

На правах рукописи



Джанунц Гарик Апетович

**МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
СИСТЕМАХ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Специальность: 2.3.8 – Информатика и информационные процессы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Таганрог – 2023

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»

Научный консультант: доктор технических наук, профессор
Ромм Яков Евсеевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Астахова Ирина Федоровна
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»,
профессор кафедры математического обеспечения ЭВМ
(г. Воронеж)

доктор технических наук, доцент
Коваленко Анна Владимировна
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»,
заведующая кафедрой анализа данных и искусственного
интеллекта (г. Краснодар)

доктор физико-математических наук, профессор
Угольницкий Геннадий Анатольевич
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,
заведующий кафедрой прикладной математики и
программирования Института математики, механики и
компьютерных наук им. И.И. Воровича (г. Ростов-на-Дону)

Защита состоится «26» октября 2023 г. в 12:00 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.02.03 при ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» по адресу: 347922, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, ауд. Д-406.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» по адресу: 344000, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21-ж и на сайте www.sfedu.ru.

Автореферат разослан «__» _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



С.А. Кучеров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Разработка и исследование высокоточных быстродействующих методов обработки данных в информационно-вычислительных системах (ИВС) актуальны для моделей многих реальных процессов. В частности это относится к моделям периодических процессов, включая модели периодических автоколебательных реакций, модели процессов переноса и модели прогнозирования движения космических аппаратов с периодической орбитой. Создание таких методов остро актуально для глобальных навигационных спутниковых систем. Точность и скорость расчета пространственных данных об объектах имеет важное значение, в частности, для геоинформационных систем (ГИС) и глобальной навигационной спутниковой системы (ГЛОНАСС). При определении местоположения в навигационном приемнике текущее положение навигационного космического аппарата (НКА) прогнозируется на основе обработки данных оперативной эфемеридной информации из навигационного сообщения с использованием модели периодического возмущенного движения НКА ГЛОНАСС на околоземной орбите. Модель движения НКА представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Точность и скорость прогноза параметров движения НКА существенно зависит от выбора метода обработки данных дифференциальной модели. В диссертационном исследовании вопросу выбора наиболее точного и быстродействующего метода обработки данных уделяется первоочередное внимание.

ОДУ являются теоретической основой моделирования различных процессов, представляющих собой объекты актуальных научно-технических исследований. Такие процессы известны в механике, физике, химии, биологии, экономике, а также в других областях науки, техники и технологии, включающих фундаментальные и прикладные исследования. Приближенное решение ОДУ актуально в применении к математическому, численному и компьютерному моделированию процессов. Хорошо известно применение ОДУ для моделирования динамических процессов в механике, планетной астрономии, астрофизике, теории автоматического управления, включая управление движением и стабилизацией космических аппаратов, движением роботов и коррекцией движения объектов к заданной цели. В целом, ОДУ составляет одну из основ математического моделирования объективной реальности. Исследование процессов гидродинамики и газодинамики выполняется с применением моделей на основе дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных, наряду с тем можно говорить о моделировании с помощью интегро-дифференциальных уравнений. В этом аспекте можно принять во внимание модели гидродинамических, волновых процессов на основе систем линейных и квазилинейных гиперболических уравнений. Относительно универсальным инструментом исследования данных моделей является численное моделирование. При этом актуально применение численных методов, характеризующихся высокой точностью приближения и одновременно возможностью минимизации временной сложности (как, например, в планетной астрономии и при решении жестких задач). Такие противоречивые требования достаточно типичны для применения современных средств вычислительной техники. Повышение точности приближения численных методов обычно достигается ценой уменьшения шага метода и дополнительными операциями, обеспечивающими снижение погрешности математическими приемами. Как следствие, время решения задачи может возрастать с превышением допустимых ограничений. Помимо того, рост времени решения влечет дополнительное накопление погрешности, связанной с искажением численного метода в процессе компьютерной реализации операций с плавающей точкой. В том числе и по этой причине, несмотря на неуклонный рост мощности современной вычислительной техники по параметрам быстродействия и памяти, одним из наиболее важных требований к численным методам решения ДУ является минимизация количества операций, включая число обращений к правой части уравнений.

Противоречивость практических требований в аспекте точности и быстродействия фактически исключает выбор универсального метода и требует разработки широкого класса методов обработки данных дифференциальных моделей, имеющих, как правило, проблемно ориентированный или специализированный характер. Актуальные тенденции при построении означенных методов также связаны с расширением их возможностей для решения жестких систем высокой размерности. Вместе с тем минимизация временной сложности актуальна и для решения жестких систем малой размерности. Например, при моделировании периодической химической реакции Белоусова-Жаботинского на основе упрощенной модели «орегонатор», предложенной Филдом и Нойесом, для достижения высокой точности приближения при использовании явных методов Рунге-Кутты может неприемлемо возрастать время решения по причине требуемой малости шага. Для решения задач небесной механики с учетом развития астрономических средств наблюдения создаются специальные высокоточные методы численного интегрирования, основанные на итерационном решении ОДУ с помощью полиномиальной аппроксимации. Такие методы изложены, в частности, в работах Э. Эверхарта, Ю.В. Плахова, М.В. Беликова и др.

На эффективность численного интегрирования часто влияет форма представления вычислительной схемы и ее программная реализация. Так, благодаря оригинальному представлению вычислительной

схемы, интегратор Эверхарта, основанный на видоизмененных формулах неявных коллокационных методов Рунге-Кутты бутчеровского типа, с точки зрения численного интегрирования имеет ряд преимуществ. Близкие идеи приводятся в работе С.К. Татевян, Н.А. Сорокина и С.Ф. Залеткина, содержащей оригинальный подход к решению проблемы получения коэффициентов для алгебраического многочлена. В частности, выбор разбиения шага интегрирования предлагается с помощью узлов квадратурной формулы Маркова. Новая программная реализация интегратора Эверхарта, предложенная В.А. Авдюшевым, позволила повысить эффективность метода для решения задач небесной механики. К идеям этих работ примыкают работы О.Б. Арушаняна и С.Ф. Залеткина, в которых авторы предлагают реализацию подхода на основе приближения решения и его производной частичными суммами смещенных рядов Чебышева. При этом коэффициенты рядов определяются с помощью итерационного процесса с применением квадратурной формулы Маркова.

Означенные проблемы актуальны также при моделировании периодических процессов на основе уравнений в частных производных, где основу для высокоточной обработки данных модели составляют разностные схемы высоких порядков. Подробные исследования проблемы снижения погрешности приближенного решения с классическим изложением алгоритмов построения разностных схем проведены в работах Н.Н. Калиткина и А.А. Самарского. Характерной особенностью широкого класса приближенных методов, разработанных для решения ДУ в частных производных, является замена частных производных конечно-разностными отношениями. Такие методы дают дискретное приближение решения, привязанное к равномерной или неравномерной конечно-разностной сетке, покрывающей область решения. Иногда требуемые значения приближения в промежуточных точках области интегрирования интерполируются, в частности, для повышения качества визуализации данных численного моделирования. Продвижение в аспекте точности приближений связывают с повышением порядка разностных схем, с методом конечных элементов, а также с его адаптацией к конкретному классу задач. Однако, если методы инвариантны, как, например, реализованные в информационно-вычислительных системах компьютерной математики, в частности, *MathCAD* или *Maple*, то часто не позволяют строить высокоточные приближения даже в случае одномерных уравнений с гладкими решениями. Так, решение уравнения переноса с гладкими начальными данными с применением методов, реализованных в означенных системах, приближается с границей абсолютной погрешности порядка $10^{-8} - 10^{-3}$ в прямоугольной области единичного размера. При расширении области из-за быстрого накопления погрешности разностной схемы в ряде примеров может не достигаться даже грубое приближение. Разновидности существующих подходов используют интерполяцию, адаптацию разностной сетки к решению, учитывают степень заполненности ячеек. Однако границы погрешности применяемых методов зачастую остаются в отмеченном диапазоне.

Таким образом, проблема обработки данных для дифференциальных моделей периодических процессов с высокой точностью и одновременно с минимизацией временной сложности является актуальной. Следует отметить, что для моделирования существенны проблемы непрерывности приближения данных, в частности, актуальна задача оптимизации распределения узлов интегрирования в зависимости от гладкости моделируемых данных на различных участках области интегрирования.

В целом, говоря об обосновании постановки задач и методов, предложенных в диссертации, необходимо отметить следующее. Хорошо известно, что при решении задачи Коши разностные методы неизбежно накапливают погрешность с ростом области приближенного решения. В особенности, это сказывается в случае неустойчивых по Ляпунову решений задачи Коши, при решении жестких задач, в случае большого промежутка (больших размеров области) приближенного решения, как это часто требуется в математических моделях планетной астрономии, в моделях астрофизических процессов, в моделях управления движущимися объектами, в частности, спутниками и летательными аппаратами. При этом даже если входные данные и начальные условия нельзя задать с высокой точностью по причинам неточности измерений, накопление погрешности численного метода в большой области может повлечь недопустимое значение приближенного решения на выходе моделируемого процесса. Банальным примером этой трудности может служить решение задачи $y' = y$, $y(0) = 1$, которое задает экспоненту и является неустойчивым в смысле Ляпунова. В рассматриваемом случае численный метод необходимо инициирует возмущение решения, и его приближение независимо от метода на сколь угодно большую величину отклоняется от точного решения на достаточно большом промежутке приближения. Иногда аналогичные примеры интерпретируются как примеры жестких задач. Проблема устойчивости по Ляпунову актуальна для большинства задач математического, в частности, численного моделирования. Отсюда актуальна разработка компьютерного метода, обладающего малым накоплением погрешности на большом интервале (в большой области) приближенного решения. В диссертации такая задача ставится с дополнительным требованием минимизации временной сложности решения. Под временной сложностью здесь и в дальнейшем понимается количество последовательных шагов вычислительного алгоритма без учета

межпроцессорного обмена и обмена с памятью вычислительной системы. В диссертации, помимо того, традиционно учитывается число обращений метода к правой части дифференциальной системы.

Основной подход к разработке и исследованию искомым вычислительных алгоритмов опирается на кусочную интерполяцию. Здесь также необходимы специальные пояснения. Во-первых, снижение роста погрешности будет достигаться за счет малости текущего подынтервала (подобласти), на котором вычисляется функция, интерполируется правая часть дифференциальной системы и приближается решение. Существенно, что снижение погрешности достигается не за счет роста степени полинома. Во-вторых, выбраны наиболее простые полиномы Лагранжа и Ньютона. Ясно, что сами по себе многие классические интерполяционные полиномы по аналитическим оценкам погрешности интерполяции зачастую точнее выбранных полиномов. Однако это реализуется за счет дополнительных вычислительных операций и специального распределения узлов интерполяции. На малом подынтервале дополнительные операции означают дополнительные вычисления, часто сложного характера. В компьютерной реализации это происходит с дополнительным накоплением погрешности, и аналитическое преимущество может оказаться потерянным. В-третьих, для выбранных полиномов применяется перевод из известной их формы в форму алгебраического полинома с числовыми коэффициентами. Это оказывается возможным выполнить с простым и универсальным в компьютерной реализации видоизменением формул Виета. В итоге, количество вычислительных операций на подынтервале (в подобласти) оказывается минимизированным, эти операции не влекут вычислительной сложности, и не происходит накопления дополнительной погрешности на малом подынтервале. Поэтому последующее применение модифицированной таким образом интерполяции делает накопление погрешности в наибольшей мере зависимым только от малости подынтервала, а не от степени полинома.

Диссертация посвящена разработке и исследованию высокоточных быстродействующих методов обработки данных в ИВС для моделей периодических процессов. При этом на основе интерполяционных полиномов с итерационным уточнением алгоритмически достигается и программно реализуется гладкость аналитического приближения данных на отрезке произвольной длины. При разработке требуется, чтобы искомые методы были основаны на инвариантном вычислительном алгоритме для широкого класса моделей периодических процессов в ИВС, в числе которых модели жестких задач и задач с неустойчивыми по Ляпунову решениями. Аналогичное требование распространяется на случай кусочно-интерполяционной обработки числовых данных модели переноса с целью компьютерной реализации методов с помощью по возможности единых программных процедур для создания инвариантного комплекса программ обработки данных в ИВС. В частности, с помощью искомого комплекса программ требуется выполнять моделирование динамики химических и биохимических осцилляторов, автоколебаний в задачах радиоэлектроники, управляемого движения космических аппаратов (КА), устойчивого периодического движения КА на околоземной орбите, процесса переноса волны. С применением комплекса требуется кроме того выполнять моделирование движения НКА ГЛОНАСС по данным оперативной эфемеридной информации из навигационного сообщения для ускорения процесса прогнозирования координат и составляющих вектора скорости центра масс. При этом актуально осуществлять обработку данных эфемерид с наиболее высокой точностью в произвольно заданные моменты времени из интервала прогнозирования параметров движения НКА.

Согласно изложенному актуальна следующая цель диссертационного исследования.

Целью диссертационной работы является разработка и исследование высокоточных быстродействующих алгоритмов и программ обработки данных в ИВС для моделей периодических процессов, в числе которых периодические автоколебательные реакции, модели процессов переноса и модели прогнозирования движения космических аппаратов с периодической орбитой. В частности, для этого необходимо построение библиотеки стандартных программ ИВС высокоточного вычисления функций и обработки данных интегральных моделей в режиме реального времени.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

1. Разработать высокоточный метод разностно-полиномиальной обработки данных в ИВС с автоматизированным выбором варьируемых параметров и итерационным уточнением для моделей периодических процессов.

2. Исследовать сходимость, скорость сходимости и трудоемкость разрабатываемого метода разностно-полиномиальной обработки данных на временном промежутке произвольной длительности.

3. Разработать модификацию метода обработки данных в ИВС с автоматизированным выбором варьируемых параметров и итерационным уточнением для моделей периодических процессов, полностью исключающую использование разностных схем и достигающую повышенной точности обработки данных на больших временных промежутках.

4. Исследовать сходимость, скорость сходимости и трудоемкость разрабатываемой модификации кусочно-интерполяционного метода обработки данных с итерационным уточнением на временном промежутке произвольной длительности.

5. Построить программную реализацию метода с автоматизированным выбором параметров, адаптирующихся к структуре модели и реализующих динамическую коррекцию начальных данных для достижения наибольшей точности при наименьшем времени обработки.

6. Разработать метод варьируемой кусочно-интерполяционной обработки числовых данных модели переноса с итерационным уточнением с целью получить аналитическое приближение данных, характеризующееся сравнительно высокой точностью и кусочной гладкостью.

7. Исследовать сходимость, скорость сходимости и трудоемкость разрабатываемой кусочно-интерполяционной обработки данных с итерационным уточнением для модели переноса в прямоугольной области.

8. Выполнить алгоритмизацию и программную реализацию обработки данных модели переноса с автоматическим выбором параметров, обеспечивающим наибольшую точность при наименьшем времени обработки.

9. Разработать метод создания библиотеки стандартных программ в ИВС на основе кусочно-интерполяционной обработки данных с хранимыми значениями полиномиальных коэффициентов, позволяющий параллельно воспроизводить значения стандартных и специальных функций, используемых в моделях периодических процессов, на произвольном множестве точек фиксированной области за время единичного порядка.

10. Разработать разновидность кусочно-интерполяционной обработки данных дифференциальной модели с повышенным быстродействием без потери точности обработки за счет пользовательского подбора и фиксирования параметров. На этой основе синтезировать быстродействующие алгоритмы высокоточного воспроизведения специальных функций и их производных, применяемых в моделях периодических процессов, с гладкостью приближения на больших временных промежутках.

11. Создать комплекс программ обработки данных в ИВС на основе разрабатываемого метода для моделей жестких и нежестких задач, включающий возможность адаптации к различным классам моделей. Комплекс также должен включать программы для кусочно-интерполяционной обработки данных модели переноса. На основе комплекса выполнить моделирование различных периодических автоколебательных реакций, получить уточнение физико-химических параметров автоколебаний и повысить качество моделирования процессов за счет высокой точности и гладкости обработки данных моделей в допустимых границах трудоемкости.

12. С помощью разработанного программного комплекса выполнить обработку данных в ИВС модели управляемого движения КА, устойчивого периодического движения КА на околоземной орбите с целью прогнозирования положения КА. Представить уточненные результаты моделирования, необходимые для отладки технологических процессов, для эффективного управления движением КА в режиме реального времени, для расчета координат КА в произвольно заданные моменты времени.

13. С помощью разработанного комплекса выполнить моделирование движения НКА ГЛОНАСС по данным эфемерид. На этой основе синтезировать алгоритмы, применение которых существенно ускорит процесс расчета координат и составляющих вектора скорости центра масс НКА ГЛОНАСС с превышением требуемой точности в произвольно заданные моменты времени интервала прогнозирования.

14. Разработать алгоритмы и программы, которые позволят сохранять гладкое аналитическое приближение компонентов траектории и скорости движения НКА ГЛОНАСС в памяти компьютера и восстанавливать его без повторного вычисления траектории в произвольной точке интервала прогнозирования за время единичного порядка без снижения точности приближений.

15. С целью интегральной обработки данных в ИВС на основе применения кусочно-интерполяционного метода получить инвариантные относительно степени полинома аналоги формул Ньютона-Котеса с коэффициентами, не зависящими от подынтегральной функции и промежутка интегрирования. На этой основе разработать и программно реализовать методы высокоточного вычисления интегралов и первообразных при условии минимизации времени вычисления. Исследовать сходимость, скорость сходимости и трудоемкость методов, представить таблицы хранимых коэффициентов для стандартизации программ.

Научная новизна результатов диссертационной работы заключается в следующем:

1. Предложен метод разностно-полиномиальной обработки данных в ИВС с программным выбором варьируемых параметров для моделей периодических процессов. Метод отличается от аналогов обработкой данных на временных подынтервалах интерполяционными полиномами Ньютона, программно преобразуемыми в форму алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами, разностной обработкой узловых значений, применением итерационного уточнения, автоматизированным выбором

параметров, что позволяет повысить точность и уменьшить время обработки данных относительно известных методов, а также улучшить качество моделирования исследуемых процессов.

2. Выполнено исследование, показана сходимость, дана оценка скорости сходимости предложенного метода. Для корректного применения метода достаточно двукратной дифференцируемости правой части дифференциальной системы, что положительно отличается от условий применения аналогов и улучшает качество моделирования в ИВС периодических процессов с быстро меняющейся динамикой.

3. Как развитие метода обработки данных в ИВС с автоматизированным выбором варьируемых параметров и итерационным уточнением для моделей периодических процессов предложена модификация, не использующая разностные схемы. Модифицированный метод отличается от аналогов кусочной интерполяцией на временных подынтервалах правой части дифференциальной системы и интегральным приближением решения в виде алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами, а также выполнением итераций на подынтервалах, аналогичных интегральным приближениям Пикара. Метод отличается повышением точности обработки данных на больших отрезках времени относительно известных методов, а также улучшением качества численного моделирования.

4. Показана сходимость предложенной модификации кусочно-интерполяционного метода обработки данных и сходимость итерационного уточнения, даны оценки скорости сходимости. Качества равномерной сходимости и аналитический вид приближения числовых данных отличают предложенную модификацию от известных аналогов.

5. Предложенный метод реализован в виде стандартной программы ИВС, на вход которой поступает правая часть дифференциальной системы, моделирующей процесс, начальные данные и параметры, включающие границы временного отрезка обработки данных модели. Автоматический выбор параметров обеспечивает наибольшую точность при наименьшем времени обработки. Это отличительное качество программной реализации позволяет превышать точность аналогов на два десятичных порядка, при этом варьируемые параметры программно адаптируются к структуре модели и реализуют динамическую коррекцию начальных данных. В результате достигается вычислительная устойчивость, высокая точность, гладкость аналитического приближения данных на отрезке произвольной длины, что составляет отличие метода для широкого класса моделей периодических процессов в ИВС, в числе которых модели жестких задач и задач с неустойчивыми по Ляпунову решениями.

6. Предложен аналог метода обработки данных в ИВС для моделей с частными производными. Более точно, разработана варьируемая кусочно-интерполяционная обработка числовых данных модели переноса, которая отличается от известных применением интерполяционного полинома Ньютона от двух переменных, программно преобразуемого в алгебраический полином с числовыми коэффициентами. Варьируемая интерполяция данных выполняется в каждой прямоугольной подобласти, на которые в зависимости от значений параметров автоматически делится исходная прямоугольная область. Применяется итерационное уточнение обработанных данных. На этой основе получается гладкое приближение данных в прямоугольной подобласти, которое отличает предложенный метод от известных, кроме того, метод отличается значительно более высокой точностью. Согласно численному эксперименту достигается превышение точности известных методов моделирования переноса на несколько десятичных порядков, что позволяет улучшить качество моделирования волновых процессов в ИВС.

7. Показана сходимость кусочно-интерполяционной обработки данных модели переноса, даны оценки скорости сходимости. Для случая прямоугольной области оценивается скорость сходимости итерационного уточнения. Для квазилинейной модели переноса предложена схема вывода аналогичных оценок.

8. Выполнена алгоритмизация и программная реализация обработки данных модели переноса, реализован автоматический выбор параметров, обеспечивающий наибольшую точность при наименьшем времени обработки. Программная реализация отличается устойчивостью и отмеченной точностью обработки, что в сочетании с кусочной гладкостью приближения данных позволяет детализировать и повысить качество моделирования процесса переноса.

9. Предложен метод создания библиотеки стандартных программ в ИВС на основе кусочно-интерполяционной обработки данных. Разновидность кусочной интерполяции позволяет приближать функции с точностью до 10^{-20} на произвольном временном отрезке, при этом стандартные и специальные функции приближаются за время единичного порядка, что положительно отличает метод от известных. Реализованы варианты хранения коэффициентов в разделе констант программы, в типизированном файле, в постоянном запоминающем устройстве, дан алгоритм считывания. Вычисления функции взаимно независимы по значениям аргумента, что влечет параллелизм метода. На основе хранимых коэффициентов любая функция библиотеки может параллельно воспроизводиться на произвольном множестве точек фиксированной области. На аналогичной основе разработано приближение производных в ИВС с точностью до 10^{-16} .

10. Показана возможность существенного снижения трудоемкости без потери точности в предложенном методе обработки данных дифференциальной модели при замене автоматического выбора параметров их пользовательским подбором и фиксированием. Согласно численному и программному эксперименту предложенная модификация превосходит известные методы по быстродействию, при этом достигает более высокой точности обработки данных. На этой основе разработаны быстродействующие алгоритмы воспроизведения с помощью хранимых коэффициентов специальных и стандартных функций с гладкостью приближения. В частности, функция Бесселя и гипергеометрическая функция, применяемые в моделях периодических процессов, реализуются гладким приближением на больших временных промежутках с быстродействием и точностью, превосходящими характеристики известных аналогов.

11. Разработан комплекс программ обработки данных в ИВС на основе предложенного метода для моделей жестких и нежестких задач, включающий автоматический и пользовательский выбор параметров для адаптации к классам моделей. С помощью комплекса выполнено моделирование периодических автоколебательных реакций (реакции Белоусова-Жаботинского, релаксационных автоколебаний в системе гликолиза, гетерогенной колебательной реакции окисления молекулярного водорода). Результаты отличаются сравнительно высокой точностью и гладкостью обработки данных моделей в допустимых границах трудоемкости, что позволяет уточнить физико-химические параметры автоколебаний и повысить качество моделирования. Комплекс включает программы моделирования процессов переноса, согласно эксперименту точность обработки данных с помощью этих программ по сравнению с аналогами повышается в среднем на восемь десятичных порядков, отличается на порядок меньшим временем обработки и гладкостью приближения, что позволяет уточнить форму и динамику перемещения волн.

12. С помощью разработанного комплекса программ выполнено моделирование в ИВС движения КА, рассчитано уточненное время необходимое для вывода КА на устойчивую периодическую орбиту при управлении, соответствующем внешнему воздействию гравитационных сил. Получены уточненные параметры орбиты устойчивого движения КА. Достаточно малая временная сложность предложенной обработки данных позволяет применять метод для управления движением КА в режиме реального времени. Выполнено моделирование возмущенного движения искусственного спутника Земли (ИСЗ), выведенного на низкую околоземную орбиту. Сравнительно высокая точность предложенного метода обработки данных в сочетании с гладкостью и малой временной сложностью дают координаты ИСЗ с требуемой точностью в произвольный момент времени, что необходимо для измерений с помощью лазерного дальномера от пункта наблюдения до ИСЗ и позволяет предупреждать аварийный сход с орбиты.

13. С помощью разработанного программного комплекса выполнена обработка данных эфемерид на модели движения НКА ГЛОНАСС. Точность и гладкость предложенного метода обработки данных позволяют получить координаты и составляющие вектора скорости центра масс НКА с превышением границ требуемой точности в произвольно заданные моменты времени из 30-минутного интервала прогнозирования, при этом время расчета примерно вдвое меньше времени известных методов. Процесс расчета реализован в виде процедуры с параметрами определяемыми из навигационного сообщения и может быть полностью автоматизирован с сохранением быстродействия, точности и гладкости обработки данных. Предложен способ дополнительного ускорения обработки данных на модели движения НКА ГЛОНАСС за счет хранения коэффициентов кусочной интерполяции траектории и динамики движения для задач постобработки данных.

14. Кусочно-интерполяционное приближение координат непрерывно, сходится к траектории НКА ГЛОНАСС и приближает скорость НКА на всем интервале прогнозирования. На каждом подынтервале интервала прогнозирования интерполирующий компонент траектории полином имеет вид алгебраического полинома фиксированной степени с числовыми коэффициентами. Это позволяет сохранять в памяти компьютера приближение компонента траектории в виде типизированного файла коэффициентов полиномов соответственных подынтервалам разбиения. Непрерывное и гладкое приближение каждого компонента траектории оказывается хранимым и восстанавливается без повторного вычисления траектории в произвольной точке интервала прогнозирования простым алгоритмом считывания как соответственное значение полинома, что качественно отличается от известных методов. На данной основе процесс прогнозирования естественным образом архивируется. Создаются предпосылки прогнозирования не отдельных точек траектории, а всего непрерывного отрезка траектории движения НКА с расширением интервала прогнозирования. Приводится программа обработки данных и результаты численного эксперимента, подтверждающие улучшение качества прогнозирования параметров движения НКА.

15. Обработка данных использует многообразие методов, в числе которых вычисление интеграла. Разработанный кусочно-интерполяционный метод используется для приближения подынтегральной функции. Интерполяция выполняется с помощью полиномов Лагранжа и Ньютона, преобразуемых в форму алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами. Полученный полином интегрируется, приводя к инвариантным относительно степени полинома формулам Ньютона-Котеса. Коэффициенты формул не

зависят от подынтегральной функции, промежутка интегрирования, хранятся в разделе констант программы. Пользовательский интерфейс программ стандартизируется до задания подынтегральной функции, промежутка интегрирования, как вариант может включать степень полинома и число подынтервалов. Показана сходимость метода, даны оценки скорости сходимости, представлены таблицы коэффициентов для стандартизации программ. Приведены коды программ и результаты эксперимента, согласно которым на промежутке длины 500 достигается граница погрешности приближения интеграла порядка 10^{-20} . На промежутках стандартной для обработки данных длины достигается нулевая граница погрешности. Метод распространяется на приближение первообразной функции, в этом случае погрешность имеет порядок 10^{-19} . Одновременно с минимизацией погрешности минимизируется время вычисления интегралов и первообразных, что отличает метод от известных.

Научная и практическая значимость

Научную и практическую значимость в области обработки данных в ИВС моделей периодических процессов имеют полученные в диссертации высокоточные быстродействующие методы и программная реализация обработки данных дифференциальных моделей, включая модели периодических автоколебательных реакций, модели процессов переноса и модели прогнозирования движения КА. Научную значимость в области численных методов имеют представленные в диссертации кусочно-интерполяционные методы приближенного решения дифференциальных систем, отличающиеся от известных способом построения, инвариантностью вычислительного алгоритма относительно задач различных классов, возможностью достижения высокой точности и гладкости полученного приближения при одновременной минимизации временной сложности. Значимы также представленные в работе методы варьируемого кусочно-интерполяционного вычисления функций, отличающиеся малой погрешностью и гладкостью непрерывного приближения с минимизацией временной сложности, и аналог подхода Ньютона-Котеса для произвольной степени интерполяционного полинома, реализованный на основе кусочно-интерполяционного приближения подынтегральных функций. Помимо того, научно значимым является метод кусочно-интерполяционного решения уравнения переноса на основе интерполяционного полинома Ньютона от функции двух переменных варьируемой степени с итерационным уточнением. Метод позволяет достигать высокой точности и кусочной непрерывности приближения решения линейного и квазилинейного уравнения переноса и уточнить на этой основе параметры волнового процесса в результате обработки данных модели переноса. Все предложенные методы основаны на инвариантном программном переводе интерполяционных полиномов в форму алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами с помощью алгоритма отличного от формул Виета и уравнений Ньютона для симметрических функций.

Практическая значимость диссертационного исследования заключается в прикладном характере предложенных методов обработки данных, включающих кусочно-интерполяционные решения ОДУ и ДУ в частных производных, которые применяются для компьютерной реализации моделей колебательных динамических процессов, включая химические и биохимические реакции (реакция Белоусова-Жаботинского, релаксационные автоколебания в системе гликолиза, колебательная реакция окисления молекулярного водорода), электрическое равновесие автогенератора с внутренней обратной связью, движение КА с управлением при помощи «малой тяги», возмущенное движение КА, прогнозирование положения НКА системы ГЛОНАСС, а также для моделирования переноса волны. Результаты моделирования необходимы для отладки технологических процессов на основе периодических реакций, для эффективного управления движением КА в режиме реального времени, для прогнозирования движения и расчета координат ИСЗ в произвольно заданные моменты времени, повышения точности и скорости расчета пространственных данных об объектах для ГИС. На основе инвариантных кусочно-интерполяционных методов разработан программный комплекс, реализующий методы как с автоматическим, так и с пользовательским подбором параметров. Комплекс программ предназначен для решения актуальных задач обработки данных моделей, связанных с исследованием динамических систем и автоколебательных процессов. В аспекте практического применения существенно сочетание в инвариантных кусочно-интерполяционных методах высокой точности, быстродействия и гладкости приближения, позволяющее применять методы для повышения качества численного моделирования, в том числе в режиме реального времени. Данное сочетание характеристик сохраняется при численном моделировании процессов, описываемых жесткими и нежесткими системами ОДУ, и в целом характеризует разработанный комплекс программ. Практическую значимость имеет в частности то, что точность и гладкость предложенного метода обработки данных позволяют получить координаты и составляющие вектора скорости центра масс НКА ГЛОНАСС с превышением требуемой точности в произвольно заданные моменты времени из 30-минутного интервала прогнозирования, при этом время расчета примерно вдвое меньше времени известных методов. Кроме того, имеет значение возможность сохранять в памяти компьютера приближение компонента траектории в виде типизированного файла. Хранимым оказывается

непрерывное и гладкое приближение каждого компонента траектории, при этом траектория восстанавливается без повторного вычисления в произвольной точке интервала прогнозирования. Процесс прогнозирования естественным образом архивируется, создаются предпосылки прогнозирования всего непрерывного отрезка траектории движения НКА с увеличением существующего интервала прогнозирования.

Внедрение и использование результатов работы. Полученные в работе результаты приняты к использованию:

1. В АО НКБ ВС для моделирования движения и автоматического управления подвижными объектами; для повышения точности численного моделирования автоколебательных процессов при автоматизированном управлении движением объектов; при расширении библиотеки стандартных программ вычисления элементарных, повторяющихся и специальных функций для бортовых вычислителей систем автоматического управления движением подвижными объектами и с целью вычисления композиций сложных функций с минимальной временной сложностью при высокой точности приближения функций. Разработанный программный комплекс используется для численного моделирования процессов управления с широко варьируемыми параметрами с целью уточнения физико-технологических и динамических характеристик моделируемых процессов.

2. В АО «ВНИИЖТ» для повышения точности прогнозирования положения объекта, а также для моделирования навигационного управления; для расширения библиотеки стандартных программ вычисления элементарных, часто повторяющихся и специальных функций с целью ускорения процесса численного моделирования, а также уточнения значения параметров в моделях дистанционного зондирования с помощью спутников и БПЛА. Разработанный программный комплекс принят к использованию с целью уточнения физико-технологических характеристик моделируемых процессов в режиме реального времени; программный комплекс для численного моделирования движения навигационных космических аппаратов ГЛОНАСС принят к использованию с целью ускорения и повышения точности расчета координат местоположения и скорости движения исследуемых объектов.

3. В учебном процессе кафедры информатики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиала) ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)» в курсах «Компьютерное моделирование», «Математическое и имитационное моделирование», «Алгоритмы численного интегрирования и анализа устойчивости», «Численные методы в анализе данных», «Визуализация данных», «Специальные разделы информатики», «Современные инструментальные средства», «Программирование», «Современные методы построения программ», «Численные методы», «Математическое моделирование и численные эксперименты», «Современные технологии программирования», «Абстрактная и компьютерная алгебра» и «Параллельные алгоритмы».

Кроме того, полученные в работе результаты были положены в основу исследований по проектам, поддержанным Российским фондом фундаментальных исследований: 10-07-00178-а «Численная оптимизация на основе сортировки с приложением к анализу устойчивости, поиску и распознаванию»; 12-07-00143-а «Компьютерные методы численной оптимизации на основе сортировки с приложением к анализу устойчивости, разностно-полиномиальному решению дифференциальных уравнений, распознаванию изображений и цифровой обработке сигналов»; 16-07-00100-А «Компьютерные методы варьируемого кусочно-полиномиального решения дифференциальных уравнений и анализа устойчивости».

Методы исследования включают методы обработки данных в ИВС моделей периодических процессов, вычислительные методы алгебры и математического анализа, методы интерполяции и численного анализа, элементы теории сложности алгоритмов, методы прогнозирования движения космических объектов, методы объектного и прикладного программирования.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод разностно-полиномиальной обработки данных в ИВС с программным выбором варьируемых параметров для моделей периодических процессов, построенный на основе обработки данных на временных подынтервалах интерполяционными полиномами Ньютона, программно преобразуемыми в форму алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами. Метод использует разностную обработку узловых значений, применяет итерационное уточнение и обеспечивает повышение точности при уменьшении времени обработки данных для улучшения качества моделирования исследуемых процессов.

2. Обоснование сходимости и оценки скорости сходимости предложенного метода разностно-полиномиальной обработки данных на произвольном промежутке времени.

3. Модификация метода обработки данных в ИВС с автоматизированным выбором варьируемых параметров для моделей периодических процессов, исключая использование разностных схем. Модификация построена на основе кусочной интерполяции на временных подынтервалах правой части дифференциальной системы и интегральном приближении решения в виде алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами, использует итерационные уточнения аналогичные интегральным

приближениям Пикара. Модификация отличается повышенной точностью обработки данных на больших отрезках времени и позволяет улучшать качество моделирования.

4. Обоснование сходимости и оценки скорости сходимости предложенной модификации кусочно-интерполяционного метода обработки данных с итерационным уточнением на произвольном временном промежутке.

5. Программная реализация предложенного метода с автоматизированным выбором параметров, адаптирующихся к структуре модели и реализующих динамическую коррекцию начальных данных, что позволяет достигать наибольшей точности гладкого аналитического приближения данных на отрезке произвольной длины при минимальном времени обработки. При этом достигается вычислительная устойчивость обработки данных в ИВС для широкого класса моделей периодических процессов, в числе которых модели жестких задач и задач с неустойчивыми по Ляпунову решениями.

6. Метод варьируемой кусочно-интерполяционной обработки числовых данных модели переноса с итерационным уточнением, построенный на основе интерполяционного полинома Ньютона от двух переменных, программно преобразуемого в алгебраический полином с числовыми коэффициентами. Применяется двумерное итерационное уточнение обработанных данных, что позволяет получить кусочно-гладкое аналитическое приближение движения волны в прямоугольной области со сравнительно высокой точностью и повысить качество моделирования процесса переноса в ИВС.

7. Обоснование сходимости и оценки скорости сходимости кусочно-интерполяционной обработки данных с итерационным уточнением для модели переноса в прямоугольной области.

8. Алгоритмизация и программная реализация предложенного метода обработки данных модели переноса с автоматизированным выбором параметров, обеспечивающим наибольшую точность при наименьшем времени обработки и вычислительную устойчивость, что в сочетании с кусочной гладкостью приближения данных позволяет детализировать и повысить качество моделирования процесса переноса.

9. Метод создания библиотеки стандартных программ в ИВС на основе кусочно-интерполяционной обработки данных с хранением полиномиальных коэффициентов, позволяющий параллельно воспроизводить приближения стандартных и специальных функций в моделях периодических процессов с точностью порядка 10^{-20} на произвольном множестве точек фиксированной области за время единичного порядка.

10. Модификация кусочно-интерполяционной обработки данных дифференциальной модели, позволяющая существенно повысить быстродействие без потери точности обработки за счет замены автоматического выбора параметров их пользовательским подбором и фиксированием. Разработанные на этой основе с помощью хранимых коэффициентов быстродействующие алгоритмы высокоточного воспроизведения специальных функций и их производных позволяют в моделях периодических процессов получать приближения данных со свойством гладкости на больших интервалах времени.

11. Комплекс программ кусочно-интерполяционной обработки данных в ИВС для моделей жестких и нежестких задач, включающий автоматический и пользовательский выбор параметров для адаптации к классам моделей. Комплекс позволяет выполнять быстродействующее высокоточное моделирование периодических автоколебательных реакций, что необходимо для отладки технологических процессов на их основе. Комплекс также включает обработку данных модели процессов переноса для уточнения форм и динамики перемещения волн.

12. Комплекс программ для моделирования в ИВС движения КА, позволяющий рассчитывать время и параметры вывода КА на устойчивую периодическую орбиту при управлении, соответствующем внешнему воздействию гравитационных сил. Сравнительно малая временная сложность предложенной обработки данных позволяет применять комплекс для управления движением КА в режиме реального времени, кроме того программный комплекс позволяет рассчитать с повышенной точностью координаты ИСЗ, выведенного на низкую околоземную орбиту, в произвольный момент времени, что необходимо для измерений с помощью лазерного дальномера от пункта наблюдения до ИСЗ.

13. Алгоритмы и программы для моделирования движения НКА ГЛОНАСС по данным эфемерид, позволяющие существенно ускорить процесс расчета координат и составляющих вектора скорости центра масс НКА ГЛОНАСС с превышением требуемой точности в произвольно заданные моменты времени из 30-минутного интервала прогнозирования. Предложенные алгоритмы и программы позволяют сохранять гладкое аналитическое приближение координат траектории и скорости движения НКА в памяти компьютера и восстанавливать его без повторного вычисления траектории в произвольной точке интервала прогнозирования за время единичного порядка без снижения точности приближений. На данной основе улучшается процесс прогнозирования и его архивация, создаются предпосылки прогнозирования непрерывного отрезка траектории движения НКА и расширения интервала прогнозирования.

14. Формулы обработки интегральных данных, представляющие собой разновидность формул Ньютона-Котеса с коэффициентами, не зависящими от подынтегральной функции и промежутка

интегрирования, полученными на основе кусочной интерполяции. Вычисление интегралов с хранимыми в памяти ИВС коэффициентами реализовано программно. Пользовательский интерфейс программ стандартизирован до задания подынтегральной функции, промежутка интегрирования, как вариант может включать степень полинома и число подынтервалов. Интегральная обработка данных реализуется с высокой точностью на временных интервалах большой длины. На промежутках стандартной для обработки данных длины достигается нулевая граница погрешности. Одновременно с минимизацией погрешности минимизируется время вычисления интегралов.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Достоверность полученных научных результатов вытекает из корректного математического обоснования с помощью аналитических оценок сходимости и погрешности приближений, а также временной сложности формализованных алгоритмов, подтверждается результатами численного и компьютерного моделирования, программного и вычислительного эксперимента.

Основные результаты работы были представлены на III Всероссийской студенческой научно-технической конференции «Прикладная информатика и математическое моделирование» (Москва, МГУП, 2009 г.); International Conference Parallel Computer Algebra '2010 (Tambov, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, 2010); XI международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности» (Санкт-Петербург, СПбПУ, 2011 г.); XII Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (весенняя сессия) (Казань, 2011 г.); Всероссийской НТК с международным участием: «Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении» «КомТех-2011» (Таганрог, ТТИ ЮФУ, 2011 г.); Международной научно-практической конференции: «Перспективы развития технических наук» (Челябинск, 2015 г.); III Международной научно-практической конференции «Инновационные технологии и дидактика в обучении» (Таганрог, 2015 г.); III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Аспекты развития науки, образования и модернизации промышленности». Технические науки (Таганрог, 2017 г.); 16-ой Международной молодежной научно-практической конференции «Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» (Новочеркасск, 2017 г.); Всероссийском форуме молодых ученых (Екатеринбург, 2017 г.); IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик, 2018 г.); 17-ой Международной молодежной научно-практической конференции «Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» (Новочеркасск, 2018 г.); Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2019 г.); IV Всероссийской научно-практической конференции «Информационные и инновационные технологии в науке и образовании» (Таганрог, 2019 г.); XVI Международной научно-технической конференции «Новые информационные технологии и системы» (Пенза, 2019 г.); Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2020 г.); на научных семинарах кафедры информатики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиала) ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)» (2010 – 2023 гг.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 52 научные работы общим объемом около 82 печатных листов, включая одну монографию и 17 статей в ведущих рецензируемых научных журналах, входящих в Перечень ВАК при Минобрнауки России. Требованиям диссертационного совета ЮФУ соответствует 15 опубликованных статей, из которых 5 научных работ опубликовано в российских и зарубежных изданиях, индексируемых в системах Web of Science, Scopus.

Соответствие паспорту специальности. Диссертационная работа соответствует пунктам 1, 3, 6, 8, 16 паспорта специальности 2.3.8. Информатика и информационные процессы (технические науки).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав основного раздела, заключения, списка литературы и приложений к пяти главам. Основное содержание работы изложено на 386 страницах, включая список литературы из 206 наименований, приложение изложено на 106 страницах, включает коды программ, реализующих математические модели и предложенные методы обработки данных.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи диссертационного исследования, отмечены научная новизна, теоретическая и практическая значимость проведенных исследований, сформулированы основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту.

В **первой главе** выполнен анализ современного состояния проблем обработки данных моделей периодических процессов в различных актуальных областях науки и техники.

Основное внимание уделено процессам и методам обработки данных, к которым предъявляются требования высокой точности и одновременно возможно малой трудоемкости. Представлена детализация алгоритмов, наиболее распространенных при численном исследовании дифференциальных моделей, характеризующихся высокой степенью жесткости, в частности, при моделировании автоколебательных химических реакций, а также алгоритмов, обладающих высокой точностью при решении нежестких задач, с целью исследования особенностей и принципов их использования в соответствии со специфическими качествами моделирующих дифференциальных систем. Отмечены особенности обработки данных моделей в области астрофизики и планетной астрономии, затрудняющие искомое высокоточное моделирование на основе широко распространенных разностных методов и приводящие к необходимости разработки специализированных методов обработки данных. Аналогично, представлены примеры задач в области гидродинамики, при моделировании которых актуальны проблемы повышения точности обработки данных для моделей с частными производными, в частности, обработки данных модели переноса.

Выполненный анализ подтвердил актуальность разработки и исследования высокоточных методов обработки данных, которые бы характеризовались сравнительно малой временной сложностью при моделировании периодических процессов, в частности, в области химической кинетики, планетной астрономии, астрофизики и периодического возмущенного движения НКА. Анализ также показал, что в исследуемых областях существует проблема построения гладких аналитических приближений данных дифференциальных моделей. Для моделей процессов в перечисленных областях важно получение данных как в реальном времени, так и в произвольной точке области приближения.

Во **второй главе** вначале излагается быстродействующее компьютерное приближение функций с вариацией параметров для обработки данных в ИВС с повышенной точностью. На этой основе в продолжение главы синтезируется и программно реализуется метод разностно-полиномиальной обработки данных с программным выбором варьируемых параметров для моделей периодических процессов.

Аппроксимация действительной функции $u = u(x)$ от одной действительной переменной на отрезке $[\alpha, \beta]$ выполняется следующим образом. Выбирается система подынтервалов равной длины, объединение

которых покрывает отрезок: $[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{P-1} [x_i, x_{i+1}]$, $P = 2^k$, $k \in \{0, 1, \dots\}$. Для i -го подынтервала строится

интерполяционный полином Ньютона $\Psi_{in}(t)$ с равноотстоящими узлами, где $t = (x - x_i)/h$, $h = (x_{i+1} - x_i)/n$ – расстояние между узлами. Степень полинома n выбирается одинаковой для всех подынтервалов и минимальной при условии, что абсолютная погрешность не превышает априори заданной границы ε : $|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq \varepsilon$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, P-1}$. При этом каждый полином Ньютона преобразуется к виду полинома с явными значениями числовых коэффициентов. Для этого в его исходной записи

$$\Psi_{in}(t) = u(x_{i_0}) + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta^j u_{i_0}}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (t-k), \quad t = (x - x_{i_0})/h, \quad (1)$$

где $x_{ij} = x_i + jh$, $j = \overline{0, n}$, – узлы интерполяции, $\Delta^j u_{i_0}$ – конечная разность j -го порядка в узле $x_{i_0} = x_i$, вычисляются конечные разности $\Delta u_{i_0} = u(x_{i_1}) - u(x_{i_0})$, $\Delta^k u_{i_0} = \Delta^{k-1} u_{i_1} - \Delta^{k-1} u_{i_0}$, $k = \overline{2, n}$, и обозначаются

$b_{ij} = \Delta^j u_{i_0}$, $j = \overline{1, n}$. Произведение $P_j(t) = \prod_{k=0}^{j-1} (t-k)$ является полиномом, заданным разложением на

множители, где $k = \overline{0, j-1}$ – его нули, по которым восстанавливаются коэффициенты: $P_j(t) = d_{j_0} + d_{j_1}t + d_{j_2}t^2 + \dots + d_{j_j}t^j$. После данных преобразований полином (1) по дистрибутивности с приведением подобных переводится в форму

$$\Psi_{in}(t) = a_{i_0} + \sum_{\ell=1}^n a_{i_\ell} t^\ell, \quad a_{i_0} = u(x_{i_0}), \quad a_{i_\ell} = \sum_{j=\ell}^n b_{ij} d_{j_\ell} / j! \quad (2)$$

При аппроксимации полиномом (2) функции $u(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, выполняется дешифрация номера подынтервала $i = [(x - \alpha) / (x_{i+1} - x_i)]$, $i = \overline{0, P-1}$, $x \in [x_i, x_{i+1})$. Значение i служит адресом выборки соответственных подынтервалу коэффициентов (2). Так как $n = \text{const}$ минимально для априори заданной границы абсолютной погрешности ε , то при условии запоминания коэффициентов (2) временная сложность вычисления функции путем данного приближения оценивается как $O(1)$. В частности, таким образом минимизируется время вычисления часто встречающихся стандартных и специальных функций. Практически в общих условиях метод позволяет вычислять функции с границей абсолютной погрешности $10^{-20} - 10^{-19}$. Имеет место следующая оценка скорости сходимости метода.

Лемма 1. Пусть для произвольного $n = \text{const}$ функция $u = u(x)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[\alpha, \beta]$, на концах которого подразумеваются соответственные односторонние производные. Тогда, каким бы ни было $n \geq 1$, последовательность полиномов $\Psi_{in}(t)$ из (2) равномерно сходится к функции $u(x)$ на данном отрезке при $k \rightarrow \infty$, где $k = \log_2 P$, P – число подынтервалов. Скорость сходимости оценивается из соотношения

$$|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq c(n) 2^{-k(n+1)} h^{n+1}, \quad P = 2^k, \quad [\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{P-1} [x_i, x_{i+1}], \quad (3)$$

где $c(n) = \max_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} |u^{(n+1)}(\xi)|$, h – шаг интерполирования полинома $\Psi_{0n}(t)$ на $[\alpha, \beta]$ при $k = 0$.

В главе изложены схемы динамического распараллеливания данной аппроксимации функций, обоснованы верхние оценки временной сложности. В приложении приводятся коды программ и результаты численного эксперимента.

На этой основе в главе строится метод варьируемого разностно-полиномиального приближения данных дифференциальных моделей с итерационным уточнением. Пусть в R_2 на произвольно фиксированном отрезке $[a, b]$ требуется приближенно решить задачу Коши для ОДУ первого порядка

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

Первоначально отрезок $[a, b]$ делится на интервалы равной длины: $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{R-1} [a_i, b_i]$, $b_i - a_i = \nabla$,

$i = \overline{0, R-1}$. При каждом i для i -го интервала задается система подынтервалов: $[a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{P-1} [x_j, x_{j+1}]$,

$P = 2^k$, $k = \{0, 1, \dots\}$. На каждом подынтервале строится интерполяционный полином Ньютона в виде (2), аппроксимирующий функцию правой части (4) $\psi_{jn}(t) \approx f(x, y)$, при этом значения в узлах интерполяции априори вычисляются по разностной схеме, например, по методу Эйлера. На этом же подынтервале

определяется первообразная $\int \psi_{jn}(t) dx = C + h \sum_{\ell=0}^n \frac{a_{j\ell}}{\ell+1} t^{\ell+1}$, $t = (x - x_j) / h$, которая при заданном значении

константы принимается в качестве первого приближения искомого решения на рассматриваемом подынтервале. Затем y в правой части (4) заменяется на полученное приближение и при той же степени n на том же подынтервале строится аппроксимирующий полученную функцию полином Ньютона, преобразованный в форму (2). Первообразная от него с тем же значением константы принимается за второе приближение, которое аналогично уточняется. В результате продолжения таких итераций достигается более высокая точность приближения решения по сравнению с полученными на входе итерационного процесса разностными приближениями. После завершения ℓ итераций на j -м подынтервале выполняется переход к $(j+1)$ -му подынтервалу, где в качестве начального значения приближения решения берется значение окончательного приближения на правой границе предыдущего подынтервала. Количество подынтервалов $P = 2^k$ и степень интерполяционного полинома n выбираются так, чтобы было минимальным значение

$$\delta_{ij}(x) = |\psi_{jn}(x) - f(x, P_j(x))|, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = \overline{0, P-1}, \quad P = 2^k, \quad [a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{P-1} [x_j, x_{j+1}], \quad (5)$$

где $\psi_{jn}(x) \approx f(x, y)$ из (4), $P_j(x) = y_j + \int_{x_j}^x \psi_{jn}(x) dx$ – полином с числовыми коэффициентами вида (2), приближающий искомое решение: $P_j(x) \approx y(x)$. Варьируемая минимизация (5) позволяет существенно снизить погрешность приближенного решения задачи (4).

Более детально, коэффициенты кусочно-полиномиальной аппроксимации вычисляются следующим образом. При каждом j подынтервал $[x_j, x_{j+1}]$ разбивается на n равноотстоящих узлов: $x_{jp} = x_j + ph$, $p = \overline{0, n}$, $h = (x_{j+1} - x_j)/n$. В каждом узле вычисляются значения $f(x_{jp}, \bar{y}_{jp})$, где $\bar{y}_{jp}$ определяется по разностному методу, например, $\bar{y}_{jp} = \bar{y}_{j(p-1)} + h \cdot f(x_{j(p-1)}, \bar{y}_{j(p-1)})$, $p = \overline{1, n}$, при этом в качестве $\bar{y}_{j0}$ берется значение на правой границе из окончательного приближения на предыдущем подынтервале: $\bar{y}_{j0} = \bar{y}_{(j-1)n}$, для начального подынтервала из (4) $\bar{y}_{00} = y_0$. Значения $f(x_{jp}, \bar{y}_{jp})$ принимаются в качестве значений в узлах интерполяции: $\bar{f}_{jp} = f(x_{jp}, \bar{y}_{jp})$, $p = \overline{0, n}$, по которым строится интерполяционный полином Ньютона степени n , приводимый к виду:

$$\psi_{jn}(x) = a_{j0} + \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} ((x - x_{j0})/h)^\ell, \quad (6)$$

где $a_{j0} = \bar{f}_{j0}$, $a_{j\ell} = \sum_{k=\ell}^n b_{jk} d_{k\ell} / k!$, $b_{jk} = \Delta^k \bar{f}_{j0}$. Полином (6) приближает производную решения задачи (4).

Фиксирование для первообразной полинома (6) значения нижнего предела и замена значения постоянной на $\bar{y}_{j0}$ определяет полином

$$P_j(x) = \bar{y}_{j0} + h \sum_{\ell=0}^n \frac{a_{j\ell}}{\ell+1} ((x - x_{j0})/h)^{\ell+1}, \quad (7)$$

который принимается за приближение искомого решения $y(x)$ на j -м подынтервале: $y(x) \approx P_j(x)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Значение полинома (7) вычисляется по схеме Горнера. Далее, на j -м подынтервале полученные полиномиальные приближения вновь уточняются по аналогии с последовательными приближениями Пикара. Аналогичное приближение решения строится на следующем подынтервале и т. д., до исчерпания интервала $[a_i, b_i]$.

Имеет место

Теорема 1. При любом выборе n , $1 \leq n \leq n_0$, $n_0 = \text{const}$, последовательность полиномов $P_j(x)$ равномерно на $[a, b]$ сходится к решению $y(x)$ задачи (4) при $k \rightarrow \infty$, где $k = \log_2 P$, P – число подынтервалов из (5). Скорость сходимости оценивается из соотношения

$$|P_j(x) - y(x)| \leq \tilde{C}(b-a) h^{n+1} 2^{-(k+1)(n+1)} (1-q)^{-1} \quad \forall x \in [a, b], \quad (8)$$

где $\tilde{C} = \text{const}$, $q = 2^{-(n+1)}$, h – шаг интерполирования полинома $P_0(x)$ на $[a_i, b_i]$, выбранный в соответствии $k = 0$, его значение не меняется с ростом k .

В главе приведены леммы, теорема и следствия, с помощью которых доказывается равномерная сходимость предложенного метода со скоростью геометрической прогрессии к решению задачи Коши для ОДУ (4) на произвольном конечном отрезке из области допустимых значений. Для корректно обоснованного применения метода достаточно двукратной дифференцируемости правой части, что отличается от условий применения явных методов Рунге-Кутты высоких порядков, на практике обеспечивает применимость для моделирования процессов с быстро меняющейся динамикой и подтверждается результатами численных экспериментов.

В случае системы ОДУ изложенные преобразования выполняются отдельно для каждого компонента решения, погрешность оценивается с помощью канонической нормы вектора.

С помощью численного эксперимента показано, что компьютерный метод варьируемого разностно-полиномиального приближения решения задачи Коши для системы ОДУ обладает малой границей погрешности применительно к моделированию процессов, описываемых жесткими, нежесткими задачами и задачами с решениями, неустойчивыми к возмущению начальных данных; при этом имеет место сравнительно невысокая трудоемкость при малой временной сложности приближенного решения. Например, для задачи Коши

$$y'_1 = x + 2x^{-1}y_1 - \sqrt{y_2}, \quad y'_2 = 2\sqrt{y_2}, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 4, \quad (9)$$

с неустойчивым в смысле Ляпунова аналитическим решением $y_1 = x + x^2$, $y_2 = (x+1)^2$ погрешности приближения решения разностными методами Рунге-Кутты 4-го порядка, Бутчера 6-го порядка, Дормана-Принса 8-го порядка и предложенным разностно-полиномиальным методом (*DiffPol*) на отрезке $x \in [1, 10]$ приводятся в табл. 1 наряду с временем работы программ.

Таблица 1

Погрешность решения задачи (9) разностными и разностно-полиномиальными методами

x	<i>Runge-Kutta 4</i>	<i>Butcher 6</i>	<i>Dormand-Prince 8</i>	<i>DiffPol</i>
	$h = 1.03 \times 10^{-4}$	$h = 1.03 \times 10^{-3}$	$h = 1.03 \times 10^{-2}$	$h \approx 1.76 \times 10^{-2}$
	$t = 202 \text{ ms}$	$t = 4 \text{ ms}$	$t = 1 \text{ ms}$	$t = 1 \text{ ms}$
2.03	8.674e-19	9.107e-18	6.072e-18	4.337e-19
3.06	0.000e+00	3.123e-17	1.908e-17	8.674e-19
...	...	...	...	...
8.21	2.082e-17	3.331e-16	1.457e-16	0.000e+00
9.24	2.776e-17	4.302e-16	1.388e-16	0.000e+00

В главе изложены разновидности варьируемого кусочно-полиномиального решения задачи Коши для систем ОДУ с разностным вычислением узловых значений при помощи явных методов Рунге-Кутты различных порядков, включая методы высших порядков. Экспериментально показано, что точность приближения при вариации параметров программы совпадает во всех данных разновидностях метода, при этом она существенно превышает точность используемых на входе разностных методов.

Приближение с помощью варьируемого разностно-полиномиального метода решения задачи Коши для системы ОДУ, помимо сравнительной точности, обладает свойствами непрерывности и непрерывной дифференцируемости в силу склейки значений полиномов на границах смежных подынтервалов, начиная с порядка гладкости правой части $n \geq 2$, что дополнительно исследовано в главе.

Таким образом, предложен инвариантный метод высокоточного разностно-полиномиального решения задачи Коши для системы ОДУ с программным выбором варьируемых параметров, который в отличие от известных аналогов характеризуется сравнительно высокой точностью непрерывного и непрерывно дифференцируемого аналитического приближения решения при условии минимизации временной сложности. На этой основе уточняются физические и химические параметры моделируемых динамических процессов, выявляются качества моделируемых процессов, не обнаруживаемые при разностном численном моделировании. Так, в дальнейшем показано, что при помощи разностно-полиномиального решения дифференциальной модели

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= 77.27(y_2 + y_1(1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)), \quad y'_2 = 77.27^{-1}(y_3 - y_2(1 + y_1)), \\ y'_3 &= 0.161(y_1 - y_3), \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2, \quad y_3(0) = 3, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

предложенной Филдом и Нойесом для моделирования колебательной реакции Белоусова-Жаботинского, на четыре и более десятичных порядка в сравнении с известными разностными методами уточнены значения амплитуд и периода колебаний концентраций реагентов автоколебательной реакции. Выявлено качество гладкости процесса изменения концентрации автокатализатора химической реакции. График функции в окрестности точки локального максимума представлен на рис. 1.

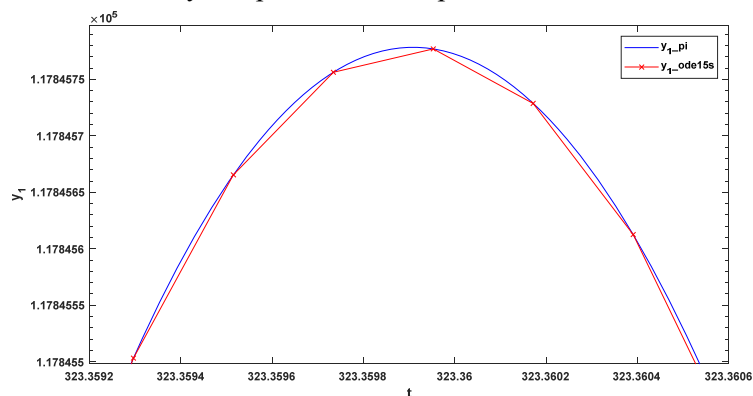


Рис. 1. Сравнение графиков изменения переменной y_1 по разностно-полиномиальному методу (y_1_pi) и с помощью функции *ode15s* (y_1_ode15s)

Обозначение y_1_ode15s соответствует приближению с помощью функции *ode15s* (MATLAB), обозначение y_1_pi соответствует разностно-полиномиальному методу.

В итоге в главе предложен метод разностно-полиномиальной обработки данных в ИВС с программным выбором варьируемых параметров для моделей периодических процессов. Метод позволяет повысить точность и уменьшить время обработки данных относительно известных методов, а также улучшить качество моделирования исследуемых процессов. Показана сходимость, дана оценка скорости сходимости предложенного метода. Для корректного применения метода достаточно двукратной дифференцируемости правой части дифференциальной системы, что положительно отличается от условий применения аналогов и улучшает качество моделирования в ИВС периодических процессов с быстро меняющейся динамикой.

В третьей главе представлена модификация разностно-полиномиального метода обработки данных с автоматизированным выбором варьируемых параметров для моделей периодических процессов, исключающая использование разностных схем. Модификация построена на основе кусочной интерполяции на временных подынтервалах правой части дифференциальной системы и интегральном приближении решения в виде алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами, использует итерационные уточнения аналогичные интегральным приближениям Пикара.

Вначале рассматривается задача Коши (4) в предположении существования и единственности решения в прямоугольной области:

$$R: \{ x_0 \leq x \leq x_{fin}; |y - y_0| \leq b; x_{fin} = \text{const}, b = \text{const} \}. \quad (10)$$

С приводимыми ниже отличиями по изложенной выше схеме выполняется кусочно-полиномиальная аппроксимация $f(x, \varphi(x))$ из (4), где $y \approx \varphi(x)$ приближается без использования разностных методов. Именно, в правую часть (4) вместо y подставляется y_0 . Функция $f(x, y_0)$ приближается полиномами вида (2) так, как если бы $u(x)$ равнялось $f(x, y_0)$. При фиксированных на выходе алгоритма значениях n и k на отрезке разбиения $[x_i, x_{i+1}]$, вначале при $i=0$, затем, аналогично, при каждом следующем i выполняется итерационное уточнение искомого приближения. Вначале первообразная от найденного полинома $P_{i(n+1)}(x) = \bar{y}(x_i) + \int_{x_i}^x \Psi_{in}(t) dx$, $t = (x - x_i)/h$, в виде $\bar{y}(x_i) + h \sum_{\ell=0}^n \frac{a_{i\ell}}{\ell+1} t^{\ell+1}$ принимается за приближение решения на данном отрезке: $y(x) \approx P_{i(n+1)}(x)$. Затем y в правой части (4) заменяется на $P_{i(n+1)}(x)$: $f(x, y) \approx f(x, P_{i(n+1)}(x))$. После замены при той же степени n на том же отрезке строится аппроксимирующая полученную функцию полином Ньютона, преобразованный в форму (2): $\Psi_{in}(t) \approx f(x, P_{i(n+1)}(x))$. От $\Psi_{in}(t)$ снова берется первообразная с тем же значением константы, затем этот полином подставляется в правую часть (4), которая аппроксимируется аналогично. Итерации

$$P_{i(n+1)}^{(\ell)}(x) = \bar{y}(x_i) + \int_{x_i}^x \Psi_{in}^{(\ell-1)}(t) dx, \quad \Psi_{in}^{(\ell)}(t) \approx f(x, P_{i(n+1)}^{(\ell)}(x)), \quad \ell=1, 2, \dots, \quad (11)$$

где $\Psi_{in}^{(0)}(t) = \Psi_{in}(t)$, $y(x) \approx P_{i(n+1)}^{(\ell)}(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, продолжают до достижения заданной малости невязки, при реализации их число ограничивается: $\ell \leq q = \text{const}$. Здесь и выше $t = (x - x_i)/h$, $i = \overline{0, P-1}$, $P = 2^k$, $k = 0, 1, \dots$. Именно после окончания итераций на $[x_i, x_{i+1}]$, при соответственном q , в качестве начального значения для отрезка $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ полагается $\bar{y}(x_{i+1}) = P_{i(n+1)}^{(q)}(x_{i+1})$.

Данным способом обрабатываются приближения на каждом отрезке из разбиения. В свою очередь весь отрезок решения задачи (4) разбит на отрезки равной длины:

$$[x_0, x_{fin}] = \bigcup_{r=0}^{M-1} [\alpha_r, \beta_r], \quad \alpha_{r+1} = \beta_r \quad \forall r = \overline{0, M-2}, \quad (12)$$

каждый отрезок $[\alpha_r, \beta_r]$ обрабатывается, как только что описано, при этом

$$[\alpha_r, \beta_r] = \bigcup_{i=0}^{P-1} [x_{ri}, x_{ri+1}], \quad r = \overline{0, M-1}, \quad P = 2^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

За начальное значение на левой границе $[x_{ri}, x_{ri+1}]$ всегда принимается конечное значение на правой границе предыдущего отрезка $[x_{ri-1}, x_{ri}]$: $y_{ri0} = P_{r(i-1)n+1}^{(q)}(x_{ri})$, $i = 1, 2, \dots, P-1$, аналогично, при переходе от $[\alpha_r, \beta_r]$ к $[\alpha_{r+1}, \beta_{r+1}]$.

Имеет место

Теорема 2. При любом n , $1 \leq n \leq n_0$, $n_0 = \text{const}$, последовательность полиномов $P_{ri\ n+1}(x)$, где i из (13), r из (12), равномерно на $[x_0, x_{fin}]$ сходится к точному решению $y(x)$ задачи (4) при $k \rightarrow \infty$. Скорость сходимости оценивается из соотношения

$$|y(x) - P_{ri\ n+1}(x)| \leq c(x_{fin} - x_0) 2^{-k(n+1)} h^{n+1} \quad \forall r = \overline{0, M-1} \wedge \forall i = \overline{0, 2^k-1} \wedge \forall x \in [x_{ri}, x_{ri+1}].$$

где $c = \max_R \max_{1 \leq n \leq n_0} \max_{\xi \in [x_0, x_{fin}]} |f^{(n+1)}(\xi, \tilde{y}(\xi))|$, h – расстояние между узлами полинома $\Psi_{r\ 0n}(t)$, интерполирующего правую часть (4) на $[\alpha_r, \beta_r]$. Значение h не зависит от r и не меняется с ростом k при разбиении $[\alpha_r, \beta_r]$ на 2^k отрезков.

В условиях данной теоремы показано равномерное на $[x_0, x_{fin}]$ приближение производной $y'(x)$ последовательностью интерполяционных полиномов $\Psi_{rin}(t)$ при $k \rightarrow \infty$.

С учетом итерационного уточнения имеет место

Теорема 3. В условиях теоремы 2 на отрезке $[x_{ri}, x_{ri+1}]$, где выполнено неравенство $|f(x, P_{ri\ n+1}^{(\ell)}(x)) - \Psi_{rin}^{(\ell)}(t)| \leq |\bar{y}(x) - P_{ri\ n+1}^{(\ell)}(x)|$, $\ell = 0, 1, \dots$, итерационное уточнение вида (11) снижает абсолютную погрешность кусочно-интерполяционных приближений решения и его производной пропорционально множителю, не превосходящему $\frac{((L+1)(\beta_r - \alpha_r))^\ell}{2^{k\ell} \ell!} \rightarrow 0$ при $\ell \rightarrow \infty$, где L – константа

Липшица, $[\alpha_r, \beta_r]$ – отрезок произвольно задаваемой длины из (12), (13). Если на $[x_{ri}, x_{ri+1}]$ выполнено соотношение $\exists \ell \wedge \exists x \in [x_{ri}, x_{ri+1}]: |\bar{y}(x) - P_{ri\ n+1}^{(\ell)}(x)| < |f(x, P_{ri\ n+1}^{(\ell)}(x)) - \Psi_{rin}^{(\ell)}(t)|$, снижение абсолютной погрешности приближения решения вследствие итерационного уточнения возможно, однако оно не достигается с необходимостью.

Следует отметить, что исследуемые кусочно-интерполяционные приближения решения задачи (4) и его производной имеют аналитический вид и непрерывны на всем отрезке интегрирования, что формально показано в главе.

Далее в главе описывается структура дискретного аналога «невязки», с помощью которой реализуется автоматический выбор степени полинома, числа отрезков разбиения и количества итераций, который инвариантно обеспечивает наибольшую точность при наименьшей временной сложности решения. Невязка, в отличие метода, описанного в главе 2, выбирается на основе приближения к модулю разности между точным решением и первообразными от аппроксимирующих правую часть (4) полиномов на отрезках с общими границами, их длина фиксируется как многократно меньшая $\beta_r - \alpha_r$ из (12), (13). На отрезке $[x_j, x]$ рассматриваемое приближение можно представить в виде

$$y(x) - y(x_j) - (P_{ri\ n+1}^{(\ell+1)}(x) - P_{ri\ n+1}^{(\ell+1)}(x_j)) \approx \int_{x_j}^x (f(x, y) - f(x, P_{ri\ n+1}^{(\ell)}(x))) dx, \quad (14)$$

где $\tilde{i}$ и i – переменные значения индекса отрезка из (13), включающего x . Определяется разность приближений к (14) на текущем и предшествующем количестве отрезков из (13):

$$\left| \int_{x_j}^x f(x, y) dx - \int_{x_j}^x f(x, P_{ri\ n+1}^{(\ell)}(x)) dx \right| \approx \Delta_M(r, k, n, \ell), \quad (15)$$

$$\Delta_M(r, k, n, \ell) = \left| (P_{kri_1\ n+1}^{(\ell)}(x) - P_{kri_2\ n+1}^{(\ell)}(x_j)) - (P_{(k-1)ri_3\ n+1}^{(\ell)}(x) - P_{(k-1)ri_4\ n+1}^{(\ell)}(x_j)) \right|,$$

где M из (12); i_1, i_2 – индексы соответственно конечного и начального отрезков, которым принадлежат x и x_j в случае 2^k отрезков (13). Для 2^{k-1} отрезков i_3, i_4 – номера конечного и начального отрезков, включающих, соответственно, x и x_j на $[\alpha_r, \beta_r]$. Для начальной пары фиксированных n и k на объединении (13) находится и запоминается наибольшее $\Delta_M(r, k, n, \ell)$, обозначаемое $\nabla_M(r, k, n, \ell)$. Затем поиск $\nabla_M(r, k, n, \ell)$ возобновляется при том же n и возрастании k на единицу в пределах $\overline{k=1, k_0}$, затем при увеличении n на единицу от начального k , $n = \overline{1, n_0}$, и т.д. Среди таких максимумов определяется минимальный по всем разбиениям на отрезки при всех вариациях степени, в соответствии со значением

которого фиксируется число отрезков 2^k и степень полинома n в границах $[\alpha_r, \beta_r]$. Погрешность минимизируется в результате данной вариации параметров.

В случае задачи Коши для системы ОДУ

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0, \quad (16)$$

где $F(x, Y) = (f_1(x, Y), f_2(x, Y), \dots, f_N(x, Y))$, $Y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x))$, $Y_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0N})$, кусочно-интерполяционное приближение и итерационное уточнение строятся для каждого уравнения системы в полной аналогии случаю одной переменной в предположении существования и единственности решения в области $R_0: \{x_0 \leq x \leq x_{fin}; \|Y - Y_0\| \leq b; x_{fin} = \text{const}, b = \text{const}\}$. Здесь и ниже используется первая каноническая норма вектора $\|Y\| = \max_{1 \leq j \leq N} |y_j|$. При этом приближения всех компонентов на шаге рассматриваются при одних и тех же значениях ℓ, k, n одновременно во всех уравнениях системы (16).

Имеет место аналог теоремы 2 о равномерной сходимости последовательности полиномов $\{P_{jri\ n+1}(x)\}_{j=1}^N$ к точному решению $Y(x)$ задачи (16) на $[x_0, x_{fin}]$ при $k \rightarrow \infty$, скорость сходимости оценивается из соотношения

$$\|Y(x) - \{P_{jri\ n+1}(x)\}_{j=1}^N\| \leq C(x_{fin} - x_0) 2^{-k(n+1)} h^{n+1} \quad \forall r = \overline{0, M-1} \wedge \forall i = \overline{0, 2^k - 1} \wedge \forall x \in [x_{ri}, x_{ri+1}],$$

где $C = \max_{R_0} \max_{1 \leq n \leq n_0} \max_{1 \leq j \leq N} \max_{\xi_j \in [x_0, x_{fin}]} |f_j^{(n+1)}(\xi_j, \tilde{Y}(\xi_j))|$.

На этой основе, аналогично теореме 3, при выполнении на отрезке $[x_{ri}, x_{ri+1}]$ неравенства

$$\left\| F(x, \{P_{jri\ n+1}^{(\ell)}(x)\}_{j=1}^N) - \{\Psi_{jri\ n}^{(\ell)}(t)\}_{j=1}^N \right\| \leq \left\| \bar{Y}(x) - \{P_{jri\ n+1}^{(\ell)}(x)\}_{j=1}^N \right\|, \quad \ell = 0, 1, \dots,$$

итерационное уточнение снижает абсолютную погрешность кусочно-интерполяционных приближений решения и его производной пропорционально множителю, не превосходящему $\frac{((\tilde{L} + 1)(\beta_r - \alpha_r))^\ell}{2^{k\ell} \ell!} \rightarrow 0$ при

$\ell \rightarrow \infty$, где $\tilde{L}$ – константа Липшица, $[\alpha_r, \beta_r]$ – отрезок произвольно задаваемой длины из (12).

В главе выполнена алгоритмизация и программная реализация метода. С помощью численного эксперимента показана вычислительная устойчивость метода, сравнительно малая погрешность приближения для различных классов задач, включая задачи с неустойчивыми решениями и жесткие задачи. При этом в отличие от известных методов предложенный кусочно-интерполяционный метод восстанавливает непрерывное и непрерывно дифференцируемое аналитическое приближение решения на произвольном конечном промежутке. В сравнении с результатами разностно-полиномиального решения задачи (16) достигнуто значительное расширение области высокоточного приближенного решения и повышение устойчивости метода к изменению параметров. Так, на основе варьируемого кусочно-интерполяционного метода получено непрерывное решение задачи (9) на отрезке $[1, 513]$ с «нулевыми» значениями нормы абсолютной погрешности в формате данных *extended*, тогда как граница погрешности приближения разностными методами, включая методы высокого порядка, на том же отрезке интегрирования характеризуется порядком 10^{-13} . В главе 5 показано, что на этой основе повышается качество моделирования динамических процессов, описываемых нежесткими задачами Коши, в том числе в планетной астрономии и астрофизике. Необходимость построения высокоточного непрерывного приближения для повышения эффективности численного моделирования большинства задач небесной механики обусловлена, в частности, неустойчивостью их решений по Ляпунову, что влечет существенное накопление погрешности приближения на длинных промежутках приближения. Это необходимо также для моделей функционирования ИСЗ и систем ИСЗ с целью разработки высокоточного программного обеспечения для определения параметров движения ИСЗ по данным наблюдений при решении задач геодинамики и космической геодезии.

Для жесткой задачи

$$y'_1 = -400(y_2 - 1) - 2y_1x, \quad y'_2 = 5(1 - 0.003y_1), \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad (17)$$

с аналитическим решением $y_1 = -1000x^2$, $y_2 = 5x(1 + x^2) + 1$ нормы абсолютной погрешности приближения на отрезке $x \in [0, 128]$, соответствующие наилучшим приближениям, полученным на основе разностных методов и с использованием рассматриваемого метода (*FPI*) представлены в табл. 2 наряду с временем работы программ. Коэффициент жесткости, определенный (согласно известной монографии Ракитского Ю.В., Устинова С.М., Черноруцкого И.Г. Численные методы решения жестких систем М.: Наука, 1979 г.)

как отношение максимального абсолютного значения собственных чисел матрицы Якоби к минимальному, для данной задачи характеризуется порядком 10^4 .

Таблица 2

Абсолютная погрешность приближения решения задачи (17)

x	<i>ode15s</i> (MATLAB)	<i>Radau</i> (SciPy)	<i>Butcher_6</i>	<i>Dormand-Prince_8</i>	<i>FPI</i>
	$t = 11\text{ ms}$	$t = 62\text{ ms}$	$t = 375\text{ ms}$	$t = 94\text{ ms}$	$t = 218\text{ ms}$
1.28	6.821e-13	9.095e-13	1.998e-15	6.772e-15	0.000e+00
2.56	5.457e-12	1.819e-12	5.684e-14	5.196e-14	6.939e-18
...	...	...	...	...	...
64.00	1.863e-08	4.657e-09	2.028e-10	5.002e-11	0.000e+00
65.28	2.421e-08	4.657e-09	2.024e-10	3.547e-11	4.547e-13
...	...	...	...	...	...
126.72	5.774e-08	2.608e-08	1.913e-09	4.284e-10	9.095e-13
128.00	5.960e-08	2.235e-08	1.881e-09	4.575e-10	0.000e+00

Функции, специализированные для решения жестких задач (функция *Radau*, реализующая метод Радо ПА 5-го порядка, функция *ode15s*, реализующая метод переменного порядка в сочетании с методом Гира), характеризуясь существенно меньшей временной сложностью, уступают в точности приближения предложенному методу на пять десятичных порядков. Дополнительно, в главе 5 приведены результаты с оценкой погрешности и временной сложности кусочно-интерполяционного решения дифференциальных моделей автоколебательных химических и биохимических реакций, характеризующихся высокой степенью жесткости.

В главе разработан алгоритм динамической коррекции начальных данных, применение которого позволяет дополнительно повысить точность кусочно-интерполяционного приближения.

Наряду с оценками временной сложности исследовались оценки трудоемкости метода. В качестве меры трудоемкости здесь и в дальнейшем выбрано общепринятое определение этой меры как количества обращений к правой части системы. В рассматриваемой главе представлена формула для оценки трудоемкости предложенного метода.

Следует заметить, что в диссертации в качестве практических приложений не рассматривались жесткие системы ОДУ большой размерности, возникающие, например, при решении уравнений теплопроводности и диффузии методом прямых. С другой стороны, представленные в работе теоретические оценки не указывают на необходимость таких ограничений. Теоретические ограничения формально возникают вследствие предположений относительно гладкости правой части системы. Однако на практике ничто не препятствует применению метода вне рамок этих ограничений, поскольку интерполировать можно любую функцию в области допустимых значений. В частности, вне таких ограничений предложенный метод положительно применялся на практике для исследования дифференциальной модели орегонатор реакции Белоусова-Жаботинского и модели Дж. Хиггинса реакции гликолиза.

Таким образом, в главе предложен метод варьируемого кусочно-интерполяционного решения задачи Коши для системы ОДУ с итерационным уточнением, не использующий на входе разностные методы. Метод построен на основе кусочной интерполяции правой части системы и интегральном приближении решения в виде алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами, с применением итераций на подынтервале, аналогичных последовательным приближениям Пикара. Метод характеризуется сравнительно малой погрешностью непрерывного и непрерывно дифференцируемого приближения решения на отрезках большой длины. Целесообразность применения метода для повышения качества численного моделирования наглядно демонстрируют результаты моделирования колебательной гетерогенной реакции окисления молекулярного водорода на поверхности никелевого или платинового катализатора. На основе кусочно-интерполяционного приближения решения моделирующей реакцию системы Чумакова-Слинько

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= k_1(1 - y_1 - y_2)^2 - k_{-1}y_1^2 - 2k_{30}e^{-\mu_3 y_2}y_1^2y_2, \\ y_2' &= k_2(1 - y_1 - y_2)^2 - k_{-2}y_2^2 - k_{30}e^{-\mu_3 y_2}y_1^2y_2 - k_{40}e^{-\mu_4 y_2 - \mu_5 y_3}y_2, \quad y_3' = \varepsilon(y_2(1 - y_3) - \alpha y_3(1 - y_1 - y_2)) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

выполнено уточнение диапазона значений константы скорости основной необратимой стадии реакции (окисления водорода по ударному механизму Или-Ридила), который соответствует автоколебательному режиму реакции. Данное уточнение повышает качество решения проблемы аккомодации тепловой энергии, выделяемой в комбинационных стадиях. Уточненные значения параметров модели:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.5, \quad k_{-1} = 0.008, \quad k_2 = 20, \quad k_{-2} = 0.02, \quad k_{30} = 100, \\ k_{40} &= 20, \quad \varepsilon = 0.0024, \quad \alpha = 7.88, \quad \mu_3 = 2, \quad \mu_4 = 7, \quad -28 \leq \mu_5 \leq -12.2732865366359. \end{aligned} \quad (19)$$

Следует отметить, что решение задачи (18), (19) со значением параметра $\mu_5 = -12.2732865366359$ при использовании решателя *ode113*, реализующего в *MATLAB* многошаговый метод Адамса-Башворта-Мултона переменного порядка (от 1 до 13), приводит к неверному результату моделирования (рис. 2 (а)), – автоколебательный характер процесса не идентифицируется, – в отличие от кусочно-интерполяционного приближения (рис. 2 (б)).

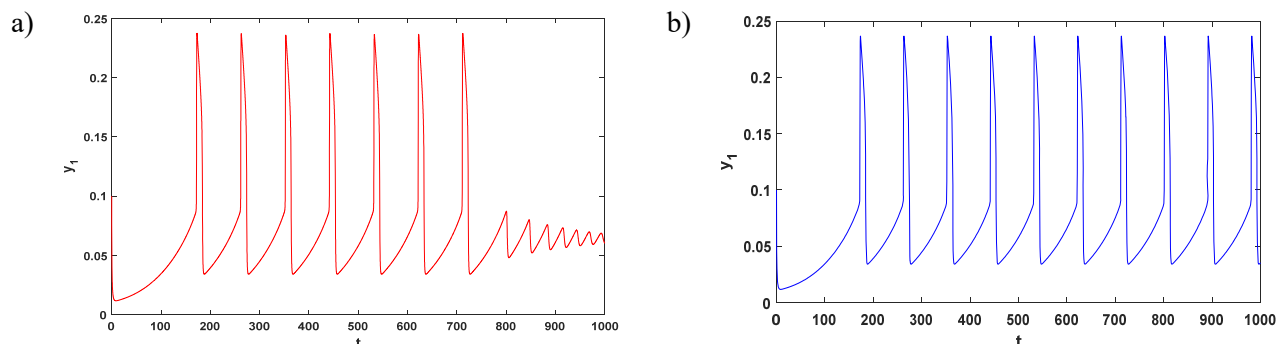


Рис. 2. Сравнение графиков изменения переменной y_1 , полученных с помощью функции *ode113* (а) и кусочно-интерполяционного метода (б)

Сравнительно высокая точность (граница абсолютной погрешности порядка 10^{-18}) и непрерывность полученного кусочно-интерполяционного приближения позволили уточнить также экстремальные значения концентраций реагентов реакции и, как следствие, амплитуды и период их колебаний. Уточнение амплитуды колебаний адсорбированных компонентов реакции в сравнении с результатами, полученными с использованием специализированного программного комплекса для численного исследования динамики колебательных химических реакций на основе полуняевных методов, составило от $\approx 0.94\%$ до $\approx 8.6\%$ в зависимости от компонентов реакции, значение периода колебаний уточнено на $\approx 0.39\%$.

Как будет показано в главах 5, 6, помимо уточнения динамики колебаний химических осцилляторов применение кусочно-интерполяционного метода позволяет повысить качество моделирования автоколебаний в задачах радиоэлектроники, а также управляемого и устойчивого периодического движения КА, динамики движения НКА по данным эфемерид.

В итоге в главе предложено и обосновано модифицированное построение кусочно-интерполяционного приближения данных с итерационным уточнением в ИВС для различных классов задач, включая задачи с неустойчивыми решениями и жесткие задачи. Приближение выполняется на основе единой программы, переменные параметры которой настраиваются в зависимости от условий задачи. Для повышения быстродействия, в частности при моделировании в реальном времени, автоматический программный подбор параметров может быть заменен пользовательским подбором и фиксированием значений параметров, что дополнительно исследовано в главе 5. Предложенная модификация отличается повышенной точностью обработки данных на больших отрезках времени и позволяет улучшать качество моделирования в ИВС периодических процессов.

В четвертой главе предложен метод варьируемой кусочно-интерполяционной обработки числовых данных модели переноса с итерационным уточнением. Построение выполнено на основе интерполяционного полинома Ньютона от двух переменных, программно преобразуемого в алгебраический полином с числовыми коэффициентами. Применяется двумерное итерационное уточнение обработанных данных, что позволяет получить кусочно гладкое аналитическое приближение движения волны в прямоугольной области.

Сначала излагается метод кусочно-интерполяционного вычисления функций двух переменных с вариацией размеров подобласти и степени полинома. В декартовой системе координат UXT кусочно-интерполяционное приближение действительной функции $u = u(x, t)$ двух действительных переменных в прямоугольной области $G = \{(x, t) \mid x \in [a, b], t \in [c, d]\}$ строится следующим образом. Область G разбивается на прямоугольные подобласти G_{ij} с пересекающимися границами:

$$G = \bigcup_{j=0}^{P_x-1} \bigcup_{i=0}^{P_t-1} G_{ij}, \quad G_{ij} = \{(x, t) \mid x \in [x_i, x_{i+1}], t \in [t_j, t_{j+1}]\}, \quad P_x = 2^{k_x}, \quad P_t = 2^{k_t}, \quad k_x, k_t \in \{0, 1, \dots\}. \quad (20)$$

Интерполяционный полином Ньютона от двух переменных в подобласти G_{ij} из (20) использует узлы с треугольным расположением:

$$\begin{array}{ccccccc}
(x_{i_0}, t_{j_n}) & & & & & & \\
(x_{i_0}, t_{j(n-1)}) & (x_{i_1}, t_{j(n-1)}) & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
(x_{i_0}, t_{j_0}) & (x_{i_1}, t_{j_0}) & \cdots & (x_{i(n-1)}, t_{j_0}) & (x_{i_n}, t_{j_0}) & &
\end{array} \quad (21)$$

При расположении узлов (21) функция интерполируется в нижней треугольной части G_{ij} , в верхней части фактически нужна экстраполяция, что учитывается в дальнейшем. Пусть произвольно задана граница ε абсолютной погрешности приближения функции $u(x, t)$. В G_{ij} интерполяционный полином Ньютона $\Psi_n^{ij}(z, w)$ строится с равноотстоящими на шаги h_x, h_t по направлениям координат узлами x_{i_ℓ}, t_{j_m} , где

$$z = (x - x_i) / h_x, \quad w = (t - t_j) / h_t, \quad (x, t) \in G_{ij}, \quad h_x = (x_{i+1} - x_i) / n, \quad h_t = (t_{j+1} - t_j) / n, \quad (22)$$

$$x_{i_\ell} = x_i + \ell h_x, \quad t_{j_m} = t_j + m h_t, \quad \ell = \overline{0, n}, \quad m = \overline{0, n - \ell}. \quad (23)$$

Искомый полином примет вид

$$\Psi_n^{ij}(z, w) = u(x_{i_0}, t_{j_0}) + \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^k \frac{\Delta_{x^s t^{k-s}}^k u(x_{i_0}, t_{j_0})}{s! (k-s)!} \prod_{\ell=0}^{s-1} (z - \ell) \prod_{m=0}^{k-s-1} (w - m), \quad (24)$$

где $\Delta_{x^s t^{k-s}}^k u(x_{i_0}, t_{j_0})$ – конечные разности k -го порядка. Степень полинома n выбирается одинаковой для всех G_{ij} и минимальной при условии

$$|u(x, t) - \Psi_n^{ij}(z, w)| \leq \varepsilon \quad \forall (x, t) \in G_{ij}, \quad i = \overline{0, P_x - 1}, \quad j = \overline{0, P_t - 1}.$$

Полином (24) с видоизменением формул Виета эквивалентно преобразуется к виду алгебраического полинома с числовыми коэффициентами

$$\Psi_n^{ij}(z, w) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=0}^{n-\ell} a_{\ell m}^{ij} z^\ell w^m. \quad (25)$$

Для вычисления $u(x, t)$, $\forall (x, t) \in G$, дешифрируются индексы G_{ij} : $i = [(x - a) / (x_{i+1} - x_i)]$, $j = [(t - c) / (t_{j+1} - t_j)]$, $x \in [x_i, x_{i+1})$, $t \in [t_j, t_{j+1})$. Индексы служат адресом выборки соответственных подобласти коэффициентов полинома (25).

Для оценки погрешности полином (25) рассматривается в эквивалентной форме

$$\Psi_n^{ij}(x, t) = u(x_{i_0}, t_{j_0}) + \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{\Delta_{x^k t^{m-k}}^m u(x_{i_0}, t_{j_0})}{h_x^k h_t^{m-k} k! (m-k)!} \prod_{q=0}^{k-1} (x - x_{iq}) \prod_{r=0}^{m-k-1} (t - t_{jr}), \quad (26)$$

узлы интерполяции определяются из (22), (23). Сначала (26) рассматривается в области G , при этом не используются индексы подобласти. С требуемыми формальными ограничениями доказывается соотношение

$$|R_G(x, t)| \leq C_0 \sum_{i=0}^{2n+1} \max_{0 \leq i_0 \leq i} h_x^{i_0} h_t^{2n-i_0+1}, \quad C_0 = \text{const}, \quad \forall (x, t) \in G, \quad \forall n \leq N_0, \quad (27)$$

где $R_G(x, t)$ остаточный член интерполяции (26), $C_0 = \max_G \left| \frac{\partial^{2n+1} u(x, t)}{\partial x^i \partial t^{2n+1-i}} \right|$, $C_0 = \text{const} \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq 2n+1$,

$\forall n \leq N_0$. Предполагается, что размеры G позволяют считать расстояния между узлами меньшими единицы при всех рассматриваемых n . Узлы являются равноотстоящими вдоль направлений осей. В главе показано, что в этих условиях

$$|R_G(x, t)| \leq C h^{2n+1}, \quad C = \text{const}, \quad (28)$$

где h пропорционально h_x и h_t с соответственными коэффициентами пропорции. Пусть теперь по этой же схеме в каждой подобласти G_{ij} построен интерполяционный полином (26). Тогда расстояния между проекциями узлов на оси координат уменьшаются соответственно в обратной пропорции $P_x = 2^{k_x}$ и $P_t = 2^{k_t}$, где k_x, k_t из (20). В (27) в тех же пропорциях соответственно уменьшаются h_x, h_t . Если выбрать $2^{k_x} = 2^{k_t} = 2^k$, то h в (28) обратно пропорционально 2^k , в результате

$$|R_{G_{ij}}(x, t)| \leq C 2^{-k(2n+1)} h^{2n+1} \quad \forall (x, t) \in G_{ij} \quad \forall i, j; \quad i = \text{const}, \quad j = \text{const}. \quad (29)$$

В (29) C , h из (28), $h < 1$, i, j из (20). Таким образом, имеет место

Лемма 2. Пусть функция $u(x, t)$ определена в G из (20), где у нее существуют и непрерывны все частные производные до порядка $2n+1$ включительно. Тогда при условии разбиения G на 2^{2k} подобластей (29) в случае $2^{k_x} = 2^{k_t} = 2^k$, кусочно-интерполяционное приближение данной функции в G с помощью полиномов вида (24), взятых в степени $2n$, может быть выполнено с абсолютной погрешностью (29), где шаги интерполяции h_x, h_t из (22) пропорциональны $h < 1$ из (28) с соответственными коэффициентами пропорции.

Рассматриваемое приближение инвариантно относительно i, j из (20), поэтому в левой части (29) можно взять максимум по всем подобластям:

$$\max_{\forall (x,t) \in G_{ij}, \forall i, j \in 0, 2^k-1} |R_{G_{ij}}(x, t)| \leq C 2^{-k(2n+1)} h^{2n+1}, \quad C = \text{const}. \quad (30)$$

Отсюда вытекает

Теорема 4. В условиях леммы 2 кусочно-интерполяционное приближение равномерно сходится к функции $u(x, t)$ в области G при $k \rightarrow \infty$ со скоростью сходимости (30).

В каждой подобласти полином (24) может быть преобразован к виду (25) со степенью $2n$ без изменения оценок (29), (30). Аналогично одномерному случаю, преобразование влечет табличный (аналитический) вид производных и первообразных. На этой основе строится кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для уравнения переноса. Вначале рассматривается задача Коши для линейного уравнения

$$u_t + a(x, t) u_x = f(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (31)$$

где $a(x, t)$, $f(x, t)$ – заданные функции, рассматриваемые в полуплоскости $\{(x, t) | x \in R, t \geq 0\}$, $\varphi(x)$ – заданная функция $x \in R$. Для построения метода приближенного решения выбрана прямоугольная область задания этих функций G из (20), объединяющая подобласти G_{ij} из (20) при $2^{k_x} = 2^{k_t} = 2^k$, областью определения $\varphi(x)$ служит основание G на оси OX . Значения a и b не конкретизируются, вместе с тем всюду ниже $c=0$, $d=T$, $t \in [0, T]$. Для анализа сходимости в главе вводятся ограничения, которые обеспечивают существование, единственность, а также устойчивость решения задачи (31) относительно возмущения начальных данных.

В G_{ij} приближенное решение строится с помощью интерполяционного полинома с итерационным уточнением, последовательно по j выполняется переход от G_{ij} к $G_{i(j+1)}$. За начальные условия в $G_{i(j+1)}$ принимается приближение из G_{ij} на смежной с $G_{i(j+1)}$ границе. В G_{00} узловые значения интерполяции задает функция $\varphi(x)$. Конкретно интерполируется $f(x, t) - a(x, t) u_x$, что дает приближение u_t . Интеграл по времени от интерполяционного полинома принимается за приближение решения, которое подставляется в выражение u_t из (31). Полученное приближение u_t снова интерполируется, и описанный процесс повторяется. На практике итерации выполняются до искомой точности приближения, абстрактно их количество предполагается неограниченным. Процесс воспроизводится в каждой подобласти до полного прохода области G .

Итерационное уточнение с учетом остаточных членов интерполяции конкретизируется следующим образом. В G_{ij}

$$\int_{t_0}^t u_t dt = \int_{t_0}^t (f(x, t) - a(x, t) u_x) dt, \quad (x, t) \in G_{ij}, \quad t_0 = t_0(i, j), \quad u(x, t_0) = \varphi_{ij}(x, t_0). \quad (32)$$

Обозначения корректируются для отличия от использованных при описании интерполяции функции. К нижним индексам полинома $\Psi_{2n}^{ij}(z, w)$ добавлен индекс $2k$ в соответствии с числом подобластей 2^{2k} , аналогичная индексация применяется к другим выражениям. Полином $\Psi_{2k2n}^{ij}(z, w)$ интерполирует не $u(x, t)$, а подынтегральную функцию правой части (32), что отмечается слитным индексом ∂u , остаточный член интерполяции c_{2k2n} оценивается из (30), –

$$\Psi_{\partial u 2k2n}^{ij}(z, w) = f(x, t) - a(x, t) \tilde{u}_x + c_{2k2n}, \quad |c_{2k2n}| \leq C 2^{-k(2n+1)} h^{2n+1}, \quad (33)$$

где z, w из (22), $\tilde{u}(x, t) \approx u(x, t)$ – приближение решения на предыдущей итерации. Аналогично (24), $\Psi_{\partial u 2k2n}^{ij}(z, w)$ преобразуется к виду (25). Решение на текущей итерации приближается интегралом от

$\Psi_{\partial u \ 2k \ 2n}^{ij}(z, w)$. Полученный полином обозначается ${}^t P_{u \ 2k \ 2n}(x, t)$ – по степени $2n$, числу подобластей 2^{2k} и приближению $u(x, t)$ путем интегрирования по t полинома $\Psi_{\partial u \ 2k \ 2n}^{ij}(z, w)$. Итерационный процесс примет вид

$$\Psi_{\partial u \ 2k \ 2n(r-1)}^{ij}(z, w) = f(x, t) - a(x, t) \frac{\partial {}^t P_{u \ 2k \ 2n(r-1)}(x, t)}{\partial x} + c_{2k \ 2n}, \quad {}^t P_{u \ 2k \ 2nr}(x, t) = {}^t P_{u \ 2k \ 2nr}(x, t_0) + \int_{t_0}^t \Psi_{\partial u \ 2k \ 2n(r-1)}^{ij}(z, w) dt + {}^t c_{u \ 2k \ 2n},$$

где ${}^t P_{u \ 2k \ 2nr}(x, t_0) = \varphi_{ij}(x, t_0)$, $r = 1, 2, \dots$, ${}^t c_{u \ 2k \ 2n} = \int_{t_0}^t c_{2k \ 2n} dt$ – остаточный член от приближения $u(x, t)$

полиномом ${}^t P_{u \ 2k \ 2nr}(x, t)$ на отдельно взятой итерации. С учетом (33) $\left| \int_{t_0}^t c_{2k \ 2n} dt \right| \leq C 2^{-k(2n+1)} h^{2n+1} (t - t_0)$,

$|{}^t c_{u \ 2k \ 2n}| \leq C 2^{-k(2n+1)} h^{2n+1} \times 2^{-k} T$. Без явного выражения $\Psi_{\partial u \ 2k \ 2n(r-1)}^{ij}(z, w)$ рассматриваемый процесс запишется в виде

$${}^t P_{u \ 2k \ 2nr}(x, t) = {}^t P_{u \ 2k \ 2nr}(x, t_0) + \int_{t_0}^t \left(f(x, t) - a(x, t) \frac{\partial {}^t P_{u \ 2k \ 2n(r-1)}(x, t)}{\partial x} \right) dt + {}^t c_{u \ 2k \ 2n}, \quad (x, t) \in G_{ij}, \quad t_0 = t_0(i, j), \quad (34)$$

где $r = 1, 2, \dots$, коэффициенты $\frac{\partial {}^t P_{u \ 2k \ 2n(r-1)}(x, t)}{\partial x}$ связаны с коэффициентами ${}^t P_{u \ 2k \ 2n(r-1)}(x, t)$ согласно аналитическому виду производной, остаточный член оценивается из соотношения

$$|{}^t c_{u \ 2k \ 2n}| \leq \tilde{C} 2^{-k(2n+2)} h^{2n+1}, \quad \tilde{C} = CT, \quad \tilde{C} = \text{const} \quad \forall (x, t) \in G_{ij}, \quad \forall G_{ij} \in G.$$

Пусть прямоугольник G_{ij} произвольно фиксирован и уравнение (32) рассматривается в нем с теми же начальными условиями на границе, с которыми выполняются итерации (34). В этом случае решение не является точным, что отмечается чертой сверху, аналогично отмечается приближающий его полином. Вводится в рассмотрение вспомогательная задача:

$$\frac{\partial u_{\Delta}(x, t)}{\partial t} + a(x, t) \frac{u_{\Delta}(x + \Delta, t) - u_{\Delta}(x, t)}{\Delta} = f_{\Delta}(x, u_{\Delta}, t), \quad u_{\Delta}(x, 0) = \varphi(x), \quad (x, t) \in G, \quad (x + \Delta, t) \in G_{\Delta}. \quad (35)$$

В главе выводится

Следствие 1. Кусочно-интерполяционное приближение решения задачи (35) с итерационным уточнением в каждой подобласти G_{ij} при любом количестве итераций является равномерно непрерывной функцией. В частности, при $k = 0$ приближение равномерно непрерывно в G , при $k > 0$ оно кусочно-непрерывно в G и сохраняет равномерную непрерывность в слое подобластей $\bigcup_{j=0}^{2^k-1} G_{ij}$ для каждого $i = \text{const}$.

При необходимых ограничениях доказывается

Лемма 3. В рассматриваемых условиях кусочно-интерполяционное приближение с итерационным уточнением решения задачи (35) равномерно сходится в области G к решению $u(x, t)$ задачи (31). При этом

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta_{\min} = \text{const}, \forall \Delta, \quad 0 < \Delta \leq \Delta_{\min}, \quad \Delta = \text{const}, \exists r_{\max} = \max_{\forall i, j: G_{ij} \in G} r(i, j, k, Q, \Delta, \varepsilon):$$

$$\max_{\forall i, j: G_{ij} \in G} \left| u(x, t) - {}^t \bar{P}_{u \ 2k \ 2n \ r}(x, t) \right|_{(x, t) \in G_{ij}} < \varepsilon \quad \forall r \geq r_{\max}.$$

Относительно равномерной и кусочной непрерывности последовательных приближений без изменений повторяется утверждение следствия 1, с той оговоркой, что оно относится к решению задачи (31).

В главе с помощью нескольких лемм и вспомогательных построений выводится соотношение:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r_{\Delta \varepsilon}: \max_{\forall (x, t) \in G_{ij}, \forall i, j: G_{ij} \in G} \left| u(x, t) - {}^t \bar{P}_{u \ 2k \ 2n \ r}(x, t) \right|_{(x, t) \in G_{ij}} \leq \varepsilon \quad \forall r \geq r_{\Delta \varepsilon}, \quad (36)$$

где $u(x, t)$ – решение уравнения (31), ${}^t \bar{P}_{u \ 2k \ 2n \ r}(x, t)$ – вычисляемое значение ${}^t P_{u \ 2k \ 2n \ r}(x, t)$ из (34); по построению $r_{\Delta \varepsilon}$ зависит от ε , Δ и $\Delta_{\varepsilon 0} = \text{const}: \forall \Delta, \quad 0 < \Delta \leq \Delta_{\varepsilon 0}, \quad \Delta = \text{const}; \quad \Delta_{\varepsilon 0}$ существует в качестве параметра условий сходимости. С учетом этих оценок доказывается

Теорема 5. Пусть в области G из (20) зафиксировано 2^{2k} подобластей. Пусть в каждой подобласти G_{ij} уравнение (32) рассматривается с теми же начальными условиями на границе с $G_{i(j-1)}$, с которыми выполняются итерации (34), при этом они сохраняются с изменением номера итерации: $\bar{u}(x, t_0) = \varphi_{ij}(x, t_0)$, $\bar{P}_{u_{2k2nr}}(x, t_0) = \varphi_{ij}(x, t_0)$, $r = 0, 1, \dots$, $t_0 = t_0(i, j)$. Тогда кусочно-интерполяционное приближение с итерационным уточнением (34) решения задачи (31) равномерно сходится в G к решению $u(x, t)$ с оценкой (36). Относительно равномерной и кусочной непрерывности последовательных приближений (34) без принципиальных изменений формулируется аналог следствия 1.

Метод переносится на квазилинейное уравнение переноса, аналоги метода могут строиться для уравнений других классов, включая интегральные и интегро-дифференциальные уравнения.

В главе представлена программная реализация изложенного метода и результаты численного эксперимента. Реализация содержит отклонения от исходного описания: интерполирование выполняется на основе (24) с переводом в форму (25) без удвоения степени полинома. Аналог (34)

$$\Psi_{\partial u_{2kn(r-1)}}^{ij}(z, w) \approx f(x, t) - a(x, t) \frac{\partial P_{u_{2kn(r-1)}}(x, t)}{\partial x}, \quad P_{u_{2knr}}(x, t) = P_{u_{2knr}}(x, t_0) + \int_{t_0}^t \Psi_{\partial u_{2kn(r-1)}}^{ij}(z, w) dt,$$

служит для итерационного уточнения. Эксперимент составили примеры тестовых задач для линейного и квазилинейного уравнения переноса, имеющих точные решения, сравнением с которыми определяется погрешность приближенных решений. Для единства условий сравнения помимо решения задачи Коши представлены также результаты эксперимента с решением начально-краевых задач в системах *MathCAD*, *Maple* и предложенным методом без его принципиальных изменений. Согласно численному эксперименту кусочно-интерполяционное приближение с итерационным уточнением решения уравнения переноса в прямоугольной области положительно отличается от известных разностных приближений сравнительно низкой погрешностью, меньшей временной сложностью и кусочной непрерывностью. Например, для начально-краевой задачи

$$u_t + u_x = -u^2 + 2e^{x+t} + 2e^{2(x+t)}, \quad u(x, 0) = e^x, \quad u(0, t) = e^t, \quad (37)$$

с аналитическим решением $u(x, t) = e^{x+t}$ погрешности решения разностными и предложенным методом в десяти равномерно распределенных точках $x \in [0, 1]$ из области $G = \{ (x, t) \mid x \in [0, 1], t \in [0, 1] \}$ при $t = 1$ даны в табл. 3, где приводится также время выполнения программ.

Таблица 3

Абсолютная погрешность приближения решения задачи (37)

(1)	8 s	$h_x \approx 8.0 \times 10^{-2}$	$h_t \approx 4.0 \times 10^{-2}$	6.5e-19	4.3e-19	8.7e-19	...	5.2e-18	3.5e-18
(2)	1 min 47 s	$h_x = 2.5 \times 10^{-4}$	$h_t \approx 1.3 \times 10^{-4}$	5.8e-07	8.6e-07	6.1e-07	...	9.9e-07	1.0e-06
(3)	51 min 14 s	$h_x = 8.0 \times 10^{-5}$	$h_t = 4.0 \times 10^{-5}$	1.4e-09	2.4e-09	3.0e-09	...	6.4e-09	7.1e-09

В табл. 3 строка (1) соответствует предложенному методу, (2) – функции *pdsolve* программы *MathCAD*, (3) – *pdsolve* программы *Maple*, во втором столбце таблицы представлено время решения на персональном компьютере. Величины шагов и выбор разностного метода в системах компьютерной математики соответствуют наилучшему приближению. В главе также представлены результаты эксперимента по моделированию процесса переноса волны на основе кусочно-интерполяционного приближения решения задачи Коши с финитными начальными условиями. Рассматривается задача Коши

$$u_t + u_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 10) \cup (30, +\infty), \\ u_0(x), & x \in [10, 30], \end{cases} \quad (38)$$

где $u_0(x) = 2^{-1} - 2^{-1} \cos(10^{-1} \pi(x-10))$, область приближения $G = \{ (x, t) \mid x \in [0, 40], t \in [0, 1] \}$. В точке с абсциссой $x = 21$, соответствующей пику волны при $t = 1$, абсолютная погрешность рекурсивной 5-точечной разностной схемы (*MathCAD*) составляет 6.15×10^{-7} , разностной схемы Кранка-Николсон (*Maple*) – 2.40×10^{-14} , предложенный метод в этой точке приближает решение с погрешностью 2.71×10^{-19} . Кусочная непрерывность приближения позволяет сравнительно адекватно отразить характер изменения решения в окрестности амплитуды (рис. 3).

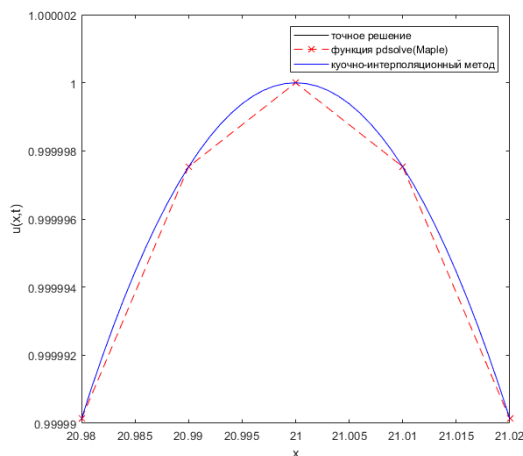


Рис. 3. Сравнение графиков точного решения задачи (38) и его приближений по кусочно-интерполяционному методу и с помощью функции *pdsolve* (Maple) в окрестности амплитуды при $t=1$

Вследствие высокой точности и непрерывности график кусочно-интерполяционного приближения визуально не отличим от графика точного решения в выбранном на рис. 3 масштабе отображения. В начале и в конце волны погрешность можно снизить, окружив эти точки узкой областью с большим количеством подобластей. Так, в точке $x=11.2$, соответствующей окрестности начала волны при $t=1$, абсолютная погрешность кусочно-интерполяционного приближения составит 6.59×10^{-14} , погрешность приближения в этой же точке по разностной схеме Кранка-Николсон – 8.29×10^{-10} .

Таким образом, в главе разработан, обоснован и программно реализован метод варьируемой кусочно-интерполяционной обработки данных модели переноса с итерационным уточнением. Дано приближенное решение задачи Коши для уравнения переноса, характеризующееся относительно высокой точностью и кусочно-непрерывным характером приближения. В случае линейного уравнения переноса метод равномерно сходится к решению в прямоугольной области. Приближение равномерно непрерывно в данной области, кусочно-непрерывно – при ее делении на подобласти. Метод распространяется на модели других классов, позволяет уточнять результаты обработки данных, повысить качество моделирования процесса переноса. Представлены аналоги предложенного метода обработки данных для моделей на основе интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

В **пятой главе** разработан комплекс программ обработки данных в ИВС на основе предложенного метода для моделей жестких и нежестких задач, включающий автоматический и пользовательский выбор параметров для адаптации к классам моделей. С помощью комплекса выполнено моделирование периодических автоколебательных реакций, автоколебаний в задачах радиоэлектроники. Представлен комплекс программ и выполнено моделирование в ИВС движения КА, рассчитано уточненное время вывода КА на устойчивую периодическую орбиту. Выполнено моделирование возмущенного движения ИСЗ, выведенного на низкую околоземную орбиту. Для повышения качества программной обработки данных моделей выполнено построение библиотеки стандартных программ и вычисления специальных функций в ИВС на основе кусочно-интерполяционного метода. Обработка данных использует многообразие методов, в числе которых вычисление интеграла. Разработанный кусочно-интерполяционный метод используется для приближенного вычисления интеграла. Коэффициенты квадратурных формул не зависят от интегрируемой функции, отрезка интегрирования, сохраняются в разделе констант программы. Программный интерфейс стандартизируется до задания интегрируемой функции, отрезка интегрирования (как вариант может включать степень полинома и число подынтервалов). Метод распространяется на приближение первообразной функции. Одновременно с минимизацией погрешности минимизируется время вычисления интегралов и первообразных. Предложенный комплекс программ позволяет выявить неизвестные физические, химические, механические и другие свойства моделируемого процесса, а также существенно уточнить параметры модели.

Для рассматриваемой в начале главы химической реакции Белоусова-Жаботинского на основе модели «орегонатор» (10) применение кусочно-интерполяционного метода позволило получить высокоточные значения для моделируемых концентраций реагентов автоколебательной реакции в произвольный момент времени. На этой основе выявлены новые экстремальные значения концентраций реагентов и как следствие уточнены значения амплитуд, периода колебаний, критического значения концентрации реагента, соответствующего смене химического процесса, преобладающего в реакции.

Приближенные значения амплитуд колебаний компонентов системы (10), полученные на основе разностных и кусочно-интерполяционного методов, представлены в табл. 4 наряду с погрешностью их приближения.

Таблица 4

Сравнение приближенных значений амплитуд релаксационных автоколебаний в системе (10)

	A_{y_1}	A_{y_2}	A_{y_3}	ΔA
(1)	117844.777195366	1768.694083568	31262.838420083	$4.2 \times 10^{-7} \leq \Delta A \leq 2.1 \times 10^{-4}$
(2)	117844.77840133064	1768.6948109623268	31262.838420303917	$8.6 \times 10^{-6} \leq \Delta A \leq 4.5 \times 10^{-4}$
(3)	117844.777834722	1768.69484279637	31262.8384193544	$1.5 \times 10^{-10} \leq \Delta A \leq 9.6 \times 10^{-7}$
(4)	117844.77783562320220	1768.694842796521840	31262.8384203155070	$3.0 \times 10^{-14} \leq \Delta A \leq 2.0 \times 10^{-13}$

В строке (1) представлены значения, полученные с помощью функции *ode15s* (MATLAB), в строке (2) – функции *Radau* (SciPy), в строке (3) – метода Дормана-Принса 8-го порядка аппроксимации, в строке (4) представлены значения, полученные на основе кусочно-интерполяционного метода. В столбце ΔA даны границы абсолютной погрешности приближения амплитуд. Значение периода изменения концентраций реагентов, полученное по методу Гира: $T = 302.9$, на основе предложенного метода значение того же периода: $T = 302.85804$. Вследствие непрерывного и непрерывно дифференцируемого кусочно-интерполяционного приближения решения задачи (10) достигается сравнительно точная визуализация процесса изменения концентраций реагентов реакции и фазовых портретов системы. Это позволило выявить качественные характеристики моделируемого процесса, которые не идентифицируются разностными методами численного моделирования (рис. 1).

В главе с применением кусочно-интерполяционного метода выполнено численное моделирование релаксационных автоколебаний в системе гликолиза на основе модели Дж. Хиггинса,

$$y'_1 = 1 - y_1 y_2, \quad y'_2 = \alpha y_2 (y_1 - (1 + \beta) / (y_2 + \beta)), \quad \alpha = 100, \quad \beta = 10, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.001, \quad (39)$$

характеризующейся высокой степенью жесткости. Получены уточненные (на пять десятичных порядков) значения для моделируемых концентраций реагентов автоколебательной реакции в произвольный момент времени. Значения канонической нормы абсолютной погрешности приближения решения задачи (39) представлены в табл. 5 наряду с временем работы программ.

Таблица 5

Абсолютная погрешность и время приближения решения задачи (39)

t	<i>ode15s</i> (MATLAB)	<i>Dormand-Prince 8</i>	<i>FPI</i>
	$t = 15 \text{ s } 160 \text{ ms}$	$t = 128 \text{ ms}$	$t = 2 \text{ s } 304 \text{ ms}$
0.2	3.329e-15	8.782e-18	1.084e-18
0.4	1.842e-13	1.362e-17	1.084e-19
...	...	...	...
17.0	6.945e-08	8.385e-13	9.714e-17
17.2	8.033e-08	1.099e-12	3.036e-18
...	...	...	...
19.8	3.025e-10	2.855e-15	8.131e-20
20.0	3.025e-10	2.861e-15	9.758e-19

На этой основе в главе получены уточнения физико-химических параметров релаксационных автоколебаний в системе гликолиза, выявлены новые качественные характеристики процесса изменения концентраций реагентов.

Как отмечалось в главах 2, 3, предложенный кусочно-интерполяционный метод не является специально созданным для жестких задач и сохраняет инвариантность для различных классов задач. Так, именно единая программная реализация метода позволила, как было показано выше, повысить качество численного моделирования гетерогенной реакции окисления молекулярного водорода на поверхности никелевого или платинового катализатора при решении нежесткой задачи Коши (18), (19). Конфигурация и устойчивость предельного цикла при уточненных значениях параметров показаны на рис. 4 (b), неверный результат моделирования при использовании решателя *ode113* (MATLAB) – на рис. 4 (a).

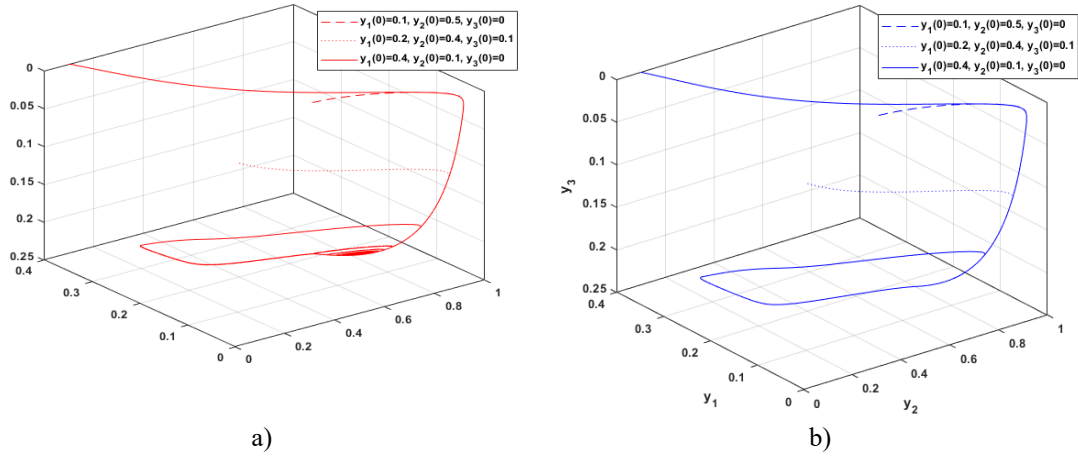


Рис. 4. Фазовый портрет системы (18), (19) при $\mu_5 = -12.2732865\ 366359$, построенный по методу Адамса-Башиворта-Мултона переменного порядка (а) и на основе кусочно-интерполяционного приближения (б)

Далее в главе на основе кусочно-интерполяционного метода выполняется уточнение численного моделирования класса колебательных динамических процессов, возникающих в задачах радиоэлектроники, баллистико-навигационного обеспечения полетов космических аппаратов, расчета динамики возмущенного движения искусственных спутников Земли. Детализированное описание процессов и характера уточнения параметров моделей приводится непосредственно ниже.

Несмотря на различия предметных областей все рассматриваемые в главе процессы объединяются принадлежностью классу автоколебательных систем.

В начале рассматривается дифференциальная модель электрического равновесия автогенератора с внутренней обратной связью, представленной в виде: $u' = G(u - ku^3/3)/C - i/C$, $i' = u/L$, $L=1$, $C=1$, $G=4$, $k=1$, $u_0=1$, $i_0=4$, соответствующем релаксационному характеру автоколебаний. Кусочно-интерполяционное приближение решения моделирующей дифференциальной системы выполнено на интервале $t \in [0, 100]$ с абсолютной погрешностью, не превышающей порядка 10^{-18} . В результате уточнена динамика изменения напряжения на контуре и тока индуктивного элемента автогенератора. На семь и более десятичных порядков в сравнении с результатами разностных методов уточнены значения амплитуды и периода релаксационных автоколебаний. Уточнены идентификация периодичности колебаний и непосредственно характер идентичности амплитуд (рис. 5 (б)).

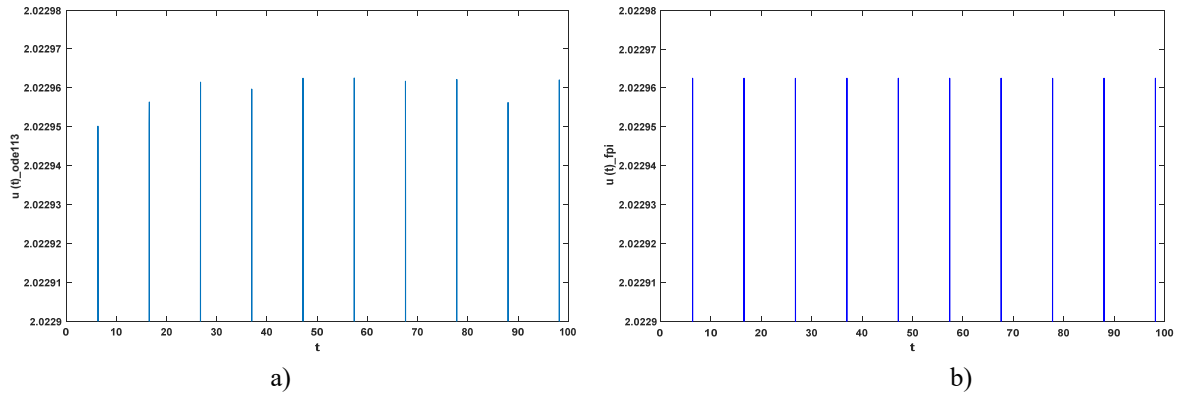


Рис. 5. Динамика изменения значений напряжения на контуре автогенератора, вычисленная с помощью функции `ode113` (MATLAB) (а) и с помощью кусочно-интерполяционного метода (б)

Далее, в главе выполняется численное моделирование движения космического аппарата с управлением при помощи «малой тяги», описываемого посредством дифференциальной модели

$$\dot{r} = V_r, \quad \dot{V}_r = \frac{V_\theta^2}{r} - \frac{h^2}{r^2 p} + U_r, \quad \dot{\theta} = \frac{V_\theta}{r}, \quad \dot{V}_\theta = -\frac{V_r V_\theta}{r} + U_\theta, \quad (40)$$

где $U_r = \frac{h^2}{pr^2} - \frac{(\omega_2 + h)^2}{pr^2} - \frac{\Phi}{p} (r \dot{\omega}_1(t) + e \omega_2 \sin \theta)$, $U_\theta = -\frac{\omega_2}{r} \Phi$ – законы управления, обеспечивающие

устойчивое орбитальное движение КА, $\omega_1 = r(1 + e \cos \theta) - p = 0$, $\omega_2 = r^2 \dot{\theta}(t) - h = 0$ – законы Кеплера, $\Phi = h/r^2$, на промежутке $[0, 2 \times 10^6]$ при начальных условиях $r(0) = p/(1 + e)$, $V_r(0) = eh/p$, $\theta(0) = 0$, $V_\theta(0) = 0$, $p = 36000$, $e = 0.5$, $T = 24$, $h = 2\pi p^2 T^{-1} (1 - e^2)^{-3/2}$. На основе кусочно-интерполяционного решения системы (40) получено непрерывное и непрерывно дифференцируемое приближение траектории

полета КА с управлением при помощи «малой тяги». Абсолютная погрешность приближения не превышает 10^{-14} на всем промежутке интегрирования. Параметры эллиптической орбиты устойчивого движения КА рассчитаны с точностью порядка 10^{-13} . В сравнении с разностными методами высокого порядка достигается уточнение траектории движения и параметров орбиты на 5 десятичных порядков. При этом время кусочно-интерполяционного приближения решения дифференциальной модели на персональном компьютере составило 531 ms , что в сравнении с временем разностного приближения по методу Дормана-Принса 8-го порядка аппроксимации ($44\text{ s } 810\text{ ms}$) меньше на восемь десятичных порядков. Такое быстроедействие особенно важно для баллистико-навигационного обеспечения полетов КА в режиме реального времени. В частности уточнено время ($t = 1.123 \times 10^6$), необходимое для вывода космического аппарата на устойчивую эллиптическую орбиту с периодом $T = 86400\text{ s}$ (рис. 6 справа), при управлении, соответствующем внешнему воздействию гравитационных сил.

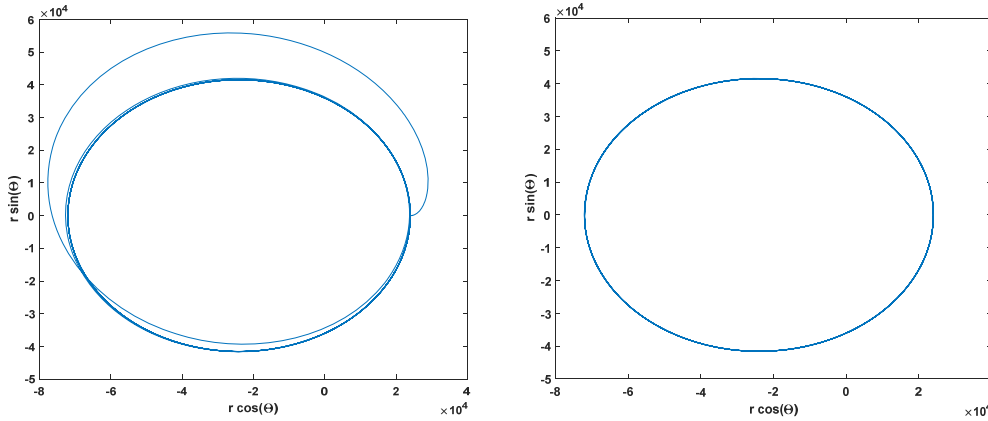


Рис. 6. Траектория движения КА в плоскости орбиты, полученная на основе кусочно-интерполяционного решения задачи (40) при $t \in [0, 2 \times 10^6]$ (слева), при $t \in [1.123 \times 10^6, 2 \times 10^6]$ (справа).

Сокращение времени расчета устойчивой орбиты КА влечет сокращение расхода топлива на коррекцию орбиты. Получение наиболее точных значений параметров снижает риск ошибки вывода на орбиту.

Помимо того в главе исследована математическая модель, учитывающая основные возмущения, оказывающие влияние на движение КА. С целью повышения точности численного моделирования устойчивого орбитального движения КА применялся кусочно-интерполяционный метод. Выполнено численное моделирование возмущенного движения итальянского геодезического спутника LARES, выведенного на низкую околоземную орбиту. Дифференциальные уравнения возмущенного движения ИСЗ с учётом зональных гармоник геопотенциала имеют вид:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mu \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \delta \ddot{\mathbf{x}}_{J_2} + \delta \ddot{\mathbf{x}}_{J_3} + \delta \ddot{\mathbf{x}}_{J_4}, \quad (41)$$

где μ – гравитационная постоянная, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор положения ИСЗ в геоцентрической равноденственной прямоугольной системе координат, $\delta \ddot{\mathbf{x}}_{J_2}$, $\delta \ddot{\mathbf{x}}_{J_3}$ и $\delta \ddot{\mathbf{x}}_{J_4}$ – возмущающие ускорения от второй, третьей и четвертой зональных гармоник. Приближенное решение системы (41) строилось с начальными значениями скорости и геоцентрических координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2609529.0721402253, \quad x_2 = -7369242.879058394, \quad x_3 = 106.34893915203872, \\ \dot{x}_1 &= 2360.4002869474456, \quad \dot{x}_2 = -829.8446403508121, \quad \dot{x}_3 = 6692.7567793414635. \end{aligned} \quad (42)$$

Кусочно-интерполяционное приближение было выполнено на интервале $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$, длиной $\Delta t = 86400\text{ s}$, соответствующем ≈ 12.5 виткам спутника. Результат был получен с следующими значениями абсолютной погрешности:

$$\Delta x_1 \approx 1.2 \times 10^{-11}, \quad \Delta x_2 \approx 1.4 \times 10^{-11}, \quad \Delta x_3 \approx 2.7 \times 10^{-11}, \quad \Delta \dot{x}_1 \approx 2.2 \times 10^{-14}, \quad \Delta \dot{x}_2 \approx 4.6 \times 10^{-14}, \quad \Delta \dot{x}_3 \approx 9.8 \times 10^{-15},$$

что практически совпадало с точностью представления начальных данных. При этом время решения составило 984 ms . С другой стороны, разностное приближение решения этой же задачи с помощью метода Адамса-Башворта-Мултона (*ode113 (MATLAB)*) характеризуется значениями абсолютной погрешности

$$\Delta x_1 \approx 4.4 \times 10^{-6}, \quad \Delta x_2 \approx 1.6 \times 10^{-6}, \quad \Delta x_3 \approx 1.3 \times 10^{-5}, \quad \Delta \dot{x}_1 \approx 4.1 \times 10^{-9}, \quad \Delta \dot{x}_2 \approx 1.2 \times 10^{-8}, \quad \Delta \dot{x}_3 \approx 2.6 \times 10^{-11}$$

при времени решения 111 ms . Применение специализированного метода для высокоточного численного моделирования в области небесной механики, интегратора Гаусса-Эверхарта 19-го порядка, позволило получить приближение решения с погрешностью

$\Delta x_1 \approx 2.9 \times 10^{-9}$, $\Delta x_2 \approx 1.1 \times 10^{-9}$, $\Delta x_3 \approx 8.2 \times 10^{-9}$, $\Delta \dot{x}_1 \approx 2.654 \times 10^{-12}$, $\Delta \dot{x}_2 \approx 7.5 \times 10^{-12}$, $\Delta \dot{x}_3 \approx 5.8 \times 10^{-14}$
при времени решения $12s\ 187ms$.

Таким образом, с помощью кусочно-интерполяционного метода выполнено уточнение численного моделирования возмущенного движения геодезического спутника LARES, выведенного на низкую околоземную орбиту. В сравнении с разностным методом Адамса-Башворта-Мултона уточнение составило ≈ 5 десятичных порядков при незначительном повышении времени решения. В сравнении с результатами моделирования на основе интегратора Гаусса-Эверхарта 19-го порядка уточнение составило ≈ 2 десятичных порядка при меньшем на порядок времени расчета.

Сравнительно высокая точность и непрерывность достигнутого приближения при малой временной сложности дают достаточно точные координаты ИСЗ в любой текущий момент времени. Это необходимо, в частности, при измерениях с помощью лазерного дальномера от пункта наблюдения до ИСЗ. Кроме того, можно отметить, что своевременный и наиболее точный расчет возмущения орбиты позволяет вовремя выполнить коррекцию и избежать аварийного схода КА с орбиты.

В аспекте сравнения целесообразно заметить, что метод Гаусса-Эверхарта адаптирован специально для решения задач небесной механики, в частности, механизм выбора величины шага интегрирования осуществлен с учетом специфики плоской задачи двух тел. Для других задач, в частности, описанных выше, метод не дает такой эффективности. В то же время предложенный кусочно-интерполяционный метод не специализируется на решении задач небесной механики, оставаясь инвариантным для различных классов задач, включая жесткие.

Помимо приближенного решения дифференциальных систем процесс численного моделирования требует вычисления множества разнообразных величин, описываемых стандартными и специальными функциями, производными, определенными и несобственными интегралами. Точность и скорость их вычисления влияет на время и точность численного моделирования в целом. Так, применение аналитических моделей для вычисления положения и скорости спутника на околоземной орбите приводит к необходимости в режиме реального времени с высокой точностью рассчитывать значения тригонометрических и гиперболических функций. Ряд задач небесной механики приводит к необходимости быстрого и точного вычисления специальных функций, в частности, при разложении координат эллиптического движения в тригонометрические ряды используются функции Бесселя, при исследовании движения ИСЗ – функции наклона и функции эксцентриситета. В целом это обуславливает необходимость разработки инвариантного быстродействующего метода выполнения различных вычислительных процедур для рассматриваемых задач численного моделирования. Поскольку такой метод апробирован на решении дифференциальных уравнений, естественно его проецировать на вычисление функций, производных и интегралов. Разработка и исследование искомого метода составляет дальнейшее содержание главы.

В основу разработки положено кусочно-интерполяционное приближение функций одной действительной переменной. Используются полиномы Лагранжа и Ньютона с алгебраическим восстановлением коэффициентов полинома по его корням. Метод является инвариантным относительно вида функции и диапазона независимой переменной, характеризуется высокой точностью приближения (порядка 10^{-20}) и одновременно малой временной сложностью. Для подкласса повторяющихся функций временная сложность сконструированного базового алгоритма измеряется числом шагов схемы Горнера. В главе рассмотрены различные варианты хранения коэффициентов интерполирующих полиномов, дан алгоритм считывания. Метод применяется для приближения подынтегральных функций, что влечет реализацию формул Ньютона-Котеса для произвольной степени интерполяционного полинома. На промежутках стандартной для обработки данных длины достигается нулевая граница погрешности вычисления интеграла. Метод модифицируется для приближения первообразной с абсолютной погрешностью порядка 10^{-19} . Метод также применяется к вычислению производных функций и позволяет вычислять производные с точностью до 10^{-16} .

Для интерполяции функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, рассматривается полином Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n (x - x_r) / \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n (x_j - x_r) \quad (43)$$

с равноотстоящими узлами $x_i \in [a, b]$, $i \in \overline{0, n}$, $x_{i+1} - x_i = h$, $i \in \overline{0, n-1}$, $h = (b - a)n^{-1}$, который может быть представлен в виде

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n (t - r) / (j - r), \quad t = (x - x_0)h^{-1}. \quad (44)$$

Числители из (44) переводятся в форму полиномов с целочисленными коэффициентами, что делает возможным аналитическое выражение первообразных, производных и организацию итераций в правых частях ОДУ. Пусть числитель произведения из (44) записан в виде $P_{nj}(t) = \prod_{r=0}^{n-1} (t - t_r)$, где роль корней полинома играют последовательные целые числа, среди которых исключается j : $t_r = r$, если $r < j$, $t_r = r + 1$, если $r \geq j$. Следующий алгоритм восстанавливает коэффициенты полинома по его корням (глава 2):

$$\begin{aligned} d_{kk} &= d_{(k-1)(k-1)}, \quad d_{k(k-\ell)} = d_{(k-1)(k-\ell-1)} - d_{(k-1)(k-\ell)} t_{k-1}, \quad \ell = \overline{1, k-1}, \\ d_{k0} &= -d_{(k-1)0} t_{k-1}, \quad k = \overline{2, n}, \quad d_{11} = 1, \quad d_{10} = -t_0, \end{aligned} \quad (45)$$

получится полином $P_{nj}(t) = d_{0j} + d_{1j}t + d_{2j}t^2 + \dots + d_{nj}t^n$ с целочисленными коэффициентами. Коэффициенты могут быть вычислены априори и храниться в памяти компьютера как константы, не зависящие от интерполируемой функции, от диапазона и расположения её аргумента, причем это можно сделать для любого j и для всех степеней полинома n в априори заданных границах. Знаменатель в (44) отличается от числителя тем, что в нем $t = j$. В результате полином примет вид

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \frac{d_{0j} + d_{1j}t + d_{2j}t^2 + \dots + d_{nj}t^n}{d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \dots + d_{nj}j^n}, \quad (46)$$

где $t = (x - x_0)h^{-1}$. Числитель и знаменатель в (46) вычисляется с помощью схемы Горнера. В принятых обозначениях (46) можно представить в виде

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^n f(x_j) P_{nj}(t) / P_{nj}(j), \quad t = (x - x_0)h^{-1}. \quad (47)$$

Если вычислить коэффициенты D_ℓ при равных степенях в (47), то

$$P_n(t) = \sum_{\ell=0}^n D_\ell t^\ell, \quad t = (x - x_0)h^{-1}. \quad (48)$$

Приближение $f(x) \approx P_n(t)$ согласно (47), (48) влечет две разновидности приближения производных:

$$f'(x) \approx P'_n(x) = h^{-1} \sum_{j=0}^n f(x_j) \frac{d_{1j} + 2d_{2j}t + \dots + (n-1)d_{nj}t^{n-1}}{d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \dots + d_{nj}j^n}, \quad (49)$$

$$f'(x) \approx P'_n(x) = h^{-1} P'_n(t) = h^{-1} \sum_{\ell=1}^n \ell D_\ell t^{\ell-1}, \quad (50)$$

t из (48). На практике (49) несколько точнее (50). Если построение (47) – (50) применяется на малых подынтервалах с общими границами разбиения

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^{p-1} [a_i, b_i], \quad b_i - a_i = (b - a)p^{-1}, \quad p = 2^k, \quad k \in N, \quad (51)$$

то точность приближения возрастет: функция и интеграл будут приближаться с точностью до $10^{-20} - 10^{-19}$, производная – с точностью $10^{-16} - 10^{-15}$. Видоизменения (47), (48) формально совпадают между собой и с полиномом (43) при условии, что на одном и том же отрезке узлы одинаковы, одинаковы степени полиномов и интерполируется одна и та же функция. В этих же условиях все три полинома совпадают с интерполяционным полиномом Ньютона. Для последнего в этом случае $\forall k \geq 0$ справедливо соотношение, аналогичное (3) (глава 2):

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} [a_i, b_i], \quad |f(x) - \Psi_{in}(t)| \leq c 2^{-k(n+1)} h^{n+1} \quad \forall i = \overline{0, 2^k-1}, \quad \forall x \in [a_i, b_i], \quad (52)$$

где $u(x)$ заменяется на $f(x)$ с сохранением предположений леммы 1. Здесь $\Psi_{in}(t)$ – интерполяционный полином Ньютона для интерполирования вперед на подынтервале $[a_i, b_i]$, $t = (x - a_i)h_i^{-1}$, h_i – шаг интерполяции на $[a_i, b_i]$, h – шаг интерполяции полинома $\Psi_{0n}(t)$ на $[a, b]$ (при $k = 0$), поэтому $h = (b - a)n^{-1}$, $c = \max_{[a, b]} \max_{1 \leq n \leq n_0} |f^{(n+1)}(x)|$, $n_0 = \text{const}$, $c = \text{const}$. С соответственным переобозначением формулы (1) при каждом i из (52)

$$\Psi_{in}(t) = f(x_{i_0}) + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta^j f_{i_0}}{j!} \prod_{r=0}^{j-1} (t-r), \quad t = (x-a_i)h_i^{-1}, \quad (53)$$

узлы интерполяции $x_{ij} \in [a_i, b_i]$, $j \in \overline{0, n}$, $x_{i(j+1)} - x_{ij} = h_i$, $h_i = (b_i - a_i)n^{-1}$, $j \in \overline{0, n-1}$, $\Delta^j f_{i_0}$ – конечная разность j -го порядка при $x_{i_0} = a_i$, $i = \overline{0, p-1}$, p из (51). С учетом (52) последовательность полиномов $\Psi_{in}(t)$ равномерно сходится к $f(x)$ на $[a, b]$, если $k \rightarrow \infty$. Эти утверждения и (52) сохраняются для всех рассматриваемых видоизменений интерполяционных полиномов Лагранжа и Ньютона. В частности, для полиномов Лагранжа $P_{in}(t)$ выполнено соотношение

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} [a_i, b_i], \quad |f(x) - P_{in}(t)| \leq c 2^{-k(n+1)} h^{n+1} \quad \forall i = \overline{0, 2^k-1}, \quad \forall x \in [a_i, b_i], \quad (54)$$

где $P_{in}(t)$ – полином вида (47), построенный на $[a_i, b_i]$, $t = (x-a_i)h_i^{-1}$, $h_i = (b_i - a_i)n^{-1}$ – шаг интерполяции, $h = (b-a)n^{-1}$. В данном случае

$$P_{in}(t) = \sum_{j=0}^n f(x_{ij}) P_{nj}(t) / P_{nj}(j), \quad x \in [a_i, b_i], \quad t = (x-a_i)h_i^{-1},$$

аналогично, полином (48) примет вид

$$P_{in}(t) = \sum_{\ell=0}^n D_{i\ell} t^\ell, \quad x \in [a_i, b_i], \quad t = (x-a_i)h_i^{-1}. \quad (55)$$

Как отмечалось, (53) на каждом подынтервале также можно преобразовать к виду алгебраического полинома. Для этого преобразуется $\Psi_j(t) = \prod_{r=0}^{j-1} (t-r)$: $t_r = r$, $r \leq j-1$, согласно (45) получится

$\Psi_j(t) = \tilde{d}_{0j} + \tilde{d}_{1j}t + \tilde{d}_{2j}t^2 + \dots + \tilde{d}_{jj}t^j$. С умножением на $\Delta^j f_{i_0} / j!$ (53) примет развернутую форму:

$$\Psi_{in}(t) = f(x_{i_0}) + \sum_{j=1}^n (c_{0j} + c_{1j}t + c_{2j}t^2 + \dots + c_{jj}t^j), \quad x \in [a_i, b_i], \quad t = (x-a_i)h_i^{-1}. \quad (56)$$

С приведением подобных в (56) полином примет вид

$$\Psi_{in}(t) = \sum_{j=0}^n C_{ij} t^j, \quad x \in [a_i, b_i], \quad t = (x-a_i)h_i^{-1}. \quad (57)$$

В главе представлена программная реализация описанных алгоритмов, сопоставляется применение полиномов Лагранжа и Ньютона в рамках кусочной интерполяции функций библиотеки стандартных программ, их композиций, специальных функций. В целом результаты аналогичны и характеризуются границей абсолютной погрешности $10^{-20} - 10^{-19}$. Отрезок $[a, b]$ из (51) можно сдвигать на произвольную величину с такой же границей погрешности: кусочная интерполяция не требует редукции аргумента к основному промежутку. Точность численного дифференцирования функций с применением предложенных схем на основе (49), (50) характеризуется значениями порядка $10^{-16} - 10^{-15}$.

Непосредственно из (47), (48), (51) вытекают формулы приближенного вычисления интегралов. С разбиением (51)

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx, \quad \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx \approx \int_{a_i}^{b_i} P_{in}(x) dx, \quad (58)$$

где $P_{in}(x)$ – полином (46), построенный на подынтервале $[a_i, b_i]$:

$$P_{in}(t) = \sum_{j=0}^n f(x_{ij}) (D_{0j} + D_{1j}t + D_{2j}t^2 + \dots + D_{nj}t^n), \quad x \in [a_i, b_i], \quad t = (x-a_i)h_{pn}^{-1}, \quad (59)$$

где $D_{\ell j} = d_{\ell j} / (d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \dots + d_{nj}j^n)$, $\ell \in \overline{0, n}$; $h_{pn} = (b-a) / p / n$ – одинаковый на всех подынтервалах шаг интерполяции. Отсюда выводится приближение

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)p^{-1}n^{-1} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^n c_{nj} f(x_{ij}), \quad (60)$$

где $c_{nj} = D_{0j}n + 2^{-1}D_{1j}n^2 + 3^{-1}D_{2j}n^3 + \dots + (n+1)^{-1}D_{nj}n^{n+1}$ зависит от степени интерполяционного полинома и от номера узла интерполяции, но не зависит от номера подынтервала и от интегрируемой функции.

Коэффициенты c_{nj} могут быть вычислены априори, быть хранимыми константами для вычисления интеграла от произвольной функции. В частности c_{nj} можно сохранять в разделе описаний констант программы и непосредственно использовать в разделе инструкций программы вычисления интегралов.

Имеет место

Теорема 6. На основе кусочной интерполяции интегрируемой функции с помощью полиномов Лагранжа интеграл вычисляется из (60), где $f(x_{ij})$ – значение функции в j -м узле интерполяции на i -м подынтервале из (51), коэффициенты и параметры определяются из (45), (59).

Если на каждом отрезке из (58) $f(x)$ вычисляется с погрешностью (54), где $h = (b-a)n^{-1}$, $b_i - a_i = (b-a)2^{-k}$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{2^k-1} \int_{a_i}^{b_i} P_{in}(x) dx \right| \leq c 2^{-k(n+1)} (b-a)^{n+2} / n^{n+1}. \quad (61)$$

Если $k \rightarrow \infty$, то $c 2^{-k(n+1)} (b-a)^{n+2} / n^{n+1} \rightarrow 0$. Формулу (60) можно интерпретировать как разновидность формул Ньютона-Котеса. Аналогичный подход реализуется и для полинома в форме (48). Однако предпочтительна именно форма (47) как основа получения (60). Аналогичное вычисление интеграла на основе полинома Ньютона выполнено для (56). С этой целью $P_{in}(x)$ в (58) заменяется на $\Psi_{in}(t)$ из (47) и выводится формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) p^{-1} n^{-1} \sum_{i=0}^{p-1} \left(n f(x_{i0}) + \sum_{j=1}^n \Delta^j f_{i0} c_{Nnj} \right), \quad (62)$$

где $c_{Nnj} = c_{0j} n + 2^{-1} c_{1j} n^2 + 3^{-1} c_{2j} n^3 + \dots + (j+1)^{-1} c_{jj} n^{j+1}$, $c_{\ell j} = d_{\ell j} / j!$, $\ell \in \overline{0, j}$, $j \in \overline{1, n}$. При этом c_{Nnj} зависят от степени интерполяционного полинома, от номера узла интерполяции, но не зависят от номера подынтервала и вида функции. Эти коэффициенты вычисляются априори, записываются в память компьютера (в раздел описания констант программы), применяются для вычисления интеграла от произвольной функции. Поскольку для интерполяционного полинома Ньютона выполнено (52), то, аналогично (61), погрешность (62) оценивается из неравенства

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{2^k-1} \int_{a_i}^{b_i} \Psi_{in}(t) dx \right| \leq c 2^{-k(n+1)} (b-a)^{n+2} / n^{n+1}.$$

Приведенные в главе примеры показывают инвариантное вычисление интегралов от композиций стандартных функций с точностью $10^{-20} - 10^{-19}$, в частности, с данной точностью вычисляется интеграл от быстро осциллирующих функций.

Изложенное расширение схем кусочной интерполяции применяется к решению задачи Коши для ОДУ (4) с сохранением базовых шагов алгоритма построения кусочно-интерполяционного метода, описанного в главе 3. Задача Коши (4) рассматривается в условиях существования и единственности в области $R: \{a \leq x \leq b; |y - y_0| \leq B; B = \text{const}\}$. Пусть a, b те же, что в (51), и выполнено разбиение на подынтервалы $[a_i, b_i]$. Для приближения правой части (4) в $f(x, y)$ подставляется $y \approx y_0$. Функция $f(x, y_0)$ приближается полиномами вида (55), (59) по изложенной схеме. При фиксированных n и k на каждом отрезке $[a_i, b_i]$, $i = 0, 1, 2, \dots$, выполняется итерационное уточнение. Именно, пусть $P_{in}(t) = \sum_{\ell=0}^n D_{i\ell} t^\ell$,

тогда $f(x, y_0) \approx P_{in}(t)$, $t = (x - a_i) h_i^{-1}$, h_i – шаг интерполяции на $[a_i, b_i]$. Первообразная

$$P_{(\text{int})i(n+1)}(x) = y_{0(i-1)} + h_i \int_0^{(x-a_i)h_i^{-1}} P_{in}(t) dt \quad \text{равная} \quad y_{0(i-1)} + h_i \sum_{\ell=0}^n D_{i\ell} / (\ell+1) t^{\ell+1} \quad \text{принимается за приближение}$$

решения: $y(x) \approx P_{(\text{int})i(n+1)}(x)$, $x \in [a_i, b_i]$. Далее, полагается $f(x, y) \approx f(x, P_{(\text{int})i(n+1)}(x))$, и при том же n , на том же отрезке строится интерполяционный полином вида (55) для приближения $P_{in}^{(1)}(t) \approx f(x, P_{(\text{int})i(n+1)}(x))$, $t = (x - a_i) h_i^{-1}$. Снова берется первообразная с тем же значением константы

$$P_{(\text{int})i(n+1)}^{(1)}(x) = y_{0(i-1)} + h_i \int_0^{(x-a_i)h_i^{-1}} P_{in}^{(1)}(t) dt, \quad \text{подставляется в правую часть,} \quad f(x, y) \approx f(x, P_{(\text{int})i(n+1)}^{(1)}(x)), \quad \text{которая}$$

аналогично интерполируется: $P_{in}^{(2)}(t) \approx f(x, P_{(\text{int})i(n+1)}^{(1)}(x))$. Итерации $P_{in}^{(\ell)}(t) \approx f(x, P_{(\text{int})i(n+1)}^{(\ell-1)}(x))$,

$P_{(\text{int})i(n+1)}^{(\ell)}(x) = y_{0(i-1)} + h_i \int_0^{(x-a_i)h_i^{-1}} P_{in}^{(\ell)}(t) dt$, $\ell=1,2,\dots$, продолжаютс я до заданной границы $\ell \leq q = \text{const}$, в абстрактном рассмотрении их количество не ограничивается. Выше полагалось $y_{0(i-1)} = P_{(\text{int})i(n+1)}^{(q)}(b_{i-1})$, по окончании итераций на $[a_i, b_i]$ следует переход к $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, где принимается $y_{0i} = P_{(\text{int})i(n+1)}^{(q)}(b_i)$.

При оценках погрешности предполагается, что интерполяция выполняется полиномами (43), приведенными к виду $P_{in}(x) = \sum_{\ell=0}^n d_{i\ell} x^\ell$, $x \in [a_i, b_i]$. Погрешность оценивается из (54), правая часть этой оценки обозначается $c_{ik} = c 2^{-k(n+1)} h^{n+1}$, $h = (b-a)n^{-1}$. Вначале погрешность приближения решения с итерационным уточнением рассматривается только на отрезке $[a_i, b_i]$. Предполагается, что решение на этом отрезке соответствует начальным значениям $y_{0(i-1)}$, тогда решение $y(x)$ и приближение $P_{(\text{int})i(n+1)}^{(\ell)}(x)$ имеют одинаковые начальные значения на $[a_i, b_i]$. Отсюда $y = y_{0(i-1)} + \int_{a_i}^x f(x, y) dx$, $y(a_i) = y_{0(i-1)}$,
 $P_{(\text{int})i(n+1)}^{(\ell)}(x) = y_{0(i-1)} + \int_{a_i}^x P_{in}(x) dx$. В предположении, что для некоторой последовательности номеров ℓ

$$0 < c_{ik} \leq \max_{[a_i, b_i]} |y(x) - P_{(\text{int})i(n+1)}^{(\ell)}(x)|, \ell=0,1,\dots, \quad (63)$$

где $P_{(\text{int})i(n+1)}^{(0)}(x) = P_{(\text{int})i(n+1)}(x)$ имеет место

Лемма 4. Пусть в рассматриваемых условиях решения задачи (4), в числе которых условия выполнения (54) применительно к правой части (4), а также (63), дополнительно предполагается, что $2^{-k}(b-a)(L+1) < 1$, L – константа Липшица. Тогда $\forall i$ из (51) найдется номер r_0 , такой, что итерационное уточнение будет удовлетворять неравенству

$$\max_{[a_i, b_i]} |y(x) - P_{(\text{int})i(n+1)}^{(r)}(x)| < c_{ik} \quad \forall r \geq r_0 \quad \forall x \in [a_i, b_i]. \quad (64)$$

С помощью леммы доказывается

Теорема 7. В условиях леммы 4 абсолютная погрешность решения задачи (4) оценивается из соотношения

$$\max_{[a_i, b_i]} |y(x) - P_{(\text{int})i(n+1)}^{(r+1)}(x)| \leq N c_{ik} (b-a) 2^{-k} \quad \forall r \geq r_0, \quad N = L+1, \quad (65)$$

согласно которому погрешность на подынтервале за счет итерационного уточнения уменьшается пропорционально $(b-a)2^{-k}$.

Подстановка c_{ik} из (54) влечет

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} \max_{[a_i, b_i]} |y(x) - P_{(\text{int})i(n+1)}^{(r+1)}(x)| \leq N(b-a)((b-a)/n)^{n+1} c 2^{-k(n+1)}. \quad (66)$$

С учетом данных соотношений доказывается

Теорема 8. В условиях леммы 4 абсолютная погрешность решения задачи (4) на всем отрезке решения из (51) оценивается из (66). При этом $\forall \varepsilon > 0$ верно неравенство

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} \max_{[a_i, b_i]} |y(x) - P_{(\text{int})i(n+1)}^{(r+1)}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall k > (n+1)^{-1} \log_2(N(b-a)((b-a)/n)^{n+1} c \varepsilon^{-1}), \quad \forall x \in [a, b],$$

означающее равномерную сходимость метода при $k \rightarrow \infty$.

Теоремы 7, 8 переносятся на случай интерполяционного полинома Ньютона в форме (56) или (57) с точностью до замены обозначений $P_{in}^{(\ell)}(t)$ на $\Psi_{in}^{(\ell)}(x)$ и $P_{(\text{int})i(n+1)}^{(\ell)}(x)$ на $\Psi_{(\text{int})i(n+1)}^{(\ell)}(x)$.

С помощью численного эксперимента в главе показано, что эвристический подбор параметров n и k позволяет получить решение с существенно меньшей трудоемкостью, чем с помощью автоматизированного выбора этих параметров, – без потери точности приближения. На примере решения модельной задачи небесной механики показана возможность повышения точности численного моделирования на один десятичный порядок с трудоемкостью сравнимой с трудоемкостью специализированных методов. Инвариантность кусочно-интерполяционного метода с итерационным уточнением, высокая точность и непрерывный характер приближения позволили применить метод для построения высокоточных приближений специальных функций с малой временной сложностью. Так, с

помощью предложенного метода построено непрерывное и непрерывно дифференцируемое аналитическое приближение функции Бесселя с точностью порядка 10^{-20} на основе решения уравнения

$$y'' = -(x y' + (x^2 - \alpha^2)y) / x^2, \quad (67)$$

имеющего при $\alpha = 0.5$ точное аналитическое решение $y(x) = J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x} \sin(x)$. Сравнением с точным решением оценивалась абсолютная погрешность приближения (табл. 6).

Таблица 6

Абсолютная погрешность приближения функции Бесселя $J_{1/2}(x)$ на отрезке $[1, 500]$, полученного на основе решения (67) при $y(1) = \sqrt{2/\pi} \sin(1)$, $y'(1) = \sqrt{2/\pi} \cos(1) - \sqrt{1/2\pi} \sin(1)$

x	<i>Runge-Kutta 4</i>	<i>Butcher 6</i>	<i>Dormand-Prince 8</i>	<i>FPI</i>
	$h = 1.0 \times 10^{-5}$	$h = 1.0 \times 10^{-3}$	$h = 1.0 \times 10^{-2}$	$h \approx 4.9 \times 10^{-3}$
1.2	3.415e-18	1.572e-18	1.626e-19	5.421e-20
5.4	8.863e-18	6.505e-19	8.403e-19	5.421e-20
...	...	...	...	...
250.2	3.900e-18	1.931e-18	3.375e-18	3.388e-21
255.4	1.694e-18	1.403e-18	5.330e-18	2.711e-20
...	...	...	...	...
495.4	1.120e-18	1.875e-18	6.688e-18	1.694e-20
500.0	4.662e-18	2.574e-19	1.033e-17	5.421e-20

Аналогичные результаты получены для приближения гипергеометрической функции $F(1, 1, 2, -x)$ на основе решения дифференциального уравнения Гаусса. Следует отметить, что в случае вычисления специальной функции коэффициенты интерполяционных полиномов можно рассчитать априори для требуемого интервала приближения, тогда временная сложность предложенного алгоритма составит $n \times (t_y + t_c)$, где t_y , t_c – время бинарного умножения и сложения, что не достижимо с помощью известных разностных методов. Быстродействующее вычисление с малой погрешностью рассмотренных специальных функций необходимо при решении актуальных задач, в частности, в небесной механике, акустике, радиофизике, гидродинамике, а также в задачах атомной и ядерной физики.

Таким образом, в главе представлен комплекс программ обработки данных в ИВС и выполнено моделирование периодических процессов из различных предметных областей, включая химические и биохимические реакции, электрическое равновесие автогенератора с внутренней обратной связью, движение КА с управлением при помощи «малой тяги», возмущенное периодическое движение КА. Для повышения качества обработки данных и результатов моделирования построена библиотека стандартных программ быстродействующего высокоточного вычисления функций и интегралов. Вычисление специальных и стандартных функций выполняется с точностью порядка $10^{-20} - 10^{-19}$ при временной сложности $O(1)$. На основе хранимых коэффициентов любая функция библиотеки может параллельно воспроизводиться на произвольном множестве точек фиксированной области. На аналогичной основе построено приближение производных с точностью до 10^{-16} . Представлены программы вычисления интеграла и результаты эксперимента, согласно которым на временном отрезке длины 500 достигается граница погрешности порядка 10^{-20} . На промежутках стандартной длины достигается нулевая граница погрешности вычисления интеграла. Обоснована сходимость метода, даны оценки скорости сходимости, представлены таблицы коэффициентов с целью стандартизации программ. В целом, результаты обработки данных отличаются гладкостью приближений в допустимых границах трудоемкости, что позволяет уточнить физико-химические параметры автоколебаний и повысить качество моделирования, применять метод для управления движением КА в режиме реального времени.

В **шестой главе** разработан комплекс программ обработки данных эфемерид на модели движения НКА ГЛОНАСС. С помощью комплекса в главе выполнен расчет параметров движения НКА по оперативной эфемеридной информации из навигационного сообщения. Предложенный метод обработки данных позволяет получить координаты и составляющие вектора скорости центра масс НКА с превышением границ требуемой точности в произвольно заданные моменты времени из 30-минутного интервала прогнозирования, при этом время расчета примерно вдвое меньше времени расчета известных методов.

Для определения местоположения и скорости навигационная аппаратура потребителей ГЛОНАСС принимает навигационные радиосигналы от НКА, выполняет беззапросные измерения псевдодальности и радиальной псевдоскорости относительно НКА, а также прием и обработку навигационного сообщения,

содержащегося в составе навигационных радиосигналов. В навигационном сообщении описывается положение НКА в пространстве и времени. Эфемериды спутников ГЛОНАСС обновляются каждые 30 минут. В результате обработки полученных измерений и данных навигационного сообщения определяются координаты местоположения потребителя и составляющие вектора скорости его движения, а также осуществляется синхронизация шкал времени.

В интерфейсном контрольном документе (ИКД) ГЛОНАСС конструктивно описан алгоритм расчета координат и составляющих вектора скорости центра масс НКА на заданный момент времени t_i шкалы московского декретного времени (МДВ) на 30-минутном интервале прогнозирования по данным эфемерид. Пересчет эфемерид потребителем с момента t_b шкалы МДВ на заданный момент времени t_i той же шкалы, $|t_i - t_b| \leq 15 \text{ мин}$, проводится методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения центра масс НКА. В правых частях этих уравнений задаются функции ускорения, определяемые геоцентрической константой гравитационного поля Земли с учетом влияния атмосферы GM , зональным гармоническим коэффициентом второй степени J_2^0 , а также ускорениями от лунно-солнечных гравитационных возмущений. Эти уравнения движения согласно ИКД ГЛОНАСС определены в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= v_{x_0}, \dot{y}_0 = v_{y_0}, \dot{z}_0 = v_{z_0}, \dot{v}_{x_0} = -GM \cdot \hat{x}_0 - 1.5 J_2^0 GM \cdot \hat{x}_0 \rho^2 (1 - 5 \hat{z}_0^2) + j_{x0c} + j_{x0l}, \\ \dot{v}_{y_0} &= -GM \cdot \hat{y}_0 - 1.5 J_2^0 GM \cdot \hat{y}_0 \rho^2 (1 - 5 \hat{z}_0^2) + j_{y0c} + j_{y0l}, \dot{v}_{z_0} = -GM \cdot \hat{z}_0 - 1.5 J_2^0 GM \cdot \hat{z}_0 \rho^2 (3 - 5 \hat{z}_0^2) + j_{z0c} + j_{z0l}, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

где $GM = GM / r_0^2$; $\hat{x}_0 = x_0 / r_0$; $\hat{y}_0 = y_0 / r_0$; $\hat{z}_0 = z_0 / r_0$; $\rho = a_e / r_0$; $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$; j_{x0c} , j_{y0c} , j_{z0c} , j_{x0l} , j_{y0l} , j_{z0l} – ускорения от лунно-солнечных гравитационных возмущений; a_e – большая полуось общеземного эллипсоида. Следующие исходные данные необходимы для пересчета эфемерид: N_4 – номер эфемеридного четырехлетнего периода; N_T – номер эфемеридных суток в эфемеридном четырехлетнем периоде; момент времени t_b ; координаты и составляющие вектора скорости центра масс НКА на момент времени t_b из оперативной информации ГЛОНАСС; заданный момент времени t_i шкалы МДВ, на который необходимо пересчитать координаты и составляющие вектора скорости НКА.

В ИКД ГЛОНАСС в качестве примера численного метода, который может быть использован для интегрирования уравнений движения (68), приводится метод Рунге-Кутты 4-го порядка, повышение порядка разностного метода приводит к существенному росту времени расчета, что критично в рамках стандартных границ времени расчета. В главе выполнено численное моделирование движения НКА на основе кусочно-интерполяционного интегрирования уравнений движения (68) с целью повышения точности приближения при условии не превышения времени расчета, кроме того, с целью построения непрерывного приближения координат и составляющих вектора скорости центра масс НКА на интервале $\pm 15 \text{ мин}$ относительно момента t_b . Дифференциальные уравнения (68) интегрируются в прямоугольной инерциальной геоцентрической системе координат $OX_0Y_0Z_0$. Ускорения от лунных и солнечных гравитационных возмущений вычисляются по формулам:

$$j_{x0k} = \hat{G}_k \left[\frac{\xi_k - \hat{x}_k}{\Delta_k} - \xi_k \right], j_{y0k} = \hat{G}_k \left[\frac{\eta_k - \hat{y}_k}{\Delta_k} - \eta_k \right], j_{z0k} = \hat{G}_k \left[\frac{\mathfrak{Z}_k - \hat{z}_k}{\Delta_k} - \mathfrak{Z}_k \right], \quad (69)$$

где $\hat{x}_k = x_0 / r_k$; $\hat{y}_k = y_0 / r_k$; $\hat{z}_k = z_0 / r_k$; $\hat{G}_k = G_k / r_k^2$; $\Delta_k = [(\xi_k - \hat{x}_k)^2 + (\eta_k - \hat{y}_k)^2 + (\mathfrak{Z}_k - \hat{z}_k)^2]^{3/2}$; k – индекс возмущающего тела; G_n , G_c – константы гравитационного поля Луны и Солнца; ξ_k , η_k , $\mathfrak{Z}_k$, r_k – направляющие косинусы и удаление возмущающего тела, которые согласно документации ГЛОНАСС рассчитываются на каждый момент времени t из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= (\sin \vartheta_n \cos \Gamma' + \cos \vartheta_n \sin \Gamma') \xi_{11} + (\cos \vartheta_n \cos \Gamma' - \sin \vartheta_n \sin \Gamma') \xi_{12}, \\ \eta_n &= (\sin \vartheta_n \cos \Gamma' + \cos \vartheta_n \sin \Gamma') \eta_{11} + (\cos \vartheta_n \cos \Gamma' - \sin \vartheta_n \sin \Gamma') \eta_{12}, \\ \mathfrak{Z}_n &= (\sin \vartheta_n \cos \Gamma' + \cos \vartheta_n \sin \Gamma') \mathfrak{Z}_{11} + (\cos \vartheta_n \cos \Gamma' - \sin \vartheta_n \sin \Gamma') \mathfrak{Z}_{12}, \\ \xi_c &= \cos \vartheta_c \cos \omega_c - \sin \vartheta_c \sin \omega_c, \eta_c = (\sin \vartheta_c \cos \omega_c + \cos \vartheta_c \sin \omega_c) \cos \varepsilon, \\ \mathfrak{Z}_c &= (\sin \vartheta_c \cos \omega_c + \cos \vartheta_c \sin \omega_c) \sin \varepsilon, r_k = a_k (1 - e_k \cos E_k), \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где $\sin \vartheta_k = \frac{\sqrt{1-e_k^2} \sin E_k}{1-e_k \cos E_k}$; $\cos \vartheta_k = \frac{\cos E_k - e_k}{1-e_k \cos E_k}$; $E_k = q_k + e_k \sin E_k$ – уравнение Кеплера для эксцентрической аномалии, которое решается методом итераций; $\xi_{11} = \sin \Omega_{\text{л}} \cos \Omega_{\text{с}} (1 - \cos i_{\text{л}})$, $\xi_{12} = 1 - \sin^2 \Omega_{\text{л}} (1 - \cos i_{\text{л}})$, $\eta_{11} = \xi^* \cos \varepsilon - \mathfrak{Z}^* \sin \varepsilon$, $\eta_{12} = \xi_{11} \cos \varepsilon + \eta^* \sin \varepsilon$, $\mathfrak{Z}_{11} = \xi^* \sin \varepsilon + \mathfrak{Z}^* \cos \varepsilon$, $\mathfrak{Z}_{12} = \xi_{11} \sin \varepsilon - \eta^* \cos \varepsilon$, $\xi^* = 1 - \cos^2 \Omega_{\text{л}} (1 - \cos i_{\text{л}})$, $\eta^* = \sin \Omega_{\text{л}} \sin i_{\text{л}}$, $\mathfrak{Z}^* = \cos \Omega_{\text{л}} \sin i_{\text{л}}$; $a_{\text{л}}$, $a_{\text{с}}$ – большие полуоси орбиты Луны и Солнца; $e_{\text{л}}$, $e_{\text{с}}$ – эксцентриситеты орбиты Луны и Солнца; $i_{\text{л}}$ – среднее наклонение орбиты Луны к плоскости эклиптики. Параметры нутации Луны и Солнца на момент времени t по шкале МДВ рассчитываются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{л}} &= 2.3555557435 + 8328.6914257190 \times T + 0.0001545547 \times T^2; \\ q_{\text{с}} &= 6.2400601269 + 628.3019551714 \times T - 2.6820 \times 10^{-6} \times T^2; \\ \Omega_{\text{л}} &= 2.1824391966 - 33.7570459536 \times T + 0.0000362262 \times T^2; \\ \Gamma' &= 1.4547885346 + 71.0176852437 \times T - 0.0001801481 \times T^2; \\ \omega_{\text{с}} &= -7.6281824375 + 0.0300101976 \times T + 7.9741 \times 10^{-6} \times T^2; \\ \varepsilon &= 0.4090926006 - 0.0002270711 \times T, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где $T = (JD0 + (t - 10800)/86400 - 2451545.0)/36525$; $JD0$ – текущая юлианская дата на 0 часов шкалы МДВ, которая до окончания 2119 г. рассчитывается по соотношению $JD0 = 1461(N_4 - 1) + N_T + 2450082.5$.

Кусочно-интерполяционное решение задачи (68) – (71) выполнено с начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} x_0(t_b) &= 1.85671840 \ 522396\text{e}+07, \quad \dot{x}_0(t_b) = 5.72204100 \ 174071\text{e}+02, \\ y_0(t_b) &= -1.65274995 \ 936504\text{e}+07, \quad \dot{y}_0(t_b) = 1.84501010 \ 135317\text{e}+03, \\ z_0(t_b) &= -5.76018554 \ 687500\text{e}+06, \quad \dot{z}_0(t_b) = -3.44761753 \ 082300\text{e}+03, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

вычисленными путем пересчета в инерциальную систему координат бортовых эфемерид НКА ГЛОНАСС №730, представленных в системе ПЗ-90.11 на момент времени $t_b = 11700$ шкалы МДВ даты 05.08.2021. Для сокращения времени решения без потери точности приближения применялась модификация кусочно-интерполяционного метода, заключающаяся в замене автоматического подбора параметров пользовательским подбором и фиксированием параметров метода, были внесены незначительные изменения в программную реализацию для учета специфики задачи (68) – (71) и ограниченности длины отрезка интегрирования.

В табл. 7 представлены результаты расчета эфемерид НКА ГЛОНАСС №730 на основе приближенного решения задачи (68) – (71) с начальными условиями (72) на отрезках $[t_b, t_b + \Delta t]$, $\Delta t = 300\text{с}, 600\text{с}, 900\text{с}$, с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка с рекомендованной в ИКД ГЛОНАСС величиной шага интегрирования ($h = 1\text{мин}$) и с помощью кусочно-интерполяционного метода с соответствующими значениями параметров.

Таблица 7

Погрешность и время расчета эфемерид НКА посредством решения задачи (68) – (72) с рекомендованными значениями параметров методов

Δt	Runge-Kutta 4		FPI	
	$h = 60\text{с}$		$n = 5, \ell = 7$	
5 мин	6.441e-05	0.175 мс	3.574e-09	0.080 мс
10 мин	1.286e-04	0.347 мс	4.055e-07	
15 мин	1.925e-04	0.522 мс	7.271e-06	

Согласно табл. 7 применение предложенного метода позволяет существенно ускорить существующий процесс расчета координат и составляющих вектора скорости центра масс НКА (на 54% и более) при повышении точности приближения на 2 – 4 десятичных порядка. Результаты экспериментов по расчету эфемерид НКА ГЛОНАСС №730 на основе приближенного решения задачи (68) – (72) с применением метода Рунге-Кутты 4-го порядка с различными значениями шага интегрирования и с применением кусочно-интерполяционного метода с различными значениями параметров метода представлены на рис. 7 в виде диаграммы «точность – время расчета» для отрезка интегрирования $t \in [t_b, t_b + \Delta t]$, $\Delta t = 900\text{с}$.

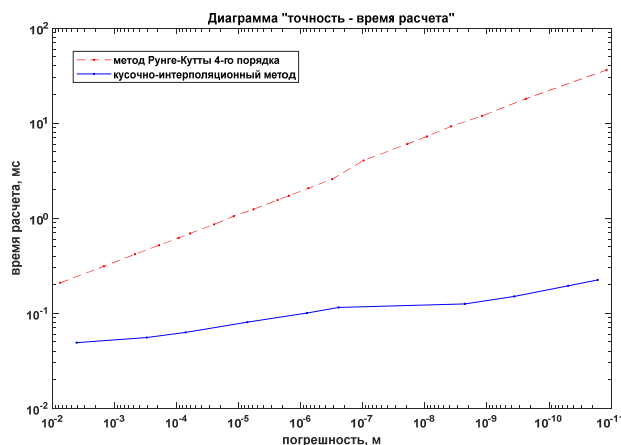


Рис. 7. Диаграмма «точность – время расчета» для приближения эфемерид НКА ГЛОНАСС на 15-минутном интервале на основе решения задачи (68) – (72) методом Рунге-Кутты 4-го порядка и кусочно-интерполяционным методом

Из рис. 7 видно, что применение кусочно-интерполяционного метода для приближения эфемерид НКА ГЛОНАСС на основе решения задачи (68) – (72) позволяет достигать требуемых порядков точности за время меньшее на 1 – 2 десятичных порядка в сравнении с применением метода Рунге-Кутты 4-го порядка. В частности, граница абсолютной погрешности порядка 10^{-6} достигается на основе метода Рунге-Кутты за время ≈ 1 мс, при использовании предложенного метода – за время ≈ 0.1 мс.

В главе представлены сравнительные аспекты и особенности применения предложенного способа численного моделирования движения НКА системы ГЛОНАСС по данным эфемерид, указана возможность дополнительного ускорения численного моделирования движения НКА ГЛОНАСС за счет применения кусочной интерполяции суперпозиций функций в правой части уравнений движения с помощью интерполяционных полиномов Ньютона, преобразованных к виду алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами. На этой основе временная сложность вычисления значений направляющих косинусов и удалений Луны и Солнца (70), необходимых для определения ускорений от лунно-солнечных гравитационных возмущений (69), измеряется числом шагов схемы Горнера, что интерпретируется как оценка временной сложности единичного порядка. Предложен способ дополнительного ускорения обработки данных на модели движения НКА за счет хранения коэффициентов кусочной интерполяции траектории и динамики движения для задач постобработки данных. Процесс расчета реализован в программном комплексе в виде процедуры с параметрами, определяемыми из навигационного сообщения, поэтому может быть автоматизирован с дополнительным повышением быстродействия при требуемой точности расчетов.

Таким образом, в главе представлен комплекс программ обработки данных эфемерид на модели движения НКА ГЛОНАСС и выполнено моделирование движения НКА по оперативной эфемеридной информации из навигационного сообщения. Кусочно-интерполяционное приближение координат непрерывно, сходится к траектории НКА ГЛОНАСС и приближает скорость НКА на всем интервале прогнозирования. Минимизация временной сложности предложенного метода позволила более чем на 54% ускорить процесс расчета координат и составляющих вектора скорости центра масс НКА ГЛОНАСС в произвольно заданный момент времени из 30-минутного интервала прогнозирования по данным эфемерид в сравнении со стандартным алгоритмом расчета с превышением границ требуемой точности. Как отмечалось, процесс расчета реализован в виде процедуры с параметрами, определяемыми из навигационного сообщения и может быть полностью автоматизирован с сохранением быстродействия, точности и гладкости обработки данных. На каждом подынтервале интервала прогнозирования интерполирующий компонент траектории полином является алгебраическим полиномом фиксированной степени с числовыми коэффициентами. Это дает возможность сохранять в памяти компьютера приближение траектории как типизированный файл коэффициентов соответствующих подынтервалам разбиения. Непрерывное и гладкое приближение траектории оказывается возможным хранить и восстанавливать – без повторного вычисления траектории – в произвольной точке интервала прогнозирования простым алгоритмом считывания как соответствующее значение полинома. Процесс прогнозирования на этой основе достаточно просто архивируется. Возникают предпосылки прогнозирования полного отрезка траектории движения НКА с расширением интервала прогнозирования.

Представлены результаты численного эксперимента, подтверждающие улучшение качества прогнозирования параметров движения НКА. Полученные в главе результаты актуальны для повышения точности и скорости определения координат местоположения и составляющих вектора скорости движения потребителя системы ГЛОНАСС.

Поскольку НКА ГЛОНАСС движутся на околоземной орбите с периодом обращения 11 ч 15 мин 44 с и не требуют для своего поддержания корректирующих импульсов, их движение можно интерпретировать как периодический автоколебательный процесс. Исследование данного процесса не выходит за рамки темы представленной диссертации.

В **заключении** обобщаются основные результаты диссертационной работы, характеризуется их научная новизна, отмечается научное и практическое значение проведенных исследований.

Приложение включает коды программ, реализующих математические модели и предложенные методы, результаты программных и численных экспериментов, акты об использовании результатов диссертационной работы.

Заключение. В рамках диссертационной работы были проведены исследования, результатом которых стала разработка высокоточных быстродействующих алгоритмов и программ обработки данных в ИВС для моделей периодических процессов, позволяющих повышать качество моделирования, уточнять физико-технологические и динамические характеристики моделей процессов в реальном времени.

В диссертационном исследовании получены следующие основные результаты:

1. Предложен метод разностно-полиномиальной обработки данных в ИВС с программным выбором варьируемых параметров для моделей периодических процессов, построенный на основе обработки данных на временных подынтервалах интерполяционными полиномами Ньютона, программно преобразуемыми в форму алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами. Метод использует разностную обработку узловых значений, применяет итерационное уточнение и обеспечивает повышение точности при уменьшении времени обработки данных для улучшения качества моделирования исследуемых процессов.

2. Даны обоснование сходимости и оценки скорости сходимости предложенного метода разностно-полиномиальной обработки данных на произвольном промежутке времени.

3. Предложена модификация метода обработки данных в ИВС с автоматизированным выбором варьируемых параметров для моделей периодических процессов, исключающая использование разностных схем. Модификация построена на основе кусочной интерполяции на временных подынтервалах правой части дифференциальной системы и интегральном приближении решения в виде алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами, использует итерационные уточнения аналогичные интегральным приближениям Пикара. Модификация отличается повышенной точностью обработки данных на больших отрезках времени и позволяет улучшать качество моделирования.

4. Выполнено обоснование сходимости и оценки скорости сходимости предложенной модификации кусочно-интерполяционного метода обработки данных с итерационным уточнением на произвольном временном промежутке.

5. Представлена программная реализация предложенного метода с автоматизированным выбором параметров, адаптирующихся к структуре модели и реализующих динамическую коррекцию начальных данных, что позволяет достигать наибольшей точности гладкого аналитического приближения данных на отрезке произвольной длины при минимальном времени обработки. При этом достигается вычислительная устойчивость обработки данных в ИВС для широкого класса моделей периодических процессов, в числе которых модели жестких задач и задач с неустойчивыми по Ляпунову решениями.

6. Предложен метод варьируемой кусочно-интерполяционной обработки числовых данных модели переноса с итерационным уточнением, построенный на основе интерполяционного полинома Ньютона от двух переменных, программно преобразуемого в алгебраический полином с числовыми коэффициентами. Применяется двумерное итерационное уточнение обработанных данных, что позволяет получить кусочно-гладкое аналитическое приближение движения волны в прямоугольной области со сравнительно высокой точностью и повысить качество моделирования процесса переноса в ИВС.

7. Даны обоснование сходимости и оценки скорости сходимости кусочно-интерполяционной обработки данных с итерационным уточнением для модели переноса в прямоугольной области.

8. Выполнена алгоритмизация и программная реализация метода обработки данных модели переноса с автоматизированным выбором параметров, обеспечивающим наибольшую точность при наименьшем

времени обработки и вычислительную устойчивость, что в сочетании с кусочной гладкостью приближения данных позволяет детализировать и повысить качество моделирования процесса переноса.

9. Предложен метод создания библиотеки стандартных программ в ИВС на основе кусочно-интерполяционной обработки данных с хранением полиномиальных коэффициентов, позволяющий параллельно воспроизводить приближения стандартных и специальных функций в моделях периодических процессов с точностью порядка 10^{-20} на произвольном множестве точек фиксированной области за время единичного порядка.

10. Представлена модификация кусочно-интерполяционной обработки данных дифференциальной модели, позволяющая существенно повысить быстродействие без потери точности обработки за счет замены автоматического выбора параметров их пользовательским подбором и фиксированием. Разработанные на этой основе с помощью хранимых коэффициентов быстродействующие алгоритмы высокоточного воспроизведения специальных функций и их производных позволяют в моделях периодических процессов получать приближения данных со свойством гладкости на больших интервалах времени.

11. Разработан комплекс программ кусочно-интерполяционной обработки данных в ИВС для моделей жестких и нежестких задач, включающий автоматический и пользовательский выбор параметров для адаптации к классам моделей. Комплекс позволяет выполнять быстродействующее высокоточное моделирование периодических автоколебательных реакций, что необходимо для отладки технологических процессов на их основе. Комплекс также включает моделирование процессов переноса для уточнения форм и динамики перемещения волн.

12. Разработан комплекс программ для моделирования в ИВС движения КА, позволяющий рассчитывать время и параметры вывода КА на устойчивую периодическую орбиту при управлении, соответствующем внешнему воздействию гравитационных сил. Сравнительно малая временная сложность предложенной обработки данных позволяет применять комплекс для управления движением КА в режиме реального времени, кроме того программный комплекс позволяет рассчитать с повышенной точностью координаты ИСЗ, выведенного на низкую околоземную орбиту, в произвольный момент времени, что необходимо для измерений с помощью лазерного дальномера от пункта наблюдения до ИСЗ.

13. Представлены алгоритмы и программы для моделирования движения НКА ГЛОНАСС по данным эфемерид, позволяющие существенно ускорить процесс расчета координат и составляющих вектора скорости центра масс НКА ГЛОНАСС с превышением требуемой точности в произвольно заданные моменты времени из 30-минутного интервала прогнозирования. Предложенные алгоритмы и программы позволяют сохранять гладкое аналитическое приближение координат траектории и скорости движения НКА в памяти компьютера и восстанавливать его без повторного вычисления траектории в произвольной точке интервала прогнозирования за время единичного порядка без снижения точности приближений. На данной основе улучшается процесс прогнозирования и его архивация, создаются предпосылки прогнозирования непрерывного отрезка траектории движения НКА и расширения интервала прогнозирования.

14. Предложен метод обработки интегральных данных, представляющий собой разновидность формул Ньютона-Котеса с коэффициентами, не зависящими от подынтегральной функции и промежутка интегрирования, полученными на основе кусочной интерполяции. Вычисление интегралов с хранимыми в памяти ИВС коэффициентами реализовано программно. Пользовательский интерфейс программ стандартизирован до задания подынтегральной функции, промежутка интегрирования, как вариант может включать степень полинома и число подынтервалов. Интегральная обработка данных реализуется с высокой точностью на временных интервалах большой длины. На промежутках стандартной для обработки данных длины достигается нулевая граница погрешности. Одновременно с минимизацией погрешности минимизируется время вычисления интегралов.

Научную и практическую значимость в области обработки данных в ИВС моделей периодических процессов имеют полученные в диссертации высокоточные быстродействующие методы и их программная реализация для обработки данных дифференциальных моделей, включая модели периодических автоколебательных реакций, модели процессов переноса и модели прогнозирования движения космических аппаратов на околоземной орбите.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Публикации в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России и диссертационным советом ЮФУ

1. Ромм, Я.Е. Схема разностного решения обыкновенных дифференциальных уравнений с повышенной точностью на основе интерполяционного полинома Ньютона / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 5(94). – С. 46-52.
2. Ромм, Я.Е. Кусочная линейаризация задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 2(115). – С. 26-32.
3. Ромм, Я.Е. Кусочно-полиномиальное решение дифференциальных уравнений в частных производных / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 5(118). – С. 146-153.
4. Romm, Y.E. The computer method of variable piecewise polynomial approximation of functions and solutions of ordinary differential equations / Y.E. Romm, G.A. Dzhanunts // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – Vol. 49, No 3. – P. 409-423. – DOI 10.1007/s10559-013-9524-1. (**Scopus, Web of Science**).
5. Буланов, С.Г. Программный анализ устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе мультипликативных преобразований разностных схем и кусочно-полиномиальных приближений решения / С.Г. Буланов, Г.А. Джанунц // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2015. – № 2. – С. 10-20.
6. Dzhanunts, G.A. The varying piecewise interpolation solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations with iterative refinement / G.A. Dzhanunts, Y.E. Romm // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 57, No 10. – P. 1616-1634. – DOI 10.1134/S0965542517100074. (**Scopus, Web of Science**).
7. Ромм, Я.Е. Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для уравнения переноса с итерационным уточнением / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 1. – С. 21-46. – DOI 10.17513/snt.37897.
8. Romm, Y.E. Piecewise interpolation solution of the Cauchy problem for the transport equation with iterative refinement / Y.E. Romm, G.A. Dzhanunts // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. – 2020. – Vol. 1479, No 1. – P. 012110. – DOI 10.1088/1742-6596/1479/1/012110. (**Scopus, Web of Science**).
9. Ромм, Я.Е. Кусочная интерполяция функций, производных и интегралов с приложением к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 12-2. – С. 291-316. – DOI 10.17513/snt.38448.
10. Romm, Y.E. Piecewise interpolation solution of ordinary differential equations with application to numerical modeling problems / Y.E. Romm, G.A. Dzhanunts // Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. – 2021. – Vol. 1902, No 1. – P. 0121130. – DOI 10.1088/1742-6596/1902/1/012130. (**Scopus**).
11. Romm, Y.E. Variable Piecewise Interpolation Solution of the Transport Equation / Y.E. Romm, G.A. Dzhanunts // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – Vol. 260, No 2. – P. 230-240. – DOI 10.1007/s10958-022-05687-1. (**Scopus**).
12. Ромм, Я.Е. О библиотеке стандартных программ вычисления функций на основе кусочной интерполяции / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц, Н.А. Медведкин // Современные наукоемкие технологии. – 2022. – № 11. – С. 57-70. – DOI 10.17513/snt.39397.
13. Ромм, Я.Е. О воспроизводимости функций, производных и решений дифференциальных уравнений с помощью хранимых коэффициентов кусочной интерполяции / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Современные наукоемкие технологии. – 2023. – № 1. – С. 44-63. – DOI 10.17513/snt.39497.
14. Ромм, Я.Е. Моделирование движения навигационных спутников системы ГЛОНАСС на основе кусочно-интерполяционного решения задачи Коши для дифференциальной системы / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Современные наукоемкие технологии. – 2023. – № 2. – С. 88-101. – DOI 10.17513/snt.39529.
15. Ромм, Я.Е. О стандартизации программ вычисления интегралов на основе кусочной интерполяции подынтегральных функций / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Современные наукоемкие технологии. – 2023. – № 4. – С. 71-92. – DOI 10.17513/snt.39582.

Публикации в других изданиях

16. Ромм, Я.Е. Компьютерный метод разностно-аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений на основе интерполяционного полинома Ньютона / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2009. – 40 с. – Деп. в ВИНТИ 18.06.09, № 379-В2009.

17. Ромм, Я.Е. Повышение точности разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений на основе кусочно-полиномиальной интерполяции / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2010. – 103 с. – Деп. в ВИНТИ 25.01.2010, № 20-B2010.

18. Ромм, Я.Е. Кусочно-полиномиальная аппроксимация решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования интерполяционного полинома Ньютона / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2010. – 37 с. – Деп. в ВИНТИ 25.05.2010, № 305-B2010.

19. Ромм, Я.Е. Компьютерный метод разностно-полиномиального решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2011. – 45 с. – Деп. в ВИНТИ 25.03.2011, № 141-B2011.

20. Ромм, Я.Е. Разностно-полиномиальный метод численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2011. – 59 с. – Деп. в ВИНТИ 20.07.2011, № 353-B2011.

21. Ромм, Я.Е. Компьютерное моделирование жестких систем на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2011. – 20 с. – Деп. в ВИНТИ 31.08.2011, № 405-B2011.

22. Ромм, Я.Е. Варьируемая непрерывная кусочно-полиномиальная аппроксимация функций одной и двух переменных и решений ОДУ с оценками скорости сходимости / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2013. – 87 с. – Деп. в ВИНТИ 14.01.2013, № 8-B2013.

23. Временная сложность варьируемой кусочно-полиномиальной аппроксимации функций и решений обыкновенных дифференциальных уравнений при распараллеливании / Ромм Я.Е., Джанунц Г.А., Стаховская И.И., Кузьминчук Е.С. – Таганрог, 2013. – 47 с. – Деп. в ВИНТИ 05.03.2013, № 62-B2013.

24. Ромм, Я.Е. Кусочно-полиномиальные приближения функций и решений дифференциальных уравнений в применении к моделям периодических реакций: [монография]: в авторской редакции / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц; М-во образования и науки Российской Федерации, Федеральное гос. бюджетное образовательное учреждение высш. проф. образования «Таганрогский гос. пед. ин-т им. А. П. Чехова». – Таганрог, Ростовская область: ФГБОУ ВПО «Таганрогский гос. пед. ин-т им. А. П. Чехова», 2013. – 239 с. – ISBN 978-5-87976-829-9.

25. Ромм, Я.Е. Компьютерный анализ устойчивости по Ляпунову на основе мультипликативных и аддитивных преобразований решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2014. – 49 с. – Деп. в ВИНТИ 17.02.2014, № 53-B2014.

26. Ромм, Я.Е. Компьютерный метод кусочно-полиномиального приближения решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2015. – 100 с. – Деп. в ВИНТИ 27.02.2015, № 43-B2015.

27. Буланов, С.Г. Компьютерный анализ устойчивости модели автогенератора на основе кусочно-полиномиального метода / С.Г. Буланов, Г.А. Джанунц // Перспективы развития технических наук: сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции (6 июля 2015 г.). Вып. 2. – Челябинск: ИЦРОН, 2015. – С. 11-15.

28. Буланов, С.Г. Исследование автоколебательных цепей с использованием кусочно-полиномиального метода и компьютерных схем анализа устойчивости / С.Г. Буланов, Г.А. Джанунц // Инновационные технологии и дидактика в обучении: сборник статей III Международной научно-практической конференции, Краснодар, 29-30 июня 2015 г. Т. 1. – Таганрог: ЮФУ, 2015. – С. 118-122.

29. Буланов, С.Г. Численное моделирование и компьютерный анализ устойчивости орбитального движения космических аппаратов / Буланов С.Г., Джанунц Г.А // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. Физико-математические и естественные науки. – Таганрог, 2015. – №1. – С. 55-63.

30. Ромм, Я.Е. Итерационное уточнение кусочно-полиномиального приближения решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2015. – 60 с. – Деп. в ВИНТИ 07.12.2015, № 201-B2015.

31. Ромм, Я.Е. Компьютерное кусочно-интерполяционное решение односточечной и двухточечной задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2016. – 49 с. – Деп. в ВИНТИ 05.04.2016, № 57-B2016.

32. Ромм, Я.Е. Кусочно-интерполяционное решение двухточечной задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 6-2. – С. 308-317.

33. Ромм, Я.Е. Кусочно-интерполяционное приближение решения задачи Коши для уравнений в частных производных / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2017. – 41 с. – Деп. в ВИНТИ 14.08.2017, № 88-B2017.

34. Ромм, Я.Е. Кусочно-полиномиальное приближение решения задачи Коши для гиперболического уравнения / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике: материалы 16-ой Международной молодежной научно-

практической конференции, 26-27 октября 2017 года, г. Новочеркасск. – Новочеркасск: ЮРГПУ(НПИ): Лик, 2017. – С. 9-15.

35. Ромм, Я.Е. Оценка скорости сходимости кусочно-интерполяционного решения задачи Коши с итерационным уточнением для уравнения переноса / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2018. – 79 с. – Деп. в ВИНТИ 12.02.2018, №20-B2018.

36. Ромм, Я.Е. Варьируемое кусочно-интерполяционное решение уравнения переноса / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», 22-26 мая 2018 г., Нальчик-Эльбрус. – Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. – С. 218.

37. Джанунц, Г.А. Кусочно-интерполяционное решение уравнения переноса с итерационным уточнением / Г.А. Джанунц // Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике: материалы 17-ой Международной молодежной научно-практической конференции, г. Новочеркасск, 6-7 сентября 2018 г. – Новочеркасск : Лик, 2018. – С. 52-58.

38. Джанунц, Г.А. Численное моделирование распространения гемодинамических импульсов с применением кусочно-интерполяционного метода / Г.А. Джанунц // Вестник молодежной науки России. – 2019. – № 2. – Статья № 4.

39. Ромм, Я.Е. Кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для уравнения переноса / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц. – Таганрог, 2019. – 40 с. – Деп. в ВИНТИ 20.08.2019, № 68-B2019.

40. Ромм, Я.Е. Компьютерный эксперимент по кусочно-интерполяционной реализации дифференциальных моделей / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Новые информационные технологии и системы: сборник научных статей XVI Международной научно-технической конференции, г. Пенза, 27-29 ноября 2019 г. – Пенза: ПГУ, 2019. – С. 250-256.

41. Джанунц, Г.А. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием кусочно-полиномиальной аппроксимации / Г.А. Джанунц // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. Физико-математические и естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 6-15.

42. Ромм, Я.Е. Кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для уравнения переноса с итерационным уточнением / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 11-13 ноября 2019 г. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2020. – С. 1056-1065.

43. Ромм, Я.Е. Кусочно-интерполяционное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с приложением к задачам численного моделирования / Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 7-9 декабря 2020 г. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 1038-1045.

Личный вклад автора в работах, опубликованных в соавторстве: [1, 2, 4, 16 – 19, 22, 23, 24] – разработка и исследование метода, синтез вычислительных алгоритмов и программная реализация варьируемых разностно-полиномиальных методов обработки данных, выполнение численного эксперимента; [6, 9, 10, 30, 43] – разработка и исследование метода, синтез вычислительного алгоритма высокоточного метода варьируемого кусочно-интерполяционной обработки данных дифференциальных моделей с итерационным уточнением; программная реализация метода с автоматическим выбором параметров и с динамической коррекцией начальных значений; [5, 12 – 15, 21, 24, 25, 27 – 29, 31, 32, 40] – видоизменения варьируемых кусочно-интерполяционных методов, выполнение на этой основе численного и программного эксперимента по моделированию периодических автоколебательных процессов и исследованию устойчивости систем ОДУ; [3, 20, 24, 26, 33, 34] – разработка аналога метода кусочно-интерполяционной обработки данных для моделей с частными производными, программная реализация и выполнение численного эксперимента; [7, 8, 11, 35, 36, 39, 42] – разработка и исследование метода, синтез вычислительного алгоритма и программная реализация варьируемой кусочно-интерполяционной обработки данных модели переноса с итерационным уточнением; выполнение численного и программного эксперимента.