatrix}. \quad (3.5.24)$$

Нетрудно видеть, что существует невырожденная матрица $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$, такая что $G^*T_3G = \text{diag}\{\mathbb{O}_m, a_1, \dots, a_{p_2}\} \geq 0$. Поэтому, в силу принципа минимакса,

$\kappa_-(T_1) \leq \kappa_-(T_2) = \sum_{k=0}^{p_2} \kappa_-(\alpha(v_k))$. Теперь соотношение (3.5.21) следует из утверждения (i). $\square$

Замечание 3.5.3.

(i) Приведём простые примеры, показывающие, что в отличие от равенства $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,0}) = \kappa_-(T_1)$, оценки (3.5.21) и (3.4.23) не являются точными. Для этого рассмотрим звёздный граф с одним конечным ребром, т.е. $p_2 = 1$. В этом случае матрица T_1 , заданная выражением (3.5.20), принимает вид:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \alpha(0) + a_1 & -a_1 \\ -a_1 & \alpha(v_1) + a_1 \end{pmatrix}. \quad (3.5.25)$$

Пусть $\kappa_-(\alpha(0)) > 0$ и $\kappa_-(\alpha(v_1)) > 0$. Однако, матрица T_1 является положительно определённой при условии, что

$$\alpha(0) + a_1 > 0, \quad \alpha(v_1) + a_1 - a_1(\alpha(0) + a_1)^{-1}a_1 > 0. \quad (3.5.26)$$

Например, полагая $m = 2$ и

$$\alpha(0) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha(v_1) := \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.5.27)$$

имеем:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \text{т.е.} \quad \kappa_-(T_1) = 0. \quad (3.5.28)$$

Подытоживая, получаем, что $\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,0}) = \kappa_-(T_1) = 0$, в то время как $\kappa_-(\alpha(0)) + \kappa_-(\alpha(v_1)) = 2$.

(ii) Неравенство (3.5.21) превращается в равенство, когда матрицы $\alpha(0)$ и $\alpha(v_1)$ являются отрицательно определёнными, т.е. $\alpha(0) < 0$ и $\alpha(v_1) < 0$, а матрицы a_k являются достаточно малыми, т.е.

$$\alpha(0) + \sum_{k=1}^{p_2} a_k < 0, \quad \alpha(v_k) + a_k < 0, \quad k \in \{1, \dots, p_2\}. \quad (3.5.29)$$

Это означает, что конечные рёбра $e_{p_1+1}, \dots, e_p$ имеют достаточно малые длины. В данном случае неравенства (3.5.21) и (3.4.23) становятся равенствами.

Следующее простое утверждение показывает, что в скалярном случае матрица T_1 , заданная выражением (3.5.25), не может быть положительной.

Следствие 3.5.6. *Пусть $m = 1$, матрица $\alpha(0) < 0$ и $\alpha(v_1) < 0$. Тогда матрица T_1 (см. (3.5.25)) не является положительно определённой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая противное, отметим, что по критерию Сильвестра матрица T_1 является положительно определённой тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha(0) + a_1 > 0, \\ (\alpha(0) + a_1)(\alpha(v_1) + a_1) - a_1^2 > 0. \end{cases} \quad (3.5.30)$$

Из неравенств в (3.5.30) вытекает, что $\alpha(v_1) + a_1 > 0$. В свою очередь, применение последнего неравенства и первого неравенства в (3.5.30) с учётом того, что $\alpha(0) < 0$ и $\alpha(v_1) < 0$, влечёт $0 < (\alpha(0) + a_1)(\alpha(v_1) + a_1) < a_1^2$. Мы получили противоречие со вторым неравенством в (3.5.30), и утверждение доказано. $\square$

Замечание 3.5.4. Однако, в скалярном случае существуют простые примеры матриц T_1 , показывающие, что неравенства (3.5.21) и (3.4.23) не являются точными. А именно, можно определить T_1 так, чтобы $\kappa_-(T_1) = 1$, в то время как $\kappa_-(\alpha(0)) = \kappa_-(\alpha(v_1)) = 1$, т.е. $\kappa_-(\alpha(0)) + \kappa_-(\alpha(v_1)) = 2$. Для этого достаточно положить $\alpha(0) = \alpha(v_1) = -1$ и $a_1 = 2$.

Следствие 3.5.7. *Пусть выполнены условия Следствия 3.5.5. Пусть также $\alpha = \mathbb{O}_m$. Тогда $\kappa_-(T_1) = 0$.*

Замечание 3.5.5. Гамильтониан $\mathbf{H}_{0,0}$ был рассмотрен в статье [44, Теорема 1].

3.5.3 Матрица рассеяния

В этом разделе мы находим явный вид матрицы рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ для пары операторов $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D\}$, где $\mathbf{H}^D := \mathbf{H}_Q^D$ яв-

ляется оператором Дирихле на графе $\mathcal{G}$, а $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ — гамильтониан вида (3.3.2) с потенциальной матрицей Q вида (3.1.4).

Как и раньше, для каждого бесконечного ребра $l_j \in \mathcal{E}_\infty$, $j \in \{1, \dots, p_1\}$, мы будем рассматривать минимальный оператор $A_j := A_{l_j}$, ассоциированный с выражением (3.1.5) в $L^2(l_j; \mathbb{C}^m)$ на области (3.1.8), где $v = 0$. При этом $n_\pm(A_j) = m$, и

$$\mathcal{H}_j := \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0^{(j)} f = f(0), \quad \Gamma_1^{(j)} f = f'(0), \quad f \in \text{dom } A_j^*, \quad (3.5.31)$$

является граничной тройкой $\Pi_j := \{\mathcal{H}_j, \Gamma_0^{(j)}, \Gamma_1^{(j)}\}$ для A_j^* . Соответствующая функция Вейля $M_j := M_{l_j}$ задаётся выражением (3.5.2) и принимает значения в $\mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$.

Для каждого конечного ребра $e_k \in \mathcal{E}_{\text{fin}}$, $k \in \{1, \dots, p_2\}$, мы будем рассматривать симметрический оператор $T_k := T_{e_k}(\supset A_{e_k, \min})$ на следующей области:

$$\text{dom } T_k = \{f \in \text{dom } A_{e_k, \max} : f(0) = f'(0) = f'(v_k) = 0\}, \quad (3.5.32)$$

где $A_{e_k, \max}$ задаётся выражением (3.1.7). В данном случае $v_o := 0$, а $v_{in} := v_k$, $k \in \{1, \dots, p_2\}$. Отметим, что

$$\text{dom } T_k^* = \{f \in \text{dom } A_{e_k, \max} : f'(v_k) = 0\}. \quad (3.5.33)$$

Нетрудно видеть, что оператор T_k является расширением минимального оператора A_{e_k} , заданного выражением (3.1.9), и $n_\pm(T_k) = m$. Выберем граничную тройку $\widehat{\Pi}_k := \{\widehat{\mathcal{H}}_k, \widehat{\Gamma}_0^{(k)}, \widehat{\Gamma}_1^{(k)}\}$ для T_k^* следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_k := \mathbb{C}^m, \quad \widehat{\Gamma}_0^{(k)} f = f(0), \quad \widehat{\Gamma}_1^{(k)} f = f'(0), \quad f \in \text{dom } T_k^*. \quad (3.5.34)$$

Соответствующая функция Вейля имеет вид:

$$M_k(z) := M_{e_k}(z) = -C'_k(v_k, z)C_k(v_k, z)^{-1} \quad (3.5.35)$$

и принимает значения в $\mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$. Здесь $C_k(x, z)$, $k \in \{1, \dots, p_2\}$, — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k C_k(x, z) &= z C_k(x, z), & x \in e_k, & \quad z \in \mathbb{C}, \\ C_k(0, z) &= I_m, & C'_k(0, z) &= \mathbb{O}_m. \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

Далее, $\hat{A} := (\bigoplus_{j=1}^{p_1} A_j) \oplus (\bigoplus_{k=1}^{p_2} T_k)$ является симметрическим оператором на графе $\mathcal{G}$ с индексами дефекта $n_{\pm}(\hat{A}) = mp$. Нетрудно видеть, что множество $\hat{\Pi} := \{\hat{\mathcal{H}}, \hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_1\}$, где

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &:= \left(\bigoplus_{j=1}^{p_1} \mathcal{H}_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{p_2} \hat{\mathcal{H}}_k \right) = \bigoplus_{j=1}^{p_1+p_2} \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{mp}, \\ \hat{\Gamma}_a &:= \left(\bigoplus_{j=1}^{p_1} \Gamma_a^{(j)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{p_2} \hat{\Gamma}_a^{(k)} \right), \quad a \in \{0, 1\},\end{aligned}\tag{3.5.37}$$

является граничной тройкой для $\hat{A}^*$. При этом гамильтониан $\mathbf{H}^D := \hat{A}^* \upharpoonright \ker \hat{\Gamma}_0$ имеет вид:

$$\mathbf{H}^D = \left(\bigoplus_{j=1}^{p_1} \mathbf{H}_j^D \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{p_2} T_k^{DN} \right),\tag{3.5.38}$$

где T_k^{DN} — оператор Штурма-Лиувилля с условием Дирихле в вершине 0 и с условием Неймана в висячей вершине v_k . Соответствующая функция Вейля $M(\cdot)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}M(z) &= \text{diag}\{M_1(z), \dots, M_p(z)\}, \quad z \in \rho(\mathbf{H}^D), \\ M_j(z) &:= M_{l_j}(z) = N_{0,j}(z)^{-1} N_{1,j}(z), \quad j \in \{1, \dots, p_1\}, \\ M_j(z) &:= M_{e_{j-p_1}}(z), \quad j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}.\end{aligned}\tag{3.5.39}$$

Гамильтониан $\mathbf{H}_{\alpha}$ является расширением оператора $\hat{A}$ и в граничной тройке (3.5.37) задаётся равенством:

$$\mathbf{H}_{\alpha} := \hat{A}^* \upharpoonright \ker(\hat{D}\hat{\Gamma}_1 - \hat{C}\hat{\Gamma}_0), \quad \hat{C}\hat{D}^* = \hat{D}\hat{C}^*,\tag{3.5.40}$$

где $\hat{C}, \hat{D} \in \mathbb{C}^{mp \times mp}$ — блочные матрицы следующего вида:

$$\widehat{C} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & p_1 & p_1+1 & \dots & p \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ p_1 \\ p_1+1 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} \alpha(0) & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O}_m \\ I_m & -I_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O}_m \\ I_m & \mathbb{O}_m & -I_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & -I_m & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O}_m \\ I_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O} & -I_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & -I_m \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3.5.41)$$

и

$$\widehat{D} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & p_1 & p_1+1 & \dots & p \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ p_1 \\ p_1+1 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} I_m & I_m & I_m & \dots & I_m & I_m & \dots & I_m \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \end{array} \right] \end{matrix}. \quad (3.5.42)$$

Далее, пусть $S_j(x, z)$, $j \in \{1, \dots, p_1\}$, — матричное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j S_j(x, z) &= z S_j(x, z), \quad x \in l_j, \quad z \in \mathbb{C}, \\ S_j(0, z) &= \mathbb{O}_m, \quad S'_j(0, z) = I_m. \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

Кроме того, пусть $E_{p_1} \in \mathbb{C}^{p_1 \times p_1}$ — матрица единичного ранга следующего вида:

$$E_{p_1} := \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & p_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ p_1 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{array} \right] \end{matrix} : \mathbb{C}^{p_1} \longrightarrow \mathbb{C}^{p_1}. \quad (3.5.44)$$

Теперь, используя введённые обозначения, сформулируем главный результат данного раздела в виде следующей теоремы.

Теорема 3.5.2. Пусть $\mathcal{G}$ — звёздный граф, состоящий из $p_1 > 0$ бесконечных рёбер и $p_2 \geq 0$ конечных рёбер, обозначим $p_1 + p_2 := p$, и пусть $Q := \bigoplus_{j=1}^p Q_j \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$. Пусть также $\widehat{\Pi} = \{\mathcal{H}, \widehat{\Gamma}_0, \widehat{\Gamma}_1\}$ — граничная тройка вида (3.5.37), и $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля вида (3.5.39). Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) Гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathcal{H}_{ac})$, где

$$\mathcal{H}_{ac} := \bigoplus_{j=1}^{p_1} \mathcal{H}_j = \underbrace{\mathbb{C}^m \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^m}_{p_1} = \mathbb{C}^{m \cdot p_1} \subseteq \mathcal{H}, \quad (3.5.45)$$

задаёт спектральное представление оператора $\mathbf{H}_{ac}^D$.

(ii) Относительно спектрального представления $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathcal{H}_{ac})$ матрица рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ для пары $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D\}$ допускает для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}_+$ представление

$$\begin{aligned} S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda) &= \\ &= I_{\mathcal{H}_{ac}} + \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} (N_0(\lambda)^*)^{-1} ((\alpha(0) - K(\lambda))^{-1} \otimes E_{p_1}) \cdot N_0(\lambda)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.5.46)$$

в котором

$$\begin{aligned} K(\lambda) &:= \sum_{j=1}^{p_1} M_j(\lambda + i0) : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \\ N_{0,j}(\lambda) &:= \frac{I_m}{2i\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_{l_j} e^{i\sqrt{\lambda}t} Q_j(t) S_j(t, \lambda) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \\ N_0(\lambda) &:= \bigoplus_{j=1}^{p_1} N_{0,j}(\lambda) : \mathcal{H}_{ac} \longrightarrow \mathcal{H}_{ac}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.5.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (1.1.11) следует, что

$$(\Theta - M(z))^{-1} = \left(\widehat{C} - \widehat{D}M(z) \right)^{-1} \widehat{D}. \quad (3.5.48)$$

Учитывая соотношения (3.5.39) и (3.5.41) – (3.5.42), получаем:

$$\Lambda(z) := \widehat{C} - \widehat{D}M(z) =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & p_1 & \dots & p \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p_1 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \begin{bmatrix} \alpha(0) - M_1(z) & -M_2(z) & \dots & -M_{p_1}(z) & \dots & -M_p(z) \\ I_m & -I_m & \dots & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_m & \mathbb{O}_m & \dots & -I_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \dots & -I_m \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}(z) : \mathcal{L}_1 &\longrightarrow \mathcal{L}_1, & \Lambda_{12}(z) : \mathcal{L}_2 &\longrightarrow \mathcal{L}_1, \\ \Lambda_{21} : \mathcal{L}_1 &\longrightarrow \mathcal{L}_2, & \Lambda_{22} : \mathcal{L}_2 &\longrightarrow \mathcal{L}_2, \end{aligned} \quad (3.5.49)$$

где

$$\Lambda_{11}(z) := \alpha(0) - M_1(z),$$

$$\Lambda_{12}(z) := \begin{bmatrix} & 2 & 3 & \dots & p_1 & \dots & p \\ -M_2(z) & -M_3(z) & \dots & -M_{p_1}(z) & \dots & -M_p(z) \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{21} := \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & \dots & p_1 & \dots & p \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ p_1 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \Lambda_{22} := \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & \dots & p_1 & \dots & p \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ p_1 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \begin{bmatrix} -I_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \mathbb{O}_m & -I_m & \dots & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & -I_m & \dots & \mathbb{O}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \dots & -I_m \end{bmatrix} \end{matrix},$$

и

$$\mathcal{L}_1 := \mathbb{C}^m, \quad \mathcal{L}_2 := \bigoplus_{j=2}^p \mathcal{H}_j = \underbrace{\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^m}_{p-1}. \quad (3.5.50)$$

Заметим, что $\Lambda_{22} = -I_{\mathcal{L}_2}$. Используя введённые обозначения, находим:

$$\widehat{C} - \widehat{D}M(z) = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(z) & \Lambda_{12}(z) \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} : \begin{matrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{matrix}. \quad (3.5.51)$$

Дополнение Шура $(\widehat{C} - \widehat{D}M(z))/\Lambda_{22}$ принимает вид:

$$\begin{aligned} (\widehat{C} - \widehat{D}M(z))/\Lambda_{22} &= \Lambda_{11}(z) - \Lambda_{12}(z)\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{21} = \\ &= \alpha(0) - \sum_{j=1}^p M_j(z) = \alpha(0) - K(z), \quad z \in \mathbb{C}_+. \end{aligned} \quad (3.5.52)$$

Следовательно, обратная матрица $(\widehat{C} - \widehat{D}M(z))^{-1}$ при $z \in \mathbb{C}_+$ может быть найдена по формуле Фробениуса:

$$\begin{aligned} (\widehat{C} - \widehat{D}M(z))^{-1} &= \\ &= \begin{bmatrix} (\alpha(0) - K(z))^{-1} & -(\alpha(0) - K(z))^{-1}\Lambda_{12}(z)\Lambda_{22}^{-1} \\ -\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{21}(\alpha(0) - K(z))^{-1} & \Lambda_{22}^{-1} + \Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{21}(\alpha(0) - K(z))^{-1}\Lambda_{12}(z)\Lambda_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5.53)$$

Поскольку $-\Lambda_{12}(z)\Lambda_{22}^{-1} = \Lambda_{12}(z)$ и $-\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{21} = \Lambda_{21}$, $z \in \mathbb{C}_+$, формула (3.5.53) допускает упрощение:

$$\begin{aligned} (\widehat{C} - \widehat{D}M(z))^{-1} &= \\ &= \begin{bmatrix} (\alpha(0) - K(z))^{-1} & (\alpha(0) - K(z))^{-1} \cdot \Lambda_{12}(z) \\ \Lambda_{21} \cdot (\alpha(0) - K(z))^{-1} & -I_{\mathcal{L}_2} + \Lambda_{21} \cdot (\alpha(0) - K(z))^{-1} \cdot \Lambda_{12}(z) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5.54)$$

Ясно, что матрица $\widehat{D}$ допускает представление $\widehat{D} = \begin{bmatrix} \widehat{D}_{11} & \widehat{D}_{12} \\ \widehat{D}_{21} & \widehat{D}_{22} \end{bmatrix}$, где

$$\widehat{D}_{11} := I_m : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1, \quad \widehat{D}_{12} := \begin{bmatrix} 2 & \dots & p \\ I_m & \dots & I_m \end{bmatrix} : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1,$$

$$\widehat{D}_{21} := \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ p \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_m \\ \mathbb{O}_m \\ \vdots \\ \mathbb{O}_m \end{bmatrix} : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2, \quad \widehat{D}_{22} := \mathbb{O}_{m(p-1)} : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2. \quad (3.5.55)$$

Применяя соотношения (3.5.54) и (3.5.55), получаем:

$$\begin{aligned}
& (\widehat{C} - \widehat{D}M(z))^{-1} \widehat{D} = \\
& = \begin{bmatrix} (\alpha(0) - K(z))^{-1} & (\alpha(0) - K(z))^{-1} \cdot \Lambda_{12}(z) \\ \Lambda_{21} \cdot (\alpha(0) - K(z))^{-1} & -I_{\mathcal{L}_2} + \Lambda_{21} \cdot (\alpha(0) - K(z))^{-1} \cdot \Lambda_{12}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{D}_{11} & \widehat{D}_{12} \\ \widehat{D}_{21} & \widehat{D}_{22} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} (\alpha(0) - K(z))^{-1} & (\alpha(0) - K(z))^{-1} \times \widehat{D}_{12} \\ \Lambda_{21} \cdot (\alpha(0) - K(z))^{-1} & \Lambda_{21} \cdot (\alpha(0) - K(z))^{-1} \cdot \widehat{D}_{12} \end{bmatrix} = \\
& = (\alpha(0) - K(z))^{-1} \otimes E_p,
\end{aligned} \tag{3.5.56}$$

где выражение « $(\alpha(0) - K(z))^{-1} \times \widehat{D}_{12}$ » означает, что каждый элемент матрицы $\widehat{D}_{12}$ умножается слева на $(\alpha(0) - K(z))^{-1}$, а матрица $E_p : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p$ имеет вид (3.5.44).

Чтобы перейти к пределу в формуле (3.5.56) при $z \rightarrow \infty$ $\lambda \in \mathbb{R}_+$, вначале заметим, что в соответствии с выражением (3.5.35), для всех $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$ функция Вейля $M_j(\cdot)$ является мероморфной, следовательно, при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, за исключением дискретного множества Ω_j положительных полюсов, предел

$$M_j(\lambda) := \lim_{y \downarrow 0} M_j(\lambda + iy) = \lim_{y \downarrow 0} M_{e_{j-p_1}}(\lambda + iy), \quad j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}, \tag{3.5.57}$$

существует и является самосопряжённым, т.е. $\text{Im}(M_{e_{j-p_1}}(\lambda)) = 0$.

Далее, поскольку $Q_j(\cdot) \in L^1(l_j; \mathbb{C}^{m \times m})$, то согласно Теореме 2.2.1, предел

$$M_j(\lambda) := \lim_{y \downarrow 0} M_j(\lambda + iy), \quad j \in \{1, 2, \dots, p_1\}, \tag{3.5.58}$$

существует для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и является обратимым. Поэтому, переходя к пределу в выражении (3.5.56) при $z \rightarrow \infty$ λ и учитывая соотношения (3.5.57) и (3.5.58), получаем:

$$\begin{aligned}
& (\widehat{C} - \widehat{D}M(\lambda))^{-1} \widehat{D} := (\widehat{C} - \widehat{D}M(\lambda + i0))^{-1} \widehat{D} = \\
& = \left(\alpha(0) - \sum_{j=1}^p M_j(\lambda + i0) \right)^{-1} \otimes E_p, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \Omega,
\end{aligned} \tag{3.5.59}$$

где $\Omega := \bigcup_{j=p_1+1}^p \Omega_j$. Более того, Теорема 2.2.1 (см. (2.2.19)) гарантирует, что $\text{Im}(M_j(\lambda))$, $j \in \{1, \dots, p_1\}$, является обратимой для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и

$$\text{Im}(M_j(\lambda)) := \text{Im}(M_j(\lambda + i0)) = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} (N_{0,j}(\lambda)^* N_{0,j}(\lambda))^{-1}, \tag{3.5.60}$$

где функция $N_{0,j}(\lambda)$ задана выражением (3.5.47). Следовательно,

$$\sqrt{\operatorname{Im}(M_j(\lambda))} = \frac{1}{2\sqrt[4]{\lambda}} U_j(\lambda) N_{0,j}^*(\lambda)^{-1}, \quad (3.5.61)$$

где $U_j(\cdot)$ — измеримое семейство унитарных операторов.

Полагая $U(\lambda) := \bigoplus_{j=1}^p U_j(\lambda)$, подставляя выражения (3.5.48), (3.5.59) и (3.5.61) в общую формулу для матрицы рассеяния (1.4.4), и учитывая, что матрица рассеяния определена с точностью до унитарного сомножителя, получаем требуемое равенство (3.5.46). $\square$

Замечание 3.5.6. Подчеркнём, что относительно простое выражение (3.5.46) для матрицы рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ было получено благодаря трактовке гамильтонианов $\mathbf{H}^D$ и $\mathbf{H}_\alpha$ как расширений промежуточного расширения $\hat{A}(\supset A_{\min})$ вместо минимального оператора $A_{\min}$.

Стационарная постановка задачи рассеяния на квантовом графе впервые была рассмотрена Н.И. Герасименко и Б.С. Павловым [10] (см. также статью [9] и монографию [49]).

Следствие 3.5.8. Пусть выполнены условия Теоремы 3.5.2, и пусть $\mathcal{G}$ — звёздный граф, состоящий из одного бесконечного ребра, т.е. $p_1 = 1$, $p_2 = 0$. Тогда $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathbb{C}^m)$ задаёт спектральное представление оператора $\mathbf{H}_{ac}^D$ и имеет место равенство:

$$S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda) = I_m + \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} (N_0(\lambda) (\alpha(0) - N_0(\lambda)^{-1} N_1(\lambda)) N_0(\lambda)^*)^{-1}. \quad (3.5.62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p_1 = 1$, то $E_{p_1} = 1$, и $\alpha(0) - K(\lambda) = \alpha(0) - M(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Согласно равенству (3.5.46),

$$S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda) = I_m + \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} (N_0(\lambda)^*)^{-1} (\alpha(0) - M(\lambda))^{-1} N_0(\lambda)^{-1}. \quad (3.5.63)$$

Применяя первое равенство из (2.2.18), находим:

$$M(\lambda) := M(\lambda + i0) = N_0(\lambda)^{-1} N_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Подставляя это выражение в (3.5.63), получаем равенство (3.5.62). $\square$

Пусть теперь $m = 1$, $p_1 > 0$, $p_2 = 0$, и $\alpha = \mathbb{O}_m$. Чтобы отличать матричные величины от скалярных, будем использовать малые буквы вместо заглавных. Например, потенциал $Q_j(\cdot)$ переобозначим через $q_j(\cdot)$, функцию Вейля $M_j(\cdot)$ — через $m_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2, \dots, p_1\}$, и.т.д. Положим:

$$m(z) = \bigoplus_{j=1}^{p_1} m_j(z), \quad z \in \mathbb{C}_{\pm} \quad \text{и} \quad m(\lambda) = \bigoplus_{j=1}^{p_1} m_j(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (3.5.64)$$

Отметим, что теперь $\alpha - K(\lambda) = -\sum_{j=1}^{p_1} m_j(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

В скалярном случае переобозначим величины $N_{0,j}(\cdot)$ и $N_{1,j}(\cdot)$ через $n_{0,j}(\cdot)$ и $n_{1,j}(\cdot)$, $j \in \{1, 2, \dots, p_1\}$, соответственно. Однако, теперь будем обозначать:

$$\begin{aligned} N_0(\cdot) &:= \text{diag}\{n_{0,1}(\cdot), n_{0,2}(\cdot), \dots, n_{0,p_1}(\cdot)\} \\ N_1(\cdot) &:= \text{diag}\{n_{1,1}(\cdot), n_{1,2}(\cdot), \dots, n_{1,p_1}(\cdot)\}. \end{aligned} \quad (3.5.65)$$

Следствие 3.5.9. Пусть $m = 1$ и $\alpha = \mathbb{O}_m$. Тогда верны следующие утверждения:

- (i) $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathbb{C}^{p_1})$ задаёт спектральное представление оператора $\mathbf{H}_{ac}^D$, и для $\lambda \in \mathbb{R}_+$ матрица рассеяния имеет вид:

$$S(\mathbf{H}_{\alpha}, \mathbf{H}^D; \lambda) = I_{p_1} - \frac{i}{2\sqrt{\lambda} \sum_{j=1}^{p_1} m_j(\lambda)} (N_0(\lambda)^*)^{-1} E_{p_1} N_0(\lambda)^{-1}. \quad (3.5.66)$$

- (ii) Если $q_j(\cdot) = q(\cdot)$, $j \in \{1, 2, \dots, p_1\}$, то $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathbb{C}^{p_1})$ задаёт спектральное представление оператора $\mathbf{H}_{ac}^D$, и имеет место равенство:

$$S(\mathbf{H}_{\alpha}, \mathbf{H}^D; \lambda) = I_{p_1} - 2i \frac{\text{Im}(m(\lambda))}{p_1 m(\lambda)} E_{p_1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (3.5.67)$$

где $m(\cdot) := m_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2, \dots, p_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что в данном случае $\alpha - K(\lambda) = -p_1 m(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Кроме того, $N_0(\lambda) = n_0(\lambda) \cdot I_{p_1}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Следовательно,

$$S(\mathbf{H}_{\alpha}, \mathbf{H}^D; \lambda) = I_{p_1} - \frac{i}{2\sqrt{\lambda} p_1 m(\lambda)} \frac{1}{n_0(\lambda) n_0(\lambda)} E_{p_1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (3.5.68)$$

Из первого соотношения в (2.2.19) вытекает, что $\frac{1}{n_0(\lambda)n_0(\lambda)} = 4 \sqrt{\lambda} \operatorname{Im}(m(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Подставляя это выражение в равенство (3.5.68), получаем требуемое равенство (3.5.67). $\square$

Замечание 3.5.7. На первый взгляд, неочевидно, что матрица рассеяния (3.5.67) унитарна. Однако, используя равенство $E_{p_1}^2 = p_1 E_{p_1}$, мы получаем:

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda)^* S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda) &= \\
 &= \left(I_{p_1} + 2i \frac{\operatorname{Im}(m(\lambda))}{p_1 \overline{m(\lambda)}} E_{p_1} \right) \left(I_{p_1} - 2i \frac{\operatorname{Im}(m(\lambda))}{p_1 m(\lambda)} E_{p_1} \right) = \\
 &= I_{p_1} + 2i \frac{\operatorname{Im}(m(\lambda))}{p_1} \left(\frac{1}{\overline{m(\lambda)}} - \frac{1}{m(\lambda)} \right) E_{p_1} + 4 \frac{(\operatorname{Im}(m(\lambda)))^2}{p_1^2 |m(\lambda)|^2} E_{p_1}^2 = \\
 &= I_{p_1} - 4 \frac{(\operatorname{Im}(m(\lambda)))^2}{p_1 |m(\lambda)|^2} E_{p_1} + 4 \frac{(\operatorname{Im}(m(\lambda)))^2}{p_1 |m(\lambda)|^2} E_{p_1} = I_{p_1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.
 \end{aligned} \tag{3.5.69}$$

Замечание 3.5.8. В случае $\alpha(0) = \mathbb{O}_m$ равенство (3.5.62) допускает упрощение:

$$S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D; \lambda) = I_m - \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} (N_1(\lambda) N_0(\lambda)^*)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{3.5.70}$$

3.5.4 Детерминант возмущения

В этом разделе, используя результаты работы [103], мы находим детерминант возмущения $\tilde{\Delta}_{\mathbf{H}_\alpha/\mathbf{H}^D}^{\hat{\Pi}}(\zeta, z)$ пары $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}^D\}$ в граничной тройке $\hat{\Pi}$, заданной выражениями (3.5.37). Определение детерминанта возмущения $\tilde{\Delta}_{\mathbf{H}_\alpha/\mathbf{H}^D}^{\hat{\Pi}}(\zeta, z)$ можно найти в [31].

Предложение 3.5.1. Пусть $\mathbf{H}_\alpha (\in \operatorname{Ext}_{\hat{A}})$ — гамильтониан, заданный выражением (3.3.2), и пусть $\mathbf{H}^D$ — оператор Дирихле на звёздном графе $\mathcal{G}$. Пусть также $\hat{\Pi}$ — граничная тройка для оператора $\hat{A}^*$, определённого выражением (3.5.37). Тогда для всех $\zeta \in \rho(\mathbf{H}_\alpha) \cap \rho(\mathbf{H}^D)$ детерминант возмущения в граничной тройке $\hat{\Pi}$ допускает представление:

$$\tilde{\Delta}_{\mathbf{H}_\alpha/\mathbf{H}^D}^{\hat{\Pi}}(\zeta, z) = \frac{\det(\hat{C} - \hat{D}M(z))}{\det(\hat{C} - \hat{D}M(\zeta))}, \quad z \in \rho(\mathbf{H}^D), \tag{3.5.71}$$

где $\widehat{C}$ и $\widehat{D}$ — матрицы, заданные выражениями (3.5.41) и (3.5.42) соответственно, а $M(\cdot)$ — функция Вейля, заданная выражением (3.5.39).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно Предложению 4.3 из статьи [103], для любого собственного расширения $\widetilde{A} \in \text{Ext}_{\widehat{A}}$ детерминант возмущения $\widetilde{\Delta}_{\widetilde{A}/A_0}(\zeta, z)$ имеет вид:

$$\widetilde{\Delta}_{\widetilde{A}/A_0}(\zeta, z) = \det \left(I_{\mathcal{H}} + (\Theta - M(\zeta))^{-1} (M(\zeta) - M(z)) \right), \quad (3.5.72)$$

где $\zeta \in \rho(\widetilde{A}) \cap \rho(A_0)$, а $z \in \rho(A_0)$. Отметим, что в граничной тройке $\widehat{\Pi}$ для $\widehat{A}^*$ гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha$ допускает представление (3.5.40), т.е. $\mathbf{H}_\alpha = \widehat{A}_\Theta$, где $\Theta = \ker \begin{pmatrix} \widehat{C} & \widehat{D} \end{pmatrix}$. Далее, напомним, что в соответствии с соотношением (1.1.11),

$$(\Theta - M(\zeta))^{-1} = \left(\widehat{C} - \widehat{D}M(\zeta) \right)^{-1} \widehat{D}. \quad (3.5.73)$$

Учитывая, что в нашем случае $\widetilde{A} = \mathbf{H}_\alpha$, $A_0 = \mathbf{H}^D$, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{mp \times mp}$, и подставляя соотношение (3.5.73) в равенство (3.5.72), получаем:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_{\mathbf{H}_\alpha/\mathbf{H}^D}^{\widehat{\Pi}}(\zeta, z) &= \det \left(I_{mp} + \left(\widehat{C} - \widehat{D}M(\zeta) \right)^{-1} \widehat{D} (M(\zeta) - M(z)) \right) = \\ &= \det \left(\left(\widehat{C} - \widehat{D}M(\zeta) \right)^{-1} \left(\widehat{C} - \widehat{D}M(z) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.5.74)$$

Теперь искомое равенство (3.5.71) следует из формулы детерминанта для произведения. $\square$

Замечание 3.5.9.

(i) Матрица $(\widehat{C} - \widehat{D}M(\cdot))^{-1}$ имеет явное выражение, см. (3.5.54).

(ii) Подставляя формулу (3.5.56) в первое равенство в (3.5.74), получаем другое выражение для детерминанта возмущения $\widetilde{\Delta}_{\mathbf{H}_\alpha/\mathbf{H}^D}^{\widehat{\Pi}}(\zeta, z)$:

$$\widetilde{\Delta}_{\mathbf{H}_\alpha/\mathbf{H}^D}^{\widehat{\Pi}}(\zeta, z) = \det \left(I_{mp} + ((\alpha(0) - K(\zeta))^{-1} \otimes E_p) (M(\zeta) - M(z)) \right), \quad (3.5.75)$$

где $K(\zeta) := \sum_{j=1}^p M_j(\zeta)$, $E_p \in \mathbb{C}^{p \times p}$ — матрица (единичного ранга), состоящая из p^2 единиц (см. (3.5.44)), и $\zeta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+$, $z \in \rho(\mathbf{H}^D)$.

ГЛАВА 4

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ МАТРИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

В данной главе обобщаются результаты **Главы 2** и **Главы 3** на случай трёхчленного дифференциального матричного выражения Штурма-Лиувилля вида:

$$\mathcal{L}(P, Q, R)y := R^{-1}(x)(-(P(x)y')' + Q(x)y), \quad y = (y_1, \dots, y_m)^\top. \quad (4.0.1)$$

Здесь матричные коэффициенты $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$ предполагаются локально суммируемыми, а потенциальная матрица $Q(\cdot)$ — сингулярной и принадлежащей соболевскому пространству $W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. При этом операторы, порождённые выражением (4.0.1), рассматриваются в весовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$.

4.1 Общий случай сингулярного $W^{-1,1}$ -потенциала

Здесь мы регуляризуем дифференциальное выражение $\mathcal{L}(P, Q, R)$, получаем новое выражение $\mathcal{L} := \mathcal{L}(P, R, \sigma_1, \sigma_2)$, и исследуем свойства функции Вейля $M^D(z)$, соответствующей реализации Дирихле L^D выражения $\mathcal{L}$, а также её предельное представление $M^D(\lambda + i0)$. Главная цель — показать, что неотрицательная часть произвольного самосопряжённого расширения выражения $\mathcal{L}$ (в том числе и расширения L^D) является чисто абсолютно непрерывной с постоянной кратностью m . Также мы показываем, что отрицательная часть каждой самосопряжённой реализации дифференциального выражения $\mathcal{L}$ — компактна.

4.1.1 Регуляризация

В данном разделе самосопряжённость матричной функции $P(\cdot)$ понимается в стандартном смысле: $P(\cdot) = P(\cdot)^*$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Будем предполагать,

что $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$ являются обратимыми при п.в. $x \in \mathbb{R}_+$ и допускают представление:

$$\begin{aligned} P(x) &= (I_m + P_1(x))^{-1}, \quad P_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), \\ R(x) &= I_m + R_1(x) = R(x)^* > 0 \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}_+, \\ R_1(\cdot) &\in W^{1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}). \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Кроме того, будем предполагать, что $Q(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, что согласно классическому определению класса $W^{-1,1}$ (см. [32, гл. 3]), означает справедливость представления:

$$Q(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2'(x), \quad (4.1.2)$$

$$\text{в котором} \quad \sigma_j(\cdot) = \sigma_j(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), \quad j \in \{1, 2\}.$$

Здесь производная понимается в смысле теории распределений. Однако, всюду далее мы будем предполагать справедливость более сильного включения:

$$\sigma_2(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \cap L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}). \quad (4.1.3)$$

Следуя [29], регуляризуем выражение (4.0.1) следующим образом:

$$\mathcal{L}(y) := R^{-1}(x) \left(\sigma_1(x)y - (y^{[1]})' - \sigma_2(x)P^{-1}(x)y^{[1]} - \sigma_2(x)P^{-1}(x)\sigma_2(x)y \right), \quad (4.1.4)$$

где

$$y^{[1]} := P(x)y' - \sigma_2(x)y \quad (4.1.5)$$

называют квазипроизводной функции y . Регуляризация (4.1.4) даёт строгую трактовку формального выражения (4.0.1). Отметим, что если $Q(\cdot)$ является гладкой функцией, то выражения (4.0.1) и (4.1.4) совпадают.

Далее введём матричное решение $Y(x, z)$ уравнения:

$$\mathcal{L}(Y(x, z)) = zY(x, z), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.1.6)$$

Пусть $C(\cdot, z)$ и $S(\cdot, z)$ — матричные решения уравнения (4.1.6), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{aligned} C(0, z) &= S^{[1]}(0, z) = I_m, \quad z \in \mathbb{C}, \\ S(0, z) &= C^{[1]}(0, z) = \mathbb{O}_m, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

4.1.2 Функции Вейля самосопряжённых реализаций

В данном разделе всюду предполагается, что матричные коэффициенты $P(\cdot)$, $R(\cdot)$, $\sigma_1(\cdot)$, $\sigma_2(\cdot)$, входящие в выражение (4.1.4), удовлетворяют условиям (4.1.1) – (4.1.3). Как и раньше, будем обозначать через $AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ множество локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$, т.е. $f \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, если $f \in AC[0, b]$ при всех $b \in \mathbb{R}_+$. С дифференциальным выражением (4.1.4) мы связываем минимальный и максимальный операторы. Соответствующий минимальный оператор $A := L_{\min}$ задаётся выражением $\mathcal{L}$ на области:

$$\text{dom } A := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m), \\ f(0) = f^{[1]}(0) = 0 \end{array} \right\}. \quad (4.1.8)$$

Сопряжённый оператор A^* совпадает с максимальным оператором $L_{\max}$ и задаётся тем же выражением на области:

$$\text{dom } A^* := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) \end{array} \right\}. \quad (4.1.9)$$

Важно отметить, что оператор A является простым. Также отметим, что в случае $Q(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \Leftrightarrow \sigma_2(\cdot) \equiv 0$ определения минимального и максимального операторов совпадают с классическими определениями (см. [2, 24]), поскольку условие $f^{[1]} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ влечёт включение $P(\cdot)f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, и обратное тоже верно.

Далее, определим реализацию (расширение) Дирихле L^D выражения (4.1.4) следующим образом:

$$\text{dom } L^D := \{f \in \text{dom } A^* : f(0) = 0\}. \quad (4.1.10)$$

В следующей лемме мы вводим граничную тройку для оператора $A^* = L_{\max}$.

Лемма 4.1.1. Пусть выполнены условия (4.1.1) – (4.1.3). Тогда множество

$\Pi = \Pi^D := \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0 f = f(0), \quad \Gamma_1 f = f^{[1]}(0), \quad f = (f_1, \dots, f_m)^\top \in \text{dom } L_{\max}, \quad (4.1.11)$$

является граничной тройкой для оператора $A^* = L_{\max}$. В данном случае $A_0 = L^D$.

Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.2.1.

Предложение 4.1.1. Пусть выполнены условия (4.1.1) – (4.1.3). Пусть $M^D(\cdot)$ – функция Вейля, соответствующая граничной тройке (4.1.11). Пусть также $S(\cdot, \cdot)$ и $C(\cdot, \cdot)$ – матричные решения уравнения (4.1.6), удовлетворяющие начальным условиям (4.1.7). Тогда:

(i) Функции $S(x, z)$ и $C(x, z)$ допускают представления:

$$\begin{aligned} S(x, z) &= e^{-ix\sqrt{z}} \{-N_0(z) + o_m(1)\}, & x \rightarrow \infty, & \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}, \\ C(x, z) &= e^{-ix\sqrt{z}} \{N_1(z) + o_m(1)\}, & x \rightarrow \infty, & \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

в которых

$$\begin{aligned} N_0(z) &= \frac{I_m}{2i\sqrt{z}} + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_1(t) S(t, z) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} (I_m + P_1(t)) \sigma_2(t) S(t, z) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t) (I_m + P_1(t)) \sigma_2(t) S(t, z) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} P_1(t) S^{[1]}(t, z) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t) (I_m + P_1(t)) S^{[1]}(t, z) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1'(t) S(t, z) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1(t) S'(t, z) dt, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

u

$$\begin{aligned}
N_1(z) = & \frac{1}{2}(I_m + R_1(0)) - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_1(t) C(t, z) dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} (I_m + P_1(t)) \sigma_2(t) C(t, z) dt + \\
& + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t) (I_m + P_1(t)) \sigma_2(t) C(t, z) dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} P_1(t) C^{[1]}(t, z) dt + \\
& + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t) (I_m + P_1(t)) C^{[1]}(t, z) dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1'(t) C(t, z) dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1(t) C'(t, z) dt, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}.
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Функции $N_j(\cdot)$, $j \in \{0, 1\}$, корректно определены, непрерывны и голоморфны в $\overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$.

(ii) Справедливо соотношение:

$$N_0(z) M^D(z) = N_1(z), \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{4.1.15}$$

Доказательство аналогично доказательству Предложения 2.2.1.

В следующей теореме мы исследуем функцию Вейля $M^D(\cdot)$, соответствующую реализации L^D . В частности, мы показываем, что на полуоси $\mathbb{R}_+$ часть соответствующей спектральной меры $\Sigma_{M^D}(\cdot)$ из интегрального представления (1.1.7) — абсолютно непрерывна, и указываем её явный вид.

Теорема 4.1.1. Пусть $\mathcal{L}$ — дифференциальное выражение вида (4.1.4), и выполнены условия (4.1.1) – (4.1.3). Тогда для функции Вейля $M^D(\cdot)$, соответствующей граничной тройке (4.1.11), справедливы следующие утверждения:

- (i) Детерминант $d_0(z) = \det(N_0(z))$ — голоморфная в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ функция и множество её нулей Λ_0 является компактным, т.е. дискретным с единственной возможной предельной точкой ноль.

(ii) *Функция Вейля допускает представление*

$$M^D(z) = N_0(z)^{-1}N_1(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0, \quad \Lambda_0 = \{z \in \mathbb{C} : d_0(z) = 0\}. \quad (4.1.16)$$

(iii) *Некасательные предельные значения функции Вейля*

$M^D(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} M^D(z)$ существуют при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, и справедливо равенство:

$$M^D(\lambda) := M^D(\lambda + i0) = N_0(\lambda)^{-1}N_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (4.1.17)$$

Кроме того, для мнимой части справедливо представление:

$$M_I^D(\lambda) := \text{Im}(M^D(\lambda + i0)) = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} (N_0(\lambda)^* N_0(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (4.1.18)$$

В частности, мнимая часть $M_I^D(\lambda)$ положительно определена для каждого $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(iv) *Соответствующая спектральная мера $\Sigma_{M^D}(\cdot)$ функции Вейля $M^D(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+$ имеет вид:*

$$\Sigma_{M^D}(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{t}} (N_0(t)^* N_0(t))^{-1} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (4.1.19)$$

В частности, $\Sigma_{M^D}(\cdot)$ — абсолютно непрерывна с непрерывной на $\mathbb{R}_+$ плотностью $\frac{d\Sigma_{M^D}(\lambda)}{d\lambda}$ максимального ранга, т.е. $\text{rank} \left(\frac{d\Sigma_{M^D}(\lambda)}{d\lambda} \right) = t$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2.2.1.

В следующем следствии мы исследуем функцию Вейля $\widetilde{M}(\cdot)$, соответствующую произвольному самосопряжённому расширению $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ минимального оператора A . В частности, мы показываем, что на полуоси $\mathbb{R}_+$ часть соответствующей спектральной меры $\Sigma_{\widetilde{M}}(\cdot)$ из интегрального представления (1.1.7) — абсолютно непрерывна, и указываем её явный вид.

Следствие 4.1.1. *Пусть выполнены условия (4.1.1) – (4.1.3). Пусть $\widetilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ — граничная тройка для оператора A^* , такая что*

$\tilde{A} = A^* \upharpoonright \ker(\tilde{\Gamma}_0)$. Тогда для функции Вейля, соответствующей граничной тройке $\tilde{\Pi}$, справедливы следующие утверждения:

- (i) Некасательный предел $\tilde{M}(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} \tilde{M}(z)$ существует при всех $\lambda > 0$, и мнимая часть $\tilde{M}_I(\lambda) := \text{Im}(\tilde{M}(\lambda + i0))$ положительно определена.
- (ii) Соответствующая спектральная мера $\Sigma_{\tilde{M}}$ функции Вейля $\tilde{M}(\cdot)$ (неортогональная спектральная мера оператора $\tilde{A}$) при всех $\lambda > 0$ имеет вид:

$$\Sigma_{\tilde{M}}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda (M^D(t)^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} M_I^D(t) (X_{21} M^D(t) + X_{22})^{-1} dt, \quad (4.1.20)$$

в котором функция Вейля $M^D(\cdot)$ и её мнимая часть $M_I^D(\cdot)$ задаются равенствами (4.1.17) и (4.1.18) соответственно. В частности, $\Sigma_{\tilde{M}}(\cdot)$ является абсолютно непрерывной с непрерывной на $\mathbb{R}_+$ плотностью $d\Sigma_{\tilde{M}}(\lambda)/d\lambda$ максимального ранга, т.е. $\text{rank}(d\Sigma_{\tilde{M}}(\lambda)/d\lambda) = m$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство аналогично доказательству Следствия 2.2.1.

Определение 4.1.1. Пусть $\mathcal{K}$, — измеримое подмножество $\mathbb{R}$, $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что самосопряжённый оператор T в $\mathfrak{H}$ с разложением единицы $E_T(\cdot)$ имеет лебеговский спектр кратности d на $\mathcal{K}$, если его часть $E_T(\mathcal{K})T$ унитарно эквивалентна оператору умножения на λ в пространстве $\bigoplus_1^d L^2(\mathcal{K}, \mu)$, где μ — мера Лебега.

В следующей теореме изучаются спектральные свойства произвольного самосопряженного расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора A . Для этого воспользуемся параметризацией (1.1.12).

Теорема 4.1.2. Пусть выполнены условия (4.1.1) – (4.1.3), $\Pi^D = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка вида (4.1.11), и $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ — произвольное самосопряжённое расширение минимального оператора A вида (4.1.8). Тогда существуют

матрицы $C, D \in \mathbb{C}^{m \times m}$, такие что

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \tilde{A}^* = A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \\ CD^* = DC^*, \quad 0 \in \rho(CC^* + DD^*), \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

и справедливы следующие утверждения:

- (i) Неотрицательная часть $E_{\tilde{A}}(\overline{\mathbb{R}}_+) \tilde{A}$ оператора $\tilde{A}$ имеет лебеговский спектр постоянной кратности m , т.е.

$$\sigma_{ac}(\tilde{A}) = [0, \infty), \quad \sigma_s(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset \quad \text{и} \quad N_{\tilde{A}^{ac}}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Более того, положительные части $E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_+) \tilde{A}$ и $E_{L^D}(\mathbb{R}_+) L^D$ операторов $\tilde{A}$ и L^D унитарно эквивалентны.

- (ii) Детерминант $d_{C,D}(z) = \det(CN_0(\bar{z})^* - DN_1(\bar{z})^*)$ суть голоморфная в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ функция.

- (iii) Оператор $\tilde{A}$ полуограничен снизу и его отрицательный спектр совпадает с замыканием множества нулей функции $d_{C,D}(z)$, т.е.

$$\sigma_{pp}(\tilde{A}) = \sigma_{pp}(\tilde{A}) \cap \overline{\mathbb{R}}_- = \Lambda_{C,D}, \quad \Lambda_{C,D} = \{z \in \mathbb{C} : d_{C,D}(z) = 0\}.$$

В частности, отрицательная часть $E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_-) \tilde{A}$ оператора $\tilde{A}$ компактна, т.е. её спектр либо конечен, либо дискретен с единственной предельной точкой ноль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) вытекает из формулы (4.1.20) в силу результата о спектральной эквивалентности ортогональной и неортогональной спектральных мер $E_{\tilde{A}}(\cdot)$ и $\Sigma_{\tilde{M}}(\cdot)$ самосопряжённой реализации $\tilde{A}$ простого симметрического оператора A (см. [101]). Доказательство утверждений (ii) и (iii) аналогично доказательству утверждений (ii) и (iv) Теоремы 2.2.1. $\square$

4.2 Операторы Шрёдингера с дельта-взаимодействиями на полуоси

В этом параграфе мы рассматриваем дифференциальное выражение Штурма-Лиувилля вида (4.0.1), предполагая, что для матричных коэффициентов

$P(\cdot), R(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ выполняются условия (4.1.1), а потенциальная матрица $Q(\cdot)$ имеет следующий вид:

$$Q(x) := Q_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(x - x_k), \quad (4.2.1)$$

$$\{x_k\}_1^{\infty} \subset \mathbb{R}_+, \quad \alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Эти операторы при $P(\cdot) = R(\cdot) = I_m$ являются объектами многочисленных исследований последних четырёх десятилетий (см., например, монографии [35, 37], обзор [92] и литературу в них).

Как и раньше, с выражением $\mathcal{L}(P, Q, R)$ будем ассоциировать минимальный симметрический оператор $A := L_{\min}$ в весовом гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$.

Напомним, что $|\alpha_k| := \|\alpha_k\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}$ обозначает матричную норму.

Предложение 4.2.1. Пусть $L^D := L^D(P, Q, R)$ — реализация Дирихле выражения (4.0.1) в $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$. Пусть также

$$Q_1(\cdot) = Q_1(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty. \quad (4.2.2)$$

Тогда оператор L^D является самосопряжённым, а его неотрицательная часть имеет лебеговский спектр постоянной кратности m , т.е.

$$\sigma_{ac}(L^D) = [0, \infty), \quad \sigma_s(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset \quad \text{и} \quad N_{L^D_{ac}}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Кроме того, отрицательная часть $E_{L^D}(\mathbb{R}_-)$ оператора L^D компактна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим Теорему 4.1.2 с $\tilde{A} = L^D$. Для этого достаточно показать, что при условиях (4.2.2) потенциальная матрица $Q(\cdot)$ принадлежит классу $W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Вначале проверим, что $\delta(\cdot)$ допускает следующее представление:

$$\delta(x) = \frac{2x\theta(x)}{(x^2 + 1)^2} + \left(\frac{\theta(x)}{x^2 + 1} \right)' =: q_1(x) + q_2'(x), \quad (4.2.3)$$

в котором $\theta(\cdot)$ – стандартная функция Хевисайда. Действительно, для произвольной функции $\varphi(\cdot) \in C_0^\infty$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\theta(x)}{x^2 + 1} \right)', \varphi \right) = - \left(\theta(x), \frac{\varphi'(x)}{x^2 + 1} \right) = \\ & = - \left(\theta(x), \frac{2x\varphi(x)}{(x^2 + 1)^2} \right) - \left(\theta(x), \left(\frac{\varphi(x)}{x^2 + 1} \right)' \right) = \\ & = - \left(\theta(x), \frac{2x\varphi(x)}{(x^2 + 1)^2} \right) + \left(\delta(x), \frac{\varphi(x)}{x^2 + 1} \right) = \\ & = - \left(\frac{2x\theta(x)}{(x^2 + 1)^2}, \varphi(x) \right) + (\delta(x), \varphi(x)). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Тождество (4.2.3) немедленно следует из (4.2.4) с $q_2(x) = (x^2 + 1)^{-1}\theta(x)$.

Ясно, что $q_1(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $q_2(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для всех $p \in [1, \infty]$. Поэтому включение $\delta(\cdot) \in W^{-1,p}(\mathbb{R}_+)$ следует из описания класса $W^{-1,p}(\mathbb{R}_+)$ (см. [32, гл. 3], а также формулу (1.5.1)). В свою очередь, представление (4.2.3) с учётом условий (4.2.2) даёт:

$$\begin{aligned} Q_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(x - x_k) &= Q_1(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(x - x_k)\theta(x - x_k)}{((x - x_k)^2 + 1)^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{\theta(x - x_k)}{(x - x_k)^2 + 1} \right)' =: \sigma_1(x) + \sigma_2'(x), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &:= Q_1(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(x - x_k)\theta(x - x_k)}{((x - x_k)^2 + 1)^2} \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), \\ \sigma_2(x) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\theta(x - x_k)}{(x - x_k)^2 + 1} \in L^p(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}), \quad p \in [1, \infty]. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Первое включение в (4.2.6) очевидно. Чтобы доказать второе включение, достаточно проверить, что $\sigma_2(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Действительно,

$$\|\sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \int_{x_k}^{\infty} \frac{\theta(x - x_k)}{(x - x_k)^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty.$$

Полученное неравенство влечёт включение $\sigma_2(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Включение $\sigma_2(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ очевидно. Поэтому, в соответствии с описанием (1.5.1),

$Q(\cdot) = \sigma_1(\cdot) + \sigma'_2(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. Применение Теоремы 4.1.1 завершает доказательство. $\square$

Далее, применим Предложение 4.2.1 к дифференциальному выражению Шрёдингера с дельта-взаимодействиями, считая в (4.0.1) $P(\cdot) = R(\cdot) = I_m$, т.е. — к выражению

$$\mathbf{H}_{X_+, \alpha, Q} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q(\cdot) = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(\cdot - x_k). \quad (4.2.7)$$

Здесь $X_+ = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ и $\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $k \in \mathbb{N}$.

Следствие 4.2.1. Пусть выполнены условия (4.2.2). Тогда реализация Дирихле $\mathbf{H}^D$ выражения (4.2.7) является самосопряжённой, а её неотрицательная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}^D}(\overline{\mathbb{R}_+})\mathbf{H}^D$ имеет лебеговский спектр постоянной кратности m , т.е.

$$\sigma_{ac}(\mathbf{H}^D) = [0, \infty), \quad \sigma_s(\mathbf{H}^D) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset, \quad N_{\mathbf{H}_{ac}^D}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.2.8)$$

Кроме того, отрицательная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}^D}(\mathbb{R}_-)\mathbf{H}^D$ оператора $\mathbf{H}^D$ компактна.

Замечание 4.2.1. В случае скалярного оператора Шрёдингера с суммируемым потенциалом $Q_1(\cdot) = q(\cdot) = \overline{q(\cdot)} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ без точек взаимодействий ($\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$) Следствие 4.2.1 было доказано Э.Ч. Титчмаршем (см. [30], гл. 5). Этот результат был обобщён на случай суммируемого матричного потенциала $Q_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$ и конечного числа точек взаимодействий в [81], а в случае $Q_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$, но без точек взаимодействий ($\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$), независимо и другим методом — в работе [111] (см. также монографию [33]). На случай конечных некомпактных квантовых графов с суммируемыми матричными потенциалами этот результат был распространён в [80].

4.3 Операторы Шрёдингера с дельта-взаимодействиями на оси

В этом параграфе мы исследуем абсолютную непрерывность спектра минимального оператора Штурма-Лиувилля $L := L_{\min}(P, Q, R)$, порождённого выражением (4.0.1) на прямой $\mathbb{R}$. Для этого заметим, что с дифференциальным

выражением $\mathcal{L}(P, Q, R)$ естественно связаны минимальные операторы $L_{\pm, \min}$, порождаемые дифференциальными выражениями $\mathcal{L}(P, Q, R)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_{\pm}}$ на полуосях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ соответственно. Здесь, как и прежде, $\mathbf{1}_E(\cdot)$ — индикатор измеримого множества E . Мы ограничимся рассмотрением потенциальных матриц $Q(\cdot)$ вида

$$Q(x) := Q_1(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(x - x_k), \quad Q_1(\cdot) = Q_1(\cdot)^* \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{m \times m}), \quad (4.3.1)$$

$$\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m \times m},$$

хотя основной результат (Теорема 4.3.1) остаётся верным и при общем условии $Q(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m})$. В следующей теореме мы исследуем абсолютно непрерывный спектр оператора $L = L_{\min}(P, Q, R)$ на оси $\mathbb{R}$, считая его самосопряжённым, $L = L^*$, и предполагая выполнение на полуоси $\mathbb{R}_+$ условий Предложения 4.2.1.

Теорема 4.3.1. *Пусть минимальный оператор Штурма-Лиувилля*

$$L = L_{\min}(P, Q, R),$$

ассоциированный с выражением (4.0.1) в $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$, — самосопряжён, $L = L^$. Пусть также $P(\cdot), R(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{m \times m})$, и для матричных функций $P(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot)$ и $R(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot)$ выполнены условия (4.1.1). Если потенциальная матрица $Q(\cdot)$ вида (4.3.1) удовлетворяет условиям:*

$$Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty, \quad (4.3.2)$$

то неотрицательная часть $E_L(\overline{\mathbb{R}_+})L$ оператора L имеет лебеговский спектр постоянной кратности $2m$, т.е.

$$\sigma_{ac}(L) \cap \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty), \quad \sigma_s(L) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset \quad \text{и} \quad N_{L^{ac}}(t) = 2m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Доказательство Теоремы 4.3.1 см. в **Приложении А**. Отметим, что в нём существенно используются некоторые результаты работы [21].

Замечание 4.3.1.

(i) Заключение Теоремы 4.3.1 остаётся верным, если условия (4.3.2) заменить следующим:

$$Q(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m \times m}). \quad (4.3.3)$$

(ii) Более того, Теорема 4.3.1 остаётся верной, если условия (4.1.1) и (4.3.2) (или условие (4.3.3)) на полуоси $\mathbb{R}_+$ заменить аналогичными условиями на отрицательной полуоси $\mathbb{R}_-$.

Теперь сформулируем Теорему 4.3.1 в частном случае, предполагая, что $P(\cdot) = R(\cdot) = I_m$. Рассмотрим дифференциальное выражение Шрёдингера на оси следующего вида:

$$\mathbf{H}_{X,\alpha,Q} := -\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\cdot - x_k), \quad (4.3.4)$$

$$Q_1(\cdot) = Q_1(\cdot)^* \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{m \times m}),$$

где $X = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ и $\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{\min}$ — минимальный оператор, ассоциированный в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ с дифференциальным выражением (4.3.4).

Следствие 4.3.1. Пусть минимальный оператор, ассоциированный в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ с дифференциальным выражением (4.3.4), самосопряжён, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$, и выполнены условия (4.3.2). Тогда неотрицательная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}}(\overline{\mathbb{R}_+})\mathbf{H}$ оператора $\mathbf{H}$ имеет лебеговский спектр постоянной кратности $2m$, т.е.

$$\sigma_{ac}(\mathbf{H}) \cap \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty), \quad \sigma_s(\mathbf{H}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset, \quad N_{\mathbf{H}^{ac}}(t) = 2m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (4.3.5)$$

Более того, заключения (4.3.5) остаются в силе при замене условий (4.3.2) аналогичными условиями на левой полуоси.

Замечание 4.3.2. В скалярном случае ($m = 1$) весьма частный случай этого результата был получен в работе [109]. Именно, применяя другой метод, К. Шубина Христ и Г. Штольц доказали Следствие 4.3.1 для скалярного гамильтониана $\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}$, т.е. считая $X = \mathbb{Z}$, $Q_1(\cdot) = 0$, и предполагая выполненным условие $\sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty$ (см. [109, Теорема 5], а также Теорему 0.0.2).

ГЛАВА 5

КРЕЙНОВСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЁТНОГО ПОРЯДКА

В этой главе рассматривается крейновское расширение минимального оператора $A := A_{\min}$, ассоциированного с выражением $\mathcal{A} := (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}$ на отрезке $[a, b]$, т.е. $A = \mathcal{A} \upharpoonright \text{dom } A_{\min}$, где

$$\text{dom } A_{\min} = \{f \in W^{2n,2}(a, b) : f^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0, \quad k \in \{0, \dots, 2n-1\}\}. \quad (5.0.1)$$

Мы описываем крейновское расширение в терминах граничных условий, а также все неотрицательные расширения оператора A и расширения, имеющие конечное число отрицательных квадратов.

5.1 Основной результат

Пусть $A := A_{\min}$ — минимальный оператор, порождённый в $\mathfrak{H} = L^2[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ дифференциальным выражением (5.0.1). Согласно [15], граничную тройку для $A^* := A_{\max}$ можно выбрать следующим образом:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2n}, \quad \Gamma_0 f = \begin{pmatrix} f(a) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(a) \\ f(b) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} f^{(2n-1)}(a) \\ \vdots \\ f^{(n)}(a) \\ (-1)^n f^{(2n-1)}(b) \\ \vdots \\ -f^{(n)}(b) \end{pmatrix}. \quad (5.1.1)$$

Основной результат данной главы представлен следующей теоремой.

Теорема 5.1.1. *Пусть A — минимальный оператор, определённый выражением (5.0.1). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* , определённая соотношениями (5.1.1). Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) Область определения крейновского расширения $\hat{A}_K$ имеет вид:

$$\text{dom } \hat{A}_K = \left\{ f \in W^{2n,2}[a, b] : \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(b) \\ \vdots \\ f(b) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(a) \\ \vdots \\ f(a) \end{pmatrix} \right\}, \quad (5.1.2)$$

где T — тѐплицева нижнетреугольная матрица размера $2n \times 2n$ следующего вида:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \mathbf{0} \\ b-a & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} & \frac{(b-a)^{2n-2}}{(2n-2)!} & \dots & b-a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}. \quad (5.1.3)$$

(ii) Крейновское расширение $\hat{A}_K$ задаѐтся следующими соотношениями:

$$\text{dom } \hat{A}_K = \{ f \in W^{2n,2}[a, b] : \Gamma_1 f = B_K \Gamma_0 f \}, \quad (5.1.4)$$

в которых

$$B_K = \begin{pmatrix} QT_2^{-1}T_1S & -QT_2^{-1}S \\ -QT_1T_2^{-1}T_1S & QT_1T_2^{-1}S \end{pmatrix}, \quad (5.1.5)$$

и T_1, T_2, Q, S — матрицы размера $n \times n$ вида:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \mathbf{0} \\ b-a & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & b-a & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} (-1)^n & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & -1 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{(b-a)^n}{n!} & \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & b-a \\ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} & \frac{(b-a)^n}{n!} & \dots & \frac{(b-a)^2}{2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} & \frac{(b-a)^{2n-2}}{(2n-2)!} & \dots & \frac{(b-a)^n}{n!} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим k -ю строку в (5.1.2):

$$f^{(2n-k)}(b) = \sum_{m=1}^k \frac{f^{(2n-m)}(a)}{(2n-m)!} (b-a)^{2n-m}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.1.7)$$

Согласно Следствию 1.6.1, достаточно доказать (5.1.7) для $\ker A^* = \text{span} \{1, x, \dots, x^{2n-1}\}$. Поскольку $\ker A^*$ состоит из многочленов степени не выше $2n - 1$, формула (5.1.7) следует из формулы Тейлора для многочленов.

(ii) Обозначим:

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(b) \\ \vdots \\ f(b) \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} f^{(n-1)}(a) \\ \vdots \\ f(a) \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(b) \\ \vdots \\ f^{(n)}(b) \end{pmatrix}, \\ U_4 &= \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(a) \\ \vdots \\ f^{(n)}(a) \end{pmatrix}, \quad U_{1,t} = \begin{pmatrix} f(b) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(b) \end{pmatrix}, \quad U_{2,t} = \begin{pmatrix} f(a) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(a) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Тогда

$$\Gamma_0 f = \begin{pmatrix} SU_2 \\ SU_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{2,t} \\ U_{1,t} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{pmatrix} -QU_4 \\ QU_3 \end{pmatrix}. \quad (5.1.9)$$

Следовательно, равенство в (5.1.2) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & \mathbb{O} \\ T_2 & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_4 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} U_3 = T_1 U_4 + \mathbb{O} U_2 \\ U_1 = T_2 U_4 + T_1 U_2. \end{cases} \quad (5.1.10)$$

Выражая U_4 и U_3 из последних соотношений, получаем:

$$\begin{cases} U_4 = T_2^{-1} U_1 - T_2^{-1} T_1 U_2 \\ U_3 = T_1 T_2^{-1} U_1 - T_1 T_2^{-1} T_1 U_2. \end{cases} \quad (5.1.11)$$

Умножая первое равенство на $-Q$ слева, а второе — на Q слева, имеем:

$$\begin{cases} -QU_4 = -QT_2^{-1} U_1 + QT_2^{-1} T_1 U_2 \\ QU_3 = QT_1 T_2^{-1} U_1 - QT_1 T_2^{-1} T_1 U_2. \end{cases} \quad (5.1.12)$$

Поскольку $U_1 = SU_{1,t}$, $U_2 = SU_{2,t}$, то равенства в (5.1.12) принимают вид:

$$\begin{cases} -QU_4 = QT_2^{-1} T_1 S U_{2,t} - QT_2^{-1} S U_{1,t} \\ QU_3 = -QT_1 T_2^{-1} T_1 S U_{2,t} + QT_1 T_2^{-1} S U_{1,t}, \end{cases} \quad (5.1.13)$$

или

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} QT_2^{-1}T_1S & -QT_2^{-1}S \\ -QT_1T_2^{-1}T_1S & QT_1T_2^{-1}S \end{pmatrix} \Gamma_0 f. \quad (5.1.14)$$

Итак, мы получили представление $\Gamma_1 f = B_K \Gamma_0 f$, и равенство (5.1.5) доказано. $\square$

Теорема 5.1.2. Матрица B_K является самосопряжённой, т.е. $B_K = B_K^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что B_K — самосопряжённая в соответствии с Предложением 1.1.1. Докажем этот факт напрямую. Мы должны показать, что выполнены следующие равенства:

$$QT_2^{-1}T_1S = (QT_2^{-1}T_1S)^*, \quad (5.1.15)$$

$$QT_1T_2^{-1}S = (QT_1T_2^{-1}S)^*, \quad (5.1.16)$$

$$QT_2^{-1}S = (QT_1T_2^{-1}T_1S)^*. \quad (5.1.17)$$

Обозначим: $V = ST_2$. Докажем равенство (5.1.15). Очевидно, что имеют место следующие соотношения:

$$QT_2^{-1}T_1S = QT_2^{-1}SST_1S = QV^{-1}T_1^*. \quad (5.1.18)$$

Проверим, что обратная матрица $T_1^{-1*}VQ$ является самосопряжённой.

Будем нумеровать элементы матрицы V , начиная с правого нижнего угла (j — номер столбца, k — номер строки): $v_{j,k} = \frac{(b-a)^{j+k-1}}{(j+k-1)!}$.

Элемент матрицы $T_1^{-1*}V$ (обозначим его $\varphi_{j,k}$) имеет следующий вид:

$$\varphi_{j,k} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(a-b)^l}{l!} v_{j,k-l} = (b-a)^{j+k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \frac{1}{l!(j+k-l-1)!}. \quad (5.1.19)$$

Симметричный элемент равен:

$$\varphi_{k,j} = (b-a)^{j+k-1} \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m \frac{1}{m!(j+k-m-1)!}. \quad (5.1.20)$$

Вводя замену $l = j + k - m - 1$, получим:

$$\varphi_{k,j} = (b-a)^{j+k-1} \sum_{l=k}^{j+k-1} (-1)^{j+k-l-1} \frac{1}{l!(j+k-l-1)!}. \quad (5.1.21)$$

Теперь умножим матрицу $T_1^{-1*}V$ на Q справа. Это означает, что нечётные столбцы умножаются на -1 . Для завершения доказательства самосопряжённости матрицы $T_1^{-1*}VQ$ необходимо показать, что $\varphi_{j,k} - (-1)^{j+k}\varphi_{k,j} = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{j,k} - (-1)^{j+k}\varphi_{k,j}}{(b-a)^{j+k-1}} &= \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \frac{1}{l!(j+k-l-1)!} - \\ &- \sum_{l=k}^{j+k-1} (-1)^{j+k-l-1} \frac{1}{l!(j+k-l-1)!} = \sum_{l=0}^{j+k-1} \frac{(-1)^l}{l!(j+k-l-1)!} = \\ &= \frac{1}{(j+k-1)!} \sum_{l=0}^{j+k-1} (-1)^l \binom{j+k-1}{l} = 0, \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

где $\binom{j+k-1}{l} = C_{j+k-1}^l$ — число сочетаний из $j+k-1$ по l . Равенство (5.1.15) доказано.

Равенство (5.1.16) вытекает из равенства (5.1.15) и следующих соотношений:

$$QT_1T_2^{-1}S = QT_1V^{-1}, \quad VT_1^{-1}Q = Q(T_1^{-1*}VQ)^*Q. \quad (5.1.23)$$

Теперь докажем равенство (5.1.17). Переходя к обратным матрицам в (5.1.17) и учитывая соотношения $V = ST_2$, $V = V^*$, $ST_1^{-1} = T_1^{-1*}S$, имеем:

$$VQ = (T_1^{-1*}VT_1^{-1}Q)^* = QT_1^{-1*}VT_1^{-1}. \quad (5.1.24)$$

Умножая второе равенство в (5.1.24) на T_1^{-1} справа, получим:

$$VQT_1^{-1} = QT_1^{-1*}V. \quad (5.1.25)$$

Докажем (5.1.25). Элемент матрицы VQ имеет вид $\frac{(-1)^k}{(j+k-1)!}(b-a)^{j+k-1}$. Поэтому элемент матрицы VQT_1^{-1} равен:

$$\begin{aligned} \psi_{j,k} &= (b-a)^{j+k-1} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{(-1)^{j+m}}{m!(j+k-m-1)!} = \\ &= (b-a)^{j+k-1} (-1)^k \sum_{l=k}^{j+k-1} \frac{(-1)^{l+1}}{l!(j+k-l-1)!}. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Чтобы вычислить элемент матрицы $QT_1^{-1*}V$, мы должны умножить $T_1^{-1*}V$ на Q слева. При этом нечётные строки умножатся на -1 . Тогда, в соответствии с (5.1.19), элемент матрицы $QT_1^{-1*}V$ имеет вид:

$$\mu_{j,k} = (b-a)^{j+k-1}(-1)^k \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l!(j+k-l-1)!}. \quad (5.1.27)$$

Легко видеть, что $\psi_{j,k} = \mu_{j,k}$ (см. (5.1.22)). Равенства (5.1.25) и (5.1.17) доказаны, и теорема полностью доказана напрямую. $\square$

Предложение 5.1.1. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* , задаваемая равенством (5.1.1), и пусть $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда $B_K = M(0) = B_K^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемый результат следует из Предложения 1.6.1 (ii) и Теоремы 5.1.2. $\square$

В следующей теореме мы описываем все неотрицательные расширения оператора A и расширения, имеющие в точности κ отрицательных квадратов.

Теорема 5.1.3. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^* , определённая равенством (5.1.1), и B_K — матрица, определённая равенством (5.1.5). Пусть матрицы $C, D \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ удовлетворяют условиям $CD^* = DC^*$, $0 \in \rho(CC^* + DD^*)$ ($\iff \det(CC^* + DD^*) \neq 0$), и

$$A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0) = A_{C,D}^*. \quad (5.1.28)$$

Тогда:

(i) Имеет место следующая эквивалентность:

$$\kappa_-(A_{C,D}) = \kappa \iff \kappa_-(CD^* - DB_K D^*) = \kappa. \quad (5.1.29)$$

В частности, $A_{C,D} \geq 0 \iff CD^* - DB_K D^* \geq 0$.

(ii) Оператор $A_{C,D}$ является положительно определённым тогда и только тогда, когда $CD^* - DB_K D^*$ положительно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу Предложения 5.1.1 $B_K = M(0)$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться Предложением 1.6.1 (iv). $\square$

Следствие 5.1.1. Пусть $\{A_j\}_{j=1}^\infty := \{A_{j,\min}\}_{j=1}^\infty$ — последовательность минимальных операторов, порождённых в $\mathfrak{H}_j = L^2(a_j, b_j)$ дифференциальным выражением (5.0.1). Пусть также $A := \bigoplus_{j=1}^\infty A_j$. Тогда

$$\widehat{A}_K = \bigoplus_{j=1}^\infty \widehat{A}_{j,K}, \quad (5.1.30)$$

где расширение $\widehat{A}_{j,K}$ определено выражениями (5.1.2) и (5.1.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемый результат вытекает из Теоремы 5.1.1 и Следствия 3.10 из работы [102]. $\square$

Для упрощения чтения мы также приводим четыре примера для $a = 0, b = 1$, и $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ (см. Приложение Б).

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Описаны абсолютно непрерывный, сингулярный непрерывный и точечный спектры оператора Шрёдингера с суммируемым потенциалом на положительной полуоси.
2. Описаны абсолютно непрерывный, сингулярный непрерывный и точечный спектры оператора Шрёдингера с суммируемым матричным потенциалом на конечном некомпактном графе, а также дано описание положительного спектра матричного гамильтониана с конечным числом точек дельта-взаимодействий, в частности, на оси.
3. Найдена оценка типа Баргмана для конечного некомпактного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом.
4. Для конечного некомпактного звёздного квантового графа с суммируемым матричным потенциалом получено описание отрицательного спектра, найдено явное выражение для матрицы рассеяния, а также для детерминанта возмущения.
5. Описаны абсолютно непрерывный, сингулярный непрерывный и точечный спектры оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на положительной полуоси, а также оператора Шрёдингера со счётным числом точек дельта-взаимодействий на полуоси и оси.
6. Получено описание крейновского расширения простейшего минимального дифференциального оператора чётного порядка на конечном промежутке в терминах граничных условий.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

$\mathbb{C}^{m \times m}$	множество всех матриц порядка m , $\mathbb{C}^{m \times m} := \mathbb{M}(m)$
I_m	единичная матрица порядка m
$\mathbb{O}_m$	нулевая матрица порядка m
$ M $	норма матрицы $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $ M := \ M\ _{\mathbb{C}^{m \times m}}$
$\mathbf{1}_{\mathcal{K}}$	индикаторная функция измеримого множества $\mathcal{K}$
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	множество ограниченных операторов в $\mathcal{H}$
$\mathcal{C}(\mathcal{H})$	множество замкнутых операторов в $\mathcal{H}$
$\sigma(T)$	спектр оператора $T = T^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$
$\sigma_{ac}(T)$	абсолютно непрерывный спектр оператора T
$\sigma_s(T)$	сингулярный спектр оператора T
$\sigma_{sc}(T)$	сингулярный непрерывный спектр оператора T
$\sigma_c(T)$	непрерывный спектр оператора T , $\sigma_c(T) = \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T)$
$\sigma_d(T)$	дискретный спектр оператора T
$\sigma_{pp}(T)$	чисто точечный спектр, т.е. множество собственных значений оператора T
$\sigma_p(T)$	точечный спектр оператора T , $\sigma_p(T) = \overline{\sigma_{pp}(T)}$
$\sigma_r(T)$	остаточный спектр оператора T , $\sigma_r(T) = \sigma(T) \setminus (\sigma_{pp}(T) \cup \sigma_c(T))$
$E_T(\cdot)$	спектральная мера оператора $T = T^*$
$\kappa_-(T)$	число отрицательных квадратов оператора $T = T^*$, $\kappa_-(T) := \dim E_T(-\infty, 0)$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Агранович, З.С. Обратная задача теории рассеяния / З.С. Агранович, В.А. Марченко. — Харьков: Издательство Харьковского университета, 1960. — 268 с.
2. Ахиезер, Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
3. Березин, Ф.А. Уравнение Шрёдингера / Ф.А. Березин, М.А. Шубин. — М.: изд-во Моск. ун-та, 1983. — 392 с.
4. Бирман, М.Ш. О спектре сингулярных граничных задач / М.Ш. Бирман // Матем. сб. — 1961. — Т. 55(97), № 2. — С. 125 – 174.
5. Бирман, М.Ш. Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий / М.Ш. Бирман // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1962. — Т. 17, № 1. — С. 22 – 55.
6. Бирман, М.Ш. Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве / М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 264 с.
7. Бродский, М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов / М.С. Бродский. — М.: Наука, 1969. — 287 с.
8. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1968. — 576 с.
9. Герасименко, Н.И. Обратная задача рассеяния на некомпактном графе / Н.И. Герасименко // ТМФ. — 1988. — Т. 75, № 2. — С. 187 – 200.
10. Герасименко, Н.И. Задача рассеяния на некомпактных графах / Н.И. Герасименко, Б.С. Павлов // ТМФ. — 1988. — Т. 74, № 3. — С. 345 – 359.

11. Горбачук, В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. — Киев: Наук. думка, 1984. — 284 с.
12. Грановский, Я.И. Операторы Штурма-Лиувилля с $W^{-1,1}$ -матричными потенциалами / Я.И. Грановский, М.М. Маламуд // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2022. — Т. 516. — С. 20 – 39.
13. Грановский, Я.И. Квантовые графы с суммируемыми матричными потенциалами / Я.И. Грановский, М.М. Маламуд, Х. Найдхардт // ДАН. — 2019. — Т. 488., № 1. — С. 5 – 10.
14. Грановский, Я.И. Крейновское расширение дифференциального оператора чётного порядка / Я.И. Грановский, Л.Л. Оридорога // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 4. — С. 556 – 560.
15. Деркач, В.А. Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов / В.А. Деркач, М.М. Маламуд // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 4. — С. 435 – 459.
16. Деркач, В.О. Теорія розширень симетричних операторів і граничні задачі / В.О. Деркач, М.М. Маламуд. — Праці Інституту математики НАН України. — Т. 104. — К.: Інститут математики НАН України, 2017. — 573 с.
17. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
18. Крейн, М.Г. Теория самосопряжённых расширений полуограниченных эрмитовых операторов и её приложения: I, II / М.Г. Крейн // Матем. сб. — 1947. — Т. 20(62), № 3. — С. 431 – 495; 1947. — Т. 21(63), № 3. — С. 365 – 404.

19. Крейн, М.Г. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами / М.Г. Крейн, Ю.Л. Шмультян // Матем. Исследования, Кишинёв. — 1967. — Т. 2, № 3. — С. 64 – 96.
20. Маламуд, М.М. О формуле обобщённых резольвент неплотно заданного эрмитова оператора / М.М. Маламуд // Укр. мат. ж. — 1992. — Т. 44, № 12. — С. 1658 – 1688.
21. Маламуд, М.М. О сингулярном спектре конечномерных возмущений (к теории Ароншайна-Донохью-Каца) / М.М. Маламуд // ДАН. — 2019. — Т. 487, № 4. — С. 365 – 369.
22. Маламуд, М.М. Спектральная теория операторных мер в гильбертовом пространстве / М.М. Маламуд, С.М. Маламуд // Алгебра и анализ. — 2003. — Т. 15, № 3. — С. 1 – 77.
23. Михайлец, В.А. Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями / В.А. Михайлец // ДАН. — 1994. — Т. 335, № 4. — С. 421 – 423.
24. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
25. Рид, М. Методы современной математической физики: Т. 3. Теория рассеяния / М. Рид, Б. Саймон — М.: Мир, 1982. — 443 с.
26. Рид, М. Методы современной математической физики: Т.4. Анализ операторов / М. Рид, Б. Саймон — М.: Мир, 1982. — 428 с.
27. Рофе-Бекетов, Ф.С. Самосопряжённые расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / Ф.С. Рофе-Бекетов // ДАН СССР. — 1969. — Т. 184, № 5. — С. 1034 – 1037.
28. Савчук, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897 – 912.

29. Савчук, А.М. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Труды Московского математического общества. — 2003. — Т. 64. — С. 159 – 212.
30. Титчмарш, Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка: Т.1 / Э.Ч. Титчмарш. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 277 с.
31. Яфаев, Д.Р. Математическая теория рассеяния. Общая теория / Д.Р. Яфаев. — СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1994. — 424 с.
32. Adams, R.A. Sobolev spaces / R.A. Adams, J.J.F. Fournier. — Vancouver: Academic Press, 2003. — 310 p.
33. Aktosun, T. Direct and inverse scattering for the matrix Schrödinger equation / T. Aktosun, R. Weder. — Applied Mathematical Sciences. — Vol. 203. — New York: Springer-Verlag, 2020. — 637 p.
34. Albeverio, S. Inverse spectral theory for symmetric operators with several gaps: scalar-type Weyl functions / S. Albeverio, J.F. Brasche, M.M. Malamud, H. Neidhardt // J. Funct. Anal. — 2005. — Vol. 228, № 1. — P. 144 – 188.
35. Albeverio, S. Solvable models in quantum mechanics. Second edition / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. — AMS Chelsea Publishing, Providence, R.I, 2005. — 452 p. With an Appendix by P. Exner.
36. Albeverio, S. Spherical Schrödinger operators with δ -type interactions / S. Albeverio, A.S. Kostenko, M.M. Malamud, H. Neidhardt // J. Math. Phys. — 2013. — Vol. 54, № 5, 052103. — 24 p.
37. Albeverio, S. Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger-type operators / S. Albeverio, P. Kurasov. — LMS Lecture Note Series. — Vol. 271. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 429 p.

38. Ananieva, A.Yu. To the spectral theory of the Bessel operator on finite interval and half-line / A.Yu. Ananieva, V.S. Budyika // J. Math. Scien. — 2015. — Vol. 211, № 5. — P. 624 – 645.
39. Ashbaugh, M.S. Spectral theory for perturbed Krein Laplacians in nonsmooth domains / M.S. Ashbaugh, F. Gesztesy, M. Mitrea, R. Shterenberg, G. Teschl // Adv. Math. — 2010. — Vol. 223, № 4. — P. 1372 – 1467.
40. Ashbaugh, M.S. The Krein-von Neumann extension and its connection to an abstract buckling problem / M.S. Ashbaugh, F. Gesztesy, M. Mitrea, R. Shterenberg, G. Teschl // Math. Nachr. — 2010. — Vol. 283, № 2. — P. 165 – 179.
41. Ashbaugh, M.S. A survey of the Krein-von Neumann extension, the corresponding abstract buckling problem, and Weyl-type spectral asymptotics for perturbed Krein Laplacians in nonsmooth domains / M.S. Ashbaugh, F. Gesztesy, M. Mitrea, R. Shterenberg, G. Teschl // J. Mathematical Physics, Spectral Theory and Stochastic Analysis; Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser, Springer. — 2013. — Vol. 232. — P. 1 – 106.
42. Baumgärtel, H. Mathematical scattering theory / H. Baumgärtel, M. Wollenberg. — Operator Theory: Advances and Applications. — Vol. 9. Basel: Birkhäuser Verlag, 1983. — 449 p.
43. Behrndt, J. The Krein-von Neumann realization of perturbed Laplacians on bounded Lipschitz domains / J. Behrndt, F. Gesztesy, T. Micheler, M. Mitrea // Operator Theory, Function Spaces and Applications; Operator Theory: Advances and Applications. Basel: Birkhäuser, Springer. — 2016. — Vol. 255. — P. 49 – 66.
44. Behrndt, J. On the number of negative eigenvalues of the Laplacian on a metric graph / J. Behrndt, A. Luger // J. Phys. A: Math. and Theor. — 2010. — Vol. 43, № 47. — [474006].

45. Behrndt, J. Scattering matrices and Weyl functions / J. Behrndt, M.M. Malamud, H. Neidhardt // J. Proc. London Math. Society. — 2008. — Vol. 97, № 3. — P. 568 – 598.
46. Behrndt, J. Scattering matrices and Dirichlet-to-Neumann maps / J. Behrndt, M.M. Malamud, H. Neidhardt // J. Funct. Anal. — 2017. — Vol. 273. — P. 1970 – 2025.
47. Behrndt, J. Elliptic differential operators on Lipschitz domains and abstract boundary value problems / J. Behrndt, T. Micheler // J. Funct. Anal. — 2014. — Vol. 267. — P. 3657 – 3709.
48. Berkolaiko, G. Quantum graphs and their applications / G. Berkolaiko, R. Carlson, S. Fulling, P. Kuchment (editors). — Contemp. Math. — Vol. 415. — AMS, Providence, R.I., 2006. — 307 p.
49. Berkolaiko, G. Introduction to quantum graphs / G. Berkolaiko, P. Kuchment. — Math. surveys and monographs. — Vol. 186. — AMS, Providence, R.I., 2013. — 270 p.
50. Berkolaiko, G. Simplicity of eigenvalues and non-vanishing of eigenfunctions of a quantum graph / G. Berkolaiko, W. Liu // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — Vol. 445, № 1. — P. 803 – 818.
51. Brasche, J.F. Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions / J.F. Brasche, M.M. Malamud, H. Neidhardt // J. Integr. Eq. Oper. Theory. — 2002. — Vol. 43, № 3. — P. 264 – 289.
52. Breuer, J. Singular spectrum for radial trees / J. Breuer, R. Frank // J. Rev. Math. Phys. — 2009. — Vol. 21, № 7. — P. 929 – 945.
53. Bruening, J. Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrödinger operators / J. Bruening, V. Geyler, K. Pankrashkin // Rev. Math. Phys. — 2008. — Vol. 20, № 1. — P. 1 – 70.

54. Bruneau, L. Homogeneous Schrödinger operators on half-line / L. Bruneau, J. Dereziński, V. Georgescu // J. Ann. Henri Poincaré. — 2011. — Vol. 12. — P. 547 – 590.
55. Brown, B.M. On the Krein and Friedrichs extension of a positive Jacobi operator / B.M. Brown, J.S. Christiansen // J. Expo. Math. — 2005. — Vol. 23, № 2. — P. 176 – 186.
56. Clark, S. Weyl-Titchmarsh M -function asymptotics for matrix-valued Schrödinger operators / S. Clark, F. Gesztesy // Proc. Lond. Math. Soc. — 2001. — Vol. 82, № 3. — P. 701 – 724.
57. Clark, S. Borg-type theorems for matrix-valued Schrödinger operators / S. Clark, F. Gesztesy, H. Holden, B.M. Levitan // J. Differ. Equations. — 2000. — Vol. 167, № 1. — P. 181 – 210.
58. Colin de Verdière, Y. Semi-classical measures on quantum graphs and the Gauss map of the determinant manifold / Y. Colin de Verdière // Ann. Henri Poincaré. — 2015. — Vol. 16, № 2. — P. 347 – 364.
59. Colin de Verdière Y. Topological resonances on quantum graphs / Y. Colin de Verdière, F. Truc // Ann. Henri Poincaré. — 2018. — Vol. 19, № 5. — P. 1419 – 1438.
60. Davies, E. Non-Weyl resonance asymptotics for quantum graphs / E. Davies, A. Pushnitski // J. Analysis and PDE. — 2011. — Vol. 4, № 5. — P. 729 – 755.
61. Derkach, V.A. Boundary triplets and Weyl functions. Recent developments / V.A. Derkach, S. Hassi, M.M. Malamud, H.S.V. de Snoo // Operator methods for boundary value problems. LMS Lecture Note Series. Cambridge: Cambridge University Press. — 2012. — Vol. 404. — P. 161 – 220.
62. Derkach, V.A. Generalised resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps / V.A. Derkach, M.M. Malamud // J. Funct. Anal. — 1991. — Vol. 95, № 1. — P. 1 – 95.

63. Derkach, V.A. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem / V.A. Derkach, M.M. Malamud // J. Math. Sci. — 1995. — Vol. 73, № 2. — P. 141 – 242.
64. Eckhardt, J. Weyl-Titchmarsh theory for Sturm-Liouville operators with distributional potentials / J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl // Opuscula Math. — 2013. — Vol. 33, № 3. — P. 467 – 563.
65. Everitt, W.N. The Bessel differential equation and the Hankel transform / W.N. Everitt, H. Kalf // J. Comput. and App. Math. — 2007. — Vol. 208, № 1. — P. 3 – 19.
66. Exner, P. On the dense point and absolutely continuous spectrum for Hamiltonians with concentric δ -shells / P. Exner, M. Fraas // Lett. Math. Phys. — 2007. — Vol. 82, № 1. — P. 25 – 37.
67. Exner, P. Interlaced dense point and absolutely continuous spectra for Hamiltonians with concentric-shell singular interactions / P. Exner, M. Fraas // Mathematical results in quantum mechanics. Selected papers from the Quantum Mathematics International Conference (QMATH 10, Moieciu, 2007). — World Scientific, Hackensack, N.J. — 2008. — P. 48 – 65.
68. Exner, P. Spectral theory of infinite quantum graphs / P. Exner, A.S. Kostenko, M.M. Malamud, H. Neidhardt // Ann. Henri Poincaré. — 2018. — Vol. 19, № 11. — P. 3457 – 3510.
69. Exner, P. Absence of absolutely continuous spectrum for the Kirchhoff Laplacian on radial trees / P. Exner, C. Seifert, P. Stollmann // Ann. Henri Poincaré. — 2014. — Vol. 15, № 6. — P. 1109 – 1121.
70. Friedlander, L. Genericity of simple eigenvalues for a metric graph / L. Friedlander // Israel J. Math. — 2005. — Vol. 146. — P. 149 – 156.

71. Fulton, C. Titchmarsh-Weyl m -functions for second-order Sturm-Liouville problems with two singular endpoints / C. Fulton // Math. Nachr. — 2008. — Vol. 281, № 10. — P. 1418 – 1475.
72. Fulton, C. Sturm-Liouville operators with singularities and generalized Nevanlinna functions / C. Fulton, H. Langer // Complex Analysis and Operator Theory. — 2010. — Vol. 4, № 2. — P. 179 – 243.
73. Gesztesy, F. A new class of solvable models in quantum mechanics describing point interactions on the line / F. Gesztesy, H. Holden // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20, № 15. — P. 5157 – 5177.
74. Gesztesy, F. A description of all self-adjoint extensions of the laplacian and Krein-type resolvent formulas on non-smooth domains / F. Gesztesy, M. Mitrea // J. Analyse Math. — 2011. — Vol. 113. — P. 53 – 172.
75. Gesztesy, F. Robin-to-Robin maps and Krein-type resolvent formulas for Schrödinger operators on bounded Lipschitz domains / F. Gesztesy, M. Mitrea // Modern Analysis and Applications. The Mark Krein Centenary Conference **2**. Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser. — 2009. — Vol. 191. — P. 81 – 113.
76. Gilbert, D.J. On subordinacy and analysis of the spectrum of Schrödinger operators with two singular endpoints / D.J. Gilbert // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. — 1989. — Vol. 112, № 3-4. — P. 213 – 229.
77. Gilbert, D.J. On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators / D.J. Gilbert, D.B. Pearson // J. Math. Anal. Appl. — 1987. — Vol. 128, № 1. — P. 30 – 56.
78. Granovskyi, Ya.I. To the spectral theory of vector-valued Sturm-Liouville operators with summable potentials / Ya.I. Granovskyi // Труды ИПММ. — 2017. — Vol. 31. — P. 50 – 65.

79. Granovskyi, Ya.I. To the spectral theory of quantum graphs with summable matrix potentials / Ya.I. Granovskyi // Труды ИПИММ. — 2020. — Vol. 34. — P. 35 – 50.
80. Granovskyi, Ya. Non-compact quantum graphs with summable matrix potentials / Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt // Ann. Henri Poincaré. — 2021. — Vol. 22. — P. 1 – 47.
81. Granovskyi, Ya. To the spectral theory of vector-valued Sturm-Liouville operators with summable potentials and point interactions / Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt, A. Posilicano // Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics. — 2017. — Pavel Exner Anniversary Volume. EMS Series of Congress Reports. — Vol. 12. — P. 271 – 313.
82. Granovskyi, Ya.I. Krein-von Neumann extension of an even order differential operator on a finite interval / Ya.I. Granovskyi, L.L. Oridoroga // Opuscula Math. — 2018. — Vol. 38, № 5. — P. 681 – 698.
83. Grossmann, A. A class of explicitly soluble, local, many-center Hamiltonians for one-particle quantum mechanics in two and three dimensions: I / A. Grossman, R. Hoegh-Krohn, M. Mebkhout // J. Math. Phys. — 1980. — Vol. 21, № 9. — P. 2376 – 2385.
84. Grubb, G. A characterization of the non local boundary value problems associated with an elliptic operator / G. Grubb // J. Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa. — 1968. — Vol. 22(3), № 3. — P. 425 – 513.
85. Grubb, G. Spectral asymptotics for the «soft» selfadjoint extension of a symmetric elliptic differential operator / G. Grubb // J. Operator Th. — 1983. — Vol. 10, № 1. — P. 9 – 20.
86. Hassi, S. On Krein's extension theory of nonnegative operators / S. Hassi, M. Malamud, H. de Snoo // Math. Nachr. — 2004. — Vol. 274-275. — P. 40 – 73.

87. Hempel, R. On the essential spectrum of Schrödinger operators with spherically symmetric potentials / R. Hempel, A.M. Hinz, H. Kalf // Math. Ann. — 1987. — Vol. 277, № 2. — P. 197 – 211. With a comment by J. Weidmann.
88. Kalf, H. A characterization of the Friedrichs extension of Sturm-Liouville operators / H. Kalf // J. London Math. Soc. — 1978. — Vol. 17, № 2. — P. 511 – 521.
89. Korotyaev, E. Trace formulae for Schrödinger operators with complex potentials on cubic lattices / E. Korotyaev, A. Laptev // Bull. Math. Sci. — 2018. — Vol. 8, № 3. — P. 453 – 475.
90. Korotyaev, E. Scattering on periodic metric graphs / E. Korotyaev, N. Saburova // preprint, arXiv:1507.06441v2. — 2020.
91. Kostenko, A.S. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set / A.S. Kostenko, M.M. Malamud // J. Differential Equations. — 2010. — Vol. 249, № 2. — P. 253 – 304.
92. Kostenko, A. 1-D Schrödinger operators with local point interactions: a review / A. Kostenko, M. Malamud // Spectral analysis, differential equations and mathematical physics: a festschrift in honor of Fritz Gesztesy's 60th birthday. Proc. of Symp. in Pure Math. AMS, Providence, R.I. — 2013. — Vol. 87. — P. 235 – 262.
93. Kostenko, A. Quantum graphs on radially symmetric antitrees / A. Kostenko, N. Nicolussi // J. Spectr. Theory. — 2021. — Vol. 11. — P. 411 – 460.
94. Kronig, R. de L. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices / R. de L. Kronig, W.G. Penney // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1931. — Vol. 130. — P. 499 – 513.
95. Kuchment, P. On the spectra of carbon nano-structures / P. Kuchment, O. Post // Comm. in Math. Phys. — 2007. — Vol. 275, № 3. — P. 805 – 826.

96. Kuchment, P. Asymptotics of spectra of Neumann Laplacians in thin domains / P. Kuchment, H. Zeng // Advances in Differential equations and mathematical Physics, Contemp. Math. AMS, Providence, R.I. — 2003. — Vol. 387. — P. 199 – 213.
97. Lunyov, A. Spectral functions of the simplest even order ordinary differential operator / A. Lunyov // Methods Funct. Anal. Topol. — 2013. — Vol. 19, № 4. — P. 319 – 326.
98. Malamud, M.M. Uniqueness of the matrix Sturm-Liouville equation given a part of the monodromy matrix, and Borg type results / M.M. Malamud // In J. Sturm-Liouville Theory. Past and Present. Including papers from the International Colloquium (Geneva, 2003). Basel: Birkhäuser Verlag. — 2005. — P. 237 – 270.
99. Malamud, M.M. Spectral theory of elliptic operators in exterior domains / M.M. Malamud // Russ. J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 17, № 1. — P. 96 – 125.
100. Malamud, M.M. Krein type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations / M.M. Malamud, V.I. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. Topol. — 2002. — Vol. 8, № 4. — P. 72 – 100.
101. Malamud, M.M. On the unitary equivalence of absolutely continuous parts of self-adjoint extensions / M.M. Malamud, H. Neidhardt // J. Funct. Anal. — 2011. — Vol. 260, № 3. — P. 613 – 638.
102. Malamud, M.M. Sturm-Liouville boundary value problems with operator potentials and unitary equivalence / M.M. Malamud, H. Neidhardt // J. Differential Equations. — 2012. — Vol. 252, № 11. — P. 5875 – 5922.
103. Malamud, M.M. Perturbation determinants for singular perturbations / M.M. Malamud, H. Neidhardt // Russ. J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 21, № 1. — P. 55 – 98.

104. Malamud, M.M. Spectral theory of Schrödinger operators with infinitely many point interactions and radial positive definite functions / M.M. Malamud, K. Schmüdgen // J. Funct. Anal. — 2012. — Vol. 263, № 10. — P. 3144 – 3194.
105. Neumann, J. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren / J. Neumann // Math. Ann. — 1929. — Vol. 102. — P. 49 – 131.
106. Ong, B.-S. On the limiting absorption principle and spectra of quantum graphs / B.-S. Ong // Quantum Graphs and Their Applications, Contemp. Math. AMS, Providence, R.I. — 2006. — Vol. 415. — P. 241 – 249.
107. Pankrashkin, K. Unitary dimension reduction for a class of self-adjoint extensions with applications to graph-like structures / K. Pankrashkin // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 396. — P. 640 – 655.
108. Post, O. Spectral analysis on graph-like spaces / O. Post. — In Lecture Notes in Mathematics. — Berlin: Springer Verlag, 2012. — 431 p.
109. Shubin Christ, C. Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions / C. Shubin Christ, G. Stolz // J. Math. Anal. Appl. — 1994. — Vol. 184, № 3. — P. 491 – 516.
110. Stolz, G. Bounded solutions and absolute continuity of Sturm-Liouville operators / G. Stolz // J. Math. Anal. — 1992. — Vol. 169, № 1. — P. 210 – 228.
111. Weder, R. Scattering theory for the matrix Schrödinger operator on the half line with general boundary conditions / R. Weder // J. Math. Phys. — 2015. — Vol. 56, 092103; doi:10.1063/1.4930293; Erratum J. Math. Phys. — 2019. — Vol. 60, 019901; doi:10.1063/1.5086412.
112. Weidmann, J. Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II: Anwendungen / J. Weidmann. — Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag, 2003. — 404 p.

Приложение А: Доказательство Теоремы 4.3.1

Обозначим: $A_{\pm} := L_{\pm, \min}$. Ясно, что оператор A_+^D удовлетворяет условиям Предложения 4.2.1.

1. На первом шаге мы будем трактовать оператор L в рамках теории расширений и выразим функцию Вейля оператора L через функции Вейля реализаций Дирихле $A_{\pm}^D$ на полуосях $\mathbb{R}_{\pm}$.

Согласно Предложению 4.2.1 и нашему предположению, $n_{\pm}(A_+) = n_{\pm}(A_-) = m$. В соответствии с общей формулой (см. [2, Приложение II]), индексы дефекта минимального оператора Штурма-Лиувилля L на прямой $\mathbb{R}$ равны:

$$n_{\pm}(L) = n_{\pm}(A_+) + n_{\pm}(A_-) - 2m = m + m - 2m = 0.$$

Поскольку L замкнут, то это означает, что оператор L на прямой $\mathbb{R}$ является самосопряжённым, $L = L^*$.

Так как $n_{\pm}(A_+) = n_{\pm}(A_-) = m$, мы получаем граничные тройки $\Pi_+ = \{\mathbb{C}^m, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ и $\Pi_- = \{\mathbb{C}^m, \Gamma_0^-, \Gamma_1^-\}$ для операторов A_+^* и A_-^* соответственно, полагая:

$$\Gamma_0^+ u = u(+0), \quad \Gamma_1^+ u = u^{[1]}(+0), \quad u \in \text{dom } A_+^*, \quad (\text{A1})$$

$$\Gamma_0^- v = v(-0), \quad \Gamma_1^- v = -v^{[1]}(-0), \quad v \in \text{dom } A_-^*. \quad (\text{A2})$$

Ясно, что операторы

$$A_{\pm,0} = A_{\pm}^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0^{\pm}) = L_{\pm}^D \quad (\text{A3})$$

являются реализациями Дирихле выражения $\mathcal{L}$ на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ соответственно.

Обозначим через $M_{\pm}(\cdot)$ функцию Вейля, соответствующую тройке $\Pi_{\pm}$. Пусть также $\Pi_-^{\top} = \{\mathbb{C}^m, -\Gamma_1^-, \Gamma_0^-\}$ — транспонированная граничная тройка.

Далее, очевидно, что

$$\text{dom } A = \{u \oplus v \in \text{dom } A^* : u(+0) = v(-0) = u^{[1]}(+0) = v^{[1]}(-0) = 0\}.$$

Тогда

$$\Pi := \Pi_+ \oplus \Pi_-^{\top} = \{\mathbb{C}^{2m}, \Gamma_0, \Gamma_1\} := \{\mathbb{C}^{2m}, \quad \Gamma_0^+ \oplus (-\Gamma_1^-), \quad \Gamma_1^+ \oplus \Gamma_0^-\} \quad (\text{A4})$$

является граничной тройкой для A^* , и соответствующая функция Вейля $M(\cdot)$ диагональна,

$$M(z) = M_+(z) \oplus (-M_-(z)^{-1}).$$

Трактуя оператор L как расширение оператора A , получаем представление: $L = A_B \in \text{Ext}_A$, т.е.

$$\begin{aligned} \text{dom } L &= \{f \in \text{dom } A^* : f(+0) = f(-0), \quad f^{[1]}(+0) = f^{[1]}(-0)\} = \\ &= \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0), \end{aligned}$$

где отображения Γ_0 и Γ_1 заданы формулой (A4), а граничный оператор (см. (1.1.3)) равен $B = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & I_m \\ I_m & \mathbb{O}_m \end{pmatrix} = B^*$.

Функция Вейля $M_B(\cdot)$, соответствующая расширению A_B , имеет вид:

$$\begin{aligned} M_B(z) &:= (B - M(z))^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -(M_+(z) + M_-(z))^{-1} & (M_+(z) + M_-(z))^{-1} M_-(z) \\ M_-(z)(M_+(z) + M_-(z))^{-1} & (M_+(z)^{-1} + M_-(z)^{-1})^{-1} \end{pmatrix} =: \\ &=: \begin{pmatrix} M_{11}(z) & M_{12}(z) \\ M_{21}(z) & M_{22}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Покажем, что $\sigma_s(L) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$. Согласно Теореме 1.2.1, достаточно доказать, что $\Omega_s(M_B) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$, где Ω_s задано формулой (1.2.3). Предположим противное, тогда найдётся $x_0 \in \Omega_s(M_B) \cap \mathbb{R}_+$. Далее, обозначая для краткости $M_B(\cdot) =: (M_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^2$ и $\text{Im}(M_B(\cdot)) =: (M_{I,jk}(\cdot))_{j,k=1}^2$, найдём вектор $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ и убывающую последовательность $y_n \in (0, 1]$, $y_n \downarrow 0$, такую что

$$\left| (\text{Im}(M_B(x_0 + iy_n))h, h) \right| = \left| \sum_{j,k=1}^2 (M_{I,jk}(x_0 + iy_n)h_j, h_k) \right| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A5})$$

Отсюда следует, что

$$0 \leq (M_{I,11}(x_0 + iy_n)h_1, h_1) + (M_{I,22}(x_0 + iy_n)h_2, h_2) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{A6})$$

Действительно, предполагая противное, найдём константу $C_1 > 0$, такую что $|(M_{I,jj}(x_0 + iy_n)h_j, h_j)| \leq C_1$, $j \in \{1, 2\}$. Поскольку $\text{Im}(M_B(z)) = (M_{I,jk}(z))_{j,k=1}^2 > 0$ при $z \in \mathbb{C}_+$, неравенство Коши-Буняковского влечёт

$$|(M_{I,12}(x_0 + iy_n)h_1, h_2)|^2 \leq (M_{I,11}(x_0 + iy_n)h_1, h_1) \cdot (M_{I,22}(x_0 + iy_n)h_2, h_2) \leq C_1^2. \quad (\text{A7})$$

Теперь соотношение (A6) вытекает из оценки (A7) и соотношения (A5)

Сперва предположим для определённости, что первое слагаемое в (A6) стремится к бесконечности, т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |((M_+(x_0 + iy_n) + M_-(x_0 + iy_n))^{-1}h_1, h_1)| &\geq \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} (M_{I,11}(x_0 + iy_n)h_1, h_1) = +\infty. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

В соответствии с (A1)–(A3), функция Вейля $M_+(\cdot)$ совпадает с функцией Вейля реализации Дирихле, $M_+(\cdot) = M^D(\cdot)$. Поэтому Теорема 4.1.1 (ii) (см. формулу (4.1.18)) применима и влечёт существование $\varepsilon_1(x_0) > 0$, такого что имеет место следующее неравенство:

$$(\text{Im}(M_+(x_0 + iy))l, l) \geq \varepsilon_1(x_0)\|l\|^2 \quad \text{для произвольного } y \in [0, 1] \quad \text{и } l \in \mathcal{H}. \quad (\text{A9})$$

Поскольку $M_-(\cdot)$ также является неванлинновской матричной функцией, неравенство (A9) влечёт

$$\begin{aligned} (\text{Im}(M_+(x_0 + iy) + M_-(x_0 + iy))l, l) &\geq \varepsilon_1(x_0)\|l\|^2 \\ \text{для произвольного } y &\in (0, 1] \quad \text{и } l \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

Пусть $T(x_0 + iy)$ — неванлинновская матричная функция, удовлетворяющая неравенству $\text{Im}(T(x_0 + iy)) \geq \varepsilon_1(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T(x_0 + iy)l\| \cdot \|l\| &\geq |(T(x_0 + iy)l, l)| \geq \text{Im}(T(x_0 + iy)l, l) \geq \varepsilon_1(x_0)\|l\|^2 \\ \text{для } y &\in (0, 1], \quad l \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

Замечая, что для $T(x_0 + iy)$ существует ограниченная обратная при всех $z = x_0 + iy \in \mathbb{C}_+$, мы получаем из неравенства (A11), что

$$\|T(x_0 + iy)^{-1}\| \leq \varepsilon_1(x_0)^{-1}, \quad y \in (0, 1]. \quad (\text{A12})$$

Поэтому, применяя оценку (A12) к неравенству (A10), имеем:

$$\|(M_+(x_0 + iy) + M_-(x_0 + iy))^{-1}\| \leq \varepsilon_1(x_0)^{-1}, \quad y \in (0, 1].$$

Однако, последняя оценка противоречит соотношению (A8).

Далее мы предположим, что второе слагаемое в (A6) стремится к бесконечности, т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |((M_+(x_0 + iy_n)^{-1} + M_-(x_0 + iy_n)^{-1})^{-1} h_2, h_2)| &\geq \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} (M_{I,22}(x_0 + iy_n) h_2, h_2) = \infty. \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

Несложно видеть, что $-M_+(\cdot)^{-1}$ является функцией Вейля, соответствующей граничной тройке $\Pi_+^\top = \{\mathbb{C}^m, -\Gamma_1^+, \Gamma_0^+\}$. Поэтому Теорема 4.1.2(i) применима и влечёт существование $\varepsilon_2(x_0) > 0$, такого что выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im} (-M_+(x_0 + iy)^{-1}) l, l) &\geq \varepsilon_2(x_0) \|l\|^2 \\ \text{для произвольного } y &\in [0, 1] \quad \text{и} \quad l \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения выше и используя оценку (A12) с $T(\cdot) = M_+(\cdot)^{-1} + M_-(\cdot)^{-1}$, мы получаем:

$$\|(M_+(x_0 + iy)^{-1} + M_-(x_0 + iy)^{-1})^{-1}\| \leq \varepsilon_2(x_0)^{-1}, \quad y \in (0, 1]. \quad (\text{A14})$$

Однако, неравенство (A14) противоречит соотношению (A13).

Следовательно, предположение (A5) является неверным, и $\sigma_s(L) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Приложение Б: Примеры крейновского расширения для простейших дифференциальных операторов второго, четвёртого, шестого и восьмого порядка

Приведём четыре примера для $a = 0, b = 1$, и $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Пример 1. Пусть $n = 1$, т.е. $Ay = -y''$. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и граничные условия из (5.1.2) имеют вид:

$$\begin{cases} f'(1) = f'(0) \\ f(1) = f'(0) + f(0). \end{cases}$$

Из (5.1.6) и (5.1.5) следует, что

$$T_1 = (1), \quad T_2 = (1), \quad Q = (-1), \quad S = (1),$$

и матрица

$$B_K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

является симметрической.

Пример 2. Пусть $n = 2$, т.е. $Ay = y^{(iv)}$. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и граничные условия (5.1.2) принимают вид:

$$\begin{cases} f'''(1) = f'''(0) \\ f''(1) = f'''(0) + f''(0) \\ f'(1) = \frac{1}{2}f'''(0) + f''(0) + f'(0) \\ f(1) = \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{2}f''(0) + f'(0) + f(0). \end{cases}$$

Из (5.1.6) и (5.1.5) следует, что

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$B_K = \begin{pmatrix} -12 & -6 & 12 & -6 \\ -6 & -4 & 6 & -2 \\ 12 & 6 & -12 & 6 \\ -6 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть $n = 3$, т.е. $Ay = -y^{(vi)}$. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и граничные условия являются следующими:

$$\begin{cases} f^{(v)}(1) = f^{(v)}(0) \\ f^{(iv)}(1) = f^{(v)}(0) + f^{(iv)}(0) \\ f'''(1) = \frac{1}{2}f^{(v)}(0) + f^{(iv)}(0) + f'''(0) \\ f''(1) = \frac{1}{6}f^{(v)}(0) + \frac{1}{2}f^{(iv)}(0) + f'''(0) + f''(0) \\ f'(1) = \frac{1}{24}f^{(v)}(0) + \frac{1}{6}f^{(iv)}(0) + \frac{1}{2}f'''(0) + f''(0) + f'(0) \\ f(1) = \frac{1}{120}f^{(v)}(0) + \frac{1}{24}f^{(iv)}(0) + \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{2}f''(0) + f'(0) + f(0). \end{cases}$$

Из (5.1.6) и (5.1.5) вытекает, что

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$B_K = \begin{pmatrix} -720 & -360 & -60 & 720 & -360 & 60 \\ -360 & -192 & -36 & 360 & -168 & 24 \\ -60 & -36 & -9 & 60 & -24 & 3 \\ 720 & 360 & 60 & -720 & 360 & -60 \\ -360 & -168 & -24 & 360 & -192 & 36 \\ 60 & 24 & 3 & -60 & 36 & -9 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $n = 4$, т.е. $Ay = y^{(viii)}$. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и граничные условия следующие:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(vii)}(1) = f^{(vii)}(0) \\ f^{(vi)}(1) = f^{(vii)}(0) + f^{(vi)}(0) \\ f^{(v)}(1) = \frac{1}{2}f^{(vii)}(0) + f^{(vi)}(0) + f^{(v)}(0) \\ f^{(iv)}(1) = \frac{1}{6}f^{(vii)}(0) + \frac{1}{2}f^{(vi)}(0) + f^{(v)}(0) + f^{(iv)}(0) \\ f'''(1) = \frac{1}{24}f^{(vii)}(0) + \frac{1}{6}f^{(vi)}(0) + \frac{1}{2}f^{(v)}(0) + f^{(iv)}(0) + f'''(0) \\ f''(1) = \frac{1}{120}f^{(vii)}(0) + \frac{1}{24}f^{(vi)}(0) + \frac{1}{6}f^{(v)}(0) + \frac{1}{2}f^{(iv)}(0) + f'''(0) + \\ + f''(0) \\ f'(1) = \frac{1}{720}f^{(vii)}(0) + \frac{1}{120}f^{(vi)}(0) + \frac{1}{24}f^{(v)}(0) + \frac{1}{6}f^{(iv)}(0) + \\ + \frac{1}{2}f'''(0) + f''(0) + f'(0) \\ f(1) = \frac{1}{5040}f^{(vii)}(0) + \frac{1}{720}f^{(vi)}(0) + \frac{1}{120}f^{(v)}(0) + \frac{1}{24}f^{(iv)}(0) + \\ + \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{2}f''(0) + f'(0) + f(0). \end{array} \right.$$

При этом

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5040} & \frac{1}{720} & \frac{1}{120} & \frac{1}{24} \end{pmatrix},$$

и

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица B_K имеет блочный вид $B_K = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, где

$$B_1 = \begin{pmatrix} -100800 & -50400 & -10080 & -840 \\ -50400 & -25920 & -5400 & -480 \\ -10080 & -5400 & -1200 & -120 \\ -840 & -480 & -120 & -16 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 100800 & -50400 & 10080 & -840 \\ 50400 & -24480 & 4680 & -360 \\ 10080 & -4680 & 840 & -60 \\ 840 & -360 & 60 & -4 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 100800 & 50400 & 10080 & 840 \\ -50400 & -24480 & -4680 & -360 \\ 10080 & 4680 & 840 & 60 \\ -840 & -360 & -60 & -4 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} -100800 & 50400 & -10080 & 840 \\ 50400 & -25920 & 5400 & -480 \\ -10080 & 5400 & -1200 & 120 \\ 840 & -480 & 120 & -16 \end{pmatrix}.$$