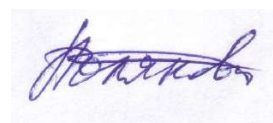


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



ПОЛЯКОВА НАТАЛЬЯ МИХАЙЛОВНА
**ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ
С ПОДАТЛИВЫМИ И НЕРОВНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

1.1.9 — механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Моргулис А. Б.

Ростов-на-Дону
2023

Оглавление

Оглавление	2
Введение	6
1 Состояние проблемы и методы исследования	17
§ 1 Современное состояние проблемы	17
§ 1.1 Течения в трубах с податливыми границами	17
§ 1.2 Турбулентные течения жидкости	20
§ 1.2.1 Граничные условия проскальзывания	20
§ 1.2.2 Кинематическая турбулентная вязкость	21
§ 1.3 Методы исследования решений	22
2 Течения в цилиндрической области с податливыми боковыми границами	25
§ 2 Уравнения для главных членов асимптотики	26
§ 2.1 Основные уравнения и соотношения	27
§ 2.2 Построение асимптотических уравнений	29
§ 2.2.1 Функция тока	30
§ 2.2.2 Упрощение уравнений. Выбор параметров	31
§ 2.2.3 Уравнения для величин на границе области	33
§ 2.2.4 Основные уравнения для главных членов асимптотики	35
§ 2.2.5 Конститутивные соотношения	37
§ 3 Постановка задачи	39
§ 3.1 Постановка задачи для исходных переменных	39

§ 3.2	Постановка задачи для инвариантов Римана	40
§ 3.2.1	Инварианты Римана	41
§ 4	Построение решения задачи	42
§ 4.1	Метод годографа	42
§ 4.1.1	Неявное двухпараметрическое решение	42
§ 4.1.2	Явное решение на линиях уровня $t(a, b)$	45
§ 4.1.3	Явное решение на линиях уровня $z(a, b)$	46
§ 4.1.4	Периодичность решения	47
§ 5	Решение в случае соотношения $P(S) \sim S^2$	49
§ 5.1	Начальная и краевая задачи	49
§ 5.2	Начально-краевая задача (о распространении сигнала)	51
§ 5.3	Ударные волны	53
§ 5.4	Волновые фронты	55
§ 6	Поведение сильного разрыва решения	56
§ 7	Результаты расчетов	62
§ 7.1	Вариант 1. Ударные волны	62
§ 7.2	Вариант 2. Волновые фронты	64
§ 7.3	Решения на линиях уровня функции $z(a, b)$	66
§ 7.4	Решение в случае сильного разрыва	68
Заключение к главе 2		72
 3 Течение в цилиндрическом канале		
с неровными границами		73
§ 8	Основные и асимптотические уравнения	74
§ 8.1	Основные уравнения и постановка задачи	74
§ 8.2	Задача для определения главных членов асимптотики	75
§ 9	Решение и его анализ	79
§ 10	Структура течения	81
§ 10.1	Почти «произвольная» вязкость	82
§ 10.2	Соотношения для функций $\varphi(s, z)$, $\psi(s, z)$	84
§ 10.3	Частные случаи границ	84

§ 10.3.1	Граница $r = \eta(z) = \text{const}$	85
§ 10.3.1.1	Тривиальный случай равновесия	86
§ 10.3.1.2	Стационарная точка равновесия	87
§ 10.3.2	Постоянная толщина шероховатости	87
§ 10.3.2.1	Стационарная точка равновесия	88
§ 10.3.2.2	Тривиальный случай равновесия	89
§ 11	Результаты расчетов структуры течения	90
§ 11.1	Результаты расчетов методом конечных элементов	94
Заключение к главе 3		97
4	Результаты расчетов различными методами	98
§ 12	Результаты расчетов методом конечных объемов	99
§ 12.1	HLL аппроксимация	99
§ 12.2	Ударные волны ($\beta = 1$)	101
§ 12.3	Волновые фронты ($\beta = 1$)	104
§ 12.4	Ударные волны ($\beta = 1/4$)	105
§ 12.5	Задача с начальными условиями при $\beta = 1/4$ и $\beta = 1$	107
§ 12.5.1	Задача с начальными условиями при $\beta = 1$	107
§ 12.5.1.1	Точное решение	107
§ 12.5.1.2	Решение методом конечных объемов	110
§ 12.5.2	Задача с начальными условиями при $\beta = 1/4$	113
§ 13	Влияние вращения на поведение течения	115
Заключение к главе 4		119
Заключение		120
Литература		122
Приложения		140
A	Условия на свободной границе	140
B	Построение функции тока	142

C	Уравнения на основе метода осреднения	145
D	Безразмерные параметры	148
Список иллюстраций		150

Введение

Актуальность темы. Исследованию течений вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических областях (трубах, каналах) посвящено достаточно большое количество работ, а также имеется обширный экспериментальный материал, позволяющий оценивать адекватность используемых подходов. Результаты изучения задач о течениях жидкости интенсивно используются во многих физических и технических приложениях. Несмотря на большое внимание к указанным задачам и значительный прогресс в развитии численных методов даже в случаях достаточно простых вращательно-симметричных течений в цилиндрических областях, проблема построения и исследования асимптотики все еще далека от полного завершения, ввиду сложности базовых уравнений Навье–Стокса, используемых для описания течений. Более того, имеется много неясностей и с постановками задач, в частности, выбором краевых условий, выбором турбулентной кинематической вязкости (в случае интенсивных течений жидкости) и т. п. В связи с этим существенную роль играют асимптотические уравнения, во многих случаях значительно более простые по сравнению с исходной задачей, но сохраняющие все ее наиболее важные свойства, позволяющие построить аналитические и численные решения, исследовать структуру течений, а также оценить правильность использования тех или иных гипотез, в частности, относительно краевых условий и вязкости, выявить роль влияния тех или иных параметров задачи на поведение решений. При этом значение имеют такие асимптотические задачи, для которых удастся построить либо точное решение, либо задачи, приводящие к достаточно хорошо изученным системам квазилинейных ги-

гиперболических уравнений в частных производных первого порядка.

Все вышесказанное позволяет сделать вывод о том, что построение и исследование главных членов асимптотических разложений уравнений для вращательно-симметричных течений в цилиндрических областях, построение точных решений, разработка методов решения (аналитических, асимптотических, численных) таких задач является актуальным для понимания и интерпретации многих важных физических процессов.

Цель и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является построение главных членов асимптотических разложений задач и их исследование с использованием аналитических, численных и асимптотических методов для решения некоторых задач о вращательно-симметричных течениях в цилиндрических областях — задачи о течении с умеренной скоростью в случае податливой границы, задачи о квазистационарном течении в случае иррегулярной границы для жидкости с вязкостью, зависящей от координат. Детальное исследование задач приводит к необходимости развития численно-аналитического метода построения неявного и явного решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа, вычислительных методов, методов для построения разрывных решений типа ударных волн и решений со слабыми разрывами.

В связи с поставленной целью необходимо решить следующие задачи:

- Построение (на основе теории мелкой воды) и исследование главных членов асимптотических разложений задачи для описания вращательно-симметричного течения в цилиндрической области с податливыми границами.
- Построение и исследование главных членов асимптотических разложений исходной задачи для описания квазистационарного вращательно-симметричного течения в цилиндрической области с неровными границами в случае вязкости, зависящей от координат.
- Построение решения начальной, краевой и начально-краевой задач для асимптотических уравнений, описывающих течения в области с податливыми стенками.

- Модификация аналитически-численного метода решения задачи Коши для квазилинейных уравнений в производных первого порядка, позволяющего строить и исследовать решение на линиях уровня постоянного времени или постоянной координаты.
- Развитие метода построения разрывного решения (ударной волны), возникающего в процессе опрокидывания профиля непрерывного решения, в случае начально-краевой задачи для уравнения Хопфа.

Методы исследования. Для построения главных членов асимптотических разложений задач о вращательно-симметричных течениях в цилиндрических областях с податливыми границами используются асимптотические методы, позволяющие получать на основе базовых уравнений Навье–Стокса, с использованием лагранжева подхода теории мелкой воды, приближения, учитывающие вязкость и вращение жидкости. В случае исследования задач с иррегулярными границами используются обычные асимптотические методы, позволяющие построить линейные уравнения, и в случае соответственно выбранной вязкости жидкости, зависящей от координат, построить точные решения.

Для исследования уравнений, определяющих главные члены асимптотики, использованы методы теории квазилинейных гиперболических уравнений, вариант метода годографа на основе законов сохранения и аналитически-численные методы редукции уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, методы математической физики, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (для изучения структуры течения), численные методы (в частности, метод конечных объемов и метод конечных элементов).

Для проведения вычислительного эксперимента используются пакет Maple, а также реализованные на языках FreeFem++, Pascal, Python программы для численного интегрирования рассматриваемых задач.

Научная новизна.

1. Построена новая задача (на основе теории мелкой воды) для определения главных членов асимптотического разложения в предполо-

жении о частично безвихревом течении, описывающая вращательно-симметричное течение жидкости в цилиндрической области с податливыми границами. Рассмотрены различные варианты задачи. Для выбранного конститутивного соотношения, соответствующего податливой статически равновесной упругой границе, позволяющего замкнуть асимптотические уравнения, в бездиссипативном приближении проведено детальное построение непрерывного решения, ударных волн и волновых фронтов. Для различных параметров задачи дан анализ свойств асимптотического разложения, в частности, доказано сохранение решением периодичности в случаях периодичности начальных или краевых условий.

2. Построена задача для определения главных членов асимптотического разложения квазистационарного турбулентного течения в цилиндрической области с иррегулярной границей, на некоторых участках которой условие прилипания заменено кинематическим условием. Построено точное решение (линейной) задачи. Показано, что для некоторого заданного класса вязкостей жидкости, зависящих от координат, в окрестности областей границы с отрицательной кривизной возникает вихревая структура течения. Приведен анализ структуры течения и указано влияние параметров задачи на различные свойства течений.
3. Модифицирован аналитически-численный метод построения решения системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, использующий метод годографа на основе закона сохранения. Модификация метода позволяет при решении задачи с начальными данными (в начальный момент времени) строить явные решения не только на линиях уровня постоянного времени, но и для линий уровня постоянной координаты, не производя существенных изменений метода, в частности, не строя новую функцию Римана–Грина.
4. Улучшен метод построения разрывного решения (ударной волны), возникающего в процессе эволюции при опрокидывании профиля решения начально-краевой задачи для уравнения Хопфа.

На защиту выносятся следующие результаты и положения.

1. Построение (на основе теории мелкой воды) главных членов асимптотических разложений задачи о вращательно-симметричном течении в цилиндрической области с податливыми границами.
2. Результаты аналитического и численного исследования бездиссипативного варианта уравнений для начальной, краевой и начально-краевой задач в случае податливых стенок области.
3. Построение главных членов асимптотических разложений задачи о квазистационарном вращательно-симметричном течении в цилиндрической области с иррегулярными границами в случае вязкости, зависящей от координат.
4. Результаты аналитического и численного исследования структуры турбулентного квазистационарного течения. Доказательство образования вихрей в окрестности участков границы, имеющих отрицательную кривизну, для некоторого класса вязкостей, зависящих от координат.
5. Результаты построения разрывного решения, возникающего в процессе опрокидывания профиля непрерывного решения, в случае начально-краевой задачи для уравнения Хопфа.
6. Модификация аналитически-численного метода решения задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, позволяющего строить и исследовать решение на линиях уровня постоянного времени и постоянной координаты.
7. Результаты вычислительных экспериментов для задач, представленных в диссертационной работе.

Теоретическая и практическая значимость работы. Исследование посвящено асимптотическому описанию вращательно-симметричных течений в цилиндрических областях с податливыми границами (в случае умеренных скоростей) и иррегулярными границами (в случае квазистационарных течений жидкости с вязкостью, зависящей от координат).

Полученные результаты могут быть использованы для исследования различных процессов, важных для развития технологий в биологии, химии, медицине, в частности, гемодинамике. Работа имеет теоретическую направленность и востребована для исследования задач в области линейной и нелинейной гидродинамики. Развита аналитические, асимптотические и численные методы построения и исследования задач о течениях жидкости, решений квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, построения решений типа ударных волн и волновых фронтов. Применяемые подходы могут быть использованы (и используются) при разработке специальных курсов для студентов, магистров и аспирантов физико-математических специальностей.

Достоверность. Корректная постановка задачи, применение обоснованных и надежных методов исследования и решения приведенных задач обуславливают достоверность полученных результатов, которые нашли применение в научно-исследовательских разработках кафедры вычислительной математики и математической физики института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ в рамках выполнения проектов № 14.A18.21.0873 «Математическая гидродинамика в областях со сложной границей» (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 2009–2013 гг.), № 8832 «Моделирование процессов образования структур применительно к задачам о течениях жидкости и математической биологии» (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 2009–2013 гг.), № 1.5139.2011 «Фундаментальные проблемы вихревой и волновой динамики» в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (2011–2013 гг.), № 213.01-24/2013-69 «Развитие аналитических, асимптотических и численных методов математической гидродинамики» (Грант Южного федерального университета, 2014 г.), № 2014/174 Базовая часть государственного задания в сфере научной деятельности Министерства образования и науки РФ «Проблемы математической гидродинамики: пространственно-временные структуры и неустойчивости течений в простых и сложных жидких сплош-

ных средах» (2015–2016 гг.), 1.5169.2017/8.9. Базовая часть государственного задания Министерства образования и науки РФ «Фундаментальные и прикладные задачи математического моделирования» (2017–2019 гг.).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

XV Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 04–07 декабря 2011 г., г. Ростов-на-Дону

XVI Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 16–19 октября 2012 г., г. Ростов-на-Дону

XVII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 14–17 октября 2014 г., г. Ростов-на-Дону

Международная конференция «Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов», 05–09 октября 2015 г., г. Ростов-на-Дону

XVIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 07–10 ноября 2016 г., г. Ростов-на-Дону

VII Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», 23–28 апреля 2017 г., г. Ростов-на-Дону

VIII Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», 22–27 апреля 2018 г., г. Ростов-на-Дону

XIX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 15–18 октября 2018 г., г. Ростов-на-Дону

IX Международная конференция «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis», 21–26 апреля 2019 г., г. Ростов-на-Дону

XX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 18–21 июня 2020 г., г. Ростов-на-Дону

Международная конференция 2020 International Conference on «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» (PHENMA 2020), March

26–29, 2021, Kitakyushu, Japan

XXX Научная конференция «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития», 13–15 апреля 2023 г., г. Ростов-на-Дону

XVII Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», 28 мая–01 июня 2023 г., пос. Дивноморское

Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры вычислительной математики и математической физики института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета.

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты опубликованы в 28 работах: [24, 28, 33, 34, 49–71, 134], из них [24] опубликована в журнале, индексируемом в базах Scopus и Web of Science, и [33, 49, 50, 64, 67] опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий ЮФУ и Перечень рекомендованных ВАК РФ для публикации результатов диссертационных исследований.

Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Степень разработанности темы. Исследование всех построенных и представленных асимптотических разложений в диссертационной работе выполнено полностью. Метод, разработанный для решения, можно считать завершенным, по крайней мере, для тех целей, которые ставились в работе.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, четыре главы, заключение, список литературы и приложения. Общий объем диссертации 150 страниц, включая 28 рисунков и 4 приложения. Список литературы содержит 148 наименований.

Во Введении приведен краткий обзор содержания работы, обоснована актуальность темы, изложены цели работы и методы исследования, представлена структура работы.

Глава 1 диссертационной работы содержит обзор состояния проблемы

и методов исследования — в § 1.1 обзор проблемы для течений в трубах (каналах) с податливыми границами, а в § 1.2 обзор проблемы для квазистационарных турбулентных течений в трубах. Некоторое внимание в § 1.1 уделяется обзору литературы по гемодинамике, в которой часто возникают задачи о течениях в областях с податливыми границами. В § 1.2 обзор, в основном, посвящен литературе, в которой обосновывается выбор зависимостей турбулентной вязкости от координат и выбор краевых условий. В § 1.3 обсуждаются основные методы построения главных членов асимптотических разложений и методы исследования для задач, решаемых в диссертационной работе.

Глава 2 диссертационной работы посвящена построению асимптотики и построению решений для задачи о течении в области с податливыми границами. Асимптотические уравнения конструируются на основе лагранжева подхода теории мелкой воды. В § 2.1 приведены основные уравнения (Навье–Стокса), на основе которых строится асимптотика, сформулированы краевые условия и ключевое дополнительное предположение об отсутствии азимутальной компоненты вихря скорости. Непосредственное построение асимптотического разложения приведено в § 2.2. Вводится функция тока (§ 2.2.1), выбираются порядки малости по малому параметру ε (относительный размер длинной цилиндрической области) основных переменных и параметров задачи, производится упрощение уравнений (§ 2.2.2) и, в соответствии с лагранжевым подходом теории мелкой воды, рассматриваются уравнения для величин на границе области (§ 2.2.3). Непосредственно асимптотическая (незамкнутая) базовая задача, в которой учтены эффекты вязкости и вращение жидкости в азимутальном направлении, приведена в § 2.2.4. В § 2.2.5 обсуждается выбор конститутивных соотношений для замыкания задачи. В бездиссипативном приближении асимптотические уравнения представляют собой систему квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка, для которых в § 3 дана постановка задачи для исходных переменных (§ 3.1) и для инвариантов Римана, к которым приводится базовая задача (§ 3.2). В § 4 описано

построение решения при помощи метода годографа на основе закона сохранения — построение двухпараметрического неявного решения (§ 4.1.1) и явного решения на линиях уровня неявного решения (§ 4.1.2, § 4.1.3). В § 4.1.4 сформулированы и доказаны некоторые утверждения о периодичности решений. Исследованию задачи при специальном конститутивном соотношении посвящен § 5, в котором построены решения начальной и краевой задач (§ 5.1) и начально-краевой задачи (§ 5.2). В § 5.3, § 5.4 указано решение в случае ударных волн и волновых фронтов, а в § 6 детально описано поведение сильного разрыва решения. Результаты вычислительных экспериментов приведены в § 7 для начально-краевой задачи в случае несогласованных начальных и краевых условий (ударные волны, § 7.1, § 7.3), согласованных условий (волновые фронты, § 7.2). В § 7.4 для конкретных параметров продемонстрировано возникновение и поведение сильного разрыва решения.

Глава 3 посвящена построению и исследованию главных членов асимптотических разложений задачи о квазистационарном вращательно-симметричном течении в бесконечном цилиндрическом канале с иррегулярными стенками. Базовые уравнения, описывающие течение несжимаемой жидкости с переменной вязкостью, и постановка задачи для которой строится асимптотика, приведены в § 8.1. Главные члены асимптотики построены в § 8.2. Осуществляется выбор малости параметров, кинематическая вязкость выбрана зависящей от радиальной и осевой координаты таким образом, чтобы исключить возникновение сингулярностей скорости на границе области. В качестве краевого условия на боковой границе цилиндра выбрано кинематическое условие, соответствующее непроницаемости границы для жидкости. Предполагается, что классическое условие прилипания выполнено лишь на прямолинейных участках границы. Для участков границы, не являющихся прямолинейными, никаких дополнительных условий, кроме кинематического условия, не задается. В § 9 в аналитическом виде получено решение для асимптотической задачи, и указаны его особенности. Структура течения детально исследована в § 10 — в случае по-

чти произвольной вязкости в § 10.1, § 10.2. В § 10.3 рассмотрены варианты границ — прямолинейная граница с переменной и постоянной шероховатостью. Показано, что при любом расходе жидкости в областях, в которых кривизна участков боковой границы цилиндра отрицательна, в стационарном течении имеются тороидальные вихри. Наконец, в § 11 приведены результаты расчетов, точнее визуализация точных решений, а также в § 11.1, с целью сравнения с асимптотическими решениями, представлены результаты расчетов методом штрафов при помощи метода конечных элементов задачи для полных двумерных уравнений Навье–Стокса.

В главе 4 приведено сравнение результатов расчетов решения начально-краевой задачи для системы гиперболических уравнений с результатами, полученными аналитически-численным методом в § 7.1–§ 7.3 и результатами, полученными на основе прямого численного метода — метода конечных объемов с использованием HLL аппроксимации. В § 12.1 описана HLL аппроксимация применительно к исходной задаче. В § 12.2, § 12.3 приведены расчеты и сравнения результатов метода конечных объемов и аналитически-численного метода в случае конститутивного соотношения вида $P \sim S^2$, а в § 12.4, § 12.5 — результаты расчета методом конечных объемов для соотношения $P \sim S^{2\beta}$, $\beta \neq 1$. Влияние вращения на поведение течения жидкости численно исследовано в § 13.

В Заключение изложены основные результаты и выводы диссертационной работы.

Приложения содержат детальный вывод некоторых громоздких соотношений, используемых в диссертационной работе, — динамические условия на свободной границе (Приложение А), соотношения для функции тока (Приложение В), уравнения метода осреднения (Приложение С), а также вспомогательные материалы — связь между размерными и безразмерными параметрами (Приложение D).

Глава 1

Состояние проблемы и методы исследования

Цель главы — обзор задач, методов решения и исследования проблем, рассмотренных в диссертационной работе. В § 1.1 приведен обзор литературных источников, посвященных проблеме исследования вращательно-симметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечных цилиндрических областях с податливой (мягкой, compliant) боковой границей, а обзор источников о течениях жидкости с переменной вязкостью в бесконечных областях с шероховатыми границами дан в § 1.2. Обзор методов построения решения для соответствующих задач представлен в § 1.3.

§ 1 Современное состояние проблемы

Приведен краткий обзор задач о вращательно-симметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических областях. В § 1.1 обсуждаются задачи для сравнительно медленных течений в областях с податливой границей (в частности, используемых в гемодинамике), а в § 1.2 основное внимание уделяется быстрым (турбулентным) течениям, выбору граничных условий, выбору вязкости жидкости, зависящей от координат.

§ 1.1 Течения в трубах с податливыми границами

Построению и исследованию уравнений, описывающих поведение жидкости в трубах с податливыми стенками, посвящено большое количество работ. Под трубой с податливой стенкой (compliant tube) понимается цилиндрическая область, боковая поверхность которой считается свободной

границей, на которой выполнены кинематическое условие (граница движется вместе с жидкостью) и некоторые динамические условия.

Значительный интерес к указанной типично гидродинамической задаче связан в первую очередь с возможностью ее использования (при различных существенных упрощениях) для моделирования течений в крупных кровеносных сосудах, которому посвящено значительное количество работ (см, например, [5, 87, 89, 91, 95, 98–101, 108–110, 121, 127, 130, 136, 146]) и, в частности, монографий [36, 48, 104, 105, 123]. Начиная, по-видимому, с работы [91] (со ссылкой на [145]), для конструирования уравнений движения жидкости в трубе, в том числе с податливой стенкой, используется метод осреднения. Продолжением тематики работы [91] являются перечисленные выше работы (см. также ссылки в работах Canic S. с соавторами). Заметим, что практически такая же модель построена в [48, с. 72, 73] на основе феноменологических соображений, и позже частично исследована в [103, 111]. Наиболее полно способ построения модели на основе метода осреднения представлен в [99]. Аналогичные результаты получены также в [110]. В работах [87, 89, 91, 98, 100, 101, 108–110, 121] замыкание уравнений метода осреднения осуществляется путем выбора соответствующих определяющих соотношений и дополнительных гипотез о средних величинах (см. подробнее Приложение С).

В представленной диссертационной работе используется иной подход к исследованию задачи о течении в области с податливой стенкой. На основе теории уравнений мелкой воды для вращательно-симметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной цилиндрической области, характерный размер которой в осевом направлении много больше характерного размера в радиальном направлении, строятся (и исследуются) уравнения для определения главных членов асимптотических разложений. Используется разложение решения по малому параметру ε (отношение размеров) с последующим рассмотрением уравнений для величин на свободной поверхности области. Иными словами, используется лагранжев подход теории мелкой воды детально описанный, например, в [47, с. 32–39]. Это поз-

воляет получать асимптотические уравнения различного уровня сложности — (i) систему двух квазилинейных гиперболических уравнений (аналог классических уравнений мелкой воды), (ii) аналог уравнений Буссинеска (второе приближение теории мелкой воды) (см., например, [37, с. 19–23, 45–51], [47, с. 36–38]), а также (iii) амплитудное уравнение, описывающее нелинейные конечные возмущения линейных волн (уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса). Заметим, что один из недостатков метода осреднения заключается в невозможности восстановления структуры течения внутри области в исходных величинах (скорости, давления) по их средним значениям, тогда как уравнения типа мелкой воды более «гибкие» в том смысле, что позволяют это сделать.

Важной проблемой, возникающей при построении уравнений, как на основе метода осреднения, так и в случае теории типа мелкой воды, является выбор для замыкания уравнений конститутивного соотношения, связывающего давление P и площадь S сечения области. Для этого, обычно, используют динамическое условие на границе области. Как правило, зависимость $P = P(S)$ выбирается на основе полуэмпирических гипотез (применительно к течению крови см. [48, 89, 91, 98–101, 110, 111], а также [87, 109], в которых, помимо различных предлагаемых зависимостей, рассмотрено моделирование кровотока при помощи эквивалентных электрических схем). Заметим, что условие для замыкания уравнений в некоторых случаях можно получить, рассматривая статическое равновесие в радиальном направлении упругой цилиндрической оболочки (см., например, [109, формула (9)]). Также возможно рассматривать упругие или вязко-упругие стенки трубы. Такие варианты уравнений имеются, например, в [6, 7, 40, 41, 83, 121, 125–128, 140]. В этом случае, вместо алгебраической зависимости $P = P(S)$, возникают некоторые дифференциальные уравнения, описывающие взаимодействие жидкости с упругими или вязко-упругими границами. Такие уравнения являются существенно более сложными, и для их исследования, как правило, приходится применять численные методы.

Конечно, для исследования течения жидкости в областях с податливы-

ми стенками используются методы, отличные от асимптотических методов осреднения и теории мелкой воды. В частности, в [88, 116] применен метод Галеркина непосредственно для исходных уравнений. При описании пульсирующих течений в основные уравнения включаются дополнительные источники, и проводятся численные расчеты (см., например, [1, 75, 81]). При исследовании вращательных течений (непосредственно в задаче о течении крови в сосудах с винтовой анизотропией механических свойств стенки) применяются методы теории пограничного слоя [2, 4].

§ 1.2 Турбулентные течения жидкости с переменной вязкостью

Подробное изложение способов описания турбулентных течений имеется, например, в [85, гл. XVIII], [46, §§3–5]. Здесь, в основном, в связи с решаемыми в диссертационной работе задачами, фокусируем внимание лишь на проблемах, связанных со способами задания краевых условий (в частности, учета шероховатости границ) и выбором зависимости турбулентной кинематической вязкости жидкости от координат (с целью предотвращения сингулярностей скорости течения).

§ 1.2.1 Граничные условия проскальзывания

При выборе краевых условий на границе области течения (в частности, в длинных цилиндрических областях) в качестве краевых условий, взамен классических условий прилипания вязкой жидкости, можно задавать условия проскальзывания Навье. Такие условия в случае неподвижной непроницаемой границы приведены, например, в [92] (см. также обзоры [117], [30, с. 37–40]). В [117] рассматриваются различные механизмы прилипания жидкости к твердой стенке и, в частности, вводится понятие слоя прилипания, а также приводится большое количество экспериментальных данных о таком слое. В работах [90, 92, 93, 122, 135] (см. также цитируемую в них литературу) рассматривается обобщенное тензорное условие Навье, показано, как смачиваемость и шероховатость поверхности влияет на условия прилипания. Экспериментальному определению параметров

для граничного условия Навье посвящена работа [144] (см. также обзор экспериментов в [107], указывающих на сильное влияние гидрофобности и шероховатости поверхности на выбор параметров краевых условий). Укажем работу [129], в которой на основе метода молекулярной динамики исследуется условие прилипания жидкости на крышке движущейся полости и показывается, что использование условия Навье в некоторых случаях приводит к нефизическим эффектам.

В связи с вышесказанным, особенно касающемся шероховатости, в диссертационной работе в качестве граничного условия выбирается «предельный вариант» условий Навье — отказ от условий прилипания на «непрямолинейных» (имеющих кривизну) неподвижных непроницаемых для жидкости шероховатых участках границы. На таких участках задается лишь кинематическое условие (типичное для свободной границы), которое в случае неподвижной границы эквивалентно условию непроницаемости. На прямолинейных участках шероховатой границы возможно сохранять обычные условия прилипания (подробнее см. § 8, соотношения (8.16)–(8.21)).

§ 1.2.2 Кинематическая турбулентная вязкость

Достаточно часто (см., например, [46, с. 77–84, 222–291], [85, гл. XVIII–XX], а также [29, с. 147–150]) при полуэмпирическом описании турбулентности коэффициент кинематической вязкости (турбулентной) выбирается зависящей от координат (более точно, от положения точки жидкости по отношению к границе области). Идея такого выбора вязкости принадлежит Буссинеску (1877) и основана на экспериментальных наблюдениях. В классическом варианте для прямолинейного канала при логарифмическом профиле скорости и линейной зависимости касательного напряжения от расстояния до стенки вязкость является функцией квадрата расстояния. При таком выборе вязкости на границах имеются сингулярности скорости течения, для предотвращения которых вводится шероховатость стенки при помощи феноменологического параметра шероховатости [85, гл. XX]. Существует большое количество теорий и полуэмпирических со-

отношений для его определения (см. краткий обзор в [29, стр.147–150], а также [94, 97, 112, 115, 124, 141], [46, с. 77–84, 222–291], [44, §§42–44]).

Детальное исследование (и обоснование) выбора зависимости вязкости от координат содержится в работах [45, 86]. В [8, 84] активно использована идея Буссинеска. Использование вязкости, зависящей от координат, при описании течений в русловых потоках рек приводит к хорошему согласию с экспериментами (см., например, [9, 131], а также [29]).

§ 1.3 Методы исследования решений

Приведем краткий обзор основных методов, использованных для построения решений и исследования свойств задач, которые, в той или иной мере, представлены в диссертационной работе.

Для численного исследования течений в цилиндрических областях, как правило, применяются прямые численные методы. Укажем ряд работ, в которых применительно непосредственно к течению крови использованы обычные конечно-разностные методы [39, 140], конечно-разностные методы на основе дифференциальных приближений [39], конечно-разностные схемы Лакса–Вендрофа [95, 109] (см., например, [73, с. 444–478]), метод конечных элементов, в частности, с использованием схем Тейлора–Галеркина второго порядка [101, 106, 110, 121], метод конечных объемов [1, 75, 116, 127], в частности, с использованием TVD приближений, спектрально-разностный метод Галеркина [130]. Работы [87, 89, 91, 98–100, 108–111, 121, 140] посвящены исследованию системы двух гиперболических уравнений, которые определяют главные члены асимптотики задачи о течении жидкости в цилиндрической области. В этих работах, помимо численных расчетов, содержатся необходимые сведения из теории гиперболических уравнений и получены всевозможные оценки решений (например, см. оценки решений в [98, 100]) на основе результатов классических работ (см., например, [73, 80, 96, 118, 119]).

Детальное описание численных методов непосредственно для гиперболических уравнений (а именно такие уравнения описывают в диссертаци-

онной работе поведение главных членов асимптотики) имеется в [38, 42, 76, 113, 132, 142, 143], [29, с. 167–179], как правило, это различные модификации метода конечных объемов, а также см. монографию [74], в которой для решения задач газовой динамики применяются специальные разностные методы (введение массовых переменных, движущиеся лагранжевы сетки и т. д.), пакет программ для решения методом конечных элементов описан, в частности, в [26, 27, 114].

Недостатком прямых численных методов является аппроксимация гиперболических уравнений некоторыми конечно-разностными приближениями и, как следствие, возникновение погрешностей аппроксимации нелинейных уравнений, возможно появление сеточной диссипации (вязкости) и/или дисперсии. Свободным от указанных недостатков является аналитически-численный метод решения гиперболических уравнений на основе варианта метода годографа, развитый в [31] (первоначально вариант метода годографа на основе закона сохранения предложен в [133], другие варианты метода годографа см. в [73, с. 33, 34] (классический), [82] (обобщенный), а также [16], где показана их эквивалентность в случае системы двух уравнений). Метод не связан с обычными численными методами, используемыми для решения квазилинейных уравнений — ни с конечно-разностными методами, ни с методом конечных элементов, ни с методом конечных объемов.

Численно-аналитический метод позволяет трансформировать задачу Коши для системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод является точным в том смысле, что никакие аппроксимации не используются, и погрешность возникает только на этапе численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод является точным в том смысле, что никакие аппроксимации не используются, и погрешность возникает только на этапе численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Одно из преимуществ метода заключается в том, что начальные данные (начальные, краевые и

начально-краевые условия) могут быть негладкими и разрывными (см., например, [21, 22]). Эффективность метода продемонстрирована в ряде работ [14, 16–19, 31, 32, 137–139] при решении уравнений мелкой воды, солитонного газа, электрофореза, бездисперсионного уравнения Шредингера и т.д.

Отметим, что именно для этого метода в диссертационной работе получена новая модификация метода (см. подробнее в § 4.1.3), позволяющая без существенных изменений алгоритма решения для линий уровня постоянного времени получать решение для линий уровня постоянной координаты, тогда как ранее для это приходилось решать дополнительные уравнения в частных производных.

Методы, использованные для построения и исследования задачи, описывающие квазистационарные турбулентные течения, ввиду линейности задачи, не являются какими-либо уникальными — для решения использованы стандартные приемы уравнений математической физики (см., например, [43, 78]), а для исследования структуры течений — качественные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [3]) в сочетании с численными методами интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Глава 2

Течения в цилиндрической области с податливыми боковыми границами

Цель главы — построение и исследование, включая вычислительный эксперимент, главных членов асимптотических разложений для задачи, описывающей вращательно-симметричные течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечных цилиндрических областях с податливой (мягкой, compliant) боковой границей. Задача для определения главных членов асимптотических разложений получена на основе теории мелкой воды в § 2. Уравнения и соотношения, на основе которых строятся главные члены асимптотики указаны в § 2.1. Непосредственно построение уравнений содержится в § 2.2 — введена функция тока, выбран малый параметр ε (относительный размер вращательно-симметричной области) и найдено решение недоопределенной задачи для функции тока, выбраны порядки малости по ε параметров и, в зависимости от такого выбора, произведено упрощение уравнений. Уравнения, приведенные в § 2.2.4, замыкаются при помощи некоторых конститутивных соотношений, связывающих давление внешней среды и размеры области (§ 2.2.5).

Основное внимание фокусируется на системе (2.64), (2.65), описывающей течение невязкой жидкости при отсутствии азимутальной скорости вращения. В качестве конститутивного соотношения выбрано (2.67). В этом случае система уравнений является системой квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка. В § 3 дана постановка задачи для исходных переменных (§ 3.1) и для инвариантов Римана,

к которым приводятся уравнения (§ 3.2). В § 4 описано построение решения при помощи метода годографа на основе закона сохранения — построение двухпараметрического неявного решения (§ 4.1.1) и явного решения на линиях уровня неявного решения (§ 4.1.2, § 4.1.3). В § 4.1.4 сформулированы и доказаны некоторые утверждения о периодичности решений. Исследованию задачи при специальном конститутивном соотношении (5.5) посвящен § 5, в котором построены решения начальной и краевой задач (§ 5.1) и начально-краевой задачи (§ 5.2). В § 5.3, § 5.4 указано решение в случае ударных волн и волновых фронтов, а в § 6 детально описано поведение сильного разрыва решения. Результаты вычислительных экспериментов приведены в § 7 для начально-краевой задачи в случае несогласованных начальных и краевых условий (ударные волны, § 7.1, § 7.3), согласованных условий (волновые фронты, § 7.2). В § 7.4 для конкретных параметров продемонстрировано возникновение и поведение сильного разрыва решения.

§ 2 Уравнения для главных членов асимптотики

На основе теории мелкой воды строим уравнения для определения главных членов асимптотических разложений задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости во вращательно-симметричной области со свободной боковой границей, используя уравнения Навье–Стокса с дополнительным предположением (2.11) об азимутальной компоненте вихря скорости (§ 2.1). Для непосредственного построения уравнений в § 2.2 применяем лагранжев подход — вводим функцию тока (в классическом варианте потенциал течения), выбираем относительный размер вращательно-симметричной области в качестве малого параметра ε , получаем решение недоопределенной задачи для функции тока в виде формальных рядов по параметру ε (§ 2.2.1), упрощаем уравнения за счет выбора порядков малости параметров задачи (§ 2.2.2), рассматриваем уравнения для величин на границе области. Итогом является (незамкнутая) система уравнений (2.64)–(2.66), в которой учтены эффекты вязкости и вращение жидкости в азимутальном направ-

лении (§ 2.2.4). В § 2.2.5 обсуждается выбор конститутивных соотношений для замыкания уравнений.

§ 2.1 Основные уравнения и соотношения

Рассматриваем вращательно-симметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной цилиндрической области $\mathbb{C}$ (см. рис. 2.1)

$$\mathbb{C} = \{(r, z) : 0 \leq r \leq R(z, t), -\infty < z < +\infty\}, \quad (2.1)$$

которая имеет свободную границу $r = R(z, t)$ (боковая поверхность).

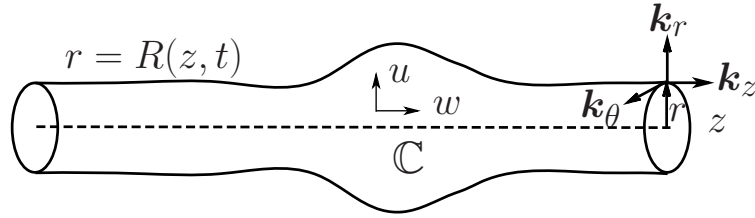


Рис. 2.1. Схема области, $\mathbf{k}_r$, $\mathbf{k}_\theta$, $\mathbf{k}_z$ — орты цилиндрической системы координат (r, θ, z) , $r = R(z, t)$ — уравнение свободной поверхности, u , w — радиальная и осевая компоненты скорости $\mathbf{v} = (u, 0, w)$

Для описания течения используем уравнения Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , которые в случае вращательной симметрии в безразмерных переменных имеют вид (см., например, [44, с. 76])

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} = -p_r + \mu \left(\frac{1}{r}(ru_r)_r - \frac{u}{r^2} + u_{zz} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} = \mu \left(\frac{1}{r}(rv_r)_r - \frac{v}{r^2} + v_{zz} \right), \quad (2.4)$$

$$\frac{dw}{dt} = -p_z + \mu \left(\frac{1}{r}(rw_r)_r + w_{zz} \right), \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} = ()_t + u()_r + w()_z. \quad (2.6)$$

Здесь u — радиальная, v — азимутальная, w — осевая компоненты скорости течения $\mathbf{v} = (u, v, w)$, p — давление, μ — кинематическая вязкость жидкости.

Приведем также выражение для вихря скорости в цилиндрической системе координат (при вращательной симметрии)

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}, \quad \text{rot}_r \mathbf{v} = -v_z, \quad \text{rot}_\theta \mathbf{v} = u_z - w_r, \quad \text{rot}_z \mathbf{v} = \frac{1}{r}(rv)_r, \quad (2.7)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вихрь скорости.

На свободной поверхности $r = R(z, t)$ задаем кинематическое условие

$$R_t + wR_z = u, \quad r = R(z, t), \quad (2.8)$$

и динамическое условие, которое записываем в форме (см., например, [34, с. 97–100, 172, 179, 187–190], поверхностное натяжение отсутствует)

$$-(p - P)\mathbf{n} + \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad r = R(z, t), \quad (2.9)$$

где $\mathbb{T}$ — тензор вязких напряжений, p — давление, P — давление окружающей среды, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности.

Естественно, на оси $r = 0$ цилиндрической области требуем выполнения условий

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w_r = 0, \quad r = 0. \quad (2.10)$$

При построении главного члена асимптотических разложений считаем, что азимутальная компонента вихря скорости $\boldsymbol{\omega}$ равна нулю

$$\text{rot}_\theta \mathbf{v} = u_z - w_r = 0. \quad (2.11)$$

Подчеркнем, что именно это требование является ключевым для рассматриваемого варианта асимптотики.

Отметим также, что кинематическое условие (2.8) является ничем иным, как условием непроницаемости границы для жидкости — жидкая частица движется вместе с границей (см., например, [79, с. 96, 97]). Такую границу принято называть свободной (чаще всего, полагая внешнюю среду, например, воздухом), но, на самом деле, это просто «податливая» (или мягкая) граница — внешняя среда «подстраивается» под движение границы.

Реакция внешней среды на такое движение определяется динамическими условиями (2.9).

§ 2.2 Построение асимптотических уравнений

Рассматривая течение в цилиндрической области, характерный радиус которой много меньше характерного размера в осевом направлении, сделаем замену переменных

$$r \rightarrow \varepsilon r, \quad R \rightarrow \varepsilon R, \quad u \rightarrow \varepsilon u, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

где ε — параметр, характеризующий соотношение размеров области.

В этом случае, уравнения (2.2)–(2.6) принимают вид

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad (2.13)$$

$$\varepsilon \frac{du}{dt} - \frac{v^2}{\varepsilon r} = -\frac{1}{\varepsilon} p_r + \mu \left(\frac{1}{\varepsilon r} (ru_r)_r - \frac{u}{\varepsilon r^2} + \varepsilon u_{zz} \right), \quad (2.14)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} = \mu \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} (rv_r)_r - \frac{v}{\varepsilon^2 r^2} + v_{zz} \right), \quad (2.15)$$

$$\frac{dw}{dt} = -p_z + \mu \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} (rw_r)_r + w_{zz} \right), \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} = \left(\right)_t + u \left(\right)_r + w \left(\right)_z, \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}, \quad \text{rot}_r \mathbf{v} = -v_z, \quad \text{rot}_\theta \mathbf{v} = \varepsilon u_z - \frac{1}{\varepsilon} w_r, \quad \text{rot}_z \mathbf{v} = \frac{1}{\varepsilon r} (rv)_r. \quad (2.18)$$

В соотношениях (2.12)–(2.18) считаем, что величины u , w имеют порядок $O(1)$. Порядок величин μ , v будет выбран позднее.

Кинематическое условие (2.8), формально, не изменяется

$$R_t + wR_z = u, \quad r = R(z, t), \quad (2.19)$$

а динамические условия (2.9) после достаточно громоздких преобразований (см. Приложение А, (A.12)–(A.14)) принимают вид

$$D_n \stackrel{\text{def}}{=} -(p - P) + (\mu(2u_r - 2w_r R_z) + O(\mu\varepsilon^2)) = 0, \quad (2.20)$$

$$D_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{\varepsilon} w_r + \mu\varepsilon((2u_r - w_r R_z)R_z + u_z - 2w_z R_z - w_r R_z^2) + O(\mu\varepsilon^3) = 0, \quad (2.21)$$

$$D_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{\varepsilon} \left(v_r - \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2} \mu \varepsilon \left(-v_z R_z - \left(v_r - \frac{v}{r} \right) R_z^2 \right) + O(\mu \varepsilon^3) = 0. \quad (2.22)$$

Здесь D_n , D_z , D_τ — обозначения соответствующих условий на границе, точнее, правых частей условий, введенные для удобства изложения. Иными словами, условия (2.20)–(2.22) при помощи таких обозначений возможно записывать в краткой форме — $D_n = 0$, $D_z = 0$, $D_\tau = 0$.

Условия (2.10) на оси $r = 0$ остаются прежними

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w_r = 0, \quad r = 0. \quad (2.23)$$

Наконец, требование (2.11) принимает вид

$$\varepsilon u_z - \frac{1}{\varepsilon} w_r = 0. \quad (2.24)$$

§ 2.2.1 Функция тока

Введем функцию тока ψ

$$ru = -\psi_z, \quad rw = \psi_r. \quad (2.25)$$

Тогда, использование (2.24) и условия (2.23) для функции u приводит к задаче для определения функции тока

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \psi|_{r=0} = 0. \quad (2.26)$$

Поиск решения недоопределенной (не хватает краевого условия) задачи (2.26), которое возможно лишь с точностью до некоторой произвольной функции, в виде формального ряда по степеням ε^2 (лагранжев подход теории мелкой воды, см., например, [47, с. 32–39]), приводит к соотношению (подробное построение функции тока ψ имеется в Приложении В, (В.9))

$$\begin{aligned} \psi(r, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2 (2n+2)} \partial_z^{2n} F(z, t) = \\ &= \frac{1}{2} r^2 F(z, t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $F(z, t)$ — некоторая произвольная функция.

Радиальная и осевая скорости вычисляются при помощи (2.25), (2.27) (см. также Приложение В, (B.12), (B.13))

$$\begin{aligned} u(r, z, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{((2n)!!)^2 (2n+2)} \partial_z^{2n+1} F(z, t) = \\ &= -\frac{1}{2} r F_z(z, t) + \varepsilon^2 \frac{1}{16} r^3 F_{zzz}(z, t) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} w(r, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n}}{((2n)!!)^2} \partial_z^{2n} F(z, t) = \\ &= F(z, t) - \varepsilon^2 \frac{1}{4} r^2 F_{zz}(z, t) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (2.29)$$

§ 2.2.2 Упрощение уравнений. Выбор порядков параметров

Подстановка радиальной u и азимутальной w компонент скорости в уравнения (2.14), (2.16), с учетом (2.28), (2.29), позволяет убедиться, что члены, связанные с учетом вязкости, исчезают (см. также Приложение В, (B.14), (B.15))

$$\mu \left(\frac{1}{\varepsilon r} (ru_r)_r - \frac{u}{\varepsilon r^2} + \varepsilon u_{zz} \right) \equiv 0, \quad (2.30)$$

$$\mu \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} (rw_r)_r + w_{zz} \right) \equiv 0. \quad (2.31)$$

Это позволяет записать уравнения (2.13)–(2.16) в форме (см. также Приложение В, (B.16)–(B.19))

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad (2.32)$$

$$\varepsilon \frac{du}{dt} - \frac{v^2}{\varepsilon r} = -\frac{1}{\varepsilon} p_r, \quad (2.33)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} = \mu \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} (rv_r)_r - \frac{v}{\varepsilon^2 r^2} + v_{zz} \right), \quad (2.34)$$

$$\frac{dw}{dt} = -p_z. \quad (2.35)$$

Выбираем порядок малости по параметру ε вязкости жидкости и азимутальной скорости

$$\mu = O(1), \quad v = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.36)$$

Такой выбор соответствует сравнительно вязкой жидкости.

Напомним, что

$$u = O(1), \quad w = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.37)$$

Тогда, при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (2.34) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ заменяется уравнением

$$\mu \left(\frac{1}{r} (rv_r)_r - \frac{v}{r^2} \right) = 0, \quad (= O(\varepsilon^2)), \quad (2.38)$$

решение которого, с учетом (2.23), выбираем в виде

$$v = \omega_0 r, \quad \omega_0 = \text{const}, \quad \omega_0 = O(1). \quad (2.39)$$

Здесь ω_0 — постоянная угловая скорость твердотельного вращения жидкости в азимутальном направлении.

При этом (см. (2.18)) вихрь скорости

$$\text{rot}_r \mathbf{v} = 0, \quad \text{rot}_\theta \mathbf{v} = 0, \quad \text{rot}_z \mathbf{v} = \frac{2\omega_0}{\varepsilon}. \quad (2.40)$$

Замечание 2.1 (о порядке малости вязкости). Порядок малости вязкости можно уменьшать, например, выбирая $\mu = O(\varepsilon)$. Однако, нельзя полагать $\mu = O(\varepsilon^2)$, так как в этом случае уравнение (2.34) не преобразуется к виду (2.38), и выбор азимутальной скорости в виде (2.39) является необоснованным. $\square$

Подстановка (2.28), (2.29), (2.39) в динамические условия на границе (2.20)–(2.22) приводит к соотношениям

$$D_n \stackrel{\text{def}}{=} -(p - P) - \mu F_z + O(\mu\varepsilon^2) = 0, \quad r = R(z, t), \quad (2.41)$$

$$D_z = O(\mu\varepsilon), \quad D_\tau = O(\mu\varepsilon^3). \quad (2.42)$$

Иными словами, динамические условия (2.21), (2.22) при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены с точностью $O(\mu\varepsilon)$ и $O(\mu\varepsilon^3)$, а условие (2.20) принимает вид (2.41).

§ 2.2.3 Уравнения для величин на границе области

Одна из основных идей в конструировании уравнений типа уравнений мелкой воды заключается в построении уравнений для величин на свободной границе (см., например, [47, с. 32–39]).

Для значений функций u , w , ψ на свободной границе $r = R(z, t)$ используем обозначения

$$W(z, t) = w(R(z, t), z, t), \quad U(z, t) = u(R(z, t), z, t), \quad (2.43)$$

$$\Psi(z, t) = \psi(R(z, t), z, t).$$

Учитывая (2.27)–(2.29), имеем

$$\begin{aligned} \Psi(z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{R^{2n+2}(z, t)}{((2n)!!)^2 (2n+2)} \partial_z^{2n} F(z, t) = \\ &= \frac{1}{2} R^2(z, t) F(z, t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} U(z, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{R^{2n+1}(z, t)}{((2n)!!)^2 (2n+2)} \partial_z^{2n+1} F(z, t) = \\ &= -\frac{1}{2} R(z, t) F_z(z, t) + \varepsilon^2 \frac{1}{16} R^3(z, t) F_{zzz}(z, t) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} W(z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{R^{2n}(z, t)}{((2n)!!)^2} \partial_z^{2n} F(z, t) = \\ &= F(z, t) - \varepsilon^2 \frac{1}{4} R^2(z, t) F_{zz}(z, t) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Для дальнейшего вычисления следует определить производные функций на свободной границе, точнее, выяснить как ведет себя материальная производная d/dt на свободной поверхности $r = R(z, t)$.

Определение 2.1 (материальной производной на границе). Назовем материальной производной (вычисленной) на свободной поверхности оператор

$$\frac{D}{Dt} \equiv D_t + W(z, t) D_z, \quad (2.47)$$

где D_t , D_z — операторы полного дифференцирования по соответствующим переменным. $\square$

Поясним, что понимается под операторами «полного» дифференцирования. Действие этих операторов на соответствующие функции аналогично вычислению производных сложной функции. Например,

$$D_z \Psi(z, t) = \Psi_z(z, t), \quad (2.48)$$

однако,

$$D_z \psi(R(z, t), z, t) = \psi_r(R(z, t), z, t) R_z(z, t) + \psi_z(R(z, t), z, t). \quad (2.49)$$

Утверждение 2.1. На свободной поверхности $r = R(z, t)$ справедливы соотношения

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{r=R(z,t)} = \frac{DU}{Dt}, \quad \left. \frac{dw}{dt} \right|_{r=R(z,t)} = \frac{DW}{Dt}. \quad (2.50)$$

□.

Доказательство. Доказательство сводится к тривиальному дифференцированию с учетом кинематического условия на границе (2.8), которое, с учетом (2.43), принимает вид

$$R_t + W R_z = U. \quad (2.51)$$

Например, для U имеем

$$D_t U(z, t) = u_t(R(z, t), z, t) + u_r(R(z, t), z, t) R_t,$$

$$D_z U(z, t) = u_z(R(z, t), z, t) + u_r(R(z, t), z, t) R_z.$$

Тогда

$$D_t U + W D_z U = u_t(R, z, t) + u_r(R(z, t) R_t + W(v_z(R, z, t) + u_r(R, z, t) R_z).$$

С учетом (2.51), получим

$$D_t U + W D_z U = u_t(R, z, t) + u(R, z, t) u_r(R, z, t) + w(R, z, t) u_z(R, z, t),$$

или

$$\frac{DU}{Dt} = D_t U + W D_z U = U_t + W U_z = \left. \frac{du}{dt} \right|_{r=R(z,t)}.$$

Аналогично для функции W . □

Детальный вывод и различные соотношения для производных функций на свободной границы приведены, например, в [34, с.148–151].

Сформулируем еще одно утверждение, которое непосредственно для построения главных членов асимптотических разложений не требуется, но используется в дальнейшем при исследовании их свойств.

Утверждение 2.2. Кинематическое условие на свободной границе (2.51) имеет вид закона сохранения

$$(R^2)_t + 2\Psi_z = 0, \quad (2.52)$$

где $R^2(z, t)$ — плотность закона сохранения, $2\Psi(z, t)$ — плотность потока закона сохранения. $\square$

Доказательство. Учитывая определение функции тока (2.25) и кинематическое условие (2.51), имеем

$$\begin{aligned} \Psi_z &= D_z \psi(R(z, t), z, t) = (\psi_z + \psi_r R_z)|_{r=R(z, t)} = \\ &= (-ru + rwR_z)|_{r=R(z, t)} = R(WR_z - U) = -RR_t. \end{aligned}$$

$\square$

§ 2.2.4 Основные уравнения для главных членов асимптотики

Используя результаты § 2.2.1, § 2.2.2, § 2.2.3, получаем уравнения типа мелкой воды при помощи кинематического условия (2.51)

$$R_t + WR_z = U, \quad (2.53)$$

динамического условия (2.41)

$$-(p|_{r=R(z, t)} - P) - \mu F_z + O(\mu\varepsilon^2) = 0, \quad (2.54)$$

а также соотношения (2.39) для азимутальной скорости и уравнений (2.33), (2.35) на свободной границе с учетом (2.50)

$$v|_{r=R(z, t)} = \omega_0 R, \quad (2.55)$$

$$\varepsilon^2 \frac{DU}{Dt} - \frac{v^2}{r} \Big|_{r=R(z,t)} = -p_r|_{r=R(z,t)}, \quad (2.56)$$

$$\frac{DW}{Dt} = -p_z|_{r=R(z,t)}. \quad (2.57)$$

Дифференцируя (2.54) по z , имеем

$$-p_r|_{r=R(z,t)}R_z - p_z|_{r=R(z,t)} + P_z - \mu F_{zz} + O(\mu\varepsilon^2) = 0. \quad (2.58)$$

Исключая при помощи (2.56), (2.57) производные p_r , p_z , получим

$$\left(\varepsilon^2 \frac{DU}{Dt} - \omega_0^2 R \right) R_z + \frac{DW}{Dt} + P_z - \mu F_{zz} + O(\mu\varepsilon^2) = 0. \quad (2.59)$$

Ограничиваясь членами порядка $O(\varepsilon^2)$, запишем с учетом (2.45), (2.46) выражения для U , W

$$U(z, t) = -\frac{1}{2}R(z, t)F_z(z, t) + O(\varepsilon^2), \quad (2.60)$$

$$W(z, t) = F(z, t) + O(\varepsilon^2). \quad (2.61)$$

В частности, это означает, что, с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$, функции F и W совпадают.

Осуществляя всевозможные подстановки, запишем уравнения для главного члена асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ (уравнения первого уровня по терминологии теории мелкой воды)

$$R_t + WR_z + \frac{1}{2}RW_z = 0, \quad (2.62)$$

$$W_t + WW_z = -P_z + \mu W_{zz} + \omega_0^2 RR_z, \quad (2.63)$$

или

$$S_t + WS_z + SW_z = 0, \quad S = R^2, \quad (2.64)$$

$$W_t + WW_z = -P_z + \mu W_{zz} + \frac{1}{2}\omega_0^2 S_z, \quad (2.65)$$

$$R_{zzz} = \frac{3}{8}S^{-5/2}(S_z)^3 - \frac{3}{4}S^{-3/2}S_z S_{zz} + \frac{1}{2}S^{-1/2}S_{zzz}. \quad (2.66)$$

Здесь S — площадь сечения цилиндрической области (с точностью до множителя π).

Система уравнений (2.62), (2.63) или (2.64)–(2.66) не является замкнутой, так как величина давления окружающей среды P не определена. Требуется некоторое конститутивное соотношение (уравнение состояния), задающее связь P с S , W (и возможно z , t).

Обратим внимание на то, что учет вязких членов в уравнениях (2.62), (2.63) или (2.64)–(2.66) осуществляется только за счет динамического условия на свободной границе. При $\mu = 0$, $\omega_0 = 0$ точно такие же уравнения получатся если за основу брать не уравнения Навье–Стокса, а уравнения Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости.

§ 2.2.5 Конститутивные соотношения

Система уравнений (2.64)–(2.66) при $\mu = 0$ и $P = P(W, S)$ (то есть при отсутствии вязкости) является системой квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. В случае $\omega_0 = 0$, то есть при отсутствии азимутальной скорости, $P = P(S)$, такая система, в частности, применительно к описанию течения крови, исследована в [89, 91, 99, 100, 109], в которых, помимо построения решения, обсуждаются также различные варианты зависимости $P = P(S)$. Более общие зависимости, например, $P = P(S, W, z, t)$, как правило, не рассматриваются.

Достаточно часто используется полиномиальная зависимость (хорошо согласующаяся с экспериментами)

$$P(S) = \frac{\delta^2}{2\beta} S^{2\beta} + \text{const}, \quad \beta > 0, \quad \delta = 1, \quad (2.67)$$

где δ , β — некоторые константы (множитель δ выбран равным единице, так как в общем случае легко удаляется путем масштабирования переменных), наличие константы никак не влияет на результат, так как уравнения содержат лишь производную P_z , и в дальнейшем константу опускаем.

Наиболее распространенным является выбор параметра $\beta = 1/4$. В случае $\beta = 1/2$ уравнения совпадают с уравнениями классической мелкой воды (см., например, [47, с. 36]). С математической точки зрения (и не только), особый интерес представляет частный вариант конститутивного

соотношения (2.67) при $\beta = 1$

$$P(S) = \frac{1}{2}S^2. \quad (2.68)$$

Дело в том, что в этом случае практически все формулы, необходимые для построения решения, записываются в явной форме.

Выбор конститутивного соотношения в виде $P = P(S)$, помимо простоты, объясняется гипотезой о том, что наиболее сильно внешняя среда реагирует на изменение размеров цилиндрической области. Такая зависимость является полуэмпирической — полученной на основе экспериментов, какие-либо иные разумные соображения по поводу выбора соотношения (2.67) отсутствуют, по крайней мере, в настоящее время.

Обратим внимание на то, что, формально, член $1/2\omega_0^2 S_z$, описывающий вращение жидкости, можно включить в давление P

$$\mathcal{P}(S) = P(S) - \frac{1}{2}\omega_0^2 S. \quad (2.69)$$

Система квазилинейных уравнений (2.64)–(2.66) при $\mu = 0$ в случае $\mathcal{P}'(S) \geq 0$ имеет гиперболический тип, а при $\mathcal{P}'(S) < 0$ тип уравнений является эллиптическим. Иными словами, в процессе эволюции решения тип уравнений может измениться, и при $\mathcal{P}'(S) < 0$ уравнения описывают неустойчивую сплошную среду типа газа Чаплыгина (см., например, [23]).

Замечание 2.2 (о конститутивном соотношении). Зависимость вида (2.67) можно получить, например, рассматривая статическое равновесие в радиальном направлении упругой цилиндрической оболочки толщиной h_0 , диаметром r_0 , с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν (см., например, [109, формула (9)] или [1, формула (6)], а также [120])

$$P(S) = P_0 + \frac{h_0 E}{(1 - \nu^2)r_0^2}(r - r_0),$$

что, как раз, соответствует $\beta = 1/4$ в (2.67). $\square$

§ 3 Постановка задачи

Основное внимание фокусируем на системе (2.64), (2.65), описывающей течение невязкой жидкости ($\mu = 0$) при отсутствии азимутальной скорости вращения ($\omega_0 = 0$). В качестве конститутивного соотношения выбираем (2.65). В этом случае система уравнений является системой квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка. Для системы уравнений ставятся начальная, краевая и начально-краевая задачи, последняя из которых известна также как задача о распространении сигнала. Для построения решения используем метод годографа на основе закона сохранения, предварительно записывая уравнения в инвариантах Римана. В общем случае конститутивного соотношения (2.65) (при произвольном параметре β) решение строим только для начальной задачи, а в некотором частном случае ($\beta = 1$) — для всех указанных задач.

§ 3.1 Постановка задачи для исходных переменных

Для описания течения невязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической области $\mathbb{C}$ (см. (2.1) и рис. 2.1) при отсутствии вращения жидкости в азимутальном направлении используем уравнения (2.64), (2.65), полагая $\mu = 0$, $\omega_0 = 0$

$$S_t + WS_z + SW_z = 0, \quad S = R^2, \quad (3.1)$$

$$W_t + WW_z + P_z(S) = 0, \quad (3.2)$$

$$P(S) = \frac{S^{2\beta}}{2\beta}, \quad \beta > 0. \quad (3.3)$$

Здесь S — площадь сечения области $\mathbb{C}$, W — скорость течения жидкости, точнее, скорость течения на свободной боковой границе области $\mathbb{C}$, $P(S)$ — конститутивное соотношение для давления окружающей среды.

Уравнения (3.1)–(3.3) дополняем условиями

$$S(z, t)|_{\Gamma} = S^{(0)}(\tau), \quad W(z, t)|_{\Gamma} = W^{(0)}(\tau), \quad (3.4)$$

$$\Gamma = \{(z, t): z = z(\tau), t = t(\tau)\}, \quad (3.5)$$

где Γ — кусочно-гладкая ориентированная линия, параметризованная при помощи параметра τ , $S^{(0)}(\tau)$, $W^{(0)}(\tau)$ — заданные на Γ функции.

В теории квазилинейных гиперболических уравнений задачу (3.1)–(3.5) принято называть задачей Коши, независимо от вида линии Γ (см., например, [73, с. 43–47]).

Уравнения (3.1)–(3.3) при $\beta = 1/2$ совпадают с уравнениями классической мелкой воды (см., например, [47, с. 36]) или газовой динамики политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2\beta$ (см., например, [44, с. 448], [73, с. 144]).

Ограничиваемся рассмотрением трех типов контура Γ .

$$(i): \quad \Gamma = \{-\infty < z < +\infty, t = 0\}. \quad (3.6)$$

Контур соответствует начальной задаче с данными на оси z при $t = 0$.

$$(ii): \quad \Gamma = \{t \geq 0, z = 0\}. \quad (3.7)$$

Контур соответствует краевой задаче с данными на оси $t \geq 0$ при $z = 0$.

$$(iii): \quad \Gamma = \{z \geq 0, t = 0\} \cup \{t \geq 0, z = 0\}. \quad (3.8)$$

Контур соответствует начально-краевой задаче (или задаче о распространении сигнала) с данными на осях $t \geq 0$, $z \geq 0$.

Основные цели — построение классического решения задачи (3.1)–(3.5) при произвольном β для контура (i), построение классического решения, включая обобщенные решения типа ударных волн и волновых фронтов, задачи (3.1)–(3.5) для всех типов контуров (i)–(iii).

§ 3.2 Постановка задачи для инвариантов Римана

Систему уравнений (3.1), (3.2) записываем при помощи инвариантов Римана $R^1(z, t)$, $R^2(z, t)$

$$R_t^1 + \lambda^1 R_z^1 = 0, \quad R_t^2 + \lambda^2 R_z^2 = 0, \quad (3.9)$$

где $R^1(z, t)$, $R^2(z, t)$ — инварианты Римана, $\lambda^1(R^1, R^2)$, $\lambda^2(R^1, R^2)$ — характеристические направления (верхние индексы соответствуют номерам инвариантов и т. п., а не показателям степени).

Уравнения (3.9) дополняем условиями, аналогичными (3.4), (3.5),

$$R^1(z, t)|_{\Gamma} = R_0^1(\tau), \quad R^2(z, t)|_{\Gamma} = R_0^2(\tau), \quad (3.10)$$

$$\Gamma = \{(z, t) : z = z(\tau), t = t(\tau)\}, \quad (3.11)$$

где Γ — кусочно-гладкая ориентированная линия, параметризованная при помощи параметра τ , $R_0^1(\tau)$, $R_0^2(\tau)$ — заданные на Γ функции (точно так же, как и в (3.5)).

§ 3.2.1 Инварианты Римана

Техника построения инвариантов Римана хорошо известна (см., например, [73, с. 27–31]). Для системы двух квазилинейных уравнений инварианты Римана всегда существуют, однако, не всегда можно указать взаимозависимость между инвариантами Римана и исходными переменными в явном виде.

В случае (3.3) связь инвариантов Римана и исходных переменных, а также функции $\lambda^1(R^1, R^2)$, $\lambda^2(R^1, R^2)$ определяются соотношениями (см., в частности, [99, 109])

$$R^1 = W - \frac{S^\beta}{\beta}, \quad R^2 = W + \frac{S^\beta}{\beta}, \quad R^1 < R^2, \quad (3.12)$$

$$W = \frac{1}{2}(R^1 + R^2), \quad S^\beta = \frac{\beta}{2}(R^2 - R^1), \quad (3.13)$$

$$\lambda^1 = \frac{1+\beta}{2}R^1 + \frac{1-\beta}{2}R^2, \quad \lambda^2 = \frac{1-\beta}{2}R^1 + \frac{1+\beta}{2}R^2. \quad (3.14)$$

На самом деле, и в общем случае $P = P(S)$ можно указать связь инвариантов Римана с исходными переменными W , S . Однако, крайне затруднительно определить явный вид обратных зависимостей вида (3.13) и связи (3.14) (явные выражения для $\lambda^{1,2}(R^1, R^2)$), играющих важную роль в методе годографа.

В общем случае при $P = P(S)$ имеем

$$\lambda^1 = W - (SP_S(S))^{1/2}, \quad \lambda^2 = W + (SP_S(S))^{1/2}, \quad (3.15)$$

$$R^1 = W - \int^S \left(\frac{P_S(S)}{S} \right)^{1/2} dS, \quad R^2 = W + \int^S \left(\frac{P_S(S)}{S} \right)^{1/2} dS. \quad (3.16)$$

Соотношения (3.12)–(3.14) устанавливают взаимнооднозначное соответствие как между исходными переменными S , W , так и между задачами (3.1)–(3.5) и (3.9)–(3.11).

Естественно, основные цели остаются прежними — построение классического решения задачи (3.9)–(3.11) при произвольном β для контура (i), построение классического решения, включая обобщенные решения типа ударных волн и волновых фронтов, задачи (3.9)–(3.11) для всех типов контуров (ii)–(iii) ((3.6)–(3.8)).

§ 4 Построение решения задачи

Для построения решения задачи (3.9)–(3.11) в случае любого из контуров (i)–(iii) ((3.6)–(3.8)) используем метод годографа на основе закона сохранения. Метод предложен в [133] и существенно развит в [31] (см. также [11–18, 22, 25, 32, 137–139]). Метод позволяет строить неявное двухпараметрическое решение задачи Коши для гиперболических уравнений (аналитическое) и явное решение (численное) на линиях уровня неявного решения.

§ 4.1 Метод годографа

Ввиду того, что метод годографа на основе закона сохранения хорошо известен (см. [31, 133]), ограничиваемся лишь минимальными необходимыми для дальнейшего сведениями и соотношениями.

§ 4.1.1 Неявное двухпараметрическое решение

Для построения неявного двухпараметрического решения задачи (3.9)–(3.11) следует рассмотреть некоторый закон сохранения

$$\varphi_t(R^1, R^2) + \psi_z(R^1, R^2) = 0, \quad (4.1)$$

выполнить дифференцирование, с учетом (3.9) получить уравнения для функций φ, ψ

$$\psi_{R^1} = \lambda^1 \varphi_{R^1}, \quad \psi_{R^2} = \lambda^2 \varphi_{R^2}, \quad (4.2)$$

и, используя условие разрешимости уравнений, получить задачи для определения φ, ψ .

Опуская подробности (детальные построения см. в [31]), укажем, что неявное решение, зависящее от двух параметров a, b , а также функции $t = t(a, b)$, $z = z(a, b)$, необходимые для сопоставления переменных (z, t) параметрам (a, b) , записываются в форме

$$R^1(z, t) = R_0^1(b) = r^1(b), \quad R^2(z, t) = R_0^2(a) = r^2(a), \quad (4.3)$$

$$t(a, b) = \frac{1}{2}(t(a) + t(b)) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ab}} (\psi^t dt - \varphi^t dz), \quad (4.4)$$

$$z(a, b) = \frac{1}{2}(z(a) + z(b)) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ab}} (\psi^z dt - \varphi^z dz), \quad (4.5)$$

где $z(a), z(b), t(a), t(b)$ — координаты и моменты времени на кривой Γ , соответствующие значениям параметров a, b ; Γ_{ab} — часть линии Γ с направлением ориентации от параметра a до b .

Функция φ^t является решением линейной задачи

$$\varphi_{R^1 R^2}^t + A^t \varphi_{R^1}^t + B^t \varphi_{R^2}^t = 0, \quad (4.6)$$

$$(\psi^t - \lambda^1 \varphi^t)|_{R^1=r^1} = 1, \quad r^1 = R_0^1(b), \quad (4.7)$$

$$(\psi^t - \lambda^2 \varphi^t)|_{R^2=r^2} = -1, \quad r^2 = R_0^2(a), \quad (4.8)$$

$$A^t = \frac{\lambda_{R^2}^1}{\lambda^1 - \lambda^2}, \quad B^t = \frac{\lambda_{R^1}^2}{\lambda^1 - \lambda^2}. \quad (4.9)$$

Для определения функции ψ^t достаточно проинтегрировать одно из уравнений (4.2). Функция ψ^t определяется одним из соотношений

$$\psi^t(R^1, R^2) = \int_{r^1}^{R^1} \lambda^1(\tilde{R}^1, R^2) \varphi_{\tilde{R}^1}^t(\tilde{R}^1, R^2) d\tilde{R}^1 + \lambda^1(r^1, R^2) \varphi^t(r^1, R^2) + 1, \quad (4.10)$$

или

$$\psi^t(R^1, R^2) = \int_{r^2}^{R^2} \lambda^2(R^1, \tilde{R}^2) \varphi_{\tilde{R}^2}^t(R^1, \tilde{R}^2) d\tilde{R}^2 + \lambda^2(R^1, r^2) \varphi^t(R^1, r^2) - 1. \quad (4.11)$$

Для определения функций φ^z, ψ^z имеем аналогичную задачу. Формально, для записи такой задачи в соотношениях (4.6)–(4.11) достаточно произвести взаимозамены

$$t \rightleftharpoons z, \quad (\mp \varphi) \rightleftharpoons (\pm \psi), \quad \lambda^{1,2} \rightleftharpoons 1/\lambda^{1,2}. \quad (4.12)$$

При таких заменах формула (4.4) также преобразуется в (4.5) и наоборот. Заметим, что очевидность замен (4.12) следует из инвариантности уравнений (3.9), (4.1) относительно преобразований (4.12).

В [31] показано, что решение задачи (4.6)–(4.8) тесно связано с построением явного выражения функции Римана–Грина для линейного уравнения в частных производных второго порядка. Хотя общий алгоритм построения явной функции Римана–Грина отсутствует, имеется большое количество примеров конкретных задач, для которых, решая задачу (4.6)–(4.8), функцию φ^t можно записать в явной форме (см. в частности, [14, 16–19, 31, 32, 137], а также ряд работ [35, 102, 147, 148], в которых приведена функция Римана–Грина и способы ее построения).

В случае (3.14), вычисляя A^t, B^t при помощи (4.9), имеем

$$A^t = -\frac{\beta - 1}{2\beta(R^1 - R^2)}, \quad B^t = \frac{\beta - 1}{2\beta(R^1 - R^2)}. \quad (4.13)$$

Решая задачу (4.6)–(4.8) (см., например, [102], [31, с. 24–26, 32, 33]), опуская громоздкие выкладки, получаем

$$\varphi^t(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \frac{{}_2F_1(\alpha, 1 - \alpha; 1; x)}{\beta(r^2 - r^1)^\alpha (R^2 - R^1)^{1-\alpha}}, \quad (4.14)$$

$$x = \frac{(R^1 - r^1)(R^2 - r^2)}{(R^1 - R^2)(r^1 - r^2)}, \quad \alpha = \frac{1 + \beta}{2\beta}.$$

Здесь ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, для функции φ^t указаны как основные аргументы R^1, R^2 , так и параметры r^1, r^2 .

§ 4.1.2 Явное решение на линиях уровня $t(a, b) = \text{const}$

В случае, когда либо в соотношении (4.4), либо (4.5) для функций $t(a, b)$, $z(a, b)$ конкретизированы подынтегральные выражения, то есть в явной форме решена задача (4.6)–(4.8), имеется способ построения явного решения исходной задачи (по крайней мере, численный).

Для определенности считаем, что функция $t(a, b)$ построена в явной форме. Тогда на линиях уровня функции $t(a, b)$ строим явное решение. Пусть имеется параметризованная линия уровня

$$t(a(\tau), b(\tau)) = t_*, \quad (4.15)$$

где τ — параметр, t_* — момент времени, идентифицирующий конкретную линию уровня.

Для построения решения, дифференцируя (4.15) по параметру τ , получаем задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_\tau = -t_b(a, b), \quad b_\tau = t_a(a, b), \quad (4.16)$$

$$a|_{\tau=0} = a_*, \quad b|_{\tau=0} = b_*,$$

где (a_*, b_*) — точка на изолинии (4.15), соответствующая $\tau = 0$, которая может быть найдена путем построения изолиний (4.15) на плоскости (a, b) для различных t_* .

Добавляем к (4.16) задачу

$$Z_\tau = J(a, b), \quad Z|_{\tau=0} = Z_*, \quad (4.17)$$

$$J(a, b) = (\lambda^2(r^1, r^2) - \lambda^1(r^1, r^2))t_a t_b, \quad (4.18)$$

$$r^1 = r^1(b), \quad r^2 = r^2(a).$$

Здесь $Z(\tau) = z(a(\tau), b(\tau))$, то есть функция (4.5) на линии уровня (4.15), Z_* — координата Z , соответствующая параметру $\tau = 0$, $J(a, b)$ — якобиан преобразования $(a, b) \leftrightarrow (z, t)$.

Окончательно, однопараметрическое (параметр τ) явное решение задачи на линии уровня (4.15) записываем в виде

$$R^1(z, t_*) = R_0^1(b(\tau)), \quad R^2(z, t_*) = R_0^2(a(\tau)), \quad (4.19)$$

$$t_* = t(a_*, b_*), \quad z = Z(\tau) = z(a(\tau), b(\tau)).$$

Обратим внимание на то, что наличие для определения функции $z(a, b)$ задачи (4.17), (4.18), в принципе, указывает на отсутствие необходимости построения явного выражения (4.5). Это тем более важно ввиду того, что во многих случаях найти явное выражение одновременно для всех функций $\varphi^t, \psi^t, \varphi^z, \psi^z$ не удастся.

Детально способ конструирования явного решения исходной задачи (3.9)–(3.11) и определения начальных значений a_*, b_*, Z_* описан в [31, с. 48–51].

§ 4.1.3 Явное решение на линиях уровня $z(a, b) = \text{const}$

Построение явного решения, описанное в § 4.1.2, соответствует случаю, когда на линиях уровня $t(a, b) = t_*$ (см. (4.15)) определяются функции $R^1(z, t_*), R^2(z, t_*), S(z, t_*), W(z, t_*)$ (см. (3.13)). Иными словами, указанное явное решение позволяет «проследить» зависимость решения от z в фиксированный момент времени t_* .

Аналогично строится решение на линиях уровня функции $z(a, b) = z_*$. Для этого, взамен системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.16), следует рассматривать систему

$$a_\tau = -z_b(a, b), \quad b_\tau = z_a(a, b), \quad (4.20)$$

с соответствующими начальными условиями.

Обратим внимание, что для вычисления производных $z_b(a, b), z_a(a, b)$ вовсе необязательно наличие явного соотношения (4.5). Производные z_a, z_b удовлетворяют соотношениям (см. [31, с. 47, формула (9.6)])

$$z_a = \lambda^1(r^1(a, b), r^2(a, b))t_a, \quad z_b = \lambda^2(r^1(a, b), r^2(a, b))t_b. \quad (4.21)$$

В частности, это означает, что при решении задач достаточно иметь явное соотношение лишь для одной функции — либо функции $t(a, b)$, либо функции $z(a, b)$.

Очевидно, что набор линий $t(a, b) = t_*, z(a, b) = z_*$ образует некоторую координатную сетку (не обязательно прямоугольную и равномерную)

и позволяет получить решение $R^1(z_*, t_*)$, $R^2(z_*, t_*)$ в любой заранее заданной точке (z_*, t_*) . В некотором смысле, особенно при проведении экспериментов, решение на линии уровня $z_* = z(a, b)$ является более важным, чем решение на линии уровня $t_* = t(a, b)$. Такое решение позволяет получать информацию об изменении характеристик течения (функциях $S(z_*, t)$, $W(z_*, t)$) в зависимости от времени t в фиксированной точке области $z = z_*$ (место расположения измерительного прибора, датчика и т. п.).

§ 4.1.4 Периодичность решения

Для начальной и краевой задач в случае, когда соответствующие данные (3.10) на линии Γ (3.11) обладают периодичностью, это свойство сохраняется и при эволюции решения. В частности, такое свойство указано в [17, с. 33] для конкретной задачи о мелкой воде под твердой крышкой.

Утверждение 4.1. Пусть начальные данные (3.10) при $t = 0$ (то есть для контура (i), см. (3.6)) являются T -периодическими (по пространству)

$$R_0^1(z + T) = R_0^1(z), \quad R_0^2(z + T) = R_0^2(z). \quad (4.22)$$

Тогда решение задачи (3.9)–(3.11) также является T -периодическим

$$R^1(z + T, t) = R^1(z, t), \quad R^2(z + T, t) = R^2(z, t). \quad (4.23)$$

Доказательство. В случае начальной задачи с данными при $t = 0$ соотношения (4.3)–(4.5) имеют вид

$$R^1(z(a, b), t(a, b)) = R_0^1(b) = r^1(b), \quad (4.24)$$

$$R^2(z(a, b), t(a, b)) = R_0^2(a) = r^2(a),$$

$$t(a, b) = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^t(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau), r^1(b), r^2(a)) d\tau, \quad (4.25)$$

$$z(a, b) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^z(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau), r^1(b), r^2(a)) d\tau. \quad (4.26)$$

Контур Γ_{ab} в (4.3)–(4.5) соответствует $[a, b]$ и интегрированию по параметру τ от a до b .

В силу периодичности начальных данных (4.22), ввиду (4.24), следует периодичность r^1, r^2

$$r^1(b) = r^1(b + T), \quad r^2(a) = r^2(a + T), \quad (4.27)$$

а также периодичность функций φ^t, φ^z по переменным τ, a, b .

Тогда, при помощи (4.25)–(4.26), получим

$$t(a + T, b + T) = \frac{1}{2} \int_{a+T}^{b+T} \varphi^t d\tau + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^t d\tau = t(a, b), \quad (4.28)$$

$$z(a + T, b + T) = \frac{a + b}{2} + T + \frac{1}{2} \int_{a+T}^{b+T} \varphi^z d\tau = \frac{a + b}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^z d\tau = z(a, b). \quad (4.29)$$

Из (4.24), (4.27)–(4.29) следует

$$R^1(z(a + T, b + T), t(a + T, b + T)) = r^1(b + T) = r^1(b) = R^1(z(a, b) + T, t(a, b)),$$

$$R^2(z(a + T, b + T), t(a + T, b + T)) = r^2(a + T) = r^2(a) = R^2(z(a, b) + T, t(a, b)),$$

или, в короткой записи, (4.23). $\square$

Аналогичным образом доказывается и результат в случае краевой задачи с данными при $z = 0$.

Утверждение 4.2. Пусть начальные данные (3.10) при $z = 0$ (то есть для контура (ii), см. (3.7)) являются T -периодическими (по времени)

$$R_0^1(t + T) = R_0^1(t), \quad R_0^2(t + T) = R_0^2(t). \quad (4.30)$$

Тогда решение задачи (3.9)–(3.11) также является T -периодическим

$$R^1(z, t + T) = R^1(z, t + T), \quad R^2(z, t + T) = R^2(z, t + T). \quad (4.31)$$

$\square$

Конечно, для начально-краевой задачи, когда для контура (iii) (см. (3.8)) начальные условия при $t = 0$ заданы на оси $z = 0$, а краевые условия определены при $z = 0$ на оси $t = 0$, условия периодичности, подобные (4.23), (4.31), не выполняются.

§ 5 Решение в случае соотношения $P(S) \sim S^2$

С математической точки зрения (и не только) особый интерес представляет частный вариант конститутивного соотношения (2.68) при $\beta = 1$

$$P(S) = \frac{1}{2}S^2. \quad (5.1)$$

Дело в том, что в этом случае практически все формулы § 4 записываются в явной форме. Опуская промежуточные вычисления, приводим функции (не зависят от переменных R^1, R^2)

$$\begin{aligned} \varphi^t &= \frac{2}{r^2 - r^1}, & \psi^t &= \frac{r^1 + r^2}{r^2 - r^1}, \\ \varphi^z &= \frac{r^1 + r^2}{r^2 - r^1}, & \psi^z &= \frac{2r^1 r^2}{r^2 - r^1}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

которые, используя (4.4), (4.5), позволяют в зависимости от контура Γ_{ab} определить функции $t(a, b)$, $z(a, b)$.

Другая причина выбора $P(S)$ в виде (4.1) заключается в том, что в этом случае уравнения (3.9) представляют два не связанных между собой уравнения Хопфа ($\lambda^1 = R^1$, $\lambda^2 = R^2$, см. (3.14) при $\beta = 1$), которые достаточно хорошо изучены в случае одного отдельного уравнения Хопфа (см., например, [80, с. 23–98]). На самом деле, в полной задаче (3.9)–(3.11) уравнения, конечно же, связаны условиями (3.10)–(3.13). Имеется ввиду то, что, в действительности, задаются начальные данные (3.4), (3.5) для исходных переменных и, в частности, R_0^1, R_0^2 в (3.10) нельзя задать произвольно, а можно только определить при помощи (3.12). Тем не менее, можно использовать многие свойства уравнения Хопфа и, в частности, как будет показано ниже, получить функции (5.2), минуя решение задач вида (4.6)–(4.8).

§ 5.1 Начальная и краевая задачи

Формулы (4.4), (4.5) получены путем интегрирования с учетом условий (4.7), (4.8) по замкнутому контуру PQM интегрального аналога закона сохранения (4.1)

$$\oint_{PQM} (\psi dt - \varphi dz) = 0. \quad (5.3)$$

Контур PQM состоит из характеристики QM , на которой сохраняется инвариант R^1 , характеристики PM , на которой сохраняется инвариант R^2 , и линии $PQ = \Gamma_{ab}$, на которой определены данные (3.10). Характеристики разных семейств QM , PM пересекаются в точке $M = (t, z)$ (см., в частности, рис. 5.1 и более подробно [31, с. 20–30], [133]). В рассматриваемом случае (5.1) характеристики являются прямыми линиями, но в общем случае, конечно, это некоторые кривые.

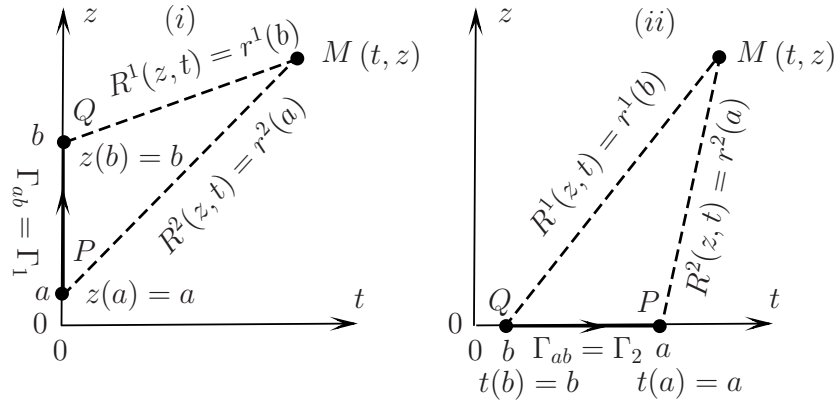


Рис. 5.1. Варианты контуров Γ_{ab} на плоскости (t, z) . Для начальной задачи (i) контур Γ_1 , для краевой задачи (ii) контур Γ_2 . Пунктирные линии соответствуют характеристикам

Условие пересечения характеристик различных семейств в некоторой точке $M = (t, z)$ является крайне важным (при отсутствии пересечения решение не существует) и существенно влияет на выбор контура Γ_{ab} .

В случае начальной задачи (данные при $t = 0$) и краевой задачи (данные при $z = 0$) с учетом $R^2 > R^1$ (см. (3.12)) выбор контура достаточно очевиден — это отрезки прямых на соответствующих осях. Используя (4.4), (4.5), (5.2), приведем соотношения для $t(a, b)$, $z(a, b)$ в случае начальной и краевой задач.

(i) Контур $\Gamma_{ab} = \Gamma_1 = \{z \in [a, b], t = 0, b > a\}$ соответствует начальной задаче. Тогда

$$t(a, b) = \frac{b - a}{r^2(a) - r^1(b)}, \quad (5.4)$$

$$z(a, b) = \frac{br^2(a) - ar^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}.$$

(ii) Контур $\Gamma_{ab} = \Gamma_2 = \{t \in [a, b], z = 0, a > b\}$ соответствует краевой задаче. Тогда

$$\begin{aligned} t(a, b) &= \frac{ar^2(a) - br^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}, \\ z(a, b) &= \frac{(a - b)r^1(b)r^2(a)}{r^2(a) - r^1(b)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Обратим внимание на то, что соотношения (5.4), (5.5) можно получить и без использования функций (5.2) и соотношений (4.4), (4.5). Дело в том, что при выполнении (5.1) система (3.9) имеет вид ($\lambda^1 = R^1$, $\lambda^2 = R^2$)

$$R_t^1 + R^1 R_z^1 = 0, \quad R_t^2 + R^2 R_z^2 = 0, \quad (5.6)$$

то есть представляет собой два не связанных между собой уравнения Хопфа (связь осуществляется через условия (3.10), (3.11)). Например, для того, чтобы получить соотношения (5.4), достаточно записать решение уравнений Хопфа (5.6), используя обычный метод характеристик (см., например, [73, с. 20–22, 72–78]),

$$z = r^1(b)t + b, \quad z = r^2(a)t + a, \quad (5.7)$$

$$R^1 = r^1(b) = R_0^1(b), \quad R^2 = r^2(a) = R_0^2(a). \quad (5.8)$$

Определяя t, z из системы (5.7), получим (5.4). Аналогично получаем (5.5), записывая решение краевой задачи при помощи метода характеристик (соотношения (5.8) остаются прежними)

$$z = r^1(b)(t - b), \quad z = r^2(a)(t - a). \quad (5.9)$$

§ 5.2 Начально-краевая задача (о распространении сигнала)

В случае начально-краевой задачи, когда линия Γ , на которой заданы функции $R_0^1(\tau)$, $R_0^2(\tau)$ (см. (3.10), (3.11)), имеет вид $\Gamma = \{0 \leq z < \infty, 0 \leq t < \infty\}$, при выборе контура $\Gamma_{ab} \subset \Gamma$ возможны три варианта. Во-первых, $\Gamma_1 = \Gamma_{ab} \subset \{0 \leq z < \infty\}$, что, в точности, включая формулы (5.4), совпадает с начальной задачей (i). Во-вторых, $\Gamma_2 = \Gamma_{ab} \subset \{0 \leq t < \infty\}$, что, в точности, включая формулы (5.5), совпадает с краевой задачей (ii). Наконец, специфичный именно для начально-краевой задачи, кусочно-гладкий

контур Γ_3 , для которого точка a принадлежит оси координат $z = 0$, а точка b находится на оси координат $t = 0$ (см. рисунок 5.2).

(iii) Контур $\Gamma_{ab} = \Gamma_3 = \{z \in [0, b], t = 0, b > 0\} \cup \{t \in [0, a], z = 0, a > 0\}$.

$$t(a, b) = \frac{b + ar^2(a)}{r^2(a) - r^1(b)}, \quad (5.10)$$

$$z(a, b) = r^2(a) \frac{b + ar^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}.$$

Вновь, как и ранее (см. (5.4), (5.5), (5.7), (5.9)), соотношения (5.10) можно получить, решая относительно t и z систему

$$z = r^1(b)t + b, \quad z = r^2(a)(t - a). \quad (5.11)$$

Множество точек пересечения характеристик (различных семейств) M_1 , M_2 , M_3 (см. рисунок 5.2) полностью перекрывает область $\{t \geq 0, z \geq 0\}$, определяя в этой области решение начально-краевой задачи.

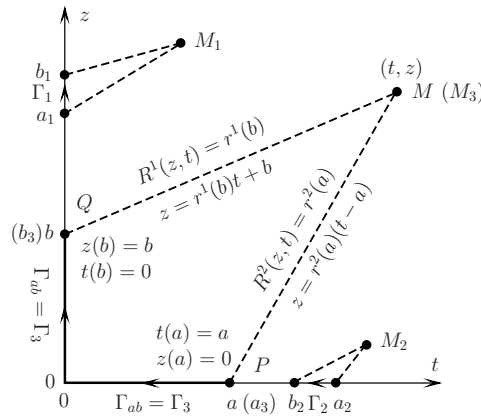


Рис. 5.2. Варианты контуров $\Gamma_{ab}: \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ на плоскости (t, z) для начально-краевой задачи. Пунктирные линии соответствуют характеристикам

В фиксированные моменты времени t область $\{z \geq 0\}$ «разбивается» на три подобласти (см., в частности, рис. 5.3) с движущимися границами $z_1(t)$, $z_2(t)$ между подобластями

$$(i) = \{z_2(t) \leq z \leq \infty\}, \quad (ii) = \{0 \leq z \leq z_1(t)\}, \quad (5.12)$$

$$(iii) = \{z_1(t) \leq z \leq z_2(t)\}, \quad t \geq 0.$$

В зависимости от начально-краевых данных поведение границ может быть различным. В случае несогласованных начальных и краевых данных на границах между зонами $z = z_1(t)$, $z = z_2(t)$ могут быть как сильные разрывы — ударные волны (см., в частности, рис. 5.3), так и слабые разрывы — волновой фронт [80, с. 129–135], [73, с. 81–88] (см., в частности, рис. 5.3).

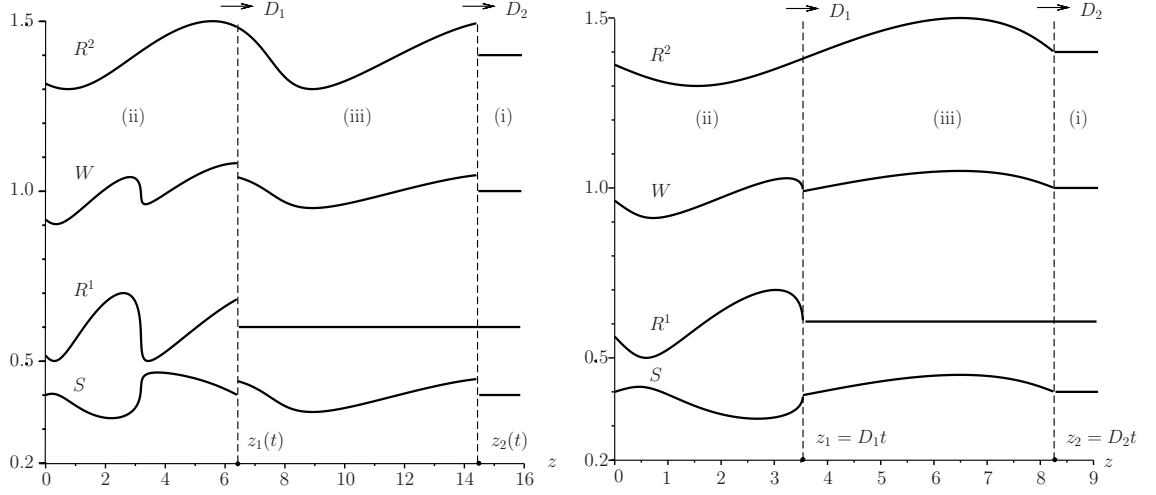


Рис. 5.3. Возможные схемы эволюции решения. Ударные волны. $D_1 = 0.65$, $D_2 = 1.45$, $z_1 = 6.470$, $z_2 = 14.492$, $t = 10$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$. Волновые фронты. $D_1 = 0.6$, $D_2 = 1.4$, $z_1 = 3.54$, $z_2 = 8.26$, $t = 5.9$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$

§ 5.3 Ударные волны

Рассматриваем ситуацию, когда в начальный момент времени $t = 0$ имеется сильный разрыв (несогласованные данные). Предварительно записываем исходные уравнения (3.1), (3.2) в консервативной форме

$$S_t + (WS)_z = 0, \quad W_t + \left(\frac{1}{2}W^2 + P \right)_z = 0. \quad (5.13)$$

Это естественные законы сохранения — массы и импульса, что позволяет без труда получить соотношения Ренкина–Гюгонио на разрыве (записаны для случая (5.1))

$$D[S] + [WS] = 0, \quad D[W] + \left[\frac{1}{2}W^2 + \frac{1}{2}S^2 \right] = 0, \quad D = \frac{dz(t)}{dt}. \quad (5.14)$$

Здесь $[f] = f(t, z(t) + 0) - f(t, z(t) - 0)$ — величина разрыва функции f на линии разрыва $z = z(t)$, $f(t, z(t) + 0)$, $f(t, z(t) - 0)$ — значения функций справа и слева от линии разрыва, D — скорость движения линии разрыва.

С учетом связей (3.12), (3.13) при $\beta = 1$ между S , W и R^1 , R^2 сумма и разность соотношений (5.14) приводит к соотношениям на разрыве для инвариантов Римана

$$D[R^1] + \left[\frac{1}{2}(R^1)^2 \right] = 0, \quad D[R^2] + \left[\frac{1}{2}(R^2)^2 \right] = 0. \quad (5.15)$$

Таким образом, уравнения (5.6), условия на разрыве и разрывные начальные данные — это задача о распаде начального разрыва, известная как задача Римана, для уравнения Хопфа.

Очевидно, что поведение линии разрыва, например, границы $z_1(t)$ между областями (ii), (iii), определяется задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, когда в начальный момент $t = 0$ имеется сильный разрыв начальных данных (начальные и краевые условия несогласованы)

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = D_1(t), \quad z_1(0) = 0, \quad R^2 = \text{const}, \quad (5.16)$$

$$D_1 = \frac{1}{2} (R^1(z_1(t) + 0, t) + R^1(z_1(t) - 0, t)).$$

Аналогично, для границы $z_2(t)$ между областями (iii), (i)

$$\frac{dz_2(t)}{dt} = D_2(t), \quad z_2(0) = 0, \quad R^1 = \text{const}, \quad (5.17)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} (R^2(z_2(t) + 0, t) + R^2(z_2(t) - 0, t)).$$

На рис. 5.3 (слева) для конкретных данных продемонстрирована ситуация, когда границы между подобластями являются ударными волнами.

Напомним, что для некоторых начальных данных, ударные волны могут возникать и как результат опрокидывания профиля решения в процессе эволюции (не только в начальный момент времени). Более подробно вопрос о построении решения в этом случае рассмотрен в § 6.

§ 5.4 Волновые фронты

Для начально-краевой задачи начальные данные в точке $z = 0$, $t = 0$ могут, оставаясь непрерывными, иметь слабые разрывы (разрывы производных). Достаточно типичной является ситуация, когда краевые условия при $z = 0$ зависят от t , а начальные условия при $t = 0$ являются постоянными (или наоборот). Способы построения решения подобных задач, известных как волновой фронт (см. в частности, рис. 5.3 (справа)), изложены, например, в [80, с. 129–135], [73, с. 81–88].

Ввиду того, что для рассматриваемой задачи система уравнений (5.3) распадается на два независимых уравнения Хопфа (5.6), достаточно рассмотреть начально-краевую задачу

$$V_t + VV_z = 0, \quad (5.18)$$

$$V|_{t \geq 0, z=0} = F(t), \quad F_t(0) \neq 0, \quad (5.19)$$

$$V|_{z \geq 0, t=0} = F(0). \quad (5.20)$$

Здесь $V(t, z)$ — либо $R^1(z, t)$, либо $R^2(z, t)$, $F(t)$ — либо $R_0^1(t)$, либо $R_0^2(t)$.

Таким образом, предполагается, что в точке $t = 0$, $z = 0$ имеется разрыв производной по t (и по z в силу уравнения). Как известно, слабые разрывы движутся по характеристике и не могут ни возникнуть, ни исчезнуть в процессе эволюции. Следуя [80, с. 129–135], ищем решение задачи (5.18)–(5.20) в виде

$$V(t, z) = V_0 + V_1(z)y + V_2(z)y^2 + \dots, \quad y \geq 0, \quad (5.21)$$

$$V(t, z) = V_0 = F(0) > 0, \quad y \leq 0, \quad (5.22)$$

$$y = t - q(z). \quad (5.23)$$

Осуществляя подстановку (5.21) в (5.18), приравнивая члены при одинаковых степенях y , опуская промежуточные построения, получаем

$$q(z) = \frac{z}{V_0}, \quad (5.24)$$

и транспортное уравнение, описывающее поведение слабого разрыва,

$$\frac{dV_1}{dt} - \frac{V_1^2}{V_0^2} = 0, \quad V_1(0) = F_t(0),$$

решение которого имеет вид

$$V_1(z) = \frac{F_z(0)V_0^2}{V_0^2 - F_z(0)z}, \quad z_0 = \frac{V_0^2}{F_z(0)}, \quad (5.25)$$

$$V_1|_{z=V_0t} = \frac{F_z(0)V_0}{V_0 - F_z(0)t}, \quad t_0 = \frac{V_0}{F_z(0)}. \quad (5.26)$$

Таким образом, слабый разрыв (разрыв производной)

$$[V_z] = V_z|_{y=+0} - V_z|_{y=-0} = -V_1|_{z=V_0t} q_z(0) = -\frac{1}{t_0 - t}, \quad (5.27)$$

движется по характеристике $z = V_0t$ ($y = 0$), с течением времени t растет по модулю, и стремится к бесконечности при $t \rightarrow t_0$ (градиентная катастрофа). Напомним, что в точке $z_0 = V_0t_0$, в принципе, возможно образование сильного разрыва.

§ 6 Поведение сильного разрыва решения

В процессе эволюции решения квазилинейных уравнений возможно опрокидывание профиля решения и возникновение ударных волн. Ситуация отличается от задачи о распаде начального разрыва (см. § 5.3), так как в данном случае сильный разрыв возникает из непрерывного решения. На примере краевой задачи для одного уравнения Хопфа (ввиду того, что система (3.1)–(3.3) в случае (5.1) является парой уравнений Хопфа (5.6)) опишем способ определения закона движения сильного разрыва. Хотя, с формальной точки зрения, серьезных проблем не возникает, при построении решения имеются технические трудности, связанные с тем, что, как правило, в точке опрокидывания решения его производные обращаются в бесконечность.

Рассматриваем краевую задачу для уравнения Хопфа

$$u_t + uu_z = 0, \quad (6.1)$$

с краевым условием

$$u|_{z=0} = G(t), \quad (6.2)$$

и условием на разрыве

$$D[u] = \left[\frac{1}{2} u^2 \right], \quad D = \frac{dz}{dt}, \quad (6.3)$$

где $G(t)$ — задана, D — скорость движения линии разрыва $z = z(t)$.

Метод характеристик позволяет построить непрерывное решение в виде

$$u(z, t) = G(c(z, t)), \quad (6.4)$$

$$z = G(c)(t - c), \quad (6.5)$$

где c — параметр (момент времени на оси $z = 0$, из которого по характеристике «переносится» функция $G(c)$).

Условие опрокидывания решения удобно представить в форме

$$z_c = G_c(c)(t - c) - G(c) = 0, \quad z_{cc} = G_{cc}(c)(t - c) - 2G_c(c) = 0. \quad (6.6)$$

Первое из этих условий соответствует обращению в бесконечность производной $u_z(z, t)$, а второе — условие перегиба профиля функции, обратной к многозначной функции $u(z, t) = G(c(z, t))$. Несложные преобразования позволяют получить систему уравнений, определяющих точку (z_0, t_0) , в которой происходит опрокидывание, и значение параметра c_0 , соответствующего такой точке

$$G_{cc}(c_0)G(c_0) = 2G_c^2(c_0) \Rightarrow t_0 = \frac{G(c_0)}{G_c(c_0)} + c_0 \Rightarrow z_0 = G(c_0)(t_0 - c_0). \quad (6.7)$$

Движение линии разрыва $z = z(t)$ описывается условием на разрыве (6.3), которое после преобразования принимает вид

$$z_t = \frac{1}{2}(G(a) + G(b)), \quad (6.8)$$

и условием пересечения характеристик (одного и того же семейства)

$$z = G(a)(t - a), \quad z = G(b)(t - b), \quad (6.9)$$

приходящих на разные стороны линии разрыва из различных точек a и b .

Решая уравнения (6.9) относительно z, t , имеем (сравни с (5.5))

$$t = \frac{aG(a) - bG(b)}{G(a) - G(b)}, \quad t - a = \frac{(a - b)G(b)}{G(a) - G(b)}, \quad t - b = \frac{(a - b)G(a)}{G(a) - G(b)}, \quad (6.10)$$

$$z = \frac{(a-b)G(a)G(b)}{G(a)-G(b)}. \quad (6.11)$$

Заметим, что (5.5) и (6.10), (6.11) совпадают лишь внешне — (5.5) записано для характеристик разных семейств, тогда как (6.10), (6.11) считаются справедливым для характеристик одного и того же семейства.

Полагая $a = a(t)$, $b = b(t)$, дифференцируя (6.9) по t ,

$$z_t = (G_a(a)(t-a) - G(a))a_t + G(a), \quad (6.12)$$

$$z_t = (G_b(b)(t-b) - G(b))b_t + G(b), \quad (6.13)$$

принимая во внимание (6.8), (6.10), получим

$$(G_a(a)G(b)(a-b) - G(a)(G(a)-G(b)))a_t = -\frac{1}{2}(G(a)-G(b))^2, \quad (6.14)$$

$$(G(a)G_b(b)(a-b) - G(b)(G(a)-G(b)))b_t = \frac{1}{2}(G(a)-G(b))^2, \quad (6.15)$$

или

$$a_t = \frac{-\frac{1}{2}(G(a)-G(b))^2}{G_a(a)G(b)(a-b) - G(a)(G(a)-G(b))}, \quad (6.16)$$

$$b_t = \frac{\frac{1}{2}(G(a)-G(b))^2}{G(a)G_b(b)(a-b) - G(b)(G(a)-G(b))}. \quad (6.17)$$

Система (6.16), (6.17), дополненная условиями, вытекающими из (6.7)

$$a(t_0) = a_0 = c_0, \quad b(t_0) = b_0 = c_0, \quad (6.18)$$

определяет поведение параметров $a(t)$, $b(t)$ — показывает какие характеристики приходят на разрыв.

Закон движения линии разрыва определяется задачей Коши для уравнения (6.8) с начальным условием, вытекающим из (6.7)

$$z_t = \frac{1}{2}(G(a(t)) + G(b(t))), \quad (6.19)$$

$$z(t_0) = z_0. \quad (6.20)$$

Естественно, при проведении вычислений следует интегрировать задачу Коши одновременно для трех уравнений (6.16), (6.17), (6.19) с условиями (6.18), (6.20).

При реализации решения задачи (6.16), (6.17), (6.19) с условиями (6.18), (6.20) возникают технические трудности ввиду того, что правые части обыкновенных дифференциальных уравнений при условиях (6.18), (6.20) имеют особенности (сингулярности). Действительно, нетрудно проверить, что при $a \rightarrow b$ имеем $a_t \rightarrow -\infty$, $b_t \rightarrow -\infty$. Это ожидаемо, так как в момент опрокидывания решения t_0 , производные решения обращаются в бесконечность (см. условия (6.6)). Преодоление этих трудностей возможно различными способами. Один из вариантов — отыскание интегралов уравнений (6.16), (6.17), которые, очевидно, имеются ввиду того, что уравнения (6.16), (6.17) получены путем дифференцирования алгебраических соотношений.

Суммируя (6.16), (6.17), имеем соотношение

$$\begin{aligned} & (G_a(a)G(b)(a-b) - G(a)(G(a) - G(b)))a_t + \\ & + (G(a)G_b(b)(a-b) - G(b)(G(a) - G(b)))b_t = 0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

которое преобразуется к виду (легко проверить)

$$(G(a)G(b)(a-b))_t - G^2(a)a_t + G^2(b)b_t = 0. \quad (6.22)$$

Интегрирование (6.22) позволяет получить соотношение

$$H(a, b) \stackrel{def}{=} G(a)G(b)(a-b) - \int_b^a G^2(s) ds = 0. \quad (6.23)$$

Постоянная интегрирования определяется из условия $H(a, a) = 0$.

Условие $H(a, b) = 0$ — это, так называемое, «правило равных площадей» — геометрический вариант интегрального закона сохранения в случае краевой задачи. Для задачи с начальными условиями такое выражение имеется, например, в [80, с. 49, 50, 59, рис. 2.9, формулы (2.45), (2.60)].

Введем функцию (см. (6.10))

$$T(a, b) \stackrel{def}{=} \frac{aG(a) - bG(b)}{G(a) - G(b)}. \quad (6.24)$$

Задача определения зависимостей $a(t)$, $b(t)$ сводится к решению системы алгебраических уравнений

$$T(a, b) = t = t_0 + \tau, \quad H(a, b) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (6.25)$$

где τ — параметр (приращение времени).

На самом деле, решать алгебраическую систему гораздо сложнее, чем интегрировать задачу Коши (6.16), (6.17), (6.19) с условиями (6.18), (6.20). Конечно, можно решать (6.16) методом движения по параметру τ , учитывая, что $T(c_0, c_0) = 0$, $H(c_0, c_0) = 0$, но это, фактически, ничем не отличается от решения дифференциальных уравнений.

Другой вариант — построение некоторой асимптотической формулы, позволяющей «сдвинуться» от точки сингулярности правых частей уравнений (6.16), (6.17) путем задания начальных данных a_0, b_0 (см. (6.18)) несовпадающими с c_0 , но находящимися в окрестности c_0 . Для этого получим разложение в ряд при $\delta \rightarrow 0$ функции $H(c_0 + \delta, c_0 - \delta)$

$$\begin{aligned} H(c_0 + \delta, c_0 - \delta) &= \frac{4}{3} (G_{cc}(c_0)G(c_0) - 2G_c^2(c_0)) \delta^3 + \\ &+ \left(\frac{2}{15} G(c_0)G_{ccc}(c_0) - \frac{4}{5} G_c(c_0)G_{cc}(c_0) + \frac{2}{5} G_{cc}^2(c_0) \right) \delta^5 + O(\delta^7), \end{aligned}$$

или, с учетом (6.7),

$$H(c_0 + \delta, c_0 - \delta) = O(\delta^5). \quad (6.26)$$

Первое уравнение (6.25) преобразуем к виду

$$\Phi(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (t_0 + \tau)(G(a) - G(b)) - (aG(a) - bG(b)) = 0. \quad (6.27)$$

Тогда, аналогично (6.26), имеем

$$\begin{aligned} \Phi(c_0 + \delta, c_0 - \delta) &= 2(-c_0 G_c(c_0) - G(c_0) + (t_0 + \tau)G(c_0))\delta + \\ &+ \left(-\frac{1}{3} c_0 G_{ccc}(c_0) - G_{cc}(c_0) + \frac{1}{3} (t_0 + \tau)G_{ccc}(c_0) \right) \delta^3 + O(\delta^5), \end{aligned}$$

или, с учетом значения t_0 , определенного (6.7),

$$\begin{aligned} \Phi(c_0 + \delta, c_0 - \delta) &= 2G_c(c_0)\tau\delta + \\ &+ \frac{1}{3} G_{ccc}(c_0)\tau\delta^3 - G_{cc}(c_0)\delta^3 + \frac{G_{ccc}(c_0)G(c_0)}{3G_c(c_0)}\delta^3 + O(\delta^5). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Решая уравнения (6.25), точнее видоизмененные уравнения

$$\Phi(c_0 + \delta, c_0 - \delta) = 0, \quad H(c_0 + \delta, c_0 - \delta) = 0, \quad (6.29)$$

относительно δ , получим асимптотическую формулу

$$\delta^2 = \frac{6G_c^2(c_0)G(c_0)\tau}{6G_c^3(c_0) - G_{ccc}(c_0)G^2(c_0) - G(c_0)G_c(c_0)G_{ccc}(c_0)\tau}, \quad (6.30)$$

которая, ввиду $\delta \rightarrow 0$, справедлива при $\tau \rightarrow 0$.

В случае (6.30) уравнения (6.29) удовлетворяются с точностью до членов порядка $O(\delta^5)$. При необходимости, можно уточнять решения уравнений (6.29), используя, например, метод Ньютона для решения системы алгебраических уравнений и величину δ из (6.30) в качестве начального приближения.

Обратим внимание на то, что при построении асимптотики реально решается лишь первое уравнение (6.29), а второе уравнение служит лишь для проверки точности. В принципе, вовсе необязательно строить асимптотику в «симметричной» форме. Возможно рассматривать вариант $a_0 = c_0 + \delta_1$, $b_0 = c_0 + \delta_2$, что лишь усложнит промежуточные соотношения, но, в конечном итоге, приведет к тому же самому результату $\delta_2 = -\delta_1$.

Для определения $a(t)$, $b(t)$, $z(t)$ решаем дифференциальные уравнения (6.16), (6.17), (6.19), заменив условия (6.18), (6.20) следующими (для достаточно малых $\tau > 0$)

$$a(t_0 + \tau) = a_0 = c_0 + \delta, \quad b(t_0 + \tau) = b_0 = c_0 - \delta, \quad (6.31)$$

и (см. (6.11))

$$z(t_0 + \tau) = \frac{(a_0 - b_0)G(a_0)G(b_0)}{G(a_0) - G(b_0)}. \quad (6.32)$$

В этом случае, сингулярности правых частей дифференциальных уравнений (6.16), (6.17) отсутствуют при $t = t_0 + \tau$.

В формуле (6.30) следует выбирать знак $\delta > 0$ из условия устойчивости сильного разрыва, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$G(c_0 + \delta) \geq G(c_0 - \delta). \quad (6.33)$$

Замечание 6.1 (о применимости формул). Все приведенные в § 6 соотношения относятся к случаю общего положения. Для вырожденных случаев, например, когда $G_c(c_0) = 0$, требуются дополнительные рассуждения.

□

§ 7 Результаты расчетов

В главе представлены вычисления для конкретных параметров, подтверждающие, демонстрирующие и интерпретирующие результаты, изложенные в § 4.1.2, § 4.1.3, § 5, § 6. На самом деле, вычислительный эксперимент проводился для широкого набора значений параметров и здесь представлены лишь наиболее яркие результаты, которые или демонстрируют все те особенности решений, указанные в § 5, § 6 (сильные и слабые разрывы решений, ударные волны, волновые фронты и т. д.), или/и произведены сравнения с имеющимися в литературе экспериментальными данными. Разумеется, сравнение с экспериментальными результатами проводится, в основном, качественно. Естественно, количественное сравнение произвести достаточно сложно — простота уравнений (отсутствие вязкости, первое приближение и т. п.), недостаточное количество экспериментальных данных (параметров и пр.), и много иных факторов.

На рис. 5.3, 7.1 представлены результаты вычислений в случаях двух вариантов данных для начально-краевой задачи — сильного начального разрыва и слабого начального разрыва, когда в качестве конститутивного соотношения выбрано (5.1).

§ 7.1 Вариант 1. Ударные волны

Здесь описаны результаты расчетов для начально-краевой задачи, решение которой описано в § 5.2, § 5.3. В случае несогласованности начальных и краевых условий (при $t = 0$, $z = 0$) в начальный момент времени $t = 0$ имеется начальный разрыв и возникают ударные волны (см. § 5.3).

Рассматриваем полубесконечную цилиндрическую область постоянного сечения S_0 , по которой в начальный момент времени $t = 0$ ($z \geq 0$) с постоянной скоростью $W_0 > 0$ течет жидкость. На границе $z = 0$ (начало трубы) считается, что сечение трубы такое же как и при $z \geq 0$, то есть S_0 , а скорость течения W при $t \geq 0$ пульсирует (гармонически) с амплитудой

ε и частотой Ω

$$S|_{t \geq 0, z=0} = S_0, \quad W|_{t \geq 0, z=0} = W_0(1 + \varepsilon \cos \Omega t), \quad (7.1)$$

$$S|_{z \geq 0, t=0} = S_0, \quad W|_{z \geq 0, t=0} = W_0, \quad (7.2)$$

$$S_0 = 0.4, \quad W_0 = 1.0, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \Omega = 1. \quad (7.3)$$

В начальный момент времени $t = 0$ имеется сильный разрыв скорости, величина которого εW_0 . При $t = +0$ возникает два движущихся сильных разрыва инвариантов R^1, R^2 (и, естественно, S, W , см. (3.12), (3.13) при $\beta = 1$). Поведение движущихся разрывов $z_1(t), z_2(t)$ определяется путем решения задач (5.16), (5.17). Например, для нахождения закона движения разрыва инварианта R^1 , то есть функции $z_1(t)$, численно интегрируется задача Коши

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2} (r^1(0) + r^1(a(z_1, t))) , \quad z_1(0) = 0, \quad (7.4)$$

$$r^1(a) = W_0(1 + \varepsilon \cos \Omega a) - S_0. \quad (7.5)$$

Здесь $r^1(a)$ — задано при помощи краевого условия (7.1).

Функция $a(z_1, t)$ определяется уравнением характеристики, приходящей с оси $z = 0$ на линию разрыва $z = z_1(t)$,

$$z_1 = r^1(a)(t - a), \quad (7.6)$$

которое решается численно на каждом шаге интегрирования задачи Коши.

Аналогично находится закон движения $z_2(t)$ разрыва инварианта R^2 . Для этого достаточно в соотношениях (7.4)–(7.6) заменить индекс 1 на индекс 2, и в (7.5) заменить $(-S_0)$ на S_0 . С малой относительной погрешностью ($\approx 5 \cdot 10^{-3}$) в случае (7.1)–(7.3) имеем

$$z_1(t) \approx D_1 t, \quad z_2(t) \approx D_2 t, \quad D_1 = 0.65, \quad D_2 = 1.45. \quad (7.7)$$

Решение задачи, то есть функции $R^1(z, t), R^2(z, t), S(z, t), W(z, t)$, в момент $t = 10$ показано на левом рис. 5.3. Для указанного момента времени сильные разрывы находятся в точках $z_1 = 6.5, z_2 = 14.5$. Точное решение

для функций $z_1(t)$, $z_2(t)$ дает значения $z_1(10) = 6.4699$, $z_2(10) = 14.4916$. Решение в области (ii), то есть $0 < z_1$, и области (iii), то есть $z_1 < z < z_2$, получаем, используя (4.19) и решая задачу Коши (4.16). В случае области (ii) производные t_a , t_b вычисляем при помощи соотношений (5.5) для краевой задачи (при $t = 10$ значения $a_* = b_* = 10.0$). В случае области (iii) производные t_a , t_b вычисляем при помощи соотношений (5.10) для начально-краевой задачи (при $t = 10$ значения $a_* = 5.663$, $b_* = 0.425$). В области (i), то есть при $z > z_2(t)$, решение строится при помощи соотношений (5.4), и в случае (7.1)–(7.3) остается постоянным при всех $t > 0$.

Как уже говорилось в § 5.3 (стр. 54), в процессе эволюции решения $R^1(z, t)$, $R^2(z, t)$ (и, естественно, $S(z, t)$, $W(z, t)$) возможно опрокидывание профилей функции, что приводит к образованию ударных волн (помимо ударной волны, возникающей ввиду разрыва начальных данных при $t = 0$). В частности, для рассматриваемых условий (7.1)–(7.3), используя результаты § 6, при помощи соотношений (6.7) определяем момент времени t_d и координату точки z_d возникновения ударной волны

$$t_d = 10.382, \quad z_d = 3.405. \quad (7.8)$$

Тенденция к образованию ударной волны хорошо видна на левом рис. 5.3 — в момент $t = 10$ профиль функций в окрестности $z \approx 3.5$ уже близок к разрывному. Расчеты показывают (не приведены), что при дальнейшей эволюции решения возникает серия движущихся ударных волн.

§ 7.2 Вариант 2. Волновые фронты

На правом рис. 5.3 показано непрерывное решение, соответствующее волновым фронтам. Способ исследования такого решения описан в § 5.4 и отвечает согласованным начальным и краевым условиям (при $t = 0$, $z = 0$).

Начальные данные имеют вид

$$S|_{t \geq 0, z=0} = S_0, \quad W|_{t \geq 0, z=0} = W_0(1 + \varepsilon \sin t), \quad (7.9)$$

$$S|_{z \geq 0, t=0} = S_0, \quad W|_{z \geq 0, t=0} = W_0, \quad (7.10)$$

$$S_0 = 0.4, \quad W_0 = 1.0, \quad \varepsilon = 0.1, \quad (7.11)$$

и отличаются от данных (7.1)–(7.3) соотношением (7.9).

В начальный момент $t = 0$ функции непрерывны, но имеется разрыв производной по времени для функции W , величина которого равна $\varepsilon\Omega W_0$, и соответствующие разрывы производных для инвариантов Римана, также имеющие величину $\varepsilon\Omega W_0$ (разрыв для функции S отсутствует). Способ построения численного решения практически такой же, как и в случае ударных волн. Отличие заключается в том, что нет необходимости решать задачу (7.4)–(7.6) для определения поведения ударных волн. Волновые фронты движутся по характеристикам (см. §5.4)

$$z_1(t) = D_1 t = (W_0 - S_0)t, \quad z_2(t) = D_2 t = (W_0 + S_0)t, \quad (7.12)$$

$$D_1 = 0.6, \quad D_2 = 1.4.$$

В отличие от (7.7), которые получены численно (с малой погрешностью), соотношения (7.12) являются точными.

На правом рис. 5.3 показано решение задачи, то есть функции $R^1(z, t)$, $R^2(z, t)$, $S(z, t)$, $W(z, t)$, в момент $t = 5.9$. Момент времени, при котором разрыв производной по z , например, для функции $R^1(z, t)$ обращается в бесконечность, равен $t_0 = 6$ (см. (5.25), (5.26), $V_0 = W_0 - S_0$, $F_z(0) = \varepsilon\Omega W_0$). При решении задачи Коши (4.16) в случае области (ii) $a_* = b_* = 5.9$ (при $t = 5.9$), а для области (iii) — $a_* = 3.336$, $b_* = 0$ (при $t = 5.9$). Как и в случае ударных волн, в области (i), то есть при $z > z_2(t)$, решение остается постоянным в течении всего времени эволюции.

Момент времени, при котором разрыв производной по z для функции $R^2(z, t)$ обращается в бесконечность, равен $t_0 = 14$ (см. (5.25), (5.26), $V_0 = W_0 + S_0$, $F_z(0) = \varepsilon\Omega W_0$). Однако, прежде чем производная функции $R^2(z, t)$ достигнет бесконечности в момент $t = 14$, произойдет опрокидывание профилей функций $R^1(z, t)$, $S(z, t)$, $W(z, t)$ ($R^2(z, t)$ останется непрерывной). В момент $t = 6$ возникнет ударная волна в точке $z = 3.6$.

Естественно, при этом изменится и скорость движения ударной волны, которая уже не будет двигаться по характеристике. В момент $t = 14$ аналогичное опрокидывание профиля с образованием ударной волны произойдет и для функции $R^2(z, t)$.

§ 7.3 Решения на линиях уровня функции $z(a, b)$

Построение явного решения, описанное в § 4.1.2, соответствует случаю, когда на линиях уровня функции $t(a, b) = t_*$ (см. (4.15)) определяются функции $R^1(z, t_*)$, $R^2(z, t_*)$, $S(z, t_*)$, $W(z, t_*)$ (см. (4.19)). Именно такие решения описаны в § 7.1, § 7.2, и приведены на рисунках 5.3. Иными словами, указанное явное решение позволяет «проследить» зависимость решения от z в фиксированный момент времени t_* .

Построение явного решения на линиях уровня функции $z(a, b) = z_*$ описано в § 4.1.3. Напомним, что для этого, взамен системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.16), следует рассматривать систему (4.20) с соответствующими начальными условиями.

Производные $x_b(a, b)$, $x_a(a, b)$ вычисляются в зависимости от областей (i) – (iii) при помощи соотношений (5.5), (5.7), (5.10) с учетом (4.21). Как уже говорилось (см. стр. 46), в частности, это означает, что при решении задач достаточно иметь информацию лишь об одной функции —либо о функции $t(a, b)$, либо о функции $z(a, b)$.

В некотором смысле, особенно при проведении экспериментов, решение на линии уровня $z_* = z(a, b)$ является более важным, чем решение на линии уровня $t_* = t(a, b)$. Такое решение позволяет получать информацию об изменении характеристик течения (функциях $S(z_*, t)$, $W(z_*, t)$) в зависимости от времени t в фиксированной точке области $z = z_*$ (место расположения измерительного прибора).

Опуская подробный ход построения решения, который не отличается от описанного в § 4.1.2, § 7.1, приведем результаты расчетов для начальных данных (7.1)–(7.3), соответствующих ударным волнам (см. рис. 7.1). В качестве z_* , выбираем $z_* = 3.405$, то есть точку в окрестности образования удар-

ной волны в области (ii) (см. соответствующую область на левом рис. 5.3). На интервале времени $0 \leq t < t_2$ в точке $z = z_*$ (датчик, измерительный прибор) фиксируется область (i), фактически, течение с постоянной скоростью (см. рис. 7.1, 5.3). Момент времени t_2 (и момент t_1) определены соотношениями

$$t_2 = \frac{z_*}{D_1} = 2.352, \quad D_2 \approx 1.448, \quad t_1 = \frac{z_*}{D_1} = 5.300, \quad D_1 \approx 0.642. \quad (7.13)$$

В момент $t = t_2$ в точке z_* фиксируется разрыв инварианта R^2 — граница между областями (i) и (iii) (см. рис. 5.3).

На интервале времени $t_2 < t < t_1$ мимо датчика в точке $z = z_*$ «проходит» область (ii), и в момент $t = t_1$ в точке z_* фиксируется разрыв инварианта R^1 — граница между областями (ii) и (iii) (см. рис. 7.1, 5.3). Начиная с момента $t = t_2$ в точке z_* фиксируется решение из области (ii).

Напомним (см. § 7.1, § 6 и (7.8)), что в момент $t_d = 10.382$ в точке $z_d = 3.405$ возникает опрокидывание профиля, и образуется ударная волна (см. рис. 7.1, окрестность точки $z_d = 3.405$). Скорость движения ударной волны определяется решением задачи (6.1)–(6.3) для инварианта Римана R^1 . Движение ударной волны осуществляется, примерно, с постоянной скоростью по закону $z(t) \approx \tilde{z} + D_0(t - t_d)$, $D_0 \approx 0.605$, $\tilde{z} = 3.353$ (см. (7.23)). Величина $D_0 < D_1 \approx 0.642$, и это означает, что разрыв, сформировавшийся в процессе эволюции, не догонит разрыв инварианта R^1 , который имелся в начальный момент времени и движется по закону $z_1(t) \approx D_1 t$.

Более подробную информацию см. в § 6 и § 7.4.

В § 4.1.4 показано, что решение для начальной и краевой задачи (но не для начально-краевой задачи) обладает свойством периодичности при периодических начальных или краевых условиях. Таким образом, решение $R^1(z_*, t)$, $R^2(z_*, t)$, $S(z_*, t)$, $W(z_*, t)$ в области (ii), то есть, начиная с $t = t_1$ (см. рис. 7.1), является периодическим по времени с периодом $T = 2\pi/\Omega$ ($\Omega = 1$, см. (7.3)). В точке $z_d = 3.405$ в моменты времени $t = t_d + 2\pi m$, $m = 0, 1, \dots$ возникает серия ударных волн, генерируемых гармоническими периодическими краевыми условиями (7.1) при $z = 0$ (см. рис. 7.1).

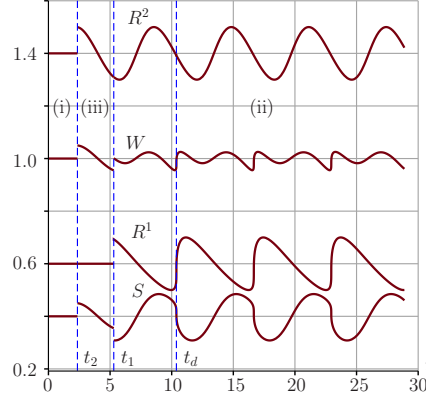


Рис. 7.1. Зависимость значений функций R^1 , R^2 , S , W от времени t при фиксированном $z = z_* = 3.405$. Моменты $t_1 = 5.300$, $t_2 = 2.352$, в которые регистрируются разрывы решения. Случай ударных волн

Во избежание недоразумений, подчеркнем, что результаты, представленные на рис. 7.1 соответствуют $z_* = 3.405$. В этом случае хорошо видны нелинейные искажения инварианта Римана $R^1(z_*, t)$, но практически незаметны нелинейные отклонения от периодичности для инварианта $R^2(z_*, t)$. С течением времени профиль функции $R^2(z, t)$ также опрокинется, и возникнут ударные волны. Это очевидно ввиду того, что рассматриваемый модельный пример представляет собой два независимых уравнения Хопфа (см. (5.6)) — все, что происходит с инвариантом R^1 будет осуществляться и для инварианта R^2 . Для того, чтобы датчик регистрировал ударную волну, возникающую в процессе решения, его следует размещать в точке $z_* \geq z_d$, так как в противном случае сформировавшаяся ударная волна не достигнет датчика. Если разместить датчик в точке $z \approx 25$, то график функции $R^2(z_*, t)$ (и функций $S(z_*, t)$, $W(z_*, t)$), будет иметь такую же пилообразную структуру, как и график функции $R^1(z_*, t)$ (разумеется, с разными амплитудами и сдвигами относительно друг друга).

§ 7.4 Решение в случае сильного разрыва

Результаты расчетов, описывающих опрокидывание профиля инварианта $R^1(z, t)$, приведем для данных начально-краевой задачи (7.1)–(7.3)

$$S|_{t \geq 0, z=0} = S_0, \quad W|_{t \geq 0, z=0} = W_0(1 + \varepsilon \cos \Omega t), \quad (7.14)$$

$$S|_{z \geq 0, t=0} = S_0, \quad W|_{z \geq 0, t=0} = W_0, \quad (7.15)$$

$$S_0 = 0.4, \quad W_0 = 0.4, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \Omega = 1. \quad (7.16)$$

Принимая во внимание результаты § 6, а также расщепление уравнений задачи при конститутивном соотношении § 5.1 на два уравнения Хопфа (5.6), для инварианта Римана R^1 имеем задачу (сравни с (6.1)–(6.3))

$$R_t^1 + R^1 R_z^1 = 0, \quad (7.17)$$

с краевым условием

$$R^1|_{z=0} = G(t) = W_0(1 + \varepsilon \cos \Omega t) - S_0, \quad (7.18)$$

и условием на разрыве (см. также (5.15))

$$D[R^1] = \left[\frac{1}{2} (R^1)^2 \right], \quad D = \frac{dz}{dt}, \quad (7.19)$$

где D — скорость движения линии разрыва $z = z(t)$.

Очевидно, что для записи функции $G(t)$ потребовалось лишь краевое условие (7.14) — опрокидывание профиля происходит в области (ii), см. левый рис. 5.3, поведение решения в которой определяется лишь краевым условием. Выражение для $G(t)$ записано с учетом (3.12) при $\beta = 1$.

Момент времени t_0 , координату z_0 и значение параметра c_0 , соответствующие опрокидыванию вычисляем при помощи (6.6)

$$t_0 = 10.382, \quad z_0 = 3.405, \quad c_0 = 4.390. \quad (7.20)$$

При интегрировании задачи Коши для уравнений (6.8), (6.16), (6.17) используем начальные данные (6.31), (6.32) в момент $t_0 + \tau$

$$\tau = 0.1, \quad t_0 + \tau = 10.482, \quad z_0 = 3.462, \quad (7.21)$$

$$a_0 = c_0 + \delta = 4.681, \quad b_0 = c_0 - \delta = 4.099.$$

Величина δ вычислена при помощи соотношения (6.30), которое для рассматриваемого случая имеет вид

$$\delta = C_1 \sqrt{\frac{\tau}{1 + C_2 \tau}} = 0.291, \quad (\text{при } \tau = 0.1), \quad C_1 = 0.926, \quad C_2 = 0.143. \quad (7.22)$$

Результаты решения задачи (6.8), (6.16), (6.17), (6.31), (6.32), то есть функции $a(t)$, $b(t)$, а также $R_-^1 = G(a(t))$, $R_+^1 = G(b(t))$, $D(t) = dz(t)/dt$, где R_-^1 , R_+^1 — значение инварианта слева и справа от линии разрыва $z(t)$, приведены на рис. 7.2 (1, 2). Величина разрыва $(R_+^1 - R_-^1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, а скорость движения ударной волны стремится к постоянной: $D(t) \approx 0.606$ при $t \rightarrow 0$, что согласуется с результатом о поведении периодической волны в [80, с. 55–57]. Заметим, что закон движения линии разрыва $z = z(t)$ с хорошей относительной точностью (≈ 0.015) аппроксимируется линейной функцией

$$z(t) = \tilde{z} + D_0(t - t_0), \quad \tilde{z} = 3.353, \quad D_0 = 0.605. \quad (7.23)$$

При решении задачи Коши (6.8), (6.16), (6.17), (6.31), (6.32) для контроля вычислялся интеграл $H(a, b)$ (см. (6.23)), величина которого в процессе расчета: $|H(a, b)| < 2 \cdot 10^{-15}$.

На рис. 7.2 (3) показаны зависимости $R^1(z, t_k)$ в некоторые моменты времени t_k , позволяющие получить представление о поведении сильного разрыва решения. На рис. 7.2 (4) показано поведение характеристики (см., в частности, (6.5)) в зависимости от c при фиксированных t

$$z(c, t) = G(c)(t - c). \quad (7.24)$$

При $t = t_0 = 10.382$ функция $z(c, t_0)$ имеет точку перегиба, то есть выполнено условие опрокидывания (6.6).

Помимо прочего, график функции позволяет указать начальное приближение для определения c_0 при помощи первого уравнения (6.7).

Для этого необязательно иметь точное значение момента опрокидывания. Достаточно строить графики $z(c, t_k)$ для различных значений t_k (например, $t = t_1$, см. рис. 7.2 (4)) до тех пор, пока не обнаружится многозначность решения, то есть различным значениям t будет соответствовать одно и то же значение $z(c, t)$ (см. пересечение пунктирной линией графика функции $z(c, t_1)$ на рис. 7.2 (4) — обратная функция $c(z, t_1)$ является многозначной, точнее, трехзначной).

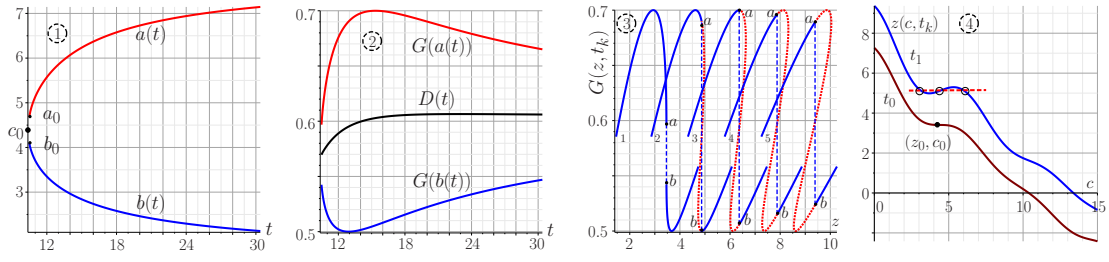


Рис. 7.2. Поведение разрывов.

- 1, 2 — Зависимость от времени t функций $a(t)$, $b(t)$, $R_-^1 = G(a(t))$, $R_+^1 = G(b(t))$ и скорости разрыва $D(t)$, $t_0 = 10.382$, $z_0 = 3.405$, $c_0 = 4.390$, $a_0 = 4.681$, $b_0 = 4.099$
- 3 — Движение сильного разрыва (пунктир). Многозначное решение — точечные линии. Функция $G(z, t_k)$, $t_1 = 10.482$, $t_2 = 12.882$, $t_3 = 15.382$, $t_4 = 17.882$, $t_5 = 20.382$. Символы a , b указывают концы линии разрыва (это не значения параметров a и b)
- 4 — Характеристики $z(c, t) = G(c)(t - c)$, $c_0 = 4.390$, $z_0 = 3.405$, $t_0 = 10.382$, $t_1 = 13.382$

Подчеркнем, что результаты, представленные в § 4–§ 7, в случае параметра $\beta = 1$ являются, фактически, точными. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, по крайней мере, для рассматриваемых задач, позволяют решать их практически с любой точностью. Расчеты, представленные в главе 4 для значений параметра $\beta \neq 1$ (в частности, $\beta = 1/4$), показали, что качественного различия между решениями в случаях $\beta = 1$ и $\beta \neq 1$ не наблюдается. Это, в частности, указывает на возможность использования результатов § 4–§ 7 для «предсказания» поведения решения и в общем случае, что существенно облегчает проведение вычислений, в частности, при $\beta = 1/4$.

Заключение к главе 2

Построены уравнения типа мелкой воды для определения главных членов асимптотических разложений задачи, описывающей вращательно-симметричное течение в цилиндрической области с податливыми границами. Для замыкания уравнений указаны конститутивные соотношения, связывающие давление внешней среды и размеры области.

Приведены постановки начальной, краевой и начально-краевой задач для исходных переменных и для инвариантов Римана, к которым приводятся основные уравнения в бездисперсионном приближении (§ 3).

Построены на основе метода годографа двухпараметрическое неявное решение и явное решение указанных задач на линиях уровня неявного решения, соответствующих постоянному времени, и разработана модификация метода, позволяющая строить явное решение на линиях уровня неявного решения, соответствующих постоянной координате. Сформулированы и доказаны некоторые утверждения о периодичности решений (§ 4).

Исследовано решение задач для главных членов асимптотики при специальном конститутивном соотношении. Построены решения начальной, краевой и начально-краевой задачи, в том числе, для случая возникновения ударных волн и волновых фронтов (§ 5). Детально описано поведение сильного разрыва решения (§ 6).

Приведены результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих поведение решения для начально-краевой задачи, в случае несогласованных начальных и краевых условий (ударные волны) и в случае согласованных условий (волновые фронты) (§ 7).

Основные численные расчеты даны в главе 4, а также, частично, для наглядности приведены в § 5.

Глава 3

Течение в цилиндрическом канале с неровными границами

Цель главы — построение и исследование уравнений для главных членов асимптотических разложений задачи о квазистационарном вращательно-симметричном турбулентном течении в бесконечном цилиндрическом канале с неровными стенками. Базовые уравнения, на основе которых строятся асимптотические разложения, описывающие течение несжимаемой жидкости с переменной вязкостью, указаны в § 8.1. Главные члены асимптотических разложений строятся непосредственно в § 8.2. Осуществляется выбор малости параметров, кинематическая вязкость выбрана зависящей от радиальной и осевой координат таким образом, чтобы исключить возникновение сингулярностей скорости на границе области. В качестве краевого условия на боковой границе цилиндра выбрано кинематическое условие, соответствующее непроницаемости границы для жидкости. Предполагается, что классическое условие прилипания выполнено лишь на прямолинейных участках границы. Для участков границы, не являющихся прямолинейными, никаких дополнительных условий, кроме кинематического условия, не задается. В § 9 в аналитическом виде получено решение для асимптотических уравнений и указаны его особенности. Структура течения детально исследована в § 10. Показано, что при любом расходе жидкости в областях, в которых кривизна боковой границы цилиндра отрицательна, в стационарном течении имеются тороидальные вихри. Наконец, в § 11 представлены результаты расчетов.

§ 8 Основные и асимптотические уравнения

На основе построенной асимптотики исследуется вращательно-симметричное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном цилиндре переменного сечения. Плотность жидкости считается постоянной. Коэффициент кинематической вязкости μ выбран зависящим от радиальной координаты r и осевой координаты z : $\mu = \mu(r^2, z)$. Например, в простейшем варианте $\mu(r, z) = \mu_0(\eta^2(z) - r^2)$, где функция $\eta(z)$ задает боковую поверхность цилиндра $r = \eta(z)$, μ_0 — характерная величина вязкости. Такой выбор типичен для турбулентных течений и соответствует логарифмическому по переменной r профилю осевой скорости w . В случае цилиндрической области с постоянным сечением указанный коэффициент согласуется с экспериментом по реальному турбулентному течению жидкости (см, например, [85, гл. 20]). Анализ задачи показывает, что такой выбор вязкости влечет на боковых границах цилиндра сингулярности скорости течения, для предотвращения которых вводится шероховатость стенки при помощи функции $\delta(z)$ [85, гл. 20]. Течение жидкости рассматривается не в области $0 \leq r \leq \eta(z)$, а в области $0 \leq r \leq h(z)$, $h(z) = \eta(z) - \delta(z)$.

Главные члены асимптотического разложения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости строятся путем разложения по малому параметру — отношению характерного радиуса цилиндра к его характерной длине. Особенностью построения уравнений для главных членов асимптотики является отказ от условия прилипания жидкости к боковой границе цилиндра на тех участках границы, которые не являются прямолинейными. На этих участках задается лишь кинематическое условие, соответствующее непроницаемости границы.

§ 8.1 Основные уравнения и постановка задачи

Главные члены асимптотик для задачи о вращательно-симметричном течении строятся на основе общих уравнений (см., например, [44]) в безразмерных переменных для вязкой несжимаемой жидкости, записанных в

цилиндрических координатах (r, θ, z) при условии отсутствия азимутальной скорости ($v = 0$) и зависимости от угла θ ($\partial_\theta = 0$)

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad (8.1)$$

$$u_t + uu_r + wu_z = -p_r + (\operatorname{div} \mathbb{T})^r, \quad (8.2)$$

$$w_t + uw_r + ww_z = -p_z + (\operatorname{div} \mathbb{T})^z, \quad (8.3)$$

$$(\operatorname{div} \mathbb{T})^r = \frac{1}{r}(r\mathbb{T}^{rr})_r + (\mathbb{T}^{rz})_z - \frac{1}{r}(\mathbb{T}^{\theta\theta}), \quad (8.4)$$

$$(\operatorname{div} \mathbb{T})^z = \frac{1}{r}(r\mathbb{T}^{rz})_r + (\mathbb{T}^{zz})_z, \quad (8.5)$$

$$\mathbb{T} = \mu(r, z)\mathbb{D}, \quad (8.6)$$

$$\mathbb{D}^{rr} = 2u_r, \quad \mathbb{D}^{\theta\theta} = \frac{2u}{r}, \quad \mathbb{D}^{zz} = 2w_z, \quad (8.7)$$

$$\mathbb{D}^{r\theta} = 0, \quad \mathbb{D}^{z\theta} = 0, \quad \mathbb{D}^{rz} = u_z + w_r, \quad (8.8)$$

где u, w — радиальная и осевая компоненты скорости, p — давление, $\mathbb{D}, \mathbb{T}$ — тензоры деформаций и вязких напряжений (см., в частности, [10, с. 433], [44, с. 76] и (A.4), (A.5)), $\mu(r, z)$ — кинематическая вязкость жидкости.

Уравнения удобно записывать для напряжений и деформаций, а не для компонент скорости, ввиду того, что вязкость не является постоянной, а считается зависящей от координат.

§ 8.2 Задача для определения главных членов асимптотики

Для построения главных членов асимптотического разложения производим замены переменных, которые, фактически, указывают порядки входящих в уравнения величин (сравни с (2.12), (2.36))

$$u \rightarrow \varepsilon u, \quad r \rightarrow \varepsilon r, \quad p \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} p, \quad \mu \rightarrow \varepsilon \mu, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (8.9)$$

где ε — малый параметр, характеризующий отношение характерного радиуса цилиндра и характерного размера в осевом направлении.

Все новые переменные (и параметры) считаем имеющими порядок малости $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Уравнения (8.1)–(8.8) после замены переменных (8.9) принимают вид

$$\begin{aligned}
(ru)_r + (rw)_z &= 0, \\
\varepsilon(u_t + uu_r + wu_z) &= -\frac{1}{\varepsilon^2}p_r + \\
+ \frac{1}{r}(\mu r \mathbb{D}^{rr})_r + \varepsilon(\mu \mathbb{D}^{rz})_z - \frac{1}{r}(\mu \mathbb{D}^{\theta\theta}), \\
w_t + uw_r + ww_z &= -\frac{1}{\varepsilon}p_z + \\
+ \frac{1}{r}(\mu r \mathbb{D}^{rz})_r + \varepsilon(\mu \mathbb{D}^{zz})_z, \\
\mathbb{D}^{rr} &= 2u_r, \quad \mathbb{D}^{\theta\theta} = \frac{2u}{r}, \quad \mathbb{D}^{zz} = 2w_z, \\
\mathbb{D}^{r\theta} &= 0, \quad \mathbb{D}^{z\theta} = 0, \quad \mathbb{D}^{rz} = \varepsilon u_z + \frac{1}{\varepsilon}w_r.
\end{aligned}$$

Сохраняя лишь главные члены, получим при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотические уравнения

$$0 = -p_z + \frac{1}{r}(\mu r w_r)_r, \quad p_z = p_z(z, t), \quad (8.10)$$

$$(ru)_r + (rw)_z = 0. \quad (8.11)$$

Уравнения записаны для квазистационарного случая, когда инерциальные члены при $\varepsilon \rightarrow 0$ исчезают, но, тем не менее, зависимость от времени сохраняется — $u = u(r, z, t)$, $w = w(r, z, t)$, $p_z = p_z(z, t)$. Фактически, t играет роль параметра и далее при записи соотношений опускается.

Рассматриваем течение жидкости, выбирая вязкость зависящей от r , z в виде (более общий случай приведен в § 10)

$$\mu = \mu(r, z) = \eta^2(z) - r^2, \quad \mu_r(0, z) = 0. \quad (8.12)$$

Здесь $\eta(z)$ — функция, определяющая границу бесконечной цилиндрической области ($0 \leq r \leq \eta(z)$). Такая вязкость типична для турбулентных течений, в случае, когда используется идея Буссинеска (1877) о зависимости вязкости от координат. Более подробно, см., например, [85, гл. 20, с. 547, рис. 8.1], [9, с. 54, формула (4.10)], [29, с. 34–39], [8, 84] и, особенно, [45, 86], в которых обосновывается способ выбора вязкости.

Соотношения для функции тока $\psi(r, z)$, позволяющей автоматически удовлетворить уравнению неразрывности (8.11), имеют вид

$$ru = -\psi_z, \quad rw = \psi_r. \quad (8.13)$$

Уравнения решаем в области

$$\mathbb{C} = \{(r, z): 0 \leq r \leq h(z), \quad -\infty < z < \infty\}, \quad (8.14)$$

$$h(z) = \eta(z) - \delta(z), \quad (8.15)$$

где $\delta > 0$ — параметр (точнее, функция), определяющий шероховатость стенки [85, гл. 20], $h(z)$ — фактический радиус области, в которой происходит течение жидкости (см. рис. 8.1).

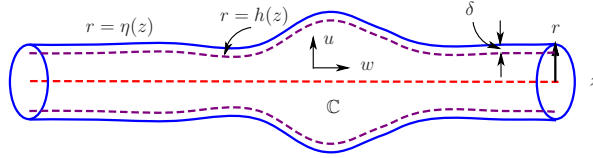


Рис. 8.1. Схема области. Пунктир показывает область шероховатости

Введение в рассмотрение параметра $\delta(z)$ типично при исследовании турбулентных течений, и связано с тем, что, как показывает анализ решения, при $\delta(z) = 0$ скорости u, w имеют сингулярности при $r = \eta(z)$. Параметр $\delta(z)$ (функция) является феноменологическим параметром. Существует большое количество теорий и полуэмпирических соотношений для его определения (см. краткий обзор в [29, стр. 147–150], а также [97, 124, 141], [46, с. 77–84, 222–291]). В принципе, теория позволяет считать шероховатость δ зависящей от координаты z , что и сделано в дальнейшем. Обратим внимание, что $\delta(z)$ встречается в соотношениях лишь косвенно. Достаточно задавать лишь функции $\eta(z)$ и $h(z)$, соблюдая условие $\eta(z) > h(z)$.

Для уравнений (8.10)–(8.13) задаем условия на оси цилиндра

$$u(0, z) = 0, \quad w_r(0, z) = 0, \quad \psi(0, z) = 0, \quad (8.16)$$

и кинематическое краевое условие

$$\psi(h(z), z) = Q, \quad (8.17)$$

которое соответствует отсутствию нормальной компоненты скорости на границе $z = h(z)$.

Величина Q — полурасход жидкости, определяемый соотношением

$$Q = \int_0^{h(z)} rw(r, z) dr = \int_0^{h(z)} \psi_r(r, z) dr = \psi(h(z), z). \quad (8.18)$$

В силу уравнения неразрывности (8.11) и условия непроницаемости стенки цилиндра для жидкости (8.17), расход Q является постоянным и далее определяется как

$$Q = \psi(h(\infty), \infty) = \text{const}. \quad (8.19)$$

Фактически, это дополнительное ограничение на расход жидкости.

Заметим, что в терминах компонент скорости кинематическое условие для стационарного течения имеет вид

$$u(h(z), z) = h_z(z)w(h(z), z), \quad (8.20)$$

или

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{(1, -h_z)}{\sqrt{1 + h_z^2}},$$

где $\mathbf{v} = (u, w)$, $\mathbf{n}$ — нормаль к границе.

В стационарном случае, (8.20), естественно, совпадает с (2.8) (в котором следует заменить R на h). Дифференцирование по z функции $\psi(h(z), z)$ с учетом (8.13), (8.20) приводит к соотношению

$$\frac{d}{dz}\psi(h(z), z) = (\psi_r h_z + \psi_z)|_{r=h(z)} = (rwh_z - ru)|_{r=h(z)} = 0, \quad (8.21)$$

которое означает, что $\psi(h(z), z) = \text{const}$. Иными словами, кинематическое условие (8.17), действительно, как и сказано, является условием отсутствия нормальной компоненты скорости на границе $r = h(z)$.

Окончательно, в терминах функции тока, уравнения для определения главных членов асимптотики, то есть задачу (8.10), (8.11), (8.16), (8.17), записываем в виде

$$\mu(r, z) \left(\frac{1}{r} \psi_r \right)_r = \frac{1}{2} r p_z(t), \quad (8.22)$$

$$\psi(0, z) = 0, \quad \psi(h(z), z) = Q, \quad (8.23)$$

$$p_z(z, t) = p_z(t) \quad \Leftarrow \quad (p_{zz} = 0). \quad (8.24)$$

Дополнительное требование (8.24), означающее независимость градиента давления p_z от координаты z (вдоль области $\mathbb{C}$), не является критическим. В принципе, можно рассматривать задачу и при $p_{zz} \neq 0$.

§ 9 Решение и его анализ

Построение решения линейной задачи (8.22)–(8.24) не составляет труда и, опуская преобразования, получаем выражение для функции тока

$$\psi(r, z) = \frac{1}{8}p_z \left((\eta^2 - r^2) \ln \frac{\eta^2 - r^2}{\eta^2} - \frac{r^2(\eta^2 - h^2)}{h^2} \ln \frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2} \right) + \frac{Qr^2}{h^2}. \quad (9.1)$$

Осевую скорость w и радиальную скорость u с учетом (8.13) записываем в форме (при $p_z(z, t)$ не зависящем от z , но, возможно, зависящем от t как параметра, см. (8.24))

$$w(r, z) = -\frac{1}{4}p_z \left(\ln \frac{\eta^2 - r^2}{\eta^2} + 1 + \frac{(\eta^2 - h^2)}{h^2} \ln \frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2} \right) + \frac{2Q}{h^2}, \quad (9.2)$$

$$u(r, z) = -\frac{1}{r}(\psi_h(r, z)h_z(z) + \psi_\eta(r, z)\eta_z(z)), \quad (9.3)$$

$$\psi_\eta(r, z) = \frac{1}{4}p_z\eta \left(\ln \frac{\eta^2 - r^2}{\eta^2} - \frac{r^2}{h^2} \ln \frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2} \right), \quad (9.4)$$

$$\psi_h(r, z) = \frac{1}{4}p_z \frac{r^2}{h} \left(\frac{\eta^2}{h^2} \ln \frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2} + 1 \right) - \frac{2Qr^2}{h^3}.$$

Здесь аргументы функций $\eta(z)$, $h(z)$ опущены для сокращения формул. Осевая скорость $u(r, z)$ записана в виде (9.3), во-первых, ввиду громоздкости, а во-вторых для того, чтобы подчеркнуть линейную зависимость $u(r, z)$ от производных $h_z(z)$, $\eta_z(z)$. В частности, это означает, что радиальная скорость $u(r, z) = 0$ при $h(z) = \text{const}$, $\eta(z) = \text{const}$, то есть в случае «плоских» границ имеется только осевая скорость $w(r, z)$. Если отказаться от условия прилипания для всей боковой поверхности цилиндра, то величина Q и функция $p_z(t)$ могут быть любыми.

Обратим внимание на то, что при специальном выборе $p_z(t) = p_z^*$, где

$$p_z^* = \frac{8Q}{h_\infty^2 + \eta_\infty^2 \ln \frac{\eta_\infty^2 - h_\infty^2}{\eta_\infty^2}}, \quad (9.5)$$

условие прилипания удовлетворено на участках $h(z) = \text{const}$, $\eta(z) = \text{const}$, в частности при $z = \infty$, в силу (9.3),

$$w(h_\infty, \infty) = 0, \quad \eta_\infty = \eta(\infty), \quad h_\infty = h(\infty). \quad (9.6)$$

Одним из обоснований отсутствия прилипания может быть проскальзывание Навье, которое, в принципе, можно считать феноменологическим условием, но можно и объяснять наличием слоя проникновения, аналогичного шероховатостям стенки (см., например, [93, 117], а также краткий обзор [30, стр. 37–40]). Наконец, заметим, что, строго говоря, граница $r = h(z)$ и не является твердой — это всего лишь (феноменологическая) граница шероховатостей, введенная в рассмотрение с целью ликвидации сингулярностей скорости.

Формально, решение (9.1)–(9.4) справедливо при любой достаточно гладкой функции $h(z)$. Однако, на практике естественно требовать чтобы при $|z| \rightarrow \infty$ указанная функция стремилась к некоторым константам (возможно различным при $z = \pm\infty$), то есть цилиндр $\mathbb{C}$ имел постоянные радиусы на бесконечности. Это автоматически приведет к стремлению на бесконечности осевой скорости w к некоторым константам, и стремлению радиальной скорости u к нулю. Конечно, имеются и исключения, когда, например, функция $h(z)$ является периодической, не имеющей предел на бесконечности (гофрированная граница). В этом случае, под h_∞ (и η_∞) можно понимать, в частности, среднее значение периодической функции.

Отметим, что касательное (сдвиговое) напряжение τ , которое в случае задачи (8.22)–(8.24) имеет вид

$$\tau = \mu \mathbb{D}^{rz} = \mu(r, z) w_r(r, z) = \frac{1}{2} p_z r, \quad (9.7)$$

зависит лишь от радиальной координаты, обращаясь в нуль на оси цилиндра $r = 0$, и достигая максимума на боковых стенках цилиндра $\mathbb{C}$. Это,

в очередной раз, указывает на то, что при выборе вязкости в виде (8.22) касательное напряжение линейно зависит от расстояния до стенки (согласно первоначальному варианту идеи Буссинеска, см., также [45, 86]).

§ 10 Структура течения

Структура течения жидкости может быть указана достаточно детально на основе исследования фазового портрета системы уравнений

$$\frac{dr}{dt} = u(r, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(r, z), \quad (10.1)$$

стационарные точки (r_k, z_k) которой определяются уравнениями

$$u(r_k, z_k) = 0, \quad w(r_k, z_k) = 0. \quad (10.2)$$

Здесь $u(r, z)$, $w(r, z)$ — определены соотношениями (9.2)–(9.4).

Напомним, что если $p_z = p_z^*$, то на бесконечности выполняются условия прилипания $w(r, \infty) = 0$ (см. (9.5), (9.6)), и при известном z_k значения r_k явно определяются соотношением, вытекающим из равенства $w(r_k, z_k) = 0$, и условия прилипания

$$h_k^2 \ln \frac{\eta_k^2 - r_k^2}{\eta_k^2} + (\eta_k^2 - h_k^2) \ln \frac{\eta_k^2 - h_k^2}{\eta_k^2} = h_\infty^2 + \eta_\infty^2 \ln \frac{\eta_\infty^2 - h_\infty^2}{\eta_\infty^2}, \quad (10.3)$$

где

$$h_k = h(z_k), \quad \eta_k = \eta(z_k). \quad (10.4)$$

В случае, когда $h(z)$, $\eta(z)$ не имеют предела при $z \rightarrow \infty$ (например, периодические функции), то, как уже указывалось, под η_∞ , h_∞ понимаются средние значения соответствующих функций. В частности, условие $w(r, \infty) = 0$ следует заменить условием $w(h_\infty, \infty) = 0$.

Обратим внимание на то, что, во-первых, уравнение (10.3) может и не иметь решения относительно r_k , а, во вторых, точка (r_k, z_k) , соответствующая решению уравнения (10.3), может не принадлежать области $\mathbb{C}$, в которой происходит течение жидкости.

§ 10.1 Почти «произвольная» вязкость

Кинематическая вязкость жидкости $\mu(r, z)$, указанная в (8.12), является частным случаем более общего почти «произвольного», во всяком случае более общего, закона, определяющего кинематическую вязкость в виде

$$\mu(r, z) = \mu(r, \eta(z)), \quad \mu(\eta(z), \eta(z)) = 0. \quad (10.5)$$

Взамен $\mu(r, \eta(z))$ можно использовать выражение $\mu(r, h(z))$ или $\mu(r, \delta(z))$ — все такие соотношения, в некотором смысле, эквиваленты, ввиду связи (8.15). Однако, выбор (10.5) позволяет существенно упростить всевозможные преобразования. Соотношение (10.5) подчеркивает, что зависимость вязкости от координат не является полностью произвольной, а определяется, в частности, конфигурацией границы области $\mathbb{C}$.

Заметим, что приводимые ниже результаты — это развитие результатов работы автора [33] (с соавторами), которые в указанной работе были, фактически, лишь частично анонсированы.

Для исследования структуры течения в случае (10.5) записываем уравнения (10.1) в гамильтоновой форме, вводя новую переменную

$$s = r^2, \quad \partial_r = 2r\partial_s. \quad (10.6)$$

Тогда уравнения (10.1) принимают вид

$$\frac{ds}{dt} = -2\psi_z(s, z), \quad \frac{dz}{dt} = 2\psi_s(s, z), \quad H(s, z) = 2\psi(s, z), \quad (10.7)$$

где $H(s, z)$ — гамильтониан.

Для определения в новых переменных (s, z) функции $\psi(s, z)$ после замены переменных (10.6) в (8.22)–(8.24) имеем задачу

$$\psi_{ss}(s, z) = \frac{1}{8}p_z(t)\frac{1}{\mu(s, \eta(z))}, \quad \mu(s, \eta(z)) = \mu(s, z), \quad (10.8)$$

$$\psi(0, z) = 0, \quad \psi(h^2(z), z) = Q. \quad (10.9)$$

Здесь для вязкости использовано обозначение $\mu(s, \eta(z))$, чтобы подчеркнуть зависимость вязкости от $\eta(z)$, как от функционального параметра.

Заметим, что при $p_z < 0$ функция тока является всегда выпуклой функцией по переменной s .

Решение задачи (10.8), (10.9) записывается в виде

$$\psi(s, z) = \frac{1}{8}p_z\varphi(s, z) - \frac{1}{8}p_z\frac{s}{h^2}\varphi(h^2, z) + \frac{Qs}{h^2}, \quad (10.10)$$

где

$$\varphi(s, z) = \int_0^s \frac{(s-s')ds'}{\mu(s', \eta(z))}. \quad (10.11)$$

Конечно же, в случае вязкости, задаваемой соотношением (8.12), это прежнее решение (9.1) (и (9.2)–(9.4)).

В некоторых случаях удобно записывать функции ψ , φ как функции переменной s и двух функциональных параметров $\eta(z)$, $h(z)$

$$\varphi(s, z) = \varphi(s, \eta(z), h(z)), \quad \psi(s, z) = \psi(s, \eta(z), h(z)). \quad (10.12)$$

Естественно, вязкость $\mu(s, \eta(z))$ следует выбирать так, чтобы обеспечить существование функции (интеграла) $\varphi(s, \eta(z), h(z))$.

Стационарные точки (s_k, z_k) функции $\psi(s, z)$ определяются условиями

$$\psi_s(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_z(s_k, z_k) = 0. \quad (10.13)$$

Тип стационарных точек — экстремум или седловая точка — определяется знаками Δ и вторых производных

$$\Delta = \psi_{ss}(s_k, z_k)\psi_{zz}(s_k, z_k) - \psi_{sz}^2(s_k, z_k). \quad (10.14)$$

При $\Delta > 0$, $\psi_{ss} > 0$ имеем минимум, а при $\Delta > 0$, $\psi_{ss} < 0$ — максимум. В случае $\Delta < 0$ точка (s_k, z_k) является седловой точкой.

При исследовании линеаризованной системы

$$\frac{dS}{dt} = -2\psi_{zs}(s_k, z_k)S - 2\psi_{zz}(s_k, z_k)Z, \quad (10.15)$$

$$\frac{dZ}{dt} = 2\psi_{ss}(s_k, z_k)S + 2\psi_{sz}(s_k, z_k)Z, \quad (10.16)$$

собственные значения λ определяются соотношением

$$\lambda^2 = -4\Delta. \quad (10.17)$$

Учитывая, что при $p_z < 0$ производная $\psi_{ss}(s, z) < 0$ (см. (10.8)), максимумы функции $\psi(s, z)$ всегда являются центрами и, если точка максимума $(s_k, z_k) \in \mathbb{C}$, то такая точка является центром вихря.

§ 10.2 Соотношения для функций $\varphi(s, z)$, $\psi(s, z)$

Приведем набор соотношений, которые используются для доказательств и справедливы в случае функций $\varphi(s, z)$, $\psi(s, z)$, задаваемых при помощи (10.12), (10.13),

$$\varphi(s, z) = \int_0^s \frac{(s - s') ds'}{\mu(s', \eta(z))}, \quad \varphi_s(s, z) = \int_0^s \frac{ds'}{\mu(s', \eta(z))}, \quad (10.18)$$

$$\varphi_{ss}(s, z) = \frac{1}{\mu(s, \eta(z))}, \quad (10.19)$$

$$\psi_s(s, z) = \frac{1}{8} p_z \varphi_s(s, z) - \frac{1}{8} p_z \frac{1}{h^2(z)} \varphi(h^2(z), z) + \frac{Q}{h^2(z)} = \frac{1}{2} w(s, z), \quad (10.20)$$

$$\psi_h(s, z) = \frac{1}{4} p_z \frac{s}{h^3} \varphi(h^2, z) - \frac{1}{4} p_z \frac{s}{h} \varphi_s(h^2, z) - \frac{2Qs}{h^3}, \quad (10.21)$$

$$\psi_h(s, z) + \frac{2s}{h} \psi_s(s, z) = \frac{1}{4} p_z \frac{s}{h} (\varphi_s(s, z) - \varphi_s(h^2, z)), \quad (10.22)$$

$$\psi_{sh}(s, z) = \frac{1}{4} p_z \frac{1}{h^3} \varphi(h^2, z) - \frac{1}{4} p_z \frac{1}{h} \varphi_s(h^2, z) - \frac{2Q}{h^3}, \quad (10.23)$$

$$\psi_{sh}(s, z) + \frac{2}{h} \psi_s(s, z) = \frac{1}{4} p_z \frac{1}{h} (\varphi_s(s, z) - \varphi_s(h^2, z)), \quad (10.24)$$

$$s\psi_{sh}(s, z) = \psi_h(s, z), \quad (10.25)$$

$$h\psi_{hh}(s, z) + 3\psi_h(s, z) = -\frac{1}{2} p_z \varphi_{ss}(s, z) h = -\frac{1}{2} p_z h \frac{s}{\mu(s, \eta)}, \quad (10.26)$$

$$\psi_z(s, z) = \psi_\eta(s, z) \eta_z(z) + \psi_h(s, z) h_z(z), \quad (10.27)$$

$$\begin{aligned} \psi_{zz}(s, z) = & \psi_{\eta\eta}(s, z) \eta_z^2(z) + 2\psi_{\eta h}(s, z) \eta_z(z) h_z(z) + \psi_{hh}(s, z) h_z^2(z) + \\ & + \psi_\eta(s, z) \eta_{zz}(z) + \psi_h(s, z) h_{zz}(z). \end{aligned} \quad (10.28)$$

§ 10.3 Частные случаи границ

Рассматриваем несколько частных случаев границ области $\mathbb{C}$. Наиболее интересными, с практической точки зрения, являются два случая.

Плоская граница

$$(I): \quad r = \eta(z) = \text{const}. \quad (10.29)$$

Постоянная толщина шероховатости

$$(II): \quad \delta(z) = \text{const.} \quad (10.30)$$

Случай (I) соответствует плоской внешней границе, в то время как граница $r = h(z)$, определяющая шероховатость, произвольна ($h(z) < \eta(z)$), см. рис. 10.1. В случае (II) граница шероховатости повторяет профиль внешней границы.

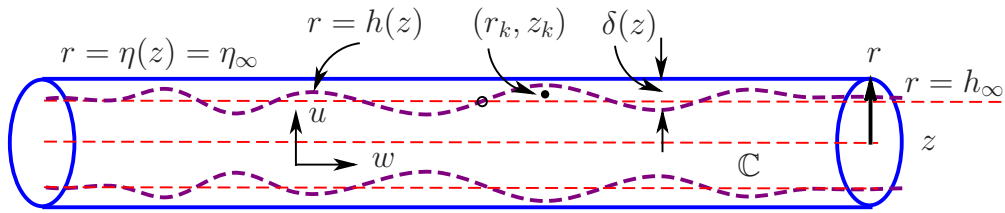


Рис. 10.1. Схема области. Частные случаи

Сформулируем основной результат.

Утверждение 10.1. Если $p_z = p_z^*$, то есть выполнено условие прилипания на бесконечности (см., например, (9.5) в случае (8.12)), то в стационарной точке (s_k, z_k) , которая принадлежит области $\mathbb{C}$, выполнено условие $h_{zz}(z_k) < 0$, и в области имеется (тороидальный) вихрь с центром в точке (s_k, z_k) . $\square$.

Доказательство. Доказательство содержится в § 10.3.1, § 10.3.2.

§ 10.3.1 Граница $r = \eta(z) = \text{const}$

Граница $r = \eta(z) = \text{const}$ соответствует «плоской» боковой границе. Такой вариант, в некотором смысле, наиболее интересен — «внешняя» граница области $r = \eta(z)$ является «плоской» и не изменяется, а «внутренняя» граница $r = h(z)$ может быть произвольной ($h(z) < \eta(z)$), см. рис. 10.1.

В случае (8.12) соотношения (9.1)–(9.4) для компонент скорости $u(r, z)$, $w(r, z)$ существенно упрощаются.

Замечание 10.1 (случай (8.12)). Полагая

$$\eta(z) = \eta_\infty = \text{const}, \quad (10.31)$$

получим существенное упрощение выражения для радиальной скорости $u(r, z)$ (см. (9.2), (9.4))

$$u(r, z) = -\frac{1}{r}\psi_h(r, z)h_z(z), \quad (10.32)$$

$$\psi_h = \frac{1}{4}p_z \frac{r^2}{h} \left(\frac{\eta_\infty^2}{h^2} \ln \frac{\eta_\infty^2 - h^2}{\eta_\infty^2} + 1 \right) - \frac{2Qr^2}{h^3},$$

а осевая скорость $w(r, z)$ запишется в форме

$$w(r, z) = -\frac{1}{4}p_z \left(\ln \frac{\eta_\infty^2 - r^2}{\eta_\infty^2} + 1 + \frac{(\eta_\infty^2 - h^2)}{h^2} \ln \frac{\eta_\infty^2 - h^2}{\eta_\infty^2} \right) + \frac{2Q}{h^2}. \quad (10.33)$$

□

§ 10.3.1.1 Тривиальный случай равновесия

Пусть (s_k, z_k) равновесие, которое не является экстремумом (точнее, стационарной точкой) функции $\psi(s, z)$, то есть $h_z(z_k) \neq 0$.

Тогда, с учетом $\eta_z(z) = 0$ и (10.13), (10.14), (10.17), (10.25)–(10.28), имеем

$$h_z(z) \neq 0, \quad \psi_z(s_k, z_k) = \psi_h(s_k, z_k)h_z(z_k) = 0, \quad s_k = h^2(z_k), \quad (10.34)$$

$$\psi_h(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_s(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_{sh}(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_{sz}(s_k, z_k) = 0,$$

$$\psi_{zz}(s_k, z_k) = \psi_{hh}(s_k, z_k)h_z^2(z_k) = -\frac{1}{2}p_z \frac{1}{\mu(s_k, \eta)} h_z^2(z_k),$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}p_z^2 \frac{h_k^2}{\mu^2(s_k, \eta)} h_z^2(z_k) > 0.$$

Таким образом, указанное равновесие является седлом.

Рассматриваемое равновесие показано на рис. 10.1 и всегда присутствует в системе, если $s_k = h^2(z_k) = h_\infty^2$, то есть граница $s = h^2(z)$ пересекает фиктивную границу $s = h_\infty^2$, на которой осевая скорость $w(s_k, \infty) = 0$.

§ 10.3.1.2 Стационарная точка равновесия

Пусть (s_k, z_k) равновесие, которое может являться экстремумом функции $\psi(s, z)$, то есть $h_z(z_k) = 0$.

Тогда, с учетом $\eta_z(z) = 0$ и (10.13), (10.14), (10.17), (10.25)–(10.28), имеем

$$h_z(z) = 0, \quad \psi_z(s_k, z_k) = \psi_h(s_k, z_k)h_z(z_k) = 0, \quad s_k \neq h^2(z_k), \quad (10.35)$$

$$\psi_h(s_k, z_k) \neq 0, \quad \psi_s(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_{sz}(s_k, z_k) = \psi_{sh}(s_k, z_k)h_z(z_k) = 0,$$

$$\psi_{zz}(s_k, z_k) = \psi_h(s_k, z_k)h_{zz}(z_k) = \frac{1}{4}p_z \frac{s_k}{h_k} (\varphi_s(s_k, z_k) - \varphi_s(h_k^2, z_k)) h_{zz},$$

$$\varphi_s(s_k, z_k) - \varphi_s(h_k^2, z_k) = \int_{h_k^2}^{s_k} \frac{ds'}{\mu(s', \eta(z))} < 0, \quad s_k < h_k^2.$$

Последнее неравенство $s_k < h_k^2$, в частности, означает, что $(s_k, z_k) \in \mathbb{C}$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{8}p_z^2 \frac{s_k h_{zz}(z_k)}{h_k \mu(s_k, \eta(z))} \int_{h_k^2}^{s_k} \frac{ds'}{\mu(s', \eta(z))}.$$

Таким образом, указанное равновесие в зависимости от знака $h_{zz}(z_k)$ является либо центром ($h_{zz}(z_k) < 0$), либо седлом ($h_{zz}(z_k) > 0$).

§ 10.3.2 Постоянная толщина шероховатости

В классическом варианте при использовании шероховатости ее величина выбирается постоянной

$$\delta(z) = \eta(z) - h(z) = \text{const}. \quad (10.36)$$

В этом случае, реальная граница области $\mathbb{C}$, то есть $r = h(z)$, «повторяет» границу $r = \eta(z)$, на которой вязкость обращается в нуль.

С учетом того, что $\eta_z(z) = h_z(z)$ из (10.27), получим

$$\psi_z(s, z) = (\psi_\eta(s, z) + \psi_h(s, z))h_z(z). \quad (10.37)$$

§ 10.3.2.1 Стационарная точка равновесия

Пусть

$$h_z(z_k) = 0. \quad (10.38)$$

В этом случае, в силу условия равновесия (10.13),

$$\psi_z(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_s(s_k, z_k) = 0. \quad (10.39)$$

В силу (10.38) из (10.27) и (10.27), имеем

$$\psi_{zs}(s_k, z_k) = (\psi_{sh}(s_k, z_k) + \psi_{s\eta}(s_k, z_k))h_z(z_k) = 0, \quad (10.40)$$

$$\psi_{zz}(s_k, z_k) = (\psi_h(s_k, z_k) + \psi_\eta(s_k, z_k))h_{zz}(z_k). \quad (10.41)$$

Величина $\psi_h(s_k, z_k)$ определена (10.35), и при $p_z < 0$ имеет положительный знак. Покажем, что при $p_z < 0$ производная $\psi_\eta(s_k, z_k) > 0$.

Вычисляя производную, получим

$$\psi_\eta(s, z) = \frac{1}{8}p_z\Phi(s), \quad (10.42)$$

где

$$\Phi(s) = \varphi_\eta(s, z) - \frac{s}{h^2}\varphi_\eta(h^2, z), \quad \Phi_s(s) = -\frac{1}{h^2} \int_0^s \frac{s'\mu_\eta(s', \eta) ds'}{\mu_\eta^2(s', \eta)}. \quad (10.43)$$

При выполнении условия

$$\mu_\eta(s, \eta) > 0, \quad (10.44)$$

имеем $\Phi(0) = 0$, $\Phi_s(s) < 0$ и, следовательно,

$$\Phi_s(s) < 0. \quad (10.45)$$

Учитывая, что $\text{sign } \psi_{zz}(s_k, z_k) = \text{sign } h_{zz}(z_k)$ и $\psi_{ss}(s_k, z_k) < 0$, имеем

$$\text{sign } \lambda^2 = \text{sign } h_{zz}(z_k). \quad (10.46)$$

Таким образом, указанное равновесие в зависимости от знака $h_{zz}(z_k)$ является либо центром ($h_{zz}(z_k) < 0$), либо седлом ($h_{zz}(z_k) > 0$).

§ 10.3.2.2 Тривиальный случай равновесия

При наличии равновесия, аналогичного описанному в п. § 10.3.1.2, результат вновь не зависит от выбора функции $\mu(s, \eta(z))$.

Пусть

$$\eta(z) - h(z) = \delta = \text{const}, \quad \eta_z(z) = h_z(z) \neq 0. \quad (10.47)$$

Тогда

$$\psi_z(s, z) = (\psi_h(s, z) + \psi_\eta(s, z))h_z(z). \quad (10.48)$$

Вычисляя производные

$$\psi_\eta(s, z) = \frac{1}{8}p_z\varphi_\eta(s, z) - \frac{1}{8}p_z\frac{s}{h^2}\varphi_\eta(h^2, z), \quad (10.49)$$

$$\psi_{\eta\eta}(s, z) = \frac{1}{8}p_z\varphi_{\eta\eta}(s, z) - \frac{1}{8}p_z\frac{s}{h^2}\varphi_{\eta\eta}(h^2, z), \quad (10.50)$$

получим

$$\psi_\eta(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_{\eta\eta}(s_k, z_k) = 0, \quad s_k = h_k^2. \quad (10.51)$$

С учетом условия равновесия (10.13)

$$\psi_s(s_k, z_k) = 0, \quad \psi_z(s_k, z_k) = 0,$$

в силу (10.51), (10.28) имеем

$$\psi_h(s_k, z_k) = 0, \quad (10.52)$$

$$\psi_{zz}(s_k, z_k) = (2\psi_{\eta h}(s_k, z_k) + \psi_{hh}(s_k, z_k))h_z^2(z_k). \quad (10.53)$$

Вновь вычисляя производные, получим

$$\psi_{\eta h}(s, z) = \frac{1}{4}p_z\frac{s}{h^3}\varphi_\eta(h^2, z) - \frac{1}{4}p_z\frac{s}{h}\varphi_{\eta s}(h^2, z), \quad (10.54)$$

$$\varphi_\eta(s, z) = -\int_0^s \frac{(s-s')\mu_\eta(s', \eta) ds'}{\mu^2(s', \eta)}, \quad \varphi_{\eta s}(s, z) = -\int_0^s \frac{\mu_\eta(s', \eta) ds'}{\mu^2(s', \eta)}. \quad (10.55)$$

Используя (10.53)–(10.55) для производной ψ_{zz} имеем

$$\psi_{zz}(s_k, z_k) = \frac{1}{2}p_z \left(\frac{1}{h_k} \int_0^{h_k^2} \frac{s'\mu_\eta(s', \eta_k) ds'}{\mu^2(s', \eta_k)} - \frac{h_k^2}{\mu(h_k^2, \eta_k)} \right) h_z^2(z_k). \quad (10.56)$$

Вычисляя производную ψ_{sz} при помощи (10.48), (10.52)–(10.55), получим

$$\psi_{zs}(s_k, z_k) = \psi_{\eta s}(s_k, z_k)h_z(z_k), \quad (10.57)$$

$$\psi_{\eta s}(s, z) = -\frac{1}{8}p_z \frac{1}{h^2} \int_0^s \frac{s' \mu_\eta(s', \eta) ds'}{\mu^2(s', \eta)}. \quad (10.58)$$

Окончательно, вводя обозначение

$$A(h, \eta) = \int_0^{h^2} \frac{s' \mu_\eta(s', \eta) ds'}{\mu^2(s', \eta)}, \quad (10.59)$$

для λ^2 имеем

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= -4(\psi_{ss}(s_k, z_k)\psi_{zz}(s_k, z_k) - \psi_{zs}^2(s_k, z_k)) = \\ &= -4h_z^2(z_k)p_z^2 \left(\frac{1}{16\mu(h_k^2, \eta_k)} \left(\frac{A(h_k, \eta_k)}{h_k} - \frac{h_k^2}{\mu(h_k^2, \eta_k)} \right) - \frac{1}{64h_k^4} A^2(h_k, \eta_k) \right) = \\ &= \frac{p_z^2 h_z^2(z_k)}{16h_k^4} \left(A(h_k, \eta_k) - \frac{2h_k^2}{\mu(h_k^2, \eta_k)} \right)^2 > 0. \end{aligned} \quad (10.60)$$

Таким образом, рассматриваемое равновесие является седлом.

§ 11 Результаты расчетов структуры течения

Несмотря на то что решение задачи (8.22)–(8.24) (или (10.8), (10.9)) записывается в аналитической форме (9.1)–(9.4), соответствующие соотношения достаточно громоздки, и имеет смысл привести их визуализацию для лучшего понимания результатов.

Представленные результаты соответствуют случаю, указанному в Утверждении 10.1, когда на границе области имеются участки, для которых $h_{zz}(z) < 0$ и шероховатость $\delta = \text{const}$ (см. также § 10.3.2.1).

Один из вариантов течения и имеющих пристеночных вихрей приведен на рис. 11.1 для случая, когда граница задана уравнением

$$r = \eta(z) = 1 + \alpha(e^{-\beta(z-z_0)^4} + e^{-\beta(z+z_0)^2}), \quad (11.1)$$

где α, β, z_0 — некоторые параметры.

Параметры задачи Q (полурасход жидкости), p_z (градиент давления), p_z^* (вычисляется при помощи (9.5) и соответствует выполнению условий прилипания на участках границы $h(z) = \text{const}$, $\eta(z) = \text{const}$), δ (шероховатость), а также профиль границы (11.1) выбирались таким образом, чтобы продемонстрировать существование вихрей в области, где $h_{zz}(z) < 0$ (см. Утверждение 10.1). Величина $p_z = p_z^*$ соответствует условию, при котором Утверждение 10.1 справедливо. Однако, это условие является достаточным и, в принципе, вихри могут присутствовать и при $p_z \approx p_z^*$, что и демонстрирует рис. 11.1.

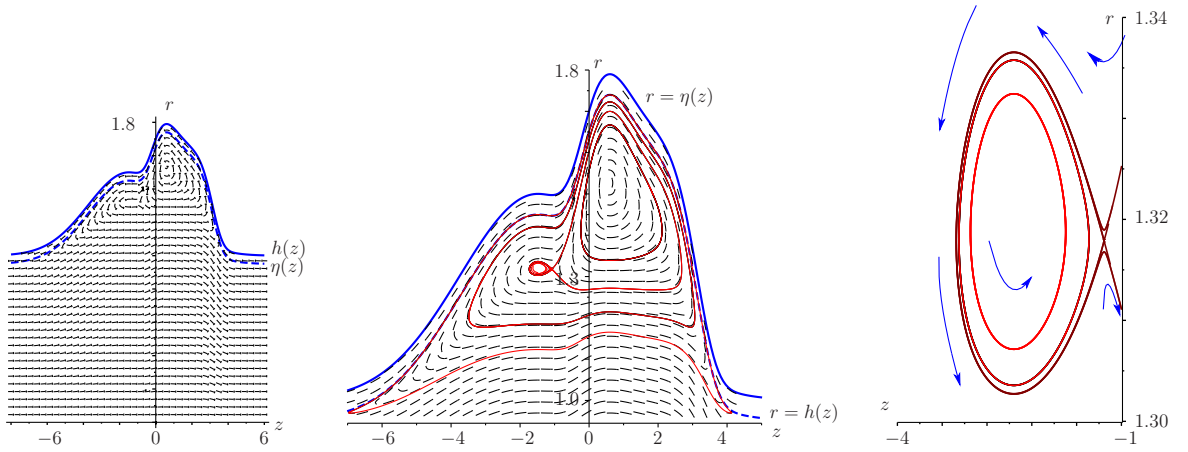


Рис. 11.1. Слева: поле скоростей в случае (11.1), $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $\delta = 0.05$, $z_0 = 1.5$, $p_z = -5.600$, $Q = 1$, $p_z^* = -5.612$. В центре: фрагмент области с вихрями. Справа: окрестность седловой точки

На рис. 11.1 показано поле скоростей в некоторой части области $\mathbb{C}$ (слева), на котором видно, что вдали (по координате r) от «деформации» границы течение фактически прямолинейно и лишь вблизи «деформации» границы возникают вихри. На самом деле, возникает два вихря. На центральном рис. 11.1 показана структура вихрей — один «крупный» вихрь и один «мелкий» вихрь. Наконец, на правом рис. 11.1 показана окрестность седловой точки (вблизи мелкого вихря). В соотношении (11.1) параметр α (фактически «амплитуда деформации стенки») выбран достаточно большим для улучшения визуализации изображений. Никаких принципиальных изменений в структуре течения, показанного на рис. 11.1 при умень-

шении α не происходит.

Напомним, что центры вихрей определяются условием (10.2)

$$u(r_k, z_k) = 0, \quad w(r_k, z_k) = 0. \quad (11.2)$$

Можно показать, что (11.2) заменяется нахождением корней функции $h_z(z)$

$$h_z(z_k) = 0, \quad (11.3)$$

и в случае $p_z = p_z^*$, значения r_k явно определяются соотношениями (10.3), (10.4), вытекающими из равенства $w(r_k, z_k) = 0$ и условия прилипания на бесконечности $w(r, \infty) = 0$.

В случае (11.1) координаты (r_k, z_k) имеют следующие значения

$$(r = 1.318, z = -1.077), \quad \text{седло}, \quad (11.4)$$

$$(r = 1.320, z = -1.480), \quad \text{центр, вихрь},$$

$$(r = 1.527, z = 0.603), \quad \text{центр, вихрь}.$$

На рис. 11.2 показаны профили радиальной и осевой скорости на боковой поверхности цилиндра $r = h(z)$, а также профиль осевой скорости при некоторых фиксированных значениях координаты z .

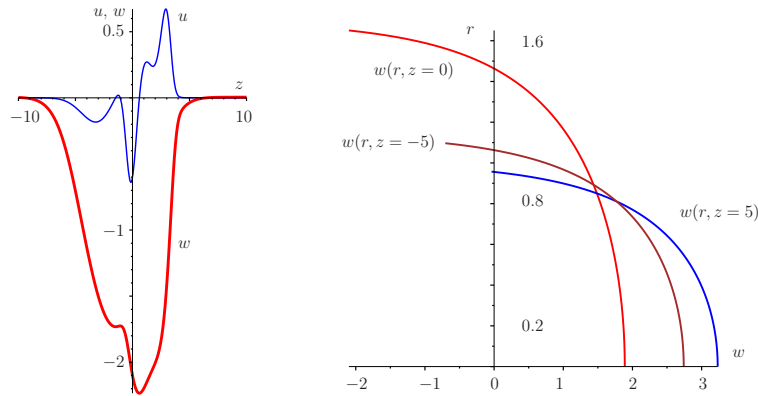


Рис. 11.2. Профили радиальной $u(r, z)$ и осевой $w(r, z)$ скорости при $r = h(z)$ (слева), а также профиль осевой скорости $w(r, z)$ при $z = -5, 0, 5$ (справа) в случае (11.1), $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $\delta = 0.05$, $z_0 = 1.5$, $p_z = -5.600$, $Q = 1$, $p_z^* = -5.612$

На рис. 11.3 показана структура вихрей для течения в области со стенкой, имеющей две впадины и одну выпуклость

$$\eta(z) = 1 + z^4 e^{-3z^4} + 0.3e^{-z^2}. \quad (11.5)$$

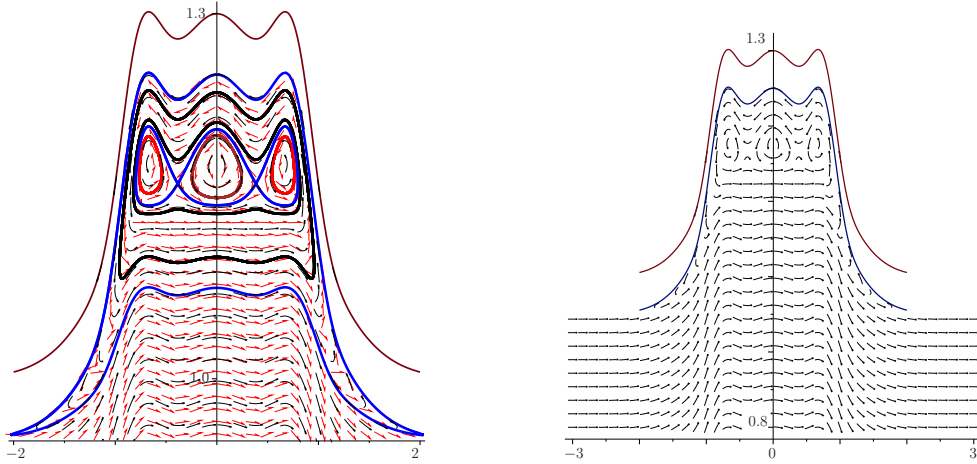


Рис. 11.3. Структура вихрей в случае (11.5)

Рис. 11.3 приведен с целью демонстрации разнообразия структуры течения в зависимости от профиля границы.

На рис. 11.4 схематично показан случай, когда граница цилиндрической области на некотором участке имеет периодический профиль и является плоской на бесконечности

$$r = h(z) = h_0 + a(H(z + z_0) - H(z - z_0)) \sin \omega z, \quad \omega \gg 1, \quad a \ll 1, \quad (11.6)$$

где H — функция Хевисайда, $2z_0$, a , $2\pi/\omega$ — размер области периодичности, амплитуда и период периодического профиля, h_0 — средний радиус цилиндра.

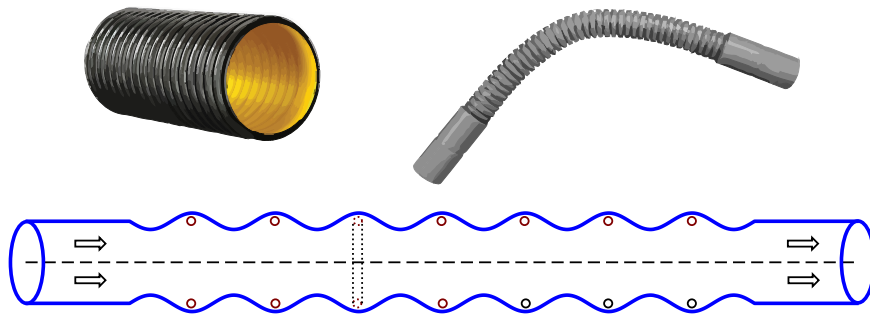


Рис. 11.4. Течение в гофрированном сосуде. Символы « $\circ$ » указывают положение (тороидальных) вихрей

В грубом приближении это описание гофрированного воздуховода, например, для пылесоса. Хотя, на самом деле, внутренняя поверхность трубки пылесоса представляет собой спиральную поверхность.

§ 11.1 Результаты расчетов методом конечных элементов

Для того, чтобы убедиться в типичности ситуации возникновения вихрей в окрестностях углублений неровной поверхности, приведем некоторые результаты численного решения методом конечных элементов при помощи пакета FreeFem++ (см., например, [26, 27, 72, 114]) нестационарного течения жидкости в областях с неровными стенками, используя для вычислений метод штрафов (см., например, [77, §8]).

Численное решение задачи о симметричном течении несжимаемой жидкости с вязкостью, зависящей от координат, между двумя частично неровными плоскостями получено, ввиду симметрии, для области $\mathbb{D}$ (см. рис. 11.5)

$$\mathbb{D} = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq z \leq h(x)\}, \quad \eta(x) = h(x) + \delta, \quad \delta = \text{const}, \quad (11.7)$$

где δ — шероховатость ($0 < \delta \ll 1$), $h(x)$ — переменная ширина области $\mathbb{D}$, $z = \eta(x)$ граница полной (реальной) области $\mathbb{D}_0$, симметричной относительно $z = 0$ — $\mathbb{D}_0 = \{0 \leq x \leq L, -\eta(x) \leq z \leq \eta(x)\}$.

Граница $z = h(x)$ области $\mathbb{D}$ и вязкость жидкости задаются соотношениями

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & (x, z = h_0) \in \Gamma_p, & h_x(x) \equiv 0, \\ h_0 + a\varphi(x), & (x, z = h_0 + a\varphi(x)) \in \Gamma_i, & h_x(x) \neq 0, \end{cases} \quad (11.8)$$

$$\varphi(x) = h_0 + a \tanh(\beta \sin(m(x - X_L))), \quad m = 7, \quad \beta = 2.0,$$

$$\mu(x, z) = \mu_0(\eta^2(x) - z^2).$$

Здесь h_0 — ширина части области с плоской границей, a — амплитуда неровностей границы, $\varphi(x)$ — вспомогательная функция, описывающая неровности границы, такая, что $h(x)$ является кусочно-гладкой функцией, m — количество «ямок» на границе, a, β — амплитуда и параметр

сглаживания неровностей, Γ_p — плоская часть границы (с длинами X_L , X_R), Γ_i — неровная часть границы (длиной X_φ), μ_0 — характерная вязкость, δ — шероховатость, $\eta(x)$ — функция, задающая границу $z = \eta(x)$, x , z — продольная и поперечная координаты вдоль основного течения, L — длина области.

Обратим внимание на то, что численно построено решение нестационарной задачи, аналогичной (8.1)–(8.11), (8.16)–(8.19), описанной в § 8.1. Отличие заключается в выборе области. В § 8.1 рассмотрена цилиндрическая область, а здесь выбрана «плоская» область с сохранением симметрии относительно $z = 0$. Отчасти, это вызвано тем, что алгоритм численного решения гораздо проще реализовать для плоской области с симметрией относительно $z = 0$ (в случае цилиндрической области имеется особенность уравнений на оси симметрии $r = 0$). Другая причина заключается в том, что такие расчеты подтверждают некоторую универсальность полученных результатов — вихревая структура образуется в окрестности углублений неровностей и выбор области на качественные результаты не влияет.

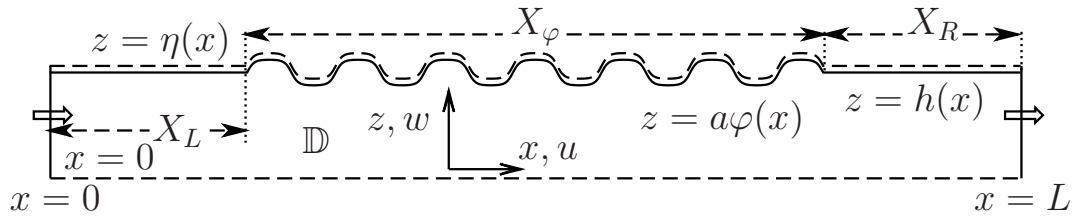


Рис. 11.5. Область $\mathbb{D}$. Длина области $L \approx 9.834$, ширина области $h_0 = 1.0$, длина области неровностей $X_\varphi = 13\pi/7 \approx 5.834$, длины прямолинейных участков границы $X_L = 2.0$, $X_R = 2.0$, амплитуда неровностей $a = 0.025$, шероховатость $\delta = 0.0125$

Результаты расчетов показаны на рис. 11.6, на котором хорошо видна вихревая структура течения. Как и следовало ожидать (в плоском случае справедливы все результаты представленные в § 9, § 10 и уравнения для главных членов асимптотики мало отличаются от уравнений (8.22)–(8.24)), в окрестности углублений возникает вихревая структура.

Расчеты проведены с шагом $\Delta t = 0.05$ на сетке с количеством треугольников ≈ 14000 , с точность $\approx 1\%$, контролируемой обычным спосо-

бом — удвоением количества треугольников сетки. Стационарный режим течения устанавливается к моменту $t \approx 5$ и, практически, далее не наблюдается изменение структуры течения. Развитие стационарной структуры демонстрирует рис. 11.6 (нижний ряд рисунков).

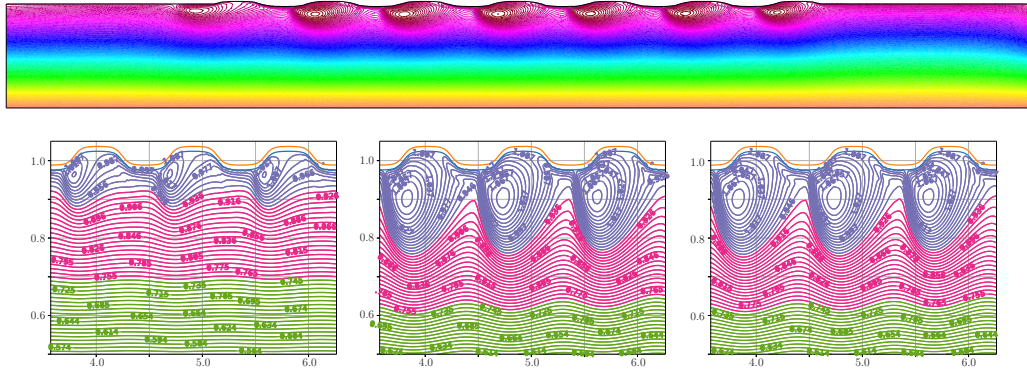


Рис. 11.6. Изолинии функции тока $\psi(x, z)$ для нестационарной задачи в момент времени $t = 50$, что соответствует практически стационарному течению (верхний рисунок, реальный масштаб). Линии тока во фрагменте области для моментов для моментов $t = 2.5$, $t = 35$, $t = 45$ (нижние рисунки)

На первый взгляд, ничего необычного в возникновении структуры вихрей нет — хорошо известно, что при течении жидкости с постоянной вязкостью в кавернах образуются вихри. Для напоминания приведем рис. 11.7.

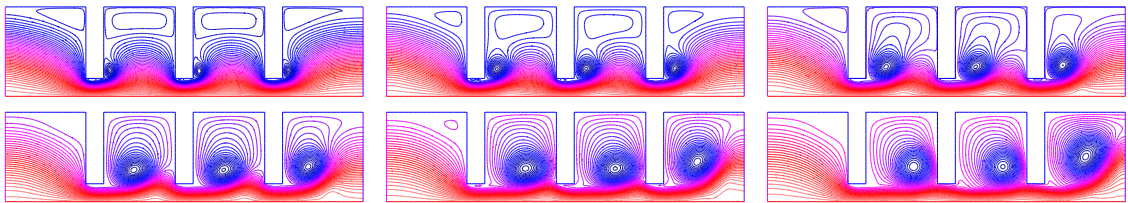


Рис. 11.7. Вихри в кавернах при течении жидкости с постоянной вязкостью

Однако, при течении жидкости с постоянной вязкостью (и условием прилипания) на неровностях границы, особенно с неровностями малой амплитуды, вихревое течение не возникает. Обнаруженный эффект образования вихревой структуры, скорее всего, связан именно с зависимостью вязкости от координат.

Заключение к главе 3

Построены и исследованы уравнения для главных членов асимптотических разложений для задачи, описывающей турбулентное квазистационарное вращательно-симметричное течение в цилиндрической области с иррегулярными границами в случае кинематической вязкости, зависящей от координат, и выборе в качестве краевого условия на неподвижных непрямолинейных участках боковой границы цилиндра кинематического условия, соответствующего непроницаемости границы для жидкости, а на прямолинейных участках — условий прилипания (§ 8).

Построено в аналитической форме решение задачи для определения главных членов асимптотики и указаны его особенности (§ 9).

Детально исследована структура течения. Показано, что при любом расходе жидкости и достаточно произвольной зависимости кинематической вязкости жидкости от координат, в областях, в которых кривизна боковой границы цилиндра отрицательна, в стационарном течении имеются вихри. (§ 10). Представлены результаты расчетов для ряда примеров, демонстрирующие структуру течения и образовавшиеся вихри (§ 11).

Глава 4

Результаты расчетов различными методами

Цель главы — сравнение результатов прямого численного метода решения начально-краевой задачи для системы гиперболических уравнений с результатами, полученными аналитически-численным методом в § 7.1–§ 7.3. Для вычислений использован метод конечных объемов и, более конкретно, HLL аппроксимация (см., например, [29, 42, 132, 142]). Проведенный вычислительный эксперимент показал, что выбранный метод конечных элементов позволяет при соответствующем выборе параметров (шаги по времени и координате) уверенно идентифицировать разрывы решения (сильные и слабые). Проверка точности расчетов проведена путем сравнения результатов интегрирования задачи методом конечных объемов с результатами «эталонных» решений, указанными в § 7.1–§ 7.3. Результаты расчетов приведены в § 12.1–§ 12.5.

Напомним, что результаты расчета аналитически-численным методом и их детальный анализ, представленные в диссертационной работе, соответствуют случаю конституционного соотношения (3.3) при $\beta = 1$ (см. также (5.1)). Для других значений параметра β решение приведено только для задачи с начальными данными в § 4.1. Результаты проведенного сравнения аналитически-численного метода и метода конечных объемов позволили использовать метод конечных объемов для решения начально-краевой задачи для произвольных β . В частности, результаты расчетов для $\beta = 1/4$, полученные методом конечных объемов, приведены в § 12.4, § 12.5, а в § 13 исследовано влияние вращения жидкости на поведение течения.

§ 12 Результаты расчетов методом конечных объемов

Для численного решения начально-краевой задачи (3.1)–(3.5) с условиями (7.1)–(7.3) и (7.9)–(7.11) применен метод конечных объемов с использованием HLL аппроксимации (HLL Riemann solver).

§ 12.1 HLL аппроксимация

Метод конечных объемов (вариант с HLL аппроксимацией) детально описан в [142, с. 315–344], [42, с. 75–77], [29, с. 167–183 и § L.3] (а также [132]). Укажем лишь основные соотношения, необходимые для решаемой задачи.

Представим уравнения (3.1)–(3.3) в консервативной форме

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_z(\mathbf{U}) = 0, \quad (12.1)$$

и в матричном виде

$$\mathbf{U}_t + \mathbb{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_z = 0, \quad (12.2)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} S \\ SW \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} SW \\ SW^2 + \mathbb{P}(S) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}(S) = \int^S s P_s(s) ds, \quad (12.3)$$

$$\mathbb{A}_k^i(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -W^2 + SP_S(S) & 2W \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Собственные значения $\lambda_1^{\mathbb{A}}, \lambda_2^{\mathbb{A}}$ матрицы $\mathbb{A}$ определены уравнением

$$\det |\mathbb{A}(\mathbf{U}) - \lambda_p^{\mathbb{A}}(\mathbf{U})\mathbb{I}| = 0, \quad p = 1, 2, \quad (12.5)$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица.

Собственные значения $\lambda^{\mathbb{A}}$ являются характеристическими направлениями системы гиперболических уравнений (3.1)–(3.3) и, естественно, совпадают с λ^1, λ^2 , определенными соотношениями (3.15)

$$\lambda^1 = W - (SP_S(S))^{1/2}, \quad \lambda^2 = W + (SP_S(S))^{1/2}. \quad (12.6)$$

Уравнения (12.1) (или (12.2)) дополняем условиями Ренкина–Гюгонио на разрывах

$$D(\mathbf{U}_+ - \mathbf{U}_-) = (\mathbf{F}(\mathbf{U}_+) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_-)). \quad (12.7)$$

Здесь $\mathbf{U}_+$, $\mathbf{U}_-$ — значения функций на сторонах линии разрыва, D — скорость движения линии разрыва.

Численно задача (12.1)–(12.7), естественно, решается в конечной области Ω , которая разбивается на ячейки Ω_i (конечные объемы).

Набор ячеек Ω_i , то есть сетку $\{\Omega_i\}$, определяем их центрами z_i и границами $z_{i-\frac{1}{2}}$, $z_{i+\frac{1}{2}}$ (ребрами)

$$\Omega_i = [z_{i-\frac{1}{2}}, z_{i+\frac{1}{2}}], \quad \Delta z_i = z_{i+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2}} > 0, \quad (12.8)$$

где Δz_i — объем, в данном случае длина, ячейки.

Расчетная схема метода конечных объемов в случае использования эйлеровой аппроксимации производной по времени имеет вид

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\tau} = \frac{\mathcal{F}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n) - \mathcal{F}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n)}{\Delta z_i}, \quad (12.9)$$

где $\mathbf{U}_i^n$ — значение функции в точке z_i (центре объема) в момент $t_n = n\tau$, τ — шаг по времени, $\mathcal{F}$ — так называемые, численные потоки.

Численные потоки в случае HLL аппроксимации определены соотношениями (для ребер ячейки)

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{a}), & \lambda_L > 0, \\ \mathbf{F}(\mathbf{b}), & \lambda_R < 0, \\ \frac{\lambda_R \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \lambda_L \mathbf{F}(\mathbf{b}) + \lambda_L \lambda_R (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\lambda_R - \lambda_L}, & \lambda_L \leq 0 \leq \lambda_R, \end{cases} \quad (12.10)$$

$$\lambda_L = \min_{\mathbf{c}=\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\min_{p \in \{1, \dots, n\}} \lambda_p^{\mathbb{A}}(\mathbf{c}), \right), \quad \lambda_R = \max_{\mathbf{c}=\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\max_{p \in \{1, \dots, n\}} \lambda_p^{\mathbb{A}}(\mathbf{c}) \right). \quad (12.11)$$

Соотношения (12.10), (12.11) получены из условий Ренкина–Гюгонио (12.7) (см. [142, с. 315–344], [42, с. 75–77], и подробный вывод имеется, например, в [29, с. 179–182]).

Использование ННЛ аппроксимации, как показали вычислительные эксперименты, оказалось достаточным для рассматриваемой задачи (см. (12.3)–(12.6)) и позволяет уверенно идентифицировать разрывы решений.

§ 12.2 Ударные волны ($\beta = 1$)

Для задачи (12.1)–(12.7) с начально-краевыми условиями (7.1)–(7.3), то есть, когда имеется несогласованность начальных и краевых условий и возникают ударные волны, результаты расчетов, выполненные методом годографа (см. § 7.1, § 7.3), сравниваем с результатами, полученными при помощи метода конечных объемов (рис. 12.1), выбирая параметр $\beta = 1$ в (3.3) (см. также (5.1)).

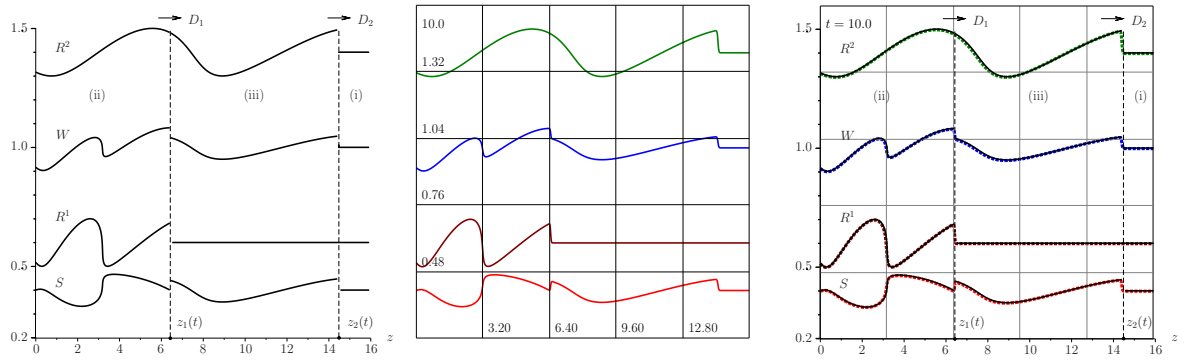


Рис. 12.1. Результаты расчетов. Ударные волны. $D_1 = 0.65$, $D_2 = 1.45$, $z_1 = 6.470$, $z_2 = 14.492$, $t = 10$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$. Слева — метод годографа (сопадает с левым рис. 5.3), в центре — метод конечных объемов, справа — сравнение методов, $\Delta z_i = 0.0025$, $\tau = 0.0008334$

Напомним, что для квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка краевые условия достаточно задавать лишь на одной из границ области $\Omega = [z_{left} - z_{right}]$, в данном случае при $z_{left} = 0$. В исходной задаче область Ω бесконечна ($z_{right} = \infty$). В вычислительной схеме (12.9)–(12.11) бесконечная область, естественно, заменяется конечной. Вычислительный эксперимент показал, что для рассматриваемой задачи достаточно, выбирая значение z_{right} конечным, дополнительно задавать равенство нулю производных решения (для замыкания вычислительной схемы).

Результаты расчета методом конечных объемов приведены для следующих значений параметров

$$\Omega = [0, 16], \quad \Delta z_i = 0.0025, \quad \tau = 0.0008334. \quad (12.12)$$

На самом деле, шаг по времени τ выбирался автоматически при помощи критерия Куранта–Фридрихса–Леви (CFL)

$$\tau \leqslant \text{Cu} \frac{\min_i \Delta z_i}{\max_i \max(|\lambda_1^{\mathbb{A}}(\mathbf{U}_i)|, |\lambda_2^{\mathbb{A}}(\mathbf{U}_i)|)}, \quad (12.13)$$

где Cu — число Куранта (при расчетах выбиралось $\text{Cu} = 0.5$).

Величина τ в процессе расчета практически не изменялась. Очевидно, что для данных (7.1)–(7.3) значение $\tau \approx \text{Cu} \Delta z_i / \max R^2$. На рис. 12.1 (справа) продемонстрировано сравнение расчетов методом годографа и методом конечных объемов. Относительная погрешность вычислений различными методами не превышала $\delta = 0.0025$ (имеется в виду поточечное сравнение результатов в центрах ячеек Ω_i).

Подчеркнем, что аналитически-численный метод годографа является фактически точным — точность ограничена численным интегрированием задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (4.16). Напротив, метод конечных объемов — это прямой численный метод, в котором присутствуют погрешности аппроксимации (см. (12.9)–(12.11)) и большой объем вычислений, что приводит к сильной зависимости от погрешностей округлений. Для данного примера, на интервале $0 \leqslant t \leqslant 10$ и $\tau = 0.0008334$, требуемое количество шагов по времени примерно 11200. Тем не менее, при достаточно малом шаге дискретизации по координате (в данном случае $\Delta z_i = 0.0025$), метод конечных объемов демонстрирует превосходные результаты (относительная погрешность $\delta = 0.0025$) и позволяет достаточно надежно фиксировать разрывы решения. Разрывы локализованы на интервале не менее Δz_i . Именно по этой причине шаг дискретизации Δz_i выбран малым (0.0025) по сравнению с размером области $\Omega = [0, 16]$.

Обратим внимание, что при использовании метода конечных объемов неправильный выбор шага Δz_i неизбежно приведет к размытию разрывов

и существенному искажению структуры решения. На рис. 12.2 (слева) показано влияние шага Δz_i на зависимость решения в точке $z_* = 3.405$ от времени (см. § 7.3). Сравнение решений, полученных с шагом $\Delta z_i = 0.0025$ и $\Delta z_i = 0.02$, показывает, что в областях гладкости решения различия не очень велики, тогда как в окрестности разрывов (и значительных изменений) решения, построенные с крупным шагом, сглаживают разрыв.

На рис. 12.2 (справа) приведено сравнение результатов расчетов методом конечных элементов с результатами расчетов, полученными аналитически-численным методом, которое показывает, что в случае $\Delta z_i = 0.0025$ погрешность достаточно мала ($\delta = 0.0025$).

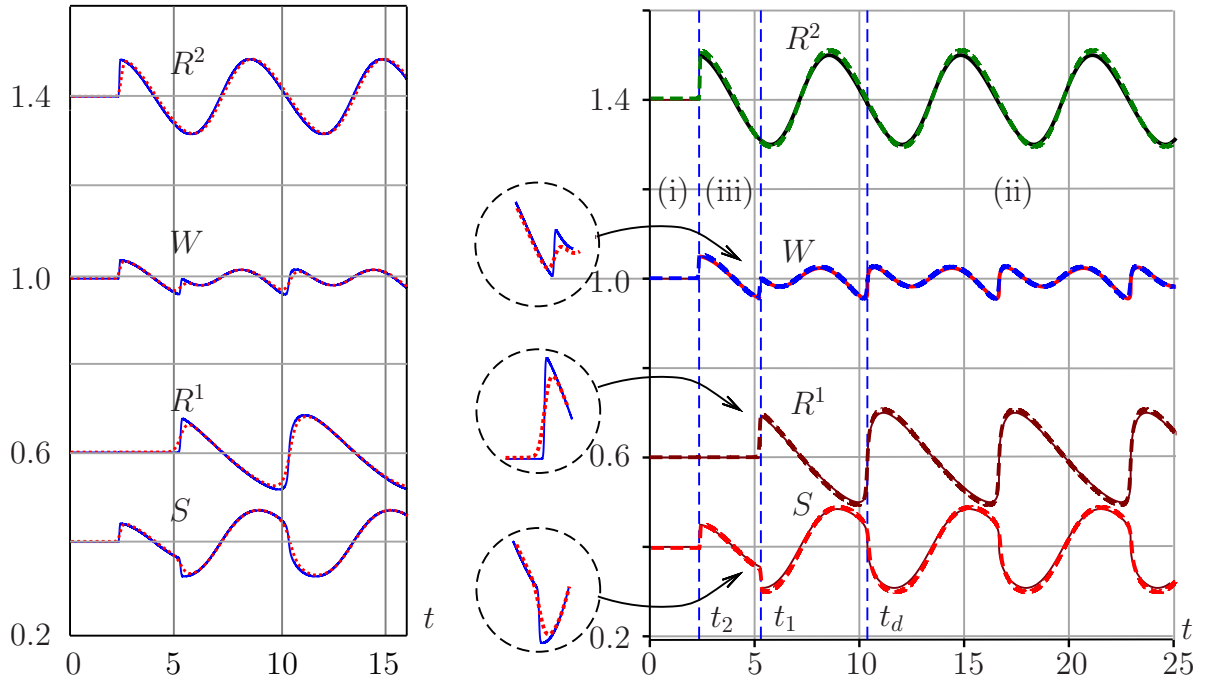


Рис. 12.2. Влияние выбора шага Δz_i на структуру решения. Ударные волны. $D_1 = 0.65$, $D_2 = 1.45$, $z_1 = 6.470$, $z_2 = 14.492$, $t = 10$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$. Показана зависимость от времени решения в точке $z_* = 3.405$. Слева – сравнение результатов расчетов с шагом $\Delta z_i = 0.0025$ ($\tau = 0.0008334$) и с шагом $\Delta z_i = 0.02$ ($\tau = 0.00667$). Справа – сравнение результатов расчетов с шагом $\Delta z_i = 0.0025$ ($\tau = 0.0008334$) с «эталонными» результатами, полученными аналитически-численным методом, см. § 7.3 и рис. 7.1

При отсутствии «эталонного» решения шаг Δz_i выбираем при помощи вычислительного эксперимента, ориентируясь на анализ задачи, до тех пор, пока в результате расчетов не будет фиксироваться разрыв решения

(при его наличии). На начальном интервале времени в данной конкретной задаче при несогласованности краевых и начальных условий может присутствовать не более двух разрывов (это следует из решения задачи о распаде начального разрыва для двух уравнений), а остальные разрывы возникают в процессе эволюции решения.

Обратим внимание на то, что при построении зависимости от времени решений в некоторой точке $z = z_*$ необязательно проводить расчеты для области $\Omega = [0, 16]$, как это сделано при построении рис. 12.1, а достаточно при $z_* = 3.405$ ограничиться «маленькой» областью, например, $\Omega = [0, 4]$, существенно сокращая объем вычислений. Именно для такой области получены результаты, показанные на рис. 12.2.

На рис. 12.3 показано решение для некоторых моментов времени $t_1 \approx 2.08$, $t_2 \approx 4.17$, $t_3 \approx 6.26$, $t_4 \approx 8.34$, рассчитанное методом конечных объемов.

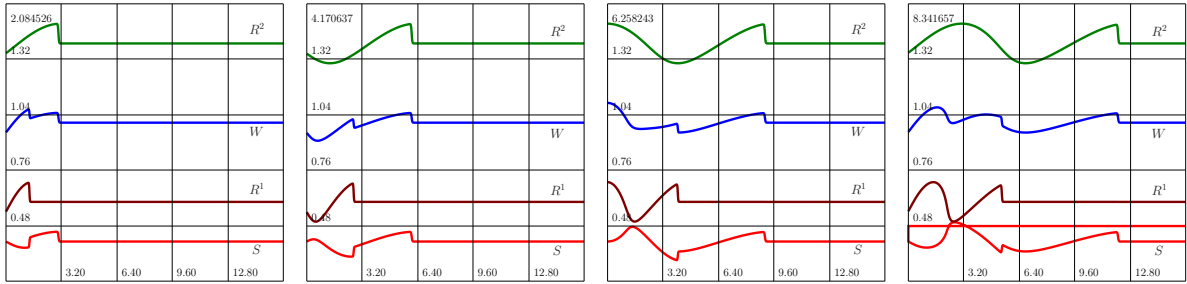


Рис. 12.3. Решение в некоторые моменты времени. Ударные волны. $D_1 = 0.65$, $D_2 = 1.45$, $z_1 = 6.470$, $z_2 = 14.492$, $t = 10$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$. $\Delta z_i = 0.0025$, $\tau = 0.0008334$, $t_1 \approx 2.08$, $t_2 \approx 4.17$, $t_3 \approx 6.26$, $t_4 \approx 8.34$

§ 12.3 Волновые фронты ($\beta = 1$)

Для задачи (12.1)–(12.7) с начально-краевыми условиями (7.14)–(7.16), то есть, когда имеется согласованность начальных и краевых условий, имеются слабые разрывы (волновые фронты), результаты расчетов, выполненные методом годографа (см. § 7.2) сравниваем с результатами, полученными при помощи метода конечных объемов (рис. 12.4), выбирая $\beta = 1$ в (3.3).

Все сказанное в § 12.2 о точности метода, о способности идентифицировать разрывы относится и к данному примеру. На рис. 12.4 (справа)

продемонстрировано сравнение расчетов методом годографа и методом конечных объемов. Относительная погрешность вычислений различными методами не превышала $\delta = 0.0025$ (поточечное сравнение в центрах ячеек).

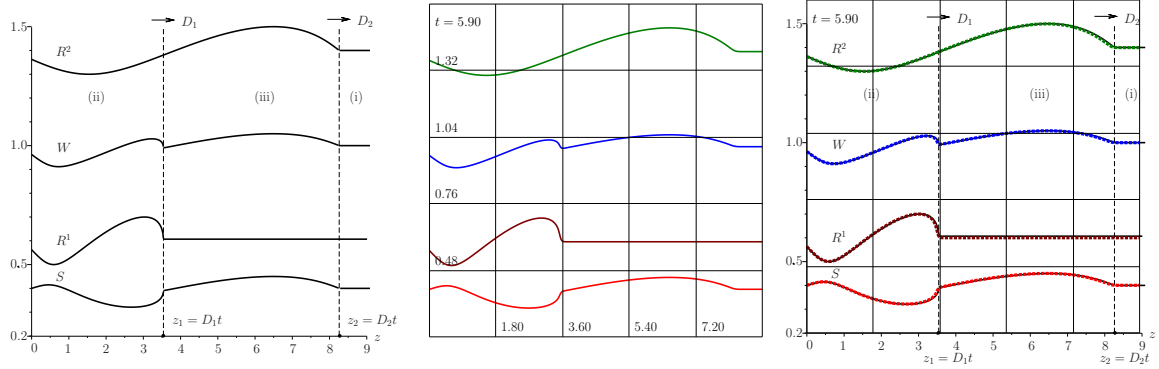


Рис. 12.4. Результаты расчетов. Волновые фронты $D_1 = 0.6$, $D_2 = 1.4$, $z_1 = 3.54$, $z_2 = 8.26$, $t = 5.9$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$. Слева — метод годографа (совпадает с правым рис. 5.3), в центре — метод конечных объемов, справа сравнение методов, $\Delta z_i = 0.00140625$, $\tau = 0.000469$

Расчеты проводились для

$$\Omega = [0, 9], \quad \Delta z_i = 0.0014, \quad \tau = 0.000469. \quad (12.14)$$

На рис. 12.5 дано решение для некоторых моментов времени $t_1 \approx 1.21$, $t_2 \approx 2.38$, $t_3 \approx 3.55$, $t_4 \approx 4.73$, рассчитанное методом конечных объемов.

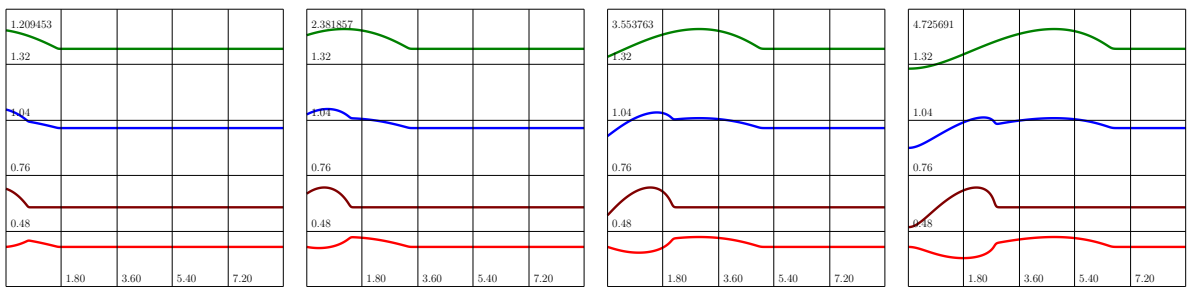


Рис. 12.5. Решение в некоторые моменты времени. Волновые фронты $D_1 = 0.6$, $D_2 = 1.4$, $z_1 = 3.54$, $z_2 = 8.26$, $t = 5.9$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta z_i = 0.00140625$, $\tau = 0.000469$, $t_1 \approx 1.21$, $t_2 \approx 2.38$, $t_3 \approx 3.55$, $t_4 \approx 4.73$

§ 12.4 Ударные волны ($\beta = 1/4$)

Результаты расчетов методом конечных объемов, приведенные в § 12.2, § 12.3, относятся к ситуации, когда $\beta = 1$, то есть конститутивное соот-

ношение имеет вид (5.1). К этому случаю относятся почти все результаты решения задачи, представленные в §5–§7. Проведенные сравнения с аналитически-численным методом показали применимость метода конечных объемов к решению задачи и возможность его использования, например, при $\beta = 1/4$ (результаты для $\beta \neq 1$ имеются в §4).

Здесь, в случае $\beta = 1/4$, приведены решения начально-краевой задачи (12.1)–(12.7), (7.1)–(7.3). Отличие от результатов §12.2 заключается в другом значении параметра β . Принципиального отличия в постановке задачи нет — по-прежнему, имеется несогласованность начальных и краевых условий, по-прежнему, должно возникать не менее двух разрывов инварианта Римана (и исходных функций, в зависимости от условий). Результаты приведены на рис. 12.6, на котором решение показано в различные моменты времени $t_1 \approx 1.06$, $t_2 \approx 2.14$, $t_3 \approx 3.21$, $t_4 \approx 4.29$, $t_5 \approx 5.37$, $t_6 \approx 6.43$, $t_7 \approx 7.49$, $t_8 \approx 8.56$. Качественное отличие результатов, показанных на рис. 12.6 и рис. 12.1, 12.3, отсутствует.

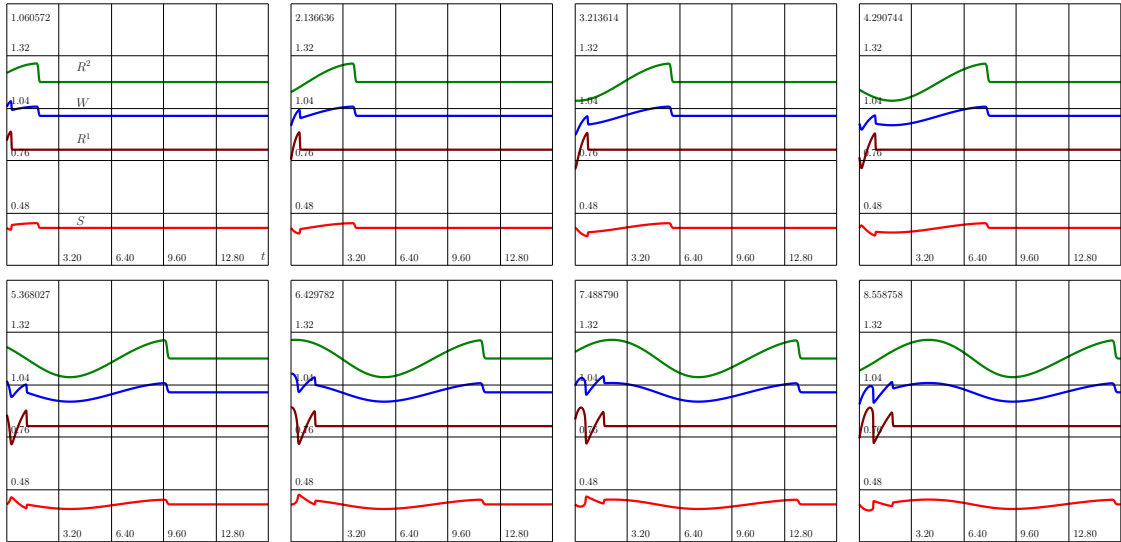


Рис. 12.6. Расчеты при $\beta = 1/4$. Ударные волны. $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta z_i = 0.0025$, $\tau = 0.000674$. Решение в моменты $t_1 \approx 1.06$, $t_2 \approx 2.14$, $t_3 \approx 3.21$, $t_4 \approx 4.29$, $t_5 \approx 5.37$, $t_6 \approx 6.43$, $t_7 \approx 7.49$, $t_8 \approx 8.56$. Для улучшения визуализации на рисунке произведены замены значений $R^1 \rightarrow R^1 + 3$, $R^2 \rightarrow R^2 - 3$

Естественно, изменяются скорости движения разрывов и, как следствие, расстояния между разрывами. Изменяется и шаг по времени (шаг по ко-

ординате выбран прежним)

$$\Omega = [0, 16], \quad \Delta z_i = 0.0025, \quad \tau = 0.000674. \quad (12.15)$$

Интересно отметить, что в окрестности нуля на рис. 12.6 наблюдается возникновение слабых разрывов решения (помимо сильных). Фактически, это единственное качественное отличие от результатов, представленных на рис. 12.3. Напомним, что слабые разрывы не могут возникать из гладких решений, как и исчезать в процессе эволюции решения (см. [73, 80, 96, 118]), но в случае условий (7.1)–(7.3), помимо сильного разрыва при $t = 0$, имеется и слабый разрыв данных. Иными словами, нет никаких противоречащих условий для возникновения такого слабого разрыва в момент $t = 0$ и его дальнейшего движения.

§ 12.5 Задача с начальными условиями при $\beta = 1/4$ и $\beta = 1$

В § 12.3, § 12.4 расчеты представлены для начально-краевой задачи с условиями (7.1)–(7.3) и (7.14)–(7.16). Расчеты для задачи (12.1)–(12.7) только с начальными условиями при $t = 0$ показаны на рис. 12.7– 12.10 в случаях $\beta = 1$, $\beta = 1/4$ и начальными данными, соответствующими периодическому возмущению скорости W_0 и постоянному сечению S_0

$$S|_{t=0} = S_0, \quad W|_{t=0} = W_0(1 + \varepsilon \sin z), \quad -\infty < z < +\infty, \quad (12.16)$$

$$S_0 = 0.4, \quad W_0 = 1.0, \quad \varepsilon = 0.1. \quad (12.17)$$

§ 12.5.1 Задача с начальными условиями при $\beta = 1$

В случае $\beta = 1$, соответствующие условиям (12.16) начальные данные для инвариантов записываются в форме (см. (3.10)–(3.12))

$$R^{1,2}|_{t=0} = R_0^{1,2}(z) = W_0(1 + \varepsilon \sin z) \mp S_0. \quad (12.18)$$

§ 12.5.1.1 Точное решение

При $\beta = 1$ уравнения для инвариантов Римана представляют собой два несвязанных уравнения Хопфа (см. (5.6)) — для инварианта R^1 и инварианта R^2 . Решение задачи для одного инварианта Римана R в случае

периодических начальных данных вида

$$R|_{t=0} = c_0 + A \sin \frac{2\pi z}{\lambda} = F(z), \quad (12.19)$$

где c_0 , A , λ — некоторые константы, $F(z)$ — обозначение, детально описано в [80, с. 55–57], — в частности, построено асимптотическое решение, указано, что с течением времени из начального состояния (12.20) возникает пилообразная структура разрывов (ударных волн), движущихся с постоянной скоростью c_0 , расстояние между разрывами равно λ , а величина разрывов убывает с течением времени как $1/t$.

Непрерывное решение уравнения Хопфа записывается в неявной форме

$$R(z, t) = F(a), \quad z = tF(a) + a, \quad (12.20)$$

где a — параметр (точка на оси z , из которой выходит характеристика).

Для одного уравнения Хопфа моменты t_k и координаты z_k возникновения разрывов (ударных волн) определяются уравнениями (см., например, [30, с. 204–207, уравнения (6.1.6)], а также [80, гл. 2] и § 6)

$$F_{aa}(a_k) = 0, \quad t_k = -\frac{1}{F_a(a_k)}, \quad z_k = a_k + F(a_k)t_k, \quad (12.21)$$

решение которых в случае (12.19) имеет вид (при $\lambda = 2\pi$)

$$a_k = \pi k, \quad t_k = -\frac{(-1)^k}{A}, \quad z_k = \pi k - \frac{(-1)^k c_0}{A}, \quad k = \mp 1, \mp 3, \mp 5, \dots \quad (12.22)$$

Очевидно (в силу симметрии), что все моменты времени возникновения разрывов совпадают — $t_* = 1/A$ и, начиная с $x_1 = \pi + c_0/A$, располагаются в точках с периодом 2π .

В случае задачи для исходных переменных с данными (12.16), (12.17), сравнивая (12.18) с (12.19) и используя (12.22), имеем

$$c_0^1 = W_0 - S_0 = 0.6, \quad c_0^2 = W_0 + S_0 = 1.4, \quad A^1 = A^2 = \varepsilon W_0 = 0.1, \quad (12.23)$$

$$t_{-1}^1 = t_{-3}^2 = t_* = \frac{1}{\varepsilon W_0} = 10,$$

$$z_{-1}^1 = z_*^1 = -\pi + \frac{c_0^1}{\varepsilon W_0} \approx 2.8584, \quad z_{-3}^2 = z_*^2 = -3\pi + \frac{c_0^2}{\varepsilon W_0} \approx 4.5752,$$

где верхние индексы соответствуют индексам инвариантов Римана, z_*^1, z_*^2 — выбраны как наименьшие положительные значения.

Таким образом, в момент $t_* = 10$ одновременно, но в разных точках $z_*^1 = 2.8584$, $z_*^2 = 4.5752$ (далее с периодом 2π), возникают сильные разрывы инвариантов Римана, которые движутся с различными скоростями по законам (см. [80, с. 55–57])

$$z = Z_m^1(t) = c_0^1(t - t_*) + m\pi + z_*^1, \quad t > t_*, \quad (12.24)$$

$$z = Z_n^2(t) = c_0^2(t - t_*) + n\pi + z_*^2, \quad t > t_*.$$

Здесь приведены законы движения для положительной полуоси $z > 0$, хотя их можно использовать и на всей оси.

Моменты времени t_{mn} , при которых происходит совпадение координат разрывов, определяются соотношением

$$t_{mn} = t_* + \frac{z_*^1 - z_*^2 + (m - n)\pi}{(c_0^2 - c_0^1)}, \quad (12.25)$$

$$t_{mn} - t_{m+1,n} = T = \frac{\pi}{(c_0^2 - c_0^1)} = \frac{\pi}{2S_0} \approx 3.9270. \quad (12.26)$$

Здесь T — временной интервал между моментами совпадения разрывов, который является одинаковым для любых двух соседних моментов.

В результате опрокидывания профилей решения образуются пилообразные структуры инвариантов Римана R^1, R^2 . Для каждого инварианта такие структуры движутся с различными скоростями и могут иметь разные амплитуды разрывов (для рассматриваемых параметров амплитуды одинаковы). Для параметров (12.17), с учетом (12.22)–(12.26), функции $R^1(z, t)$, $R^2(z, t)$ можно приближенно представить в виде

$$R^{1,2} = A^{1,2} F(z - c_0^{1,2}(t - t_*) - z_*^{1,2}) + W_0 \mp S_0, \quad F(y) = \frac{y}{2\pi} - \left[\frac{y}{2\pi} \right]. \quad (12.27)$$

Здесь $[x]$ — целая часть числа x , $t \geq t_*$. Соотношения (12.27) являются «грубыми» в том смысле, что, во-первых, коэффициенты A^k зависят от времени (амплитуды разрывов уменьшаются как $O(1/t)$, см. [80, с. 55–57]), во-вторых, разрыв возникает в результате опрокидывания решения

из непрерывной функции, и не сразу величина A^k станет такой, как указано в (12.23) (в частности, см. рис. 7.2 (3), на котором показано развитие разрыва для начально-краевой задачи).

На левом рис. 12.7 показаны функции R^1 , R^2 (по формулам (12.27)), а также функции $S = 1/2(R^1 + R^2)$, $W = 1/2(R^2 - R^1)$ при $t \approx 33.67$.

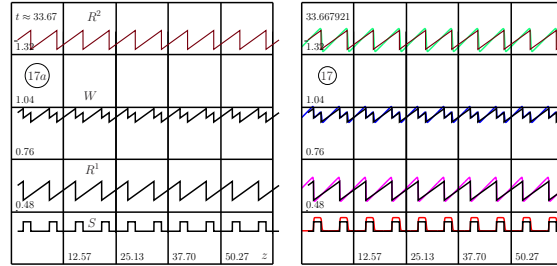


Рис. 12.7. Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$. Слева — точное решение в момент $t \approx 33.67$. Справа — сравнение точного решения с решением методом конечных объемов при $\Delta z_i = 0.013$, $\tau = 0.0035$

На рис. 12.7 (левом) хорошо видна пилообразная структура профилей движущихся инвариантов Римана R^1 , R^2 . Именно движение инвариантов R^1 , R^2 относительно друг друга порождает дополнительные «зубцы».

§ 12.5.1.2 Решение методом конечных объемов

Решение уравнений (3.1)–(3.5) (при $\beta = 1$) с условиями (12.16), (12.17), полученное методом конечных объемов, показано на рис. 12.8 (и, частично, на правом рис. 12.7). Расчеты представлены для случая, когда

$$\Omega = [0, 20\pi], \quad \Delta z_i = 0.013, \quad \tau = 0.0045, \quad (12.28)$$

в моменты времени t_k , указанные на рис. 12.8. Моменты t_k выбирались таким образом, чтобы продемонстрировать наиболее типичные фрагменты эволюции решения. На рис. 12.8 (1–10) показан начальный этап эволюции при $0 \leq t \leq 10$, предшествующий возникновению разрывов в момент $t = t_* = 10$. Естественно, по координате z сохраняется периодичность, определенная начальными условиями (см. § 4.1.4 и, в частности, (4.22), (4.22), Утверждение 4.1, период 2π).

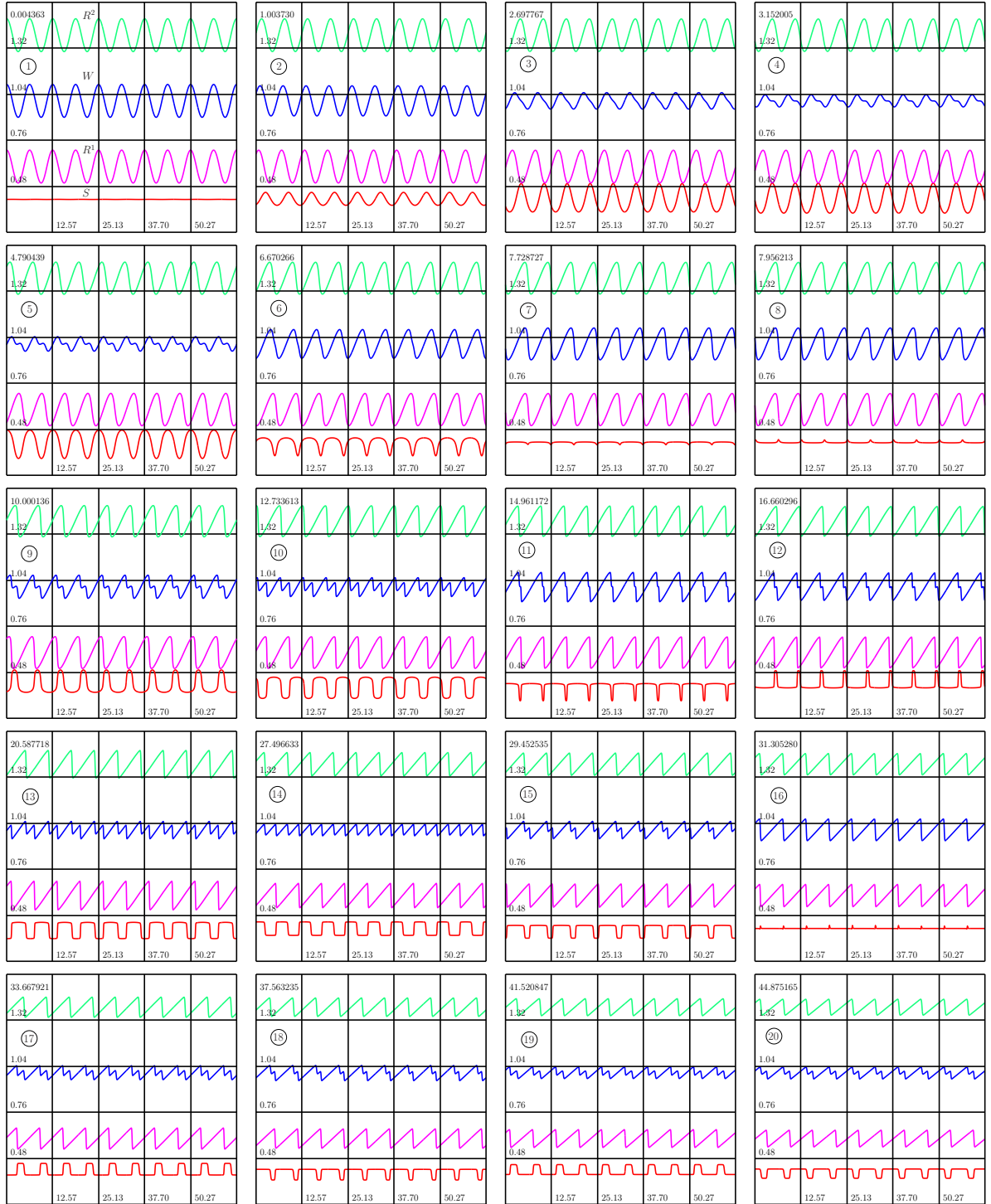


Рис. 12.8. Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta z_i = 0.013$, $\tau = 0.0045$. Решение в моменты $t_1 = 0.004363$, $t_2 = 1.00$, $t_3 = 2.70$, $t_4 = 3.15$, $t_5 = 4.79$, $t_6 = 6.67$, $t_7 = 7.73$, $t_8 = 7.96$, $t_9 = 10.00$, $t_{10} = 12.73$, $t_{11} = 14.96$, $t_{12} = 16.66$, $t_{13} = 20.59$, $t_{14} = 27.50$, $t_{15} = 29.45$, $t_{16} = 31.31$, $t_{17} = 33.667921$, $t_{18} = 37.56$, $t_{19} = 41.520847$, $t_{20} = 44.875165$

На первоначально прямолинейном профиле, ввиду периодичности ско-

рости течения W , возникает периодическая структура (периодические возмущения, см. рис. 12.8 (1–5)), затем амплитуда возмущений уменьшается (см. рис. 12.8 (6)) и, вновь, профиль становится почти прямолинейным с «мелкими» отклонениями (см. рис. 12.8 (7, 8)). На профиле скорости W начинают возникать «зубцы» (см. рис. 12.8 (4, 5)), которые затем исчезают (см. рис. 12.8 (6–8)).

Формирование разрывов из непрерывного профиля видно на рис. 12.8 (9–11), а на рис. 12.8 (12) отчетливо «проявляются» разрывы инвариантов R^1, R^2 . Напомним, что разрывы изначально имеют малую величину, и лишь затем величина разрывов становится значительной (см. § 7.4 и, в частности, рис. 7.2 (3)). Именно этим, а также плохой численной локализацией разрывов при довольно крупном шаге $\Delta z_i = 0.013$, объясняется кажущаяся «незаметность» разрывов на интервале $10 < t < 16$.

Заметим, что этап, предшествующий возникновению разрывов, то есть ситуация, показанная на рис. 12.8 (1–12), по крайней мере, в [80, с. 55–57] не описан — фактически, указана асимптотика при $t \rightarrow \infty$.

Начиная с момента $t \approx 16$ (см. рис. 12.8 (13–20)) картина эволюции решения соответствует указанной в § 12.5.1.1 — возникает движущаяся пилообразная структура инвариантов Римана R^1, R^2 , на профиле функции возникают «зубцы» (см. рис. 12.8 (13, 15, 17–20)), а на профиле функции S — «ступеньки» (см. те же рисунки), а в момент $t \approx 31.31$ профиль становится, вновь, почти постоянным (см. рис. 12.8 (16)). В частности, на рис. 12.7 (справа) показано сравнение расчетов методом конечных объемов и точного решения, описанного в § 12.5.1.1.

Особенно отметим тот факт, что пространственная периодичность (2π) «порождает» некоторую периодичность по времени с периодом, равным удвоенному временному интервалу между разрывами ($2T$ (см. (12.26))). Рис. 12.8 (16 и 19) совпадают с относительной погрешностью ≈ 0.0003 . При этом,

$$\frac{t_{19} - t_{17}}{2T} = \frac{41.520847 - 33.667921}{7.853982} = 0.999866. \quad (12.29)$$

Наконец, напомним, что исходные уравнения (3.1)–(3.5) (при $\beta = 1$)

с начальными условиями (12.16), (12.17) рассматриваются на бесконечном интервале $-\infty < z < +\infty$. При расчетах методом конечных объемов, естественно, область ограничена ($\Omega = [0, 20\pi]$, см. (12.28)). Учитывая пространственную периодичность решения (период 2π), при использовании алгоритма, описанного в § 12.1, следует задавать на границах области Ω периодические условия. Фактически, это означает, что решение в области Ω — это фрагмент бесконечной области, который, при необходимости, можно продолжать (влево и вправо).

§ 12.5.2 Задача с начальными условиями при $\beta = 1/4$

Решение уравнений (3.1)–(3.5) (при $\beta = 1/4$) с условиями (12.16), (12.17), полученное методом конечных объемов, показано на рис. 12.9.

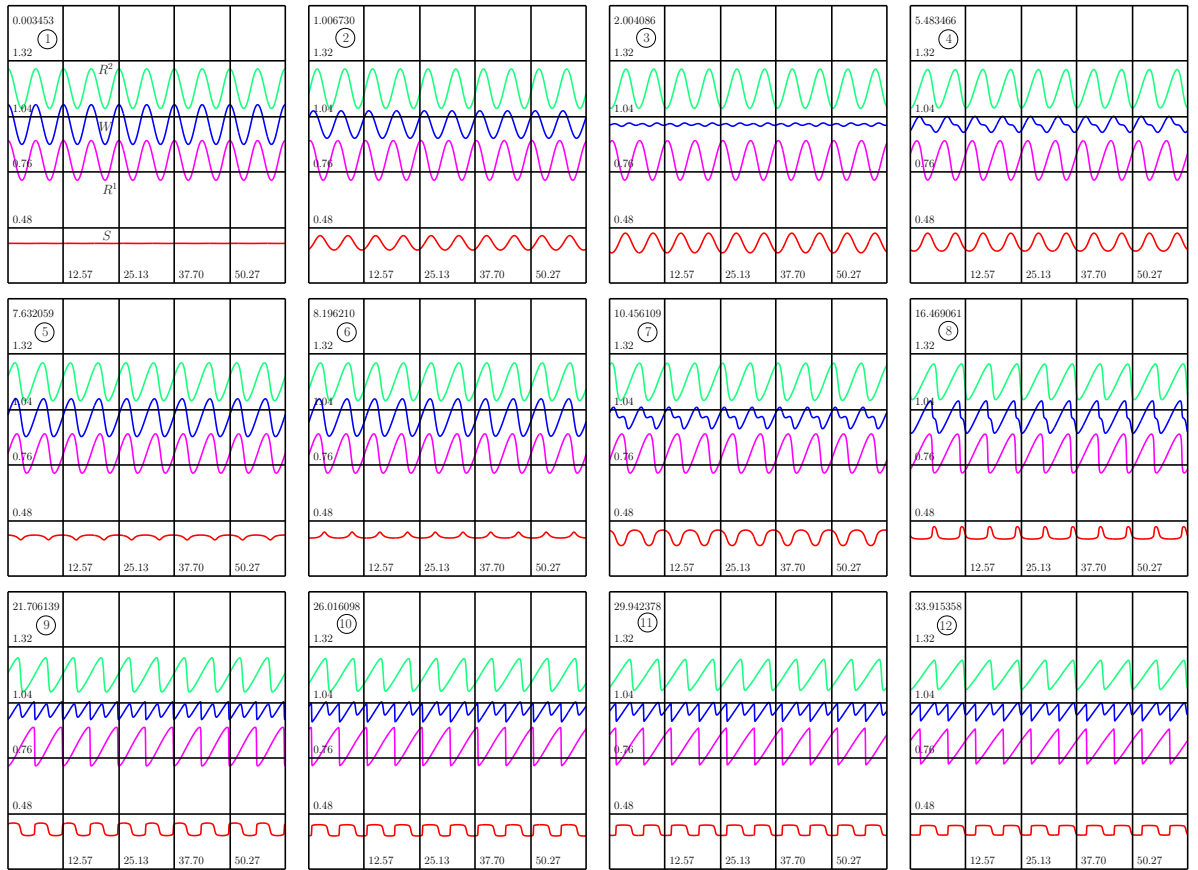


Рис. 12.9. Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1/4$. $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta z_i = 0.013$, $\tau = 0.0035$. Решение в моменты $t_1 = 0.003453$, $t_2 = 1.01$, $t_3 = 2.00$, $t_4 = 5.48$, $t_5 = 7.63$, $t_6 = 8.20$, $t_7 = 10.46$, $t_8 = 16.47$, $t_9 = 21.706139$, $t_{10} = 26.016098$, $t_{11} = 29.942378$, $t_{12} = 33.915358$

Такое решение сравнивалось с расчетами, выполненными аналитически-численным методом, подробно описанным в § 4, где решение построено для любого β (см., в частности, выражение (4.14) для функции Римана–Грина). Для нахождения явного решения аналитически-численным методом решалась (численно) задача Коши (4.16)–(4.18), где функция $t(a, b)$ задана соотношением (4.4), а начальные данные для задачи Коши получены путем построения изолиний функции $t(a, b)$.

Решение методом конечных объемов построено для области $\Omega = [0.20 \pi]$ с пространственным шагом $\Delta z_i = 0.013$ и временным шагом $\tau = 0.0035$ (сравни с (12.28)).

Относительная погрешность (поточечная) между решениями, полученными различными методами, не превышала ≈ 0.0003 . На рис. 12.9 решения, полученные методом конечных объемов, приведены для моментов времени, указанных на рисунке. Принципиальное качественное различие между поведением решения при $\beta = 1$ и $\beta = 1/4$ отсутствует. Например, сравни рис. 12.9 (5, 6) и рис. 12.8 (7, 8). Имеется и временная периодичность с периодом $2T$ (сравни с (12.29))

$$\frac{t_{12} - t_{10}}{2T} = \frac{33.915358 - 26.016098}{7.853982} = 1.0057650200. \quad (12.30)$$

Более того,

$$t_{12} - t_{11} \approx t_{11} - t_{10} \approx t_{10} - t_9 \approx T, \quad (12.31)$$

то есть, возможно, что период равен T .

Наконец, на рис. 12.10 показана зависимость решения от времени t в точке $z = 33.6$. На левом рисунке приведены расчеты для задачи при $\beta = 1$, а на правом рисунке — для задачи при $\beta = 1/4$ (см. также рис. 7.1).

Как и говорилось ранее (см. стр. 109, текст после формул (12.27), а также [80, с. 55–57]), величины разрывов медленно убывают со временем, что хорошо видно на рис. 12.10. Вновь, принципиальное различие между решениями задач при $\beta = 1$ и $\beta = 1/4$ практически отсутствует.

Следует особенно отметить, что в случае метода конечных объемов построить зависимость решения по времени не составляет труда — достаточно

в фиксированной точке сетки контролировать значения функций на каждом временном шаге.

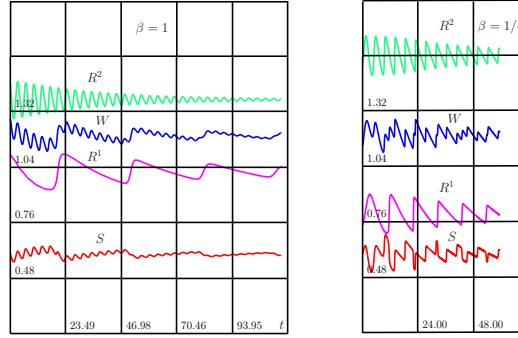


Рис. 12.10. Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1$ (слева) и $\beta = 1/4$ (справа). $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, Зависимость решения от времени t в точке $z = z_* = 33.6$

Напротив, при использовании точного аналитически-численного метода требуется построение функций $z(a, b)$ (см. (5.4)) и наличие для φ^z , ψ^z соотношения, аналогичного (4.14). Для данной задачи такие функции построить не удастся. Именно для этих целей в § 4.1.3 в диссертационной работе предложена модификация метода годографа, которая позволяет легко строить решения на линиях уровня функции $z(a, b)$.

§ 13 Влияние вращения на поведение течения

Здесь исследованы уравнения (2.63), (2.64), учитывающие вращение жидкости при течении в сосуде с податливыми стенками при отсутствии вязкости ($\mu = 0$), но с сохранением вращения $\omega_0 \neq 0$. В консервативной форме, уравнения (2.63), (2.64) записываем в виде

$$S_t + (SW)_z = 0, \quad (SW)_t + (SW^2)_z + \left(\int_z^S s P_s ds \right) - \frac{1}{4} \omega_0^2 (S^2)_z = 0. \quad (13.1)$$

Собственные значения (характеристические направления) $\lambda^{1,2}$ и инварианты в случае конститутивного соотношения (3.3) имеют вид (сравни при $\omega_0 = 0$ с аналогичными формулами (3.12)–(3.16))

$$\lambda^{1,2} = W \mp \sqrt{S^{2\beta} - \frac{1}{2} \omega_0^2 S}, \quad \int_z^S s P_s ds = \frac{S^{2\beta+1}}{2\beta+1}, \quad (13.2)$$

$$R^{1,2} = W - \int^S \sqrt{s^{2\beta-2} \mp \frac{\omega_0^2}{2s}} ds. \quad (13.3)$$

Интегралы в (13.3) при некоторых значениях β , например, $\beta = 1, 1/2, 1/4$, вычисляются в явном виде. Однако, получить явную форму связи инвариантов со всеми исходными переменными и собственными значениями, то есть указать явные функции $S(R^1, R^2)$, $\lambda^{1,2}(R^1, R^2)$, за исключением случая $\beta = 1/2$, не удастся (для W имеем $W = 1/2(R^1 + R^2)$). Иными словами, отсутствует возможность детального исследования решения, аналогичного приведенному в § 4–§ 7, и сравнения результатов, проведенного в § 12.

Для численного решения уравнений (13.1) с начальными данными (12.16), (12.17), то есть такими же как в § 12, используем метод конечных объемов, эффективность которого для подобных задач продемонстрирована в § 12, записывая потоки $\mathbf{F}$ (см. (12.1)–(12.3) в соответствии с уравнениями (13.1). Результаты расчетов показаны на рис. 13.1–13.3 при $\beta = 1/4$ в случаях $\omega_0 = 1.0$ и $\omega_0 = 1.4$ (остальные параметры указаны на рисунках).

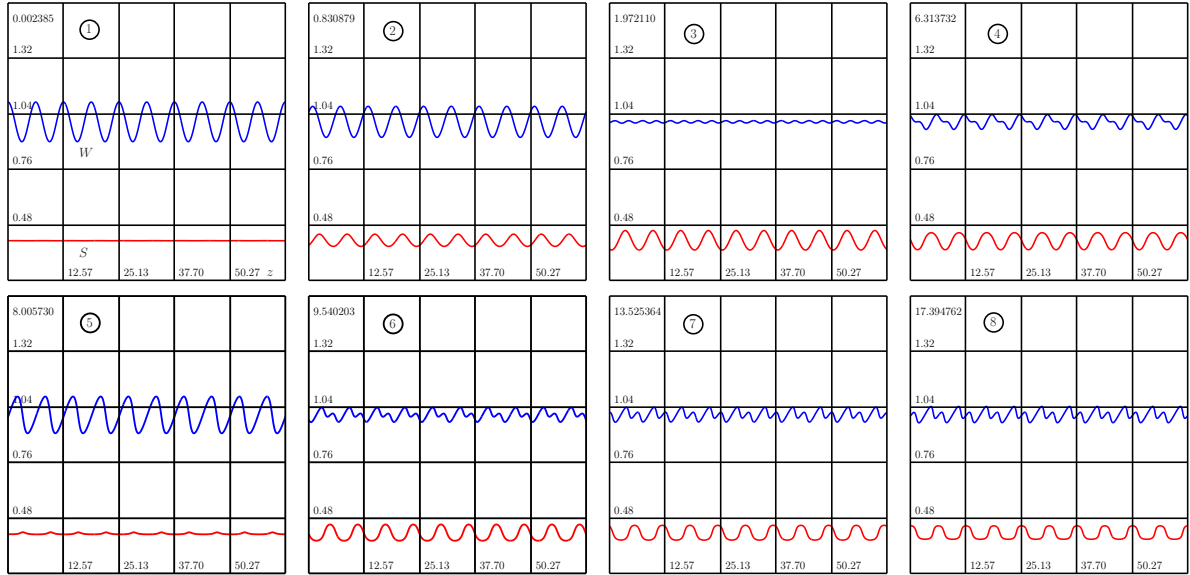


Рис. 13.1. Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1/4$. $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1$, $\Delta z_i = 0.013$, $\tau = 0.0024$. Решение в моменты $t_1 = 0.002385$, $t_2 = 0.83$, $t_3 = 1.97$, $t_4 = 6.31$, $t_5 = 8.01$, $t_6 = 9.540203$, $t_7 = 13.525364$, $t_8 = 17.394762$

Вновь, как и в предыдущих расчетах (при $\omega = 0$, см. § 12.2–§ 12.2), наблюдается периодичность решения с периодом T (см. рис. 13.1 (6–8) и

13.2 (2–4) и соотношения (12.29)–(12.31))

$$t_8 - t_7 \approx t_7 - t_6 \approx T, \quad \omega_0 = 1.0, \quad \text{рис. 13.1}, \quad (13.4)$$

$$t_4 - t_3 \approx t_3 - t_2 \approx T, \quad \omega_0 = 1.4, \quad \text{рис. 13.2}.$$

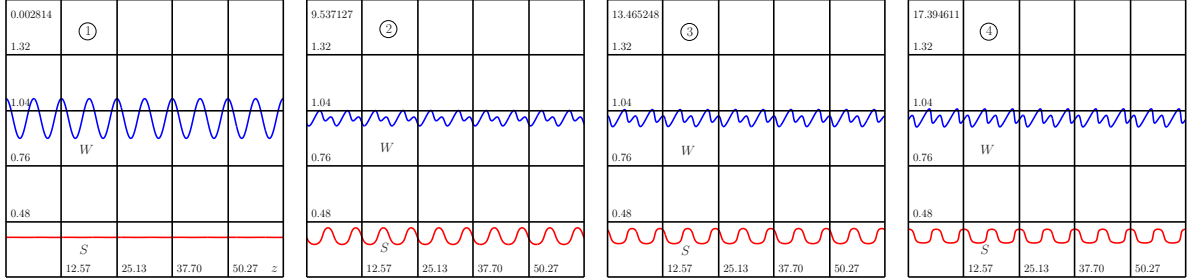


Рис. 13.2. Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1/4$. $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1.4$, $\Delta z_i = 0.013$, $\tau = 0.0028$. Решение в моменты $t_1 = 0.002814$, $t_2 = 9.537127$, $t_3 = 13.465248$, $t_4 = 17.394611$

На рис. 13.3 приведена зависимость решения от времени t в точке $z = z_* = 10$ для случая $\omega_0 = 1.4$.

Интересно отметить, что наличие вращения ($\omega_0 = 0$) приводит к некоторому сглаживанию («стабилизации») решения — в процессе эволюции не возникает ударных волн, по крайней мере, на интервале времени $0 < t < 18$ (см. рис. 13.1, 13.2).

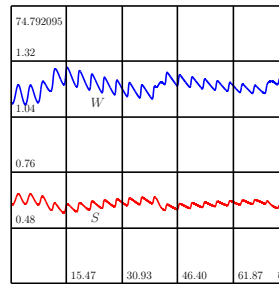


Рис. 13.3. Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1/4$. $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 1.4$, $\Delta z_i = 0.013$, $\tau = 0.0035$. Зависимость решения от времени t в точке $z = z_* = 10$

Скорее всего, сглаживание решения и отсутствие ударных волн объясняется некоторым «ослаблением» внешнего воздействия на податливую стенку области, которое происходит ввиду наличия центробежной силы

$\omega^2 R$ (или давления $1/2\omega_0^2 S$). Напомним, что эффективное давление $\mathcal{P}(S)$ имеет вид (см. (2.69))

$$\mathcal{P}(S) = P(S) - \frac{1}{2}\omega_0^2 S. \quad (13.5)$$

Особенно подчеркнем тот факт, что уравнения (13.1) имеют гиперболический тип лишь при выполнении условия

$$2S^{2\beta-1} > \omega_0^2, \quad (13.6)$$

которое вытекает из требования вещественности собственных значений $\lambda^{1,2}$ (см. (13.3)). При нарушении неравенства (13.6) тип уравнения становится эллиптическим и, естественно, алгоритм метода конечных объемов (§ 12.1) становится неприменимым — требуются численные (или иные) методы решения эллиптических уравнений. Заранее указать ограничение на параметр ω_0 невозможно, так как функция $S(z, t)$ изменяется в процессе эволюции решения. Вычислительный эксперимент показал, что таким значением ω_0 , при котором алгоритм § 12.1 неприменим, является $\omega_0 \approx 1.43$.

Исследование эллиптических уравнений не входит в цели диссертационной работы. Укажем только, что квазилинейные эллиптические уравнения, как правило, описывают неустойчивые среды (см., [23], а также [11, 15, 18, 20]). При $\beta = 1/2$ уравнения (13.1) совпадают с уравнениями мелкой воды (см., [47, с. 37]), в которых роль ускорения силы тяжести g играет величина $g = \sqrt{1 - 1/2\omega_0^2}$. При $g < 0$ ($\omega_0^2 > 2$) уравнения соответствуют «опрокинутой» мелкой воде, для которой поведение решения детально описано в [23, с. 87–90], [11, 15, 18, 20] — решение представляет собой либо негладкие структуры, либо стремится к бесконечности на конечном интервале времени («взрывается»). Аналогичное поведение решений уравнений (13.1) следует ожидать при нарушении неравенства (13.6).

Заключение к главе 4

Приведено сравнение результатов расчетов методом конечных объемов решения начально-краевой задачи для системы гиперболических уравнений с результатами, полученными аналитически-численным методом в § 5, § 7. Для вычислений применен метод конечных объемов с использованием HLL аппроксимации. Показано, что выбранный метод конечных объемов позволяет при соответствующем выборе параметров (шаги по времени и координате) уверенно идентифицировать разрывы решения (сильные и слабые). Выполнены расчеты для различных конституционных соотношений и показано, что существенное качественное отличие поведения решения не наблюдается (§ 12). В частности, это позволяет использовать точные аналитические решения при $\beta = 1$ для предсказания качественного поведения решений при других значениях параметра β .

Обнаружено, что пространственная периодичность начальных данных порождает в процессе эволюции временную периодичность решения. Результат справедлив, по крайней мере, для $\beta = 1$ и $\beta = 1/4$.

Исследовано влияние азимутального вращения жидкости на поведение решения. Показано, что вращение приводит к сглаживанию решений, но качественное изменение происходит лишь в случае быстрого вращения — при смене в процессе эволюции типа квазилинейных уравнений с гиперболического на эллиптический (§ 13).

Заключение

1. Построены (на основе теории мелкой воды) и исследованы уравнения для главных членов асимптотического разложения задачи о вращательно-симметричном течении жидкости в цилиндрической области с податливыми границами.
2. Показано, что в случае выбора определяющего соотношения, при котором реакция внешней среды пропорциональна степени радиуса области ($P \sim R^{4\beta}$), периодические возмущения первоначально постоянной скорости течения приводят к образованию на податливой прямолинейной границе пилообразных или ступенчатых структур.
3. Построены численные и точное (для $\beta = 1$) решения для начальной, краевой и начально-краевой задач в случае податливых границ области. Показано, что при изменении показателя степени β от $1/4$ до 1 решения совпадают качественно, и различаются лишь количественными характеристиками. Показано, что несогласованность начальных и краевых условий приводит к образованию на податливой границе области ударных волн и волновых фронтов.
4. Показано, что наличие азимутального вращения течения жидкости приводит к сглаживанию ступенчатых структур на податливой границе, а при интенсивном вращении тип асимптотических уравнений изменяется с гиперболического на эллиптический.
5. Предложена модификация аналитически-численного метода решения задачи Коши для квазилинейных уравнений в производных первого порядка, позволяющая строить и исследовать решение на линиях уровня постоянного времени или постоянной координаты.
6. Построены и исследованы уравнения для главных членов асимптотического разложения задачи о квазистационарном вращательно-симметричном течении в цилиндрической области с неподвижными иррегулярными границами в случае вязкости жидкости, зависящей от координат.

7. Построено точное решение линейных асимптотических уравнений и показано, что в окрестности неровностей с отрицательной кривизной профиля границы образуются стационарные вихри. Доказано, что этот результат справедлив для некоторого класса зависимостей вязкости жидкости от координат.
8. Построены разрывные решения, возникающие в процессе опрокидывания профиля непрерывного решения, в случае начально-краевой задачи для системы уравнений Хопфа.

Литература

1. Астраханцева, Е. В. Математическое моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов / Е. В. Астраханцева, В. Ю. Гидаспов, Д. Л. Ревизников // Матем. моделирование. — 2005. — Т. 17. — № 8. — С. 61–80.
2. Багаев, С. Н. О необходимости винтового движения крови / С. Н. Багаев, В. Н. Захаров, В. А. Орлов // Российский журнал биомеханики. — 2002. — Т. 6. — № 4. — С. 30–50.
3. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М.: Наука, 1990. — 488 с.
4. Богаченко, С. Е. Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии / С. Е. Богаченко, Ю. А. Устинов // Российский журнал биомеханики. — 2009. — Т. 13. — № 1 (43). — С. 29–43.
5. Буничева, А. Я. Математическое моделирование квазиодномерной гемодинамики / А. Я. Буничева, С. И. Мухин, Н. В. Соснин, А. Б. Хруленко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55. — № 8. — С. 1417–1428. — DOI: 10.7868/s0044466915080062.
6. Ватульян, А. О. Об особенностях одномерного моделирования движения крови / А. О. Ватульян, Н. В. Клевчишкина // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2011. — № 4. — С. 11–15.
7. Волобуев, А. Н. Течение жидкости в трубах с эластичными стенками / А. Н. Волобуев // Успехи физических наук. — 1995. — Т. 165. — № 2. — С. 177–186. — DOI: 10.3367/UFNr.0165.199502c.0177.

8. Высоцкий Л. И. Краткий обзор достижений в решении проблемы распределения осреднённых скоростей в канонических течениях жидкости / Л. И. Высоцкий // Научное обозрение. Технические науки. — 2017. — № 1 — С. 33—44.
9. Гришанин, К. В. Динамика русловых потоков / К. В. Гришанин. — Л.: Гидрометеиздат, 1979. — 312 с.
10. Димитриенко, Ю. И. Тензорное исчисление / Ю. И. Димитриенко. — М.: Высшая школа, 2001. — 576 с.
11. Долгих, Т. Ф. Задача об опрокинутой мелкой воде / Т. Ф. Долгих // Сборник трудов XIX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». — 2020. — Т. 1. — С. 94–98.
12. Долгих, Т. Ф. Метод конечных объемов для решения задачи зонального электрофореза / Т. Ф. Долгих // Сборник трудов XIX международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». — 2018. — Т. 1. — С. 94–98.
13. Долгих, Т. Ф. Методы решения задачи зонального электрофореза с периодическими начальными данными / Т. Ф. Долгих // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы», ВИНТИ РАН. Т. 172. — 2019. — С. 38–47. — DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-38-47.
14. Долгих, Т. Ф. Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси / Т. Ф. Долгих // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2017. — Т. 3 (195). — № 1. — С. 28–35. — DOI: 10.23683/0321-3005-2017-3-1-28-35.
15. Долгих, Т. Ф. Решение эллиптических уравнений с периодическими данными для задачи зонального электрофореза / Т. Ф. Долгих, М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2017. — Т. 3 (195). — № 2. — С. 85–96.
16. Долгих, Т. Ф. Варианты метода годографа для решения системы двух

- квазилинейных уравнений / Т. Ф. Долгих, М. Ю. Жуков // Владикавк. мат. журн. — 2021. — Т. 23. — № 2. — С. 34–50. — DOI: 10.46698/X8869-5899-2064-L.
17. Долгих, Т. Ф. Метод годографа для решения задачи о мелкой воде под твердой крышкой в случае гиперболических уравнений / Т. Ф. Долгих, М. Ю. Жуков // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86. — № 1. — С. 23–39. — DOI: 10.31857/s0032823522010039.
 18. Долгих, Т. Ф. Метод годографа для решения задачи об опрокинутой мелкой воде / Т. Ф. Долгих, М. Ю. Жуков // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2022. — Т. 62. — № 1. — С. 113–123. — DOI: 10.31857/s0044466922010069.
 19. Долгих, Т. Ф. Метод годографа для решения задачи о мелкой воде под твердой крышкой / Т. Ф. Долгих // Изв. Высших учебных заведений. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. — 2021. — № 1. — С. 15–24. — DOI: 10.18522/1026-2237-2021-1-15-24.
 20. Долгих, Т. Ф. Моделирование неустойчивых сплошных сред: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Татьяна Федоровна Долгих — ЮФУ. — 2021. — 179 с.
 21. Елаева, М. С. Взаимодействие сильных и слабых разрывов в задаче Римана для гиперболических уравнений / М. С. Елаева // Изв. Высших учебных заведений. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. — 2010. — № 6. — С. 14–19.
 22. Елаева, М. С. Взаимодействие слабых разрывов и метод годографа для задачи о фракционировании двухкомпонентной смеси электрич. / М. С. Елаева, М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56. — № 8. — С. 1455–1469. — DOI: 10.7868/s0044466916080056.
 23. Жданов, С. К. Квазигазовые неустойчивые среды / С. К. Жданов, Б. А. Трубников. — М.: Наука, 1971. — 176 с.
 24. Жуков, М. Ю. Асимптотические модели течения в трубе с податливы-

- ми стенками / М. Ю. Жуков, Н. М. Полякова // Владикавк. мат. журн. — 2023. — Т. 25, вып. 2 — С. 89–102. — DOI: 10.46698/i3568-6388-7809-u.
25. Жуков, М. Ю. Движение слоя идеальной несжимаемой жидкости на внешней поверхности вращающегося цилиндра / М. Ю. Жуков, А. М. Морад // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион, Естественные науки. — 2015. — № 4. — С. 49–55. — DOI: 10.18522/0321-3005-2015-4-49-55.
 26. Жуков, М. Ю. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева. — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2008. — 256 с.
 27. Жуков, М. Ю. Решение задач математической физики при помощи пакета конечных элементов FreeFem++ / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева. — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2014. — 256 с.
 28. Жуков, М. Ю. Математическое моделирование процессов электрофореза / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова. — Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. ЮФУ, 2019. — 160 с.
 29. Жуков, М. Ю. Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкости / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева. — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2016. — 208 с.
 30. Жуков, М. Ю. Микрогидродинамика, жидкие пленки и электрофорез / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. — 240 с.
 31. Жуков, М. Ю. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Т. Ф. Долгих. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. — 126 с.
 32. Жуков, М. Ю. Математические модели жидкости, газа и переноса электрическим полем в многокомпонентных химически активных средах / М. Ю. Жуков, Т. Ф. Долгих // Математический форум (Итоги науки. Юг России). — 2020. — Т. 13. — С. 87–104.
 33. Жуков, М. Ю. Квазистационарное турбулентное течение в цилиндрическом канале с неровными стенками / М. Ю. Жуков, Н. М. Полякова,

- Е. В. Ширяева // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион, Естественные науки. — 2020. — № 1 (205). — С. 4–10. — DOI: 10.18522/1026-2237-2020-1-4-10.
34. Жуков, М. Ю. Моделирование испарения капли жидкости / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. — 208 с.
 35. Ибрагимов, Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике / Н. Х. Ибрагимов // УМН. — 1992. — Т. 47 (286). — № 4. — С. 83–144.
 36. Каро, К. Механика кровообращения / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. — М.: Мир, 1981. — 624 с.
 37. Карпман, В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В. И. Карпман. — М.: Наука, 1973. — 176 с.
 38. Ковеня, В. М. Метод конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики / В. М. Ковеня, Д. В. Чирков. — Новосибирск: НГУ, 2013. — 87 с.
 39. Кошелев, В. Б. Математические модели квази-одномерной гемодинамики: Методическое пособие / В. Б. Кошелев, С. И. Мухин, Н. В. Соснин, А. П. Фаворский. — М.: МАКС Пресс, 2010. — 114 с.
 40. Кудряшов, Н. А. Нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений в вязко-эластичной трубке / Н. А. Кудряшов, Д. И. Синельщиков, И. Л. Чернявский // Нелинейная динамика. — 2008. — Т. 4. — № 1. — С. 69–86. — DOI: 10.20537/nd0801004.
 41. Кудряшов, Н. А. Нелинейные волны при течении жидкости в вязко-эластичной трубке / Н. А. Кудряшов, Д. И. Синельщиков, И. Л. Чернявский // Механика жидкости и газа. — 2006. — № 1. — С. 54–67. — DOI: 10.20537/nd0801004.
 42. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. — М.: Физматлит, 2001. — 608 с.
 43. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.:

- Мир, 1964. — 830 с.
44. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
 45. Ляпин, В. Ю. Особенности переноса мелкой взвеси неравномерным плавноизменяющимся речным потоком / В. Ю. Ляпин, А. В. Ляпин, Ф. Л. Доронин, // Вестник МГСУ. — 2010. — № 4 — С. 78–84.
 46. Монин, А. С. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть I / А. С. Монин, А. М. Яглом. — М.: Наука, 1965. — 640 с.
 47. Овсянников, Л. В. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. и др. Нахимов. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд, 1985. — 319 с.
 48. Педли, Т. Гидродинамика крупных кровеносных / Т. Педли. — М.: Мир, 1983. — 400 с.
 49. Полякова, Н. М. Начально-краевая задача о течении в кровеносном сосуде / Н. М. Полякова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2022. — № 4-1 (216-1). — С. 42–54. — DOI: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-42-54.
 50. Полякова, Н. М. О вычислении коэффициента турбулентного переноса в задаче о седиментации примеси / Н. М. Полякова, Е. В. Ширяева // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2017. — № 4-1 (196-1). — С. 44–50.
 51. Полякова, Н. М. Вихревое течение жидкости с турбулентной вязкостью между ребристыми плоскостями / Н. М. Полякова, В. И. Цветкова // Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития: материалы XXX научной конференции, (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 13–15 апреля 2023 г.). — Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. ЮФУ, 2023. — С. 327–330.
 52. Полякова, Н. М. Численная верификация асимптотической модели течения между ребристыми плоскостями жидкости с переменной вязкостью / Н. М. Полякова, В. И. Цветкова // Математическое модели-

- рование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XVII Всероссийской школы, (Южный федеральный университет, Дивноморское, 28 мая–01 июня 2023 г.). — Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. ЮФУ. — 2023. — С. 89.
53. Poliakova, N. M. Turbulent blood flow in a cylindrical vessel with an irregular walls profile / N. M. Poliakova, T. A. Petrukhina // 2020 International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (PHENMA 2020), Kitakyushu, Japan, March 26–29, 2021: Abstracts and Schedule. — Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal University Press, 2021. — P. 214.
 54. Полякова, Н. М. Вращательно-симметричное турбулентное течение в цилиндрическом сосуде с неравномерным профилем стенок / Н. М. Полякова // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX международной конференции, (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.): в двух томах. Т. 1 — Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. ЮФУ, 2020. — С. 213–217.
 55. Полякова, Н. М. Вращательно-симметричное турбулентное течение в цилиндрическом сосуде с неравномерным профилем стенок / Н. М. Полякова // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XX международной конференции, Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г. — Ростов-на-Дону; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020. — С. 147.
 56. Полякова, Н. М. Стационарное турбулентное течение крови. / Н. М. Полякова // Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis — IX, Ростов-на-Дону, 21–26 апреля 2019 г.: материалы докладов международной конференции. — Ростов-на-Дону, 2019. — С. 96.
 57. Полякова, Н. М. Образование пространственно-временных структур в испаряющейся капле жидкости, содержащей примеси / Н. М. Полякова // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIX

- международной конференции, (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.): в двух томах. Т. 1 — Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. ЮФУ, 2018. — С. 198–202.
58. Полякова, Н. М. Образование пространственно-временных структур в испаряющейся капле жидкости, содержащей примеси / Н. М. Полякова // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XIX международной конференции, Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г. — Ростов-на-Дону, 2018. — С. 108.
 59. Полякова, Н. М. Математическая модель седиментации примеси в испаряющейся капле жидкости / Н. М. Полякова // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VIII : материалы докладов международной конференции, Ростов-на-Дону, 22–27 апреля 2018 г. — Ростов-на-Дону, 2018. — С. 96.
 60. Полякова, Н. М. Моделирование высыхающей капли биологической жидкости / Н. М. Полякова // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VII, Ростов-на-Дону, 24–28 апреля 2017 г.: материалы и доклады. — Ростов-на-Дону, 2017. — С. 107–108.
 61. Полякова, Н. М. Моделирование клиновидной дегидратации высыхающей капли крови / Н. М. Полякова // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII международной конференции, (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.): в двух томах. Т. 2 — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2016. — С. 151–155.
 62. Полякова, Н. М. Моделирование клиновидной дегидратации высыхающей капли крови / Н. М. Полякова // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XVIII международной конференции, Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г. — Ростов-на-Дону, 2016. — С. 138.
 63. Полякова, Н. М. Описание переноса сгустка крови в сосуде / Н. М. По-

- лякова // Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов: тезисы докладов международной конференции, Ростов-на-Дону, 5–9 октября 2015 г. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2015. — С. 27.
64. Полякова, Н. М. Исследование обобщенной модели формирования рН-градиента при изоэлектрофокусировании / Н. М. Полякова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2015. — № 1 (185). — С. 45–49.
 65. Жукова, Н. М. Влияние локальных нарушений условия электронейтральности на динамику формирования рН-градиента в растворе / Н. М. Жукова // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVII международной конференции, (Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г.): в двух томах. Т. 1 — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2014. — С. 201–205.
 66. Жукова, Н. М. Влияние локальных нарушений условия электронейтральности на динамику формирования рН-градиента в растворе / Н. М. Жукова // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XVII международной конференции, Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2014. — С. 58.
 67. Жукова, Н. М. Нестационарная задача изоэлектрического фокусирования аминокислот в заданном рН-градиенте / Н. М. Жукова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2013. — № 5 (177). — С. 20–24.
 68. Жуков, М. Ю. Моделирование эволюции сгустка крови в сосуде / М. Ю. Жуков, Н. М. Жукова // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVI международной конференции, (Ростов-на-Дону, 16–19 октября 2012 г.): в двух томах. Т. 1 — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2012. — С. 94–98.
 69. Жуков, М. Ю. Моделирование эволюции сгустка крови в сосуде / М. Ю. Жуков, Н. М. Жукова // Современные проблемы механики

- сплошной среды: тезисы докладов XVI международной конференции, Ростов-на-Дону, 16–19 октября 2012 г. — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2012. — С. 40.
70. Жукова, Н. М. Нестационарная задача изоэлектрического фокусирования аминокислот в заданном pH градиенте / Н. М. Жукова // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XV международной конференции, (Ростов-на-Дону, 4–7 декабря 2011 г.): в двух томах. Т. 2 — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2011. — С. 86–90.
 71. Жукова, Н. М. Нестационарная задача изоэлектрического фокусирования аминокислот в заданном pH градиенте / Н. М. Жукова // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XV международной конференции, Ростов-на-Дону, 4–7 декабря 2011 г. — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2011. — С. 22.
 72. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 416 с.
 73. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М.: Наука, 1978. — 668 с.
 74. Самарский, А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. — М.: Наука, 1992. — 494 с.
 75. Свиридова, Н. В. Моделирование гемодинамических процессов сердечно-сосудистой системы на основе данных периферической артериальной пульсации / Н. В. Свиридова, В. Д. Власенко // Математическая биология и биоинформатика. — 2014. — Т. 9. — № 1. — С. 195–205. — DOI: 10.17537/2014.9.195.
 76. Смирнов, Е. М. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии / Е. М. Смирнов, Д. К. Зайцев // Научно технические ведомости. Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика, 2004. — С. 1–22. — DOI: 10.17537/2014.9.195.

77. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
78. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1951. — 660 с.
79. Трусделл, К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. — М.: Мир, 1975. — 593 с.
80. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / ж. Уизем. — М.: Наука, 1970. — 622 с.
81. Хмель, Т. А. Моделирование пульсирующих течений в кровеносных капиллярах / Т. А. Хмель, А. В. Федоров // Математическая биология и биоинформатика. — 2013. — Т. 8. — № 1. — С. 1-11. — DOI: 10.17537/2013.8.1.
82. Царев, С. П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа / С. П. Царев // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54. — № 5. — С. 1048–1068.
83. Чернявский, И. Л. Математическое моделирование волновых процессов и ауторегуляции при течении крови в сосудах: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Игорь Леонидович Чернявский — МИФИ. — 2008. — 135 с.
84. Шарфарец Б. П. Моделирование турбулентного движения жидкости на основе гипотезы Буссинеска. Обзор / Б. П. Шарфарец, С. П. Дмитриев // Научное приборостроение. — 2018. — Т. 28. — № 3 — С. 101–108.
85. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. — М.: Наука, 1974. — 722 с.
86. Absi, R. Аналитическая модель турбулентной вязкости для профилей скорости во внешней части закрытых и открытых течений в канале / R. Absi // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2021. — № 6 — С. 145–156.
87. Acosta, S. Cardiovascular mechanics in the early stages of pulmonary hypertension: a computational study / S. Acosta, C. Puelz, R. Reviere,

- D.J. Penny, K.M. Bread, C.G. Rusin // Biomech Model Mechanobiol. — 2017. — Vol. 16. — P. 2093–2112. — DOI: 10.1007/s10237-017-0940-4.
88. Agrawal, B. Mathematical modeling of blood flow / B. Agrawal, I. K. Mohd // International Journal of Statistics and Applied Mathematics. — 2021. — Vol. 6. — no. 4. — P. 116–122.
 89. Anliker, M. Nonlinear Analysis of Flow Pulses and Shock Waves in Arteries. Part I: Derivation and Properties of Mathematical Model / M. Anliker, R.L. Rockwell, E. Ogden // ZAMP. — 1971. — Vol. 22. — P. 217–246. — DOI: 10.1007/BF01614000.
 90. Asmolov, E.S. Effective slip boundary conditions for arbitrary one-dimensional surfaces / E.S. Asmolov, O.I. Vinogradova // J. Fluid Mechanics. — 2012. — Vol. 706. — P. 108–117. — DOI: 10.1017/jfm.2012.228.
 91. Barnard, A.C.L. A Theory of Fluid Flow in Compliant Tubes / A.C.L. Barnard, W.A. Hunt, W.P. Timlake, E. Varley // Biophysical Journal. — 1966. — Vol. 6. — no. 6. — P. 717–724. — DOI: 10.1016/S0006-3495(66)86690-0.
 92. Bazant, M.Z. Tensorial hydrodynamic slip / M.Z. Bazant, O.I. Vinogradova // arXiv:physics.flu-dyn/0808.0765v1. — 2008. — P. 1–10. — DOI: 10.1017/S002211200800356X.
 93. Belyaev, A.V. Wetting, roughness and flow boundary conditions / A.V. Belyaev, O.I. Vinogradova // J. Phys. Condens. Matter. — 2011. — Vol. 23. — no. 18. — P. 184104. — DOI: 10.1088/0953-8984/23/18/184104.
 94. Botros, K.K. Experimental Investigation Into the Relationship Between the Roughness Height in Use With Nikuradse or Colebrook Roughness Functions and the Internal Wall Roughness Profile for Commercial Steel Pipes / K.K. Botros // Journal of Fluids Engineering. — 2016. — Vol. 138. — no. 081202-1–081202-8. — P. 1–12. — DOI: 10.1115/1.4032601.
 95. Bozzuto, L.A. Mathematical analysis of blood flow model through channels with flexible walls: Master's Theses and Capstones / Lisa A.

- Bozzuto — University of New Hampshire, Durham. — 2011. — 40 p.
96. Bressan, A. Hyperbolic Conservation Laws. An Illustrated Tutorial / A. Bressan // Lecture Notes in Mathematics. — 2013. — Vol. 2062. — P. 157–245. — DOI: 10.1007/978-3-642-32160-3_2.
 97. Camenen, B. Equivalent roughness height for plane bed under steady flow / B. Camenen, M. Larson, D. Bayram // Estuarine, coastal and shelf science, Elsevier. hal-00454502. — 2009. — Vol. 81. — no. 3. — P. 1–14.
 98. Canic, S. Blood flow through compliant vessels after endovascular repair: wall deformations induced by the discontinuous wall properties / S. Canic // Computing and Visualization in Science. — 2002. — Vol. 4. — P. 147–155. — DOI: 10.1007/s007910100066.
 99. Canic, S. Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model of blood flow through compliant axi-symmetric vessels / S. Canic, E.H. Kim // Math. Meth. Appl. Sci. — 2003. — Vol. 26. — P. 1161–1186. — DOI: 10.1002/mma.407.
 100. Canic, S. Critical thresholds in a quasilinear hyperbolic model of blood flow / S. Canic, T. Li // Networks and Heterogeneous Media. — 2009. — Vol. 4. — no. 3. — P. 527–536. — DOI: 10.3934/nhm.2009.4.527.
 101. Canic, S. Blood flow through axially symmetric sections of compliant vessels: new effects / S. Canic, J. Tambaca, A. Mikelic, C.J. Hartley, D. Mirkovic, J. Chavez, D. Rosenstrauch // Conf. Proc. IEEE Eng Med Biol Soc. — 2004. — Vol. 3696. — no. 9. — P. 1–4. — DOI: 10.1109/IEMBS.2004.1404038.
 102. Copson, E. T. On the Riemann-Green Function / E. T. Copson // Ration. Mech. Anal. — 1958. — Vol. 1. — P. 324–348.
 103. Curro, C. Reduction of nonhomogeneous quasilinear 2×2 systems to homogeneous and autonomous form / C. Curro, F. Oliveri // Journal of Mathematical Physics. — 2008. — Vol. 49. — P. 103504. — DOI: 10.1063/1.2992482.
 104. Bergel D.H. Cardiovascular Fluid Dynamics / D.H. Bergel — Vol. 1.

- / Academic Press, London And New York, 1972. — 365 p. — DOI: 10.1299/jsmemag.85.763_599.
105. Dinnar, U. Cardiovascular Fluid Dynamics / U. Dinnar. — CRC Press Taylor & Francis Group. — 1972. — 252 p.
 106. Donea, J. Time-accurate solutions of advection-diffusion problems by finite elements / J. Donea, S. Giuliani, H. Laval, L. Quartapelle // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. — 1984. — Vol. 45. — P. 123–145.
 107. Eijkel, J. Liquid slip in micro- and nanofluidics: recent research and its possible implications / J. Eijkel // Lab Chip. — 2007. — no. 7. — P. 299–301. — DOI: 10.5510/OGP20100400047.
 108. Fernandez, M.A. Analysis of a Geometrical Multiscale Blood Flow Model Based on the Coupling of ODE's and Hyperbolic PDE'S / M.A. Fernandez, V. Milisic, A. Quarteron // [Research Report] RR-5127, INRIA. — 2004. — P. 1–29. — DOI: 10.1137/030602010.
 109. Formaggia, L. Multiscale Modelling of the Circulatory System: a Preliminary Analysis / L. Formaggia, F. Nobile, A. Quarteroni, A. Veneziani // Computing and Visualization in Science. — 1999. — Vol. 2. — no. 2. — P. 75–83. — DOI: 10.1007/s007910050030.
 110. Formaggia, L. One-dimensional Models for Blood Flow in Arteries / L. Formaggia, F. Nobile, A. Quarteroni, A. Veneziani // Journal of Engineering Mathematics. — 2003. — Vol. 47. — P. 251–276. — DOI: 10.1023/B:ENGI.00000007980.01347.29.
 111. Fusco, D. Exact Solutions to Flows in Fluid Filled Elastic Tubes / D. Fusco, N. Manganaro // Differential Equations with Applications to Mathematical. — 1993. — P. 87–99. — DOI: 10.1016/S0076-5392(08)62375-9.
 112. Gurevich, M.I. A Modification of the Nikuradse smooth pipe formula / M.I. Gurevich // Fluid Dynamics. — 1967. — Vol. 2. — no. 3. — P. 160–161.
 113. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws / A. Harten // J. Comp. Physics. — 1997. — Vol. 135. — P. 260–278.

114. Hecht, F. New development in FreeFem++ / F. Hecht // J. Numer. Math. — 2012. — Vol. 20. — no. 3–4. — P. 251–256.
115. Kumar, A. Flow through quasi-rough circular pipes / A. Kumar // Proc. Instn Ciu. Engrs, Part 2. — 1976. — Vol. 61. — P. 137–156.
116. Labadin, J. A. Ahmadi Mathematical modeling of the arterial blood flow / J. A. Ahmadi A. Labadin // Proc. of the 2nd IMT-GT Reg. Conf. on Mathematics, Statistics and Applications.—USM, Penang. — 2006. — P. 1–8.
117. Lauga, E. Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition / E. Lauga, M. P. Brenner, H. A. Stone // Chapter 19 in: Handbook of Experimental Fluid Dynamics. — 2007. — P. 1–27. — DOI: 10.1007/978-3-540-30299-5_19.
118. Lax, P. D. Hyperbolic partial differential equations (Courant lecture notes. 14) / P. D. Lax — Vol. 14. / Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 2006. — 217 p. — DOI: 10.1016/S0002-9394(14)77323-4.
119. Liu, T-P. Hyperbolic and viscous conservation laws / P. Liu T — Vol. 72. / CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics. Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, 2000. — 73 p.
120. Liu, B. A numerical simulation of viscous flows in collapsible tubes with stenoses / B. Liu, D. Tang // Applied Numerical Mathematics. — 2000. — Vol. 32. — P. 87–101. — DOI: 10.1016/S0168-9274(99)00015-X.
121. Mikelic, A. Fluid-structure interaction in a pre-stressed tube with thick elastic walls I: the stationary Stokes problem / A. Mikelic, G. Guidoboni, S. Canic // Networks and Heterogeneous Media. — 2007. — Vol. 2. — no. 3. — P. 397–423. — DOI: 10.3934/nhm.2007.2.397.
122. Mongruel, A. Effective Hydrodynamic Boundary Conditions for Microtextured Surfaces / A. Mongruel, T. Chastel, E. S. Asmolov, O. I. Vinogradova // arXiv:physics.flu-dyn/1203.6532v3. — 2012. — P. 1–4. — DOI: 10.1103/PhysRevE.87.011002.

123. Nichols, W.W. McDonald's Blood Flow in Arteries Theoretical, Experimental and Clinical Principles / W.W. Nichols, M.F. O'Rourke, C. Vlachopoulos. — Hodder Arnold An Hachette UK Company. — 2011. — 742 p. — DOI: 10.1111/j.1540-8175.1991.tb01207.x.
124. Nikuradse, I. Stroemungsgesetze in rauhen Rohren / I. Nikuradse // Forschungs-Heft (Forschungs auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens). — 1933. — Vol. 361. — P. 1–22. — DOI: 10.1002/zamm.19230030502.
125. Ottesen, J. T. Valveless pumping in a fluid-filled closed elastic tube-system: one-dimensional theory with experiment / J. T. Ottesen // J. Math. Biol. — 2003. — Vol. 46. — P. 309–332. — DOI: 10.1007/s00285-002-0179-1.
126. Payne, S. J. Analysis of the effects of gravity and wall thickness in a model of blood flow through axisymmetric vessels / S. J. Payne // Med. Biol. Eng. Comput. — 2004. — Vol. 42. — P. 799–806. — DOI: 10.1007/BF02345213.
127. Piccioli, F. Modeling blood flow in networks of viscoelastic vessels with the 1-D augmented fluid–structure interaction system / F. Piccioli, G. Bertaglia, A. Valiani, V. Caleffi // Journal of Computational Physics. — 2022. — Vol. 464. — P. 1–45. — DOI: 10.1016/j.jcp.2022.111364.
128. Pontrelli, G. A Multiscale Approach for Modelling Wave Propagation in an Arterial Segment / G. Pontrelli // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. — 2004. — Vol. 7. — no. 2. — P. 79–89. — DOI: 10.1080/1025584042000205868.
129. Qian, T. Driven cavity flow: from molecular dynamics to continuum hydrodynamics / T. Qian, X. Wang // SIAM Multiscale Modeling and Simulation. — 2005. — Vol. 749. — no. 3. — P. 1–28. — DOI: 10.1137/040604868.
130. Rahman, Md. S. Mathematical Modeling of Blood Flow / d. S. Rahman , d. A. Haque // IEEE/OSA/IAPR International Conference on Infonnatics, Electronics & Vision. — 2019. — P. 672–676. — DOI: 10.1109/ICIEV.2012.6317446.
131. Rijn, Leo C. van. Principles of sediment transport in rivers, estuaries and

- coastal seas. / Leo C. van Rijn. — Amsterdam: Aqua Publications, 1993. — 690 p.
132. Sadaka, G. Solving Shallow Water flows in 2D with FreeFem++ on structured mesh / G. Sadaka // <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00715301>. — 2012. — P. 1–16.
 133. Senashov, S.I. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity / S.I. Senashov, A. Yakhno // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications SIGMA. — 2012. — Vol. 8. — no. 071. — P. 1–16.
 134. Shiryaeva, E.V. Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part IV: Theory / E.V. Shiryaeva, N.M. Zhukova, M.Yu. Zhukov // arXiv e-prints : arXiv:1311.5907. — 2013. — C. 1–15. — doi:10.48550/arXiv.1311.5907 — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/1311.5907v1> (дата обращения 09.06.2023)
 135. Schmieschek, S. Tensorial slip of super-hydrophobic channels / S. Schmieschek, A. V. Belyaev, J. Harting, O. I. Vinogradova // Phys. Rev. E. — 2012. — Vol. 85. — P. 1–11. — DOI: 10.1103/PhysRevE.85.016324.
 136. Shah, R. S. Mathematical Modeling of Blood Flow With the Suspension of Nanoparticles Through a Tapered Artery With a Blood Clot / R. S. Shah, R. Kumar // Frontiers in Nanotechnology, www.frontiersin.org, 2020, Article 596475. — 2020. — Vol. 2. — P. 1–5. — DOI: 10.3389/fnano.2020.596475.
 137. Shiryaeva, E. V. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Hyperbolic Quasilinear Equations. Part / E. V. Shiryaeva, M. Yu. Zhukov // arXiv:1410.2832. — 2014. — P. 1–19.
 138. Shiryaeva, E. V. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part I / E. V. Shiryaeva, M. Yu. Zhukov // arXiv:1503.01762. — 2014. — P. 1–23.
 139. Shiryaeva, E. V. Hodograph Method and Numerical Integration of Two Quasilinear Hyperbolic Equations. Part II / E. V. Shiryaeva,

- M. Yu. Zhukov // arXiv:1512.06710. — 2015. — P. 1–22.
140. Tambaca, J. Effective model of the fluid flow through elastic tube with variable radius / J. Tambaca, S. Canic, A. Mikelic // Mathematikertreffen, Zagreb-Graz. D. Butkovic, D. Gronau, H. Kraljevic, O. Roschel, Ed. — 2005. — P. 1–22.
 141. Taylor, J. B. Characterization of the effect of surface roughness and texture on fluid flow—past, present, and future / J. B. Taylor, A. L. Carrano, S. G. Kandlikar // Int. J. Therm. Sci. — 2006. — Vol. 45. — no. 10. — P. 962–968. — DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2006.01.004.
 142. Toro, E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction / E. F. Toro. — Springer, Dordrecht–Heidelberg–London–New York, 2009. — 620 p. — DOI: 10.1007/b79761.
 143. Vazquez-Cendon, M. E. Solving hyperbolic equations with finite volume methods / M. E. Vazquez-Cendon — Vol. 90. / Springer Int. Publish. Switzerland, 2015. — 195 p.
 144. Willmott, G. R. Measurement of Newtonian fluid slip using a torsional ultrasonic oscillator / G. R. Willmott, J. L. Tallon // Phys. Rev. E. 066306. — 2007. — Vol. 76. — P. 1–12. — DOI: 10.1016/j.cap.2007.10.030.
 145. Womersley, J. R. Oscillatory flow in arteries: the constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission / J. R. Womersley // Phys. Med. Biol. — 1957. — Vol. 2. — no. 2. — P. 178–187. — DOI: 10.1088/0031-9155/2/2/305.
 146. Yin, F. Peristaltic Waves in Circular Cylindrical Tubes / F. Yin, Y. C. Fung // Journal of Applied Mechanics. — 1969. — P. 579–587.
 147. Zeitsch, P. J. On the Riemann Function / P. J. Zeitsch // Mathematics. — 2018. — Vol. 316. — no. 12. — P. 1–31. — DOI: 10.3390/math6120316.
 148. Zeitsch, P. J. On the Riemann Function / P. J. Zeitsch // Reviews in Mathematical Physics. Preprint. — 2017. — P. 1–38. — DOI: 10.3390/math6120316.

Приложения

А Условия на свободной границе

Обратим внимание на то, что соотношения (A.1)–(A.9) записаны в исходных переменных (см. § 2.1), а начиная с (A.9) использованы масштабированные переменные (см. (2.12)), то есть непосредственно для уравнений, определяющих главные члены асимптотики.

Предположим, что уравнение свободной поверхности задано в виде

$$\Phi \equiv r - R(z, t) = 0, \quad (\text{A.1})$$

где $R(z, t)$ — неизвестная функция.

Динамические условия (2.9) на свободной поверхности удобно записать в проекциях на нормальный $\mathbf{n}$ и касательные $\boldsymbol{\tau}^\theta$, $\boldsymbol{\tau}^z$ векторы к свободной поверхности

$$-(p - P) + \mathbf{n} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\tau}^\theta \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\tau}^z \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad r = R(z, t), \quad (\text{A.2})$$

где $\mathbb{T}$ — тензор вязких напряжений, p — давление, P — давление окружающей среды, $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}^\theta$, $\boldsymbol{\tau}^z$ — ненормированные нормальный и касательные векторы к свободной поверхности, которые определяются соотношениями

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}, \quad \nabla \Phi = \mathbf{k}_r - \nabla_0 R, \quad \gamma^2 = |\nabla \Phi|^2 = 1 + (\nabla_0 R)^2, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla_0 = \mathbf{k}_z \partial_z, \quad \gamma \mathbf{n} = (1, 0, -R_z), \quad \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}^\theta \wedge \boldsymbol{\tau}^z,$$

$$\boldsymbol{\tau}^\theta = \mathbf{k}_\theta + \mathbf{k}_r (\mathbf{k}_\theta \cdot \nabla_0 R) = (0, 1, 0) = \mathbf{k}_\theta,$$

$$\gamma \boldsymbol{\tau}^z = \mathbf{k}_z + \mathbf{k}_r (\mathbf{k}_z \cdot \nabla_0 R) = (R_z, 0, 1),$$

где $\mathbf{k}_r$, $\mathbf{k}_\theta$, $\mathbf{k}_z$ — орты цилиндрической системы координат.

Тензор вязких напряжений $\mathbb{T}^v$ связан с тензором скоростей деформации (ньютоновская жидкость)

$$\mathbb{T}_{ik}^v = \mu \mathbb{D}_{ik}^v. \quad (\text{A.4})$$

Здесь $\mathbb{D}^v$ — тензор скоростей деформации.

В цилиндрической системе координат компоненты тензора деформаций при условии вращательной симметрии ($\partial/\partial\theta = 0$) записываются в форме

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2u_r & v_r - \frac{v}{r} & w_r + u_z \\ v_r - \frac{v}{r} & \frac{2u}{r} & v_z \\ w_r + u_z & v_z & 2w_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Вычисляя требующиеся в (A.2) выражения, с учетом (A.3)–(A.5), имеем

$$\begin{aligned} \gamma^2 \mathbf{n} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{n} &= (1, 0, -R_z) \cdot \begin{pmatrix} 2u_r & v_r - \frac{v}{r} & w_r + u_z \\ v_r - \frac{v}{r} & \frac{2u}{r} & v_z \\ w_r + u_z & v_z & 2w_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -R_z \end{pmatrix} = \\ &= (2u_r - (w_r + u_z)R_z - ((w_r + u_z) - 2w_z R_z)R_z), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \boldsymbol{\tau}^z \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{n} &= (R_z, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2u_r & v_r - \frac{v}{r} & w_r + u_z \\ v_r - \frac{v}{r} & \frac{2u}{r} & v_z \\ w_r + u_z & v_z & 2w_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -R_z \end{pmatrix} = \\ &= ((2u_r - (w_r + u_z)R_z)R_z + (w_r + u_z) - 2w_z R_z), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \gamma \boldsymbol{\tau}^\theta \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{n} &= (0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 2u_r & v_r - \frac{v}{r} & w_r + u_z \\ v_r - \frac{v}{r} & \frac{2u}{r} & v_z \\ w_r + v_z & w_z & 2w_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -R_z \end{pmatrix} = \\ &= \left(v_r - \frac{v}{r} - v_z R_z \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Принимая во внимание замены (см. (2.12))

$$r \rightarrow \varepsilon r, \quad u \rightarrow \varepsilon u, \quad R \rightarrow \varepsilon R, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\text{A.9})$$

имеем

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{n}}{\mu} = (2u_r - 2w_r R_z) + \quad (\text{A.10})$$

$$+ (-u_z R_z - (u_z - 2w_z R_z) R_z + (-2u_r + 2w_r R_z) R_z^2) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$

$$\frac{\boldsymbol{\tau}^z \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{n}}{\mu} = \frac{1}{\varepsilon} w_r + ((2u_r - w_r R_z) R_z + u_z - 2w_z R_z - w_r R_z^2) \varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\boldsymbol{\tau}^\theta \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{n}}{\mu} = \frac{1}{\varepsilon} \left(v_r - \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(-v_z R_z - \left(v_r - \frac{v}{r} \right) R_z^2 \right) \varepsilon + O(\varepsilon^3). \quad (\text{A.12})$$

Окончательно, с учетом (A.10)–(A.12), динамические условия (A.2) на границе записываются в форме

$$-(p - P) + \mu(2u_r - 2w_r R_z) + O(\mu \varepsilon^2) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\mu}{\varepsilon} w_r + \mu \varepsilon ((2u_r - w_r R_z) R_z + u_z - 2w_z R_z - w_r R_z^2) + O(\mu \varepsilon^3) = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \left(v_r - \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2} \mu \varepsilon \left(-v_z R_z - \left(v_r - \frac{v}{r} \right) R_z^2 \right) + O(\mu \varepsilon^3) = 0. \quad (\text{A.15})$$

В Построение функции тока

Для определения функции тока ψ имеем задачу (2.26)

$$r \left(\frac{1}{r} \psi_r \right)_r + \varepsilon^2 \psi_{zz} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\psi|_{r=0} = 0, \quad (\text{B.2})$$

решение которой ищем в виде формального ряда

$$\psi(r, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \psi^k(r, z, t), \quad (\text{B.3})$$

где $\psi^k(r, z, t)$ — некоторые коэффициенты. Подставляя (B.3) в (B.1) и, принимая во внимание (B.2), например, имеем

$$\psi^0 = \frac{1}{2} r^2 c_0(z, t), \quad (\text{B.4})$$

$$\psi^1 = -\frac{1}{4^2} r^4 \partial_z^2 c_0(z, t) + \frac{1}{2} r^2 c_1(z, t),$$

$$\psi^2 = \frac{1}{4^4 3} r^6 \partial_z^4 c_0(z, t) - \frac{1}{4^2} r^4 \partial_z^2 c_1(z, t) + \frac{1}{2} r^2 c_2(z, t).$$

Здесь $c_m(x, t)$ — некоторые произвольные функции.

Продолжая, получим

$$\psi^k(r, z, t) = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2(2n+2)} \partial_z^{2n} c_{k-n}(z, t), \quad (\text{B.5})$$

где

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = \prod_{i=1}^n 2i = 2^n n!. \quad (\text{B.6})$$

С учетом (B.3), (B.5) выводим

$$\psi(r, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2(2n+2)} \partial_z^{2n} c_{k-n}(z, t), \quad (\text{B.7})$$

или, изменяя порядок суммирования $(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty})$,

$$\psi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2(2n+2)} \partial_z^{2n} \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon^{2(k-n)} c_{k-n}(z, t). \quad (\text{B.8})$$

Окончательно, изменив индекс суммирования $k - n = m$, получим

$$\begin{aligned} \psi(r, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2(2n+2)} \partial_z^{2n} F(z, t) = \\ &= \frac{1}{2} r^2 F(z, t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$F(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} c_m(z, t). \quad (\text{B.10})$$

Заметим, что формула (B.10) не является определением функции $F(z, t)$, а просто указывает на связь этой функции с коэффициентами $c_m(z, t)$. Иными словами, $F(z, t)$ — некоторая произвольная функция, естественно, присутствующая в решении (B.10) недоопределенной (не хватает краевого условия) задачи (B.1), (B.2).

Связь компонент скорости с функцией тока имеет вид (2.25)

$$ru = -\psi_z, \quad rw = \psi_r. \quad (\text{B.11})$$

Радиальная и осевая скорости вычисляются при помощи (B.11), (B.9)

$$u(r, z, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{((2n)!!)^2 (2n+2)} \partial_z^{2n+1} F(z, t) = \quad (\text{B.12})$$

$$= -\frac{1}{2} r F_z(z, t) + \varepsilon^2 \frac{1}{16} r^3 F_{zzz}(z, t) + O(\varepsilon^4),$$

$$w(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n}}{((2n)!!)^2} \partial_z^{2n} F(z, t) = \quad (\text{B.13})$$

$$= F(z, t) - \varepsilon^2 \frac{1}{4} r^2 F_{zz}(z, t) + O(\varepsilon^4).$$

Используя (B.11), (B.12), вычислим правые части уравнений (2.14), (2.16), точнее, члены уравнений, связанные с учетом вязкости жидкости,

$$\mu \left(\frac{1}{\varepsilon r} (ru_r)_r - \frac{u}{\varepsilon r^2} + \varepsilon u_{zz} \right) = \quad (\text{B.14})$$

$$= -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n-1} (-1)^n \frac{r^{2n-1} ((2n+1)^2 - 1)}{((2n)!!)^2 (2n+2)} \partial_z^{2n+1} F(z, t) -$$

$$- \mu \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{((2n)!!)^2 (2n+2)} \partial_z^{2n+3} F(z, t) = 0,$$

$$\mu \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} (rw_r)_r + w_{zz} \right) = \quad (\text{B.15})$$

$$= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n-2} (-1)^n \frac{r^{2n-2} (2n)^2}{((2n)!!)^2} \partial_z^{2n} F(z, t) +$$

$$+ \mu \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n}}{((2n)!!)^2} \partial_z^{2n+2} F(z, t) = 0.$$

Полученные результаты, в частности, означают, что если считать выполненными соотношения (2.24) и условия (2.23), то решение (2.27) (или (B.9)) задачи (2.26) (или (B.1), (B.2)) влечет исчезновение членов, связанных с вязкостью в уравнениях (2.13)–(2.16), и позволяет записывать такие уравнения в форме

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad (\text{B.16})$$

$$\varepsilon \frac{du}{dt} - \frac{v^2}{\varepsilon r} = -\frac{1}{\varepsilon} p_r, \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} = \mu \left(\frac{1}{\varepsilon^2 r} (rv_r)_r - \frac{v}{\varepsilon^2 r^2} + v_{zz} \right), \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{dw}{dt} = -p_z. \quad (\text{B.19})$$

С Уравнения на основе метода осреднения

Система уравнений, имеющая формальное сходство с (2.62), (2.63) или (2.64)–(2.66) (при $\mu = 0$, $\omega_0 = 0$), достаточно часто используется для описания течения крови в артериях (см., например, [87, 91, 98, 100, 108–110, 121]). В указанных работах уравнения строятся на основе метода осреднения, хотя точно такие же уравнения, построенные на основе феноменологических соображений, имеются в [48, с. 72, 73].

Взамен уравнения (2.63) (или (2.65)) в [87, 91, 98, 100, 108–110, 121] предлагается использовать уравнение с поправочным коэффициентом α

$$(S\widetilde{W})_t + \left(\frac{1}{2} \alpha S \widetilde{W}^2 \right)_z + S P_z(S) = 0,$$

где $\widetilde{W}(z, t)$ — среднее значение скорости.

При замыкании уравнений метода осреднения в указанных работах вводится поправочный коэффициент α

$$\alpha(z, t) = \frac{2}{R^2(z, t) \widetilde{W}^2(z, t)} \int_0^{R(z, t)} r w^2(r, z, t) dr,$$

$$\widetilde{W}(z, t) = \frac{2}{R^2(z, t)} \int_0^{R(z, t)} r w(r, z, t) dr,$$

который, строго говоря, необоснованно считается постоянным ($\alpha = \text{const}$). Численные исследования проводятся для $\alpha > 1$, хотя при аналитических исследованиях почти всегда полагается $\alpha = 1$.

Вычисление коэффициента α с использованием формулы (2.29) для осевой компоненты скорости $w(r, z, t)$ приводит к соотношениям

$$\widetilde{W} = F - \frac{\varepsilon^2 R^2 F_{zz}}{8} + O(\varepsilon^4), \quad \alpha = 1 + \frac{\varepsilon^4 R^2 F_{zz}}{192 F^2} + O(\varepsilon^6).$$

Такой результат, с учетом того, что уравнение (2.29) является главным членом асимптотики (то есть $\varepsilon = 0$), означает, что $\alpha \equiv 1$, по крайней мере, при выполнении условия (2.11).

Одним из недостатков осредненных уравнений является тот факт, что по средним значениям $\widetilde{W}(z, t)$ восстановить поле скорости $w(r, z, t)$ невозможно, тогда как по значению $W(z, t) \approx F(z, t)$, в принципе, при помощи соотношений (2.28), (2.29) компоненты поля внутри области $w(r, z, t)$ и $u(r, z, t)$ определяются. Это, в частности, позволяет, естественно после определения функции $F(z, t)$, исследовать структуру течения внутри области, решая уравнения $r_t = u(r, z, t)$, $z_t = w(r, z, t)$ или строя изолинии функции $\psi(r, z, t)$ при помощи соотношения (2.27) для функции тока.

Для полноты изложения и, в частности, объяснения появления в уравнениях «параметра» α , воспроизведем схему построения осредненных уравнений для уравнений идеальной жидкости (в [91, 99] осреднение проводится для уравнений вязкой жидкости, но в данном случае это не принципиально)

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$w_t + uw_r + ww_z = -p_z, \quad p_r = 0, \quad (\text{C.2})$$

$$R_t + wR_z = u, \quad r = R(z, t). \quad (\text{C.3})$$

Используем операцию осреднения

$$W(z, t) = \frac{2}{R^2(z, t)} \int_0^{R(z, t)} rw(r, z, t) dr, \quad (\text{C.4})$$

где $R^2/2$ — площадь полукруга с точностью до множителя π .

Введем некоторый «поправочный» коэффициент (точнее, функцию)

$$\alpha(z, t) = \frac{2}{R^2(z, t)W^2(z, t)} \int_0^{R(z, t)} rw^2(r, z, t) dr. \quad (\text{C.5})$$

В [91, 99] считается, что $\alpha = \text{const}$ — фактически, диктуется связь между средней скоростью и средним квадратом скорости. Возможно, такая эвристическая гипотеза хорошо работает в случае областей с прямолинейными твердыми границами, но ее использование для областей с податливой границей выглядит плохо обоснованным.

Уравнение (C.2) с учетом (C.1) записывается в консервативной форме

$$(rw)_t + (ruw)_r + (rw^2)_z = -(rp)_z.$$

Интегрируя, получим

$$\int_0^R (rw)_t dr + \int_0^R (ruw)_r dr + \int_0^R (rw^2)_z dr + \int_0^R (rp)_z dr = 0. \quad (\text{C.6})$$

Легко показать, что

$$\int_0^R (rw)_t dr = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R (rw) dr - Rw(R, z, t)R_t, \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^R (rw^2)_z dr = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R (rw^2) dr - Rw^2(R, z, t)R_z. \quad (\text{C.8})$$

Тогда (C.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R (rw) dr - Rw(R, z, t)R_t + (ruw)\Big|_0^R + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R (rw^2) dr - \\ - Rw^2(R, z, t)R_z + \int_0^R (rp)_z dr = 0. \end{aligned}$$

С учетом (C.3), (C.4), (C.5) имеем

$$\frac{1}{2}(R^2W)_t + \frac{1}{2}(\alpha R^2W^2)_z + \int_0^R (rp)_z dr = 0. \quad (\text{C.9})$$

Интегрируя уравнение неразрывности (C.1), выводим

$$Ru(R, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R (rw) dr - Rw(R, z, t)R_z = 0,$$

или, с учетом (C.3), (C.4),

$$RR_t + \frac{1}{2}(R^2W)_z = 0. \quad (\text{C.10})$$

Кроме этого, с учетом $p_r = 0$ (см. (C.2))

$$\int_0^R (rp)_z dr = p_z(z, t) \int_0^R r dr = \frac{R^2}{2}p_z. \quad (\text{C.11})$$

Окончательно, уравнения (C.9), (C.10) принимают вид

$$S_t + (SW)_z = 0, \quad (SW)_t + (\alpha SW^2)_z + Sp_z = 0, \quad S = R^2. \quad (\text{C.12})$$

В такой форме, с дополнительным требованием $p = p(S)$, $\alpha = \text{const}$, уравнения применяются для описания течения крови в [87, 91, 98–100, 108–110, 121]. Используя неравенство Шварца, легко показать, что $\alpha \geq 1$.

D Безразмерные параметры

Все соотношения в диссертационной работе приведены в безразмерных переменных. Переход от размерных переменных к безразмерным осуществляем по схеме (чертой отмечены размерные величины)

$$\bar{z} = R_* z, \quad \bar{R} = R_* R, \quad \bar{t} = T_* t, \quad \bar{P} = P_* P, \quad \bar{W} = \frac{R_*}{T_*} W, \dots, \quad (\text{D.1})$$

где R_* — характерная длина в направлении r (средний радиус области), T_* — характерное время, P_* — характерное давление, (приведена только часть необходимых соотношений, остальные записываются аналогично).

Операция перехода достаточно тривиальна и некоторые пояснения в случае глав 2, 4 при проведении сравнения с реальными размерными параметрами требуются лишь для уравнения (3.2), включающего конститутивное соотношение (2.67). В размерных переменных уравнение (2.67) и условия (3.4) записываются в форме

$$\rho_*(\bar{W}_{\bar{t}} + \bar{W} \bar{W}_{\bar{z}}) + \bar{P}_{\bar{z}}(\bar{S}) = 0, \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{S}(z, t)|_{\Gamma} = \bar{S}^{(0)}(\tau), \quad \bar{W}(z, t)|_{\Gamma} = \bar{W}^{(0)}(\tau),$$

где ρ_* — плотность жидкости.

Разумное сравнение возможно лишь для случая, когда определена характерная величина внешнего давления P_* . Например, в случае упругой стенки имеется формула (см. Замечание 2.2 на с. 38)

$$\bar{P}(\bar{S}) = P_* \frac{\bar{R}}{R_*}, \quad P_* = \frac{h_* E_*}{(1 - \nu^2) R_*}, \quad \bar{S} = (\bar{R})^2, \quad (\text{D.3})$$

где E_* — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h_* — толщина стенки сосуда радиуса R_* , $R'(z', t')$ — радиус границы цилиндра (несущественные константы опущены ввиду того, что в уравнении (D.2) участвует только производная $P'_{z'}$). Формула (D.3) соответствует $\beta = 1/4$ в (2.67).

С учетом (D.1), уравнение (D.2) принимает вид (3.2) (при $\beta = 1/4$)

$$W_t + W W_z + P_z(S) = 0, \quad P(S) = 2\delta^2 S^{1/2}, \quad (\text{D.4})$$

$$S(z, t)|_{\Gamma} = S^{(0)}(\tau), \quad W(z, t)|_{\Gamma} = W^{(0)}(\tau),$$

$$2\delta^2 = \frac{h_* E_* T_*^2}{(1 - \nu^2) R_*^3 \rho_*}. \quad (\text{D.5})$$

Полагая $\delta = 1$ (как это сделано в главах 2, 4, см. (2.68), (3.3)), получаем соотношение для определения характерного времени процесса

$$T_* = \left(\frac{2(1 - \nu^2) R_*^3 \rho_*}{h_* E_*} \right)^{1/2}. \quad (\text{D.6})$$

Например, для данных [48, с. 19], [36, с. 116]

$$\bar{R} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad h_* = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad (\text{D.7})$$

$$E_* = 10^5 \text{ Н/м}^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 0.5.$$

В частности, для условий в главе 4, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, вычисляя, получим $\bar{R}/\sqrt{S_0} = R_* \approx 9.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $T_* \approx 5.6 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, $W_* = R_*/T_* \approx 1.68 \text{ м/с}$ и скорость течения $\bar{W} = W_0 W_* \approx 1.68 \text{ м/с}$. Для отрезка $[0, 20\pi]$ (см., например, рис. 12.8), $\bar{L} = 20\pi R_* \approx 0.6 \text{ м}$ и отношение размеров в радиальном и осевом направлениях $\varepsilon = \bar{R}/\bar{L} \approx 0.01$. Иными словами, результаты, указанные на рис. 12.8, соответствуют короткому интервалу времени $\approx 0.25 \text{ с}$, за который в сосуде «успевает» установиться некоторая структура течения.

В общем случае, с не очень ясной трактовкой, ввиду отсутствия выражения для P_* , формальный переход осуществляется при помощи соотношений

$$P(S) = \frac{\delta^2}{2\beta} S^{2\beta} = \frac{1}{2\beta} S_{new}^{2\beta}, \quad S = \delta^{(-1/\beta)} S_{new}. \quad (\text{D.8})$$

Для главы 3 достаточно указать лишь связь размерного градиента давления p'_z с безразмерным p_z

$$p'_z = p_z \frac{L_* w_* \mu_* \rho_*}{R_*}, \quad (\text{D.9})$$

где ρ_* — плотность жидкости, μ_* — характерная кинематическая вязкость, w_* — характерная осевая скорость, L_* , R_* — характерные размеры в осевом и радиальном направлениях.

Список иллюстраций

2.1	Схема области	27
5.1	Варианты контуров для начальной и краевой задач	50
5.2	Варианты контуров для начально-краевой задачи	52
5.3	Возможные схемы эволюции решения	53
7.1	Функции $R^1(z_*, t)$, $R^2(z_*, t)$, $S(z_*, t)$, $W(z_*, t)$	68
7.2	Поведение разрывов	71
8.1	Схема области	77
10.1	Схема области. Частные случаи	85
11.1	Поле скоростей. Фрагмент области с вихрями	91
11.2	Профили радиальной и осевой скорости	92
11.3	Структура вихрей	93
11.4	Течение в гофрированном сосуде	93
11.5	Область $\mathbb{D}$	95
11.6	Изолинии	96
11.7	Вихри в кавернах	96
12.1	Результаты расчетов. Ударные волны	101
12.2	Влияние выбора шага Δz_i на структуру решения	103
12.3	Решение в некоторые моменты времени. Ударные волны	104
12.4	Результаты расчетов. Волновые фронты	105
12.5	Решение в некоторые моменты времени. Волновые фронты	105
12.6	Расчеты при $\beta = 1/4$	106
12.7	Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1$	110
12.8	Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1$	111
12.9	Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1/4$	113
12.10	Зависимость решения от времени	115
13.1	Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1/4$	116
13.2	Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1/4$	117
13.3	Начальная задача. Расчеты при $\beta = 1/4$	117