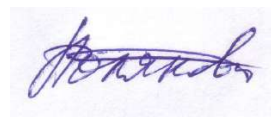


Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
Южный федеральный университет

На правах рукописи



ПОЛЯКОВА НАТАЛЬЯ МИХАЙЛОВНА
**ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ С ПОДАТЛИВЫМИ
И НЕРОВНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

1.1.9 — механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону
2023

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Моргулис Андрей Борисович

Официальные оппоненты: **Любимова Татьяна Петровна**
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующая лабораторией
вычислительной гидродинамики
Институт механики сплошных сред
Уральского отделения Российской
академии наук.

Калайдин Евгений Николаевич
доктор физико-математических наук,
профессор
кафедра прикладной математики
ФГБОУ высшего образования
Кубанский государственный университет.

Защита состоится «14» сентября 2023 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.09 на базе Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке им. Ю. А. Жданова Южного федерального университета по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 21 Ж и на сайте <https://hub.sfedu.ru/diss/show/1312811/>.

Автореферат разослан «____» _____ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Говорухин
Василий Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследованию течений вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических областях (трубах, каналах) посвящено достаточно большое количество работ, а также имеется обширный экспериментальный материал, позволяющий оценивать адекватность используемых подходов. Результаты изучения задач о течениях жидкости интенсивно используются во многих физических и технических приложениях. Несмотря на большое внимание к указанным задачам и значительный прогресс в развитии численных методов даже в случаях достаточно простых вращательно-симметричных течений в цилиндрических областях, проблема построения асимптотики и исследования моделей течений все еще далека от полного завершения, ввиду сложности базовых уравнений Навье–Стокса, используемых для описания течений. Более того, имеется много неясностей и с постановками задач, в частности, выбором краевых условий, выбором турбулентной кинематической вязкости (в случае интенсивных течений жидкости) и т.п. В связи с этим, существенную роль играют асимптотические уравнения, во многих случаях значительно более простые по сравнению с исходной задачей, но сохраняющие все ее наиболее важные свойства, позволяющие построить аналитические и численные решения, исследовать структуру течений, а также оценить правильность использования тех или иных гипотез, в частности, относительно краевых условий и вязкости, выявить роль влияния тех или иных параметров задачи на поведение решений. При этом значение имеют такие асимптотические задачи, для которых удается построить либо точное решение, либо такие, которые интегрируются численно-аналитическими методами.

Все вышесказанное позволяет сделать вывод о том, что построение и исследование главных членов асимптотических разложений уравнений для вращательно-симметричных течений в цилиндрических областях, построение точных решений, разработка методов решения (аналитических, асимптотических, численных) таких задач является актуальным для понимания и интерпретации многих важных физических процессов.

Цель и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является построение главных членов асимптотических разложений задач и их исследование с использованием аналитических, численных и асимптотических методов для решения некоторых задач о вращательно-симметричных течениях в цилиндрических областях —

задачи о течении с умеренной скоростью в случае податливой границы, задачи о квазистационарном турбулентном течении в случае иррегулярной границы для жидкости с вязкостью, зависящей от координат. Детальное исследование задач приводит к необходимости развития численно-аналитического метода построения неявного и явного решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа, вычислительных методов, методов для построения разрывных решений типа ударных волн и решений со слабыми разрывами.

В связи с поставленной целью необходимо решить следующие задачи:

- Построение (на основе теории мелкой воды) и исследование главных членов асимптотических разложений задачи для описания вращательно-симметричного течения в цилиндрической области с податливыми границами.
- Построение и исследование главных членов асимптотических разложений исходной задачи для описания турбулентного квазистационарного вращательно-симметричного течения в цилиндрической области с иррегулярными границами в случае кинематической вязкости, зависящей от координат.
- Построение решения начальной, краевой и начально-краевой задач для асимптотических уравнений, описывающих течения в области с податливыми стенками.
- Модификация аналитически-численного метода решения задачи Коши для квазилинейных уравнений в производных первого порядка, позволяющего строить и исследовать решение на линиях уровня постоянного времени или постоянной координаты.
- Развитие метода построения разрывного решения (ударной волны), возникающего в процессе опрокидывания профиля непрерывного решения, в случае начально-краевой задачи для уравнения Хопфа.

Методы исследования. Для построения главных членов асимптотических разложений задач о вращательно-симметричных течениях в цилиндрических областях с податливыми границами используются асимптотические методы, позволяющие получать на основе базовых уравнений Навье–Стокса, с использованием лагранжева подхода теории мелкой воды, приближения, учитывающие вязкость и вращение жидкости, а также бездиссипативные приближения. В случае исследования задач с иррегулярными границами используются обычные асимптотические методы, позволяющие построить линейные уравнения, и в случае

соответственно выбранной турбулентной кинематической вязкости жидкости, зависящей от координат, построить точные решения.

Для исследования уравнений, определяющих главные члены асимптотики, использованы методы теории квазилинейных гиперболических уравнений, вариант метода годографа на основе законов сохранения и аналитически-численные методы редукции уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, методы математической физики, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (для изучения структуры течения), численные методы (в частности, метод конечных объемов и метод конечных элементов).

Для проведения вычислительного эксперимента используются пакет Maple, а также реализованные на языках FreeFem++, Pascal, Python программы для численного интегрирования рассматриваемых задач.

Научная новизна. Построена новая задача (на основе теории мелкой воды) для определения главных членов асимптотического разложения в предположении о частично безвихревом течении, описывающая вращательно-симметричное течение жидкости в цилиндрической области с податливыми границами. Рассмотрены различные варианты задачи. Для выбранного конститутивного соотношения, соответствующего податливой статически равновесной упругой границе, позволяющего замкнуть асимптотические уравнения, в бездиссипативном приближении проведено детальное построение непрерывного решения, ударных волн и волновых фронтов. Указаны и проанализированы свойства асимптотического разложения, в частности, для различных параметров течений.

Построена задача для определения главных членов асимптотического разложения квазистационарного турбулентного течения в цилиндрической области с иррегулярной границей, на некоторых участках которой условие прилипания заменено кинематическим условием. Построено точное решение (линейной) задачи. Показано, что для некоторого заданного класса турбулентных кинематических вязкостей жидкости, зависящих от координат, в окрестности областей границы с отрицательной кривизной возникает вихревая структура течения. Приведен подробный анализ структуры течения и указано влияние параметров задачи на различные свойства течений.

Модифицирован аналитически-численный метод построения решения системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, использующий метод годографа на основе закона сохранения. Модификация метода позволяет при решении задачи с на-

чальными данными (в начальный момент времени) строить явные решения не только на линиях уровня постоянного времени, но и для линий уровня постоянной координаты, не производя существенных изменений, в частности, не строя новую функцию Римана–Грина.

Модифицирован метод построения разрывного решения (ударной волны), возникающего в процессе эволюции при опрокидывании профиля решения начально-краевой задачи для уравнения Хопфа.

На защиту выносятся следующие результаты и положения.

1. Построение (на основе теории мелкой воды) главных членов асимптотических разложений задачи о вращательно-симметричном течении в цилиндрической области с податливыми границами.
2. Результаты аналитического и численного исследования бездиссипативного варианта уравнений для начальной, краевой и начально-краевой задач в случае податливых стенок области.
3. Построение главных членов асимптотических разложений задачи о квазистационарном вращательно-симметричном течении в цилиндрической области с иррегулярными границами в случае вязкости, зависящей от координат.
4. Результаты аналитического и численного исследования структуры турбулентного квазистационарного течения. Доказательство образования вихрей в окрестности участков границы, имеющих отрицательную кривизну, для некоторого класса вязкостей, зависящих от координат.
5. Результаты построения разрывного решения, возникающего в процессе опрокидывания профиля непрерывного решения, в случае начально-краевой задачи для уравнения Хопфа.
6. Модификация аналитически-численного метода решения задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, позволяющего строить и исследовать решение на линиях уровня постоянного времени и постоянной координаты.
7. Результаты вычислительных экспериментов для задач, представленных в диссертационной работе.

Теоретическая и практическая значимость работы. Исследование посвящено асимптотическому описанию вращательно-симметричных течений в цилиндрических областях с податливыми границами (в случае умеренных скоростей) и иррегулярными границами (в случае

квазистационарных течений жидкости с вязкостью, зависящей от координат). Полученные результаты могут быть использованы для исследования различных процессов, важных для развития технологий в биологии, химии, медицине, в частности, гемодинамике. Работа имеет теоретическую направленность и востребована для исследования задач в области линейной и нелинейной гидродинамики. Развита аналитическая, асимптотическая и численная методы построения и исследования задач о течениях жидкости, решений квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, построения решений типа ударных волн и волновых фронтов. Применяемые подходы могут быть использованы (и используются) при разработке специальных курсов для студентов, магистров и аспирантов физико-математических специальностей.

Достоверность. Корректная постановка задачи, применение обоснованных и надежных методов исследования и решения приведенных задач обуславливают достоверность полученных результатов, которые нашли применение в научно-исследовательских разработках кафедры вычислительной математики и математической физики института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ в рамках выполнения проектов № 14.А18.21.0873 «Математическая гидродинамика в областях со сложной границей» (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 2009–2013 гг.), № 8832 «Моделирование процессов образования структур применительно к задачам о течениях жидкости и математической биологии» (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 2009–2013 гг.), № 1.5139.2011 «Фундаментальные проблемы вихревой и волновой динамики» в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (2011–2013 гг.), № 213.01-24/2013-69 «Развитие аналитических, асимптотических и численных методов математической гидродинамики» (Грант Южного федерального университета, 2014 г.), № 2014/174 Базовая часть государственного задания в сфере научной деятельности Министерства образования и науки РФ «Проблемы математической гидродинамики: пространственно-временные структуры и неустойчивости течений в простых и сложных жидких сплошных средах» (2015–2016 гг.), 1.5169.2017/8.9. Базовая часть государственного задания Министерства образования и науки РФ «Фундаментальные и прикладные задачи математического моделирования» (2017–2019 гг.).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: Международная кон-

ференция «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону (2011, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020); «International Conference on Numerical modeling of the coastal, shelf and estuarine processes», Ростов-на-Дону (2015); Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», Ростов-на-Дону (2017, 2018, 2019); Международная конференция 2020 International Conference on «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» (PHENMA 2020), Kitakyushu, Japan (2021); XXX Научная конференция «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития», Ростов-на-Дону (2023); XVII Всероссийская школа «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», Дивноморское (2023); семинары кафедры вычислительной математики и математической физики института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ (2011–2023).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты опубликованы в 28 работах: [1–28], из них одна работа [1] опубликована в журнале, индексируемом в базах Scopus и Web of Science, и пять работ [2–6] опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий ЮФУ и Перечень ВАК. Н.М. Полякова — соавтор двух монографий [7, 8], в которых автору принадлежат некоторые главы. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, четыре главы, заключение, список литературы и приложения. Общий объем диссертации 150 страниц, включая 28 рисунков и 4 приложения. Список литературы содержит 148 наименований.

Содержание работы

Во Введении приведен краткий обзор диссертации, обоснована актуальность темы, изложены цели и методы исследования.

Глава 1 содержит краткий обзор задач, методов решения и исследования для проблем, рассмотренных в диссертационной работе. В §1.1 приведен обзор литературных источников, посвященных проблеме построения асимптотики и исследования вращательно-симметричных течений вязкой несжимаемой жидкости в бесконечных цилиндрических областях с податливой (мягкой, compliant) боковой границей, а обзор

источников о квазистационарных турбулентных течениях в бесконечных цилиндрических областях с иррегулярной границей, в частности, для жидкостей с переменной вязкостью, дан в §1.2. Часть обзора §1.1 содержит литературные источники, связанные с проблемами гемодинамики, в которых рассматриваются задачи о течениях крови. Обзор методов построения решения для соответствующих задач дан в §1.3.

Глава 2 посвящена построению и исследованию, включая вычислительный эксперимент, главных членов асимптотических уравнений задачи, описывающей вращательно симметричные течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечных цилиндрических областях с податливой (мягкой, compliant) боковой границей. Различные варианты асимптотической задачи, предназначенной для исследования сравнительно медленных жидкостей, получены при помощи теории мелкой воды в §2. Задача, для которой строится асимптотика, указана в §2.1, где рассматриваем вращательно симметричное течение в бесконечной цилиндрической области (рис. 1) со свободной границей $r = R(z, t)$ (боковая поверхность).

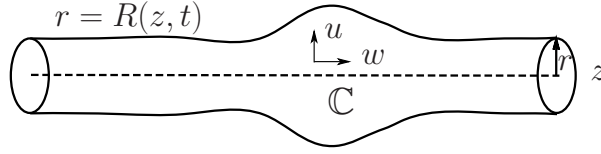


Рис. 1. Схема области $\mathbb{C} = \{(r, z) : 0 \leq r \leq R(z, t), -\infty < z < +\infty\}$, $r = R(z, t)$ — уравнение свободной поверхности, $\mathbf{v} = (u, 0, w)$ — скорость течения

Для уравнений Навье–Стокса (вращательно-симметричных)

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad \frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} = -p_r + \mu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right), \quad \frac{dw}{dt} = -p_z + \mu \Delta w, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} = \mu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right), \quad \frac{d}{dt} = ()_t + u()_r + w()_z, \quad (2)$$

на свободной поверхности $r = R(z, t)$ задаем кинематическое и динамические условия

$$R_t + wR_z = u, \quad -(p - P)\mathbf{n} + \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad r = R(z, t), \quad (3)$$

а также условия на оси цилиндра $u = 0, v = 0, w_r = 0$ при $r = 0$.

Здесь u — радиальная, v — азимутальная, w — осевая компоненты скорости течения $\mathbf{v} = (u, v, w)$, p — давление, μ — кинематическая вязкость,

$\mathbb{T}$ — тензор вязких напряжений, p — давление, P — давление окружающей среды.

При построении главных членов асимптотических разложений ограничиваем рассмотрение случаем, когда азимутальная компонента вихря скорости $\boldsymbol{\omega}$ равна нулю

$$\text{rot}_\theta \mathbf{v} = u_z - w_r = 0. \quad (4)$$

Построение главных членов асимптотических разложений содержится в §2.2 (§2.2.1–§2.2.2). Выбран малый параметр ε (относительный размер области $\mathbb{C}$), произведена замена переменных $r \rightarrow \varepsilon r$, $R \rightarrow \varepsilon R$, $u \rightarrow \varepsilon u$, $\varepsilon \rightarrow 0$, и выбор порядков малости переменных и параметров $u = O(1)$, $w = O(1)$, $v = O(1)$, $\mu = O(1)$ (сравнительно вязкая жидкость), введена функция тока ψ : $ru = -\psi_z$, $rw = \psi_r$, для которой с учетом (4) получена недоопределенная задача

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \psi|_{r=0} = 0. \quad (5)$$

Решение задачи (5), возможное лишь с точностью до некоторой произвольной функции $F(z, t)$, построено в виде формального ряда по степеням ε^2 (лагранжев подход теории мелкой воды)

$$\psi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{r^{2n+2}}{((2n)!!)^2 (2n+2)} \partial_z^{2n} F(z, t). \quad (6)$$

В §2.2.3 приведены соотношения для функций $u = -\psi_z/r$, $w = \psi_r/r$ (вычисленных при помощи (6)), уравнений (1), (2) и условий (3), рассматриваемых на границе области $r = R(z, t)$. В частности, определены материальная производная на границе $D/Dt \equiv D_t + W(z, t)D_z$, где D_t , D_z — операторы полного дифференцирования, и функции u , w , ψ на границе $W(z, t) = w(R(z, t), z, t)$, $U(z, t) = u(R(z, t), z, t)$, $\Psi(z, t) = \psi(R(z, t), z, t)$. Задача для определения главных членов асимптотики приведена в §2.2.4 и состоит из уравнений (1) для функций на границе (и решения уравнения (2) для азимутальной компоненты скорости — вращение с угловой скоростью ω_0)

$$\varepsilon^2 \frac{DU}{Dt} - \frac{v^2}{r} \Big|_{r=R} = -p_r|_{r=R}, \quad \frac{DW}{Dt} = -p_z|_{r=R}, \quad v|_{r=R} = \omega_0 R, \quad (7)$$

а также кинематического и динамического условий на границе (3)

$$R_t + W R_z = U, \quad -(p|_{r=R(z,t)} - P) - \mu F_z + O(\mu \varepsilon^2) = 0. \quad (8)$$

Формально, как и ряд (6), уравнения (8) являются точными и приведены с членом $O(\mu\varepsilon^2)$ для сокращения записи. Исключение из (8) при помощи (7) величин p_r, p_z влечет уравнение

$$\left(\varepsilon^2 \frac{DU}{Dt} - \omega_0^2 R\right) R_z + \frac{DW}{Dt} + P_z - \mu F_{zz} + O(\mu\varepsilon^2) = 0, \quad (9)$$

а ограничение членами порядка $O(\varepsilon^2)$ с учетом $W(z, t) = F(z, t) + O(\varepsilon^2)$, $U(z, t) = -\frac{1}{2}R(z, t)F_z(z, t) + O(\varepsilon^2)$, то есть совпадению W и F с точностью до $O(\varepsilon^2)$, приводит при $\varepsilon \rightarrow 0$ к уравнениям для главных членов асимптотического разложения

$$S_t + WS_z + SW_z = 0, \quad S = R^2, \quad (10)$$

$$W_t + WW_z = -P_z + \mu W_{zz} + \frac{1}{2}\omega_0^2 S_z, \quad (11)$$

где S — площадь сечения области $\mathbb{C}$ (с точностью до множителя π).

Показано, что учет вязких членов в уравнениях (9)–(11) осуществляется только за счет динамического условия на свободной границе — слагаемые в уравнениях (1), (2), связанные с вязкостью μ при выполнении (6) исчезают.

Система уравнений (10), (11) не является замкнутой, так как давление окружающей среды P не определено. Замыкающее уравнение (конститутивное соотношение, уравнение состояния), задающее связь P с S, W (и возможно z, t) обсуждается в §2.2.5 и выбрано в форме

$$P(S) = \frac{S^{2\beta}}{2\beta} + \text{const}, \quad \beta > 0, \quad (12)$$

где δ, β — некоторые константы.

Соотношение (12) является полуэмпирическим. Распространенным является выбор $\beta = 1/4$ (в частности, в гемодинамике). В случае $\beta = 1/2$ совпадают с уравнениями классической мелкой воды. С математической точки зрения, особый интерес представляет вариант $\beta = 1$ — уравнения (10), (11) преобразуются к двум независимым уравнениям Хопфа. В §2.2.6 проанализирована связь уравнений (10), (11) с уравнениями, полученными на основе метода осреднения (такие уравнения, в частности, используются в некоторых задачах гемодинамики).

Основное внимание в диссертационной работе фокусируется на системе (10), (11), описывающей течение жидкости при отсутствии вязкости ($\mu = 0$) и азимутальной скорости вращения ($\omega_0 = 0$), когда (10),

(11) — система квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрены случаи соотношения (12) при $\beta = 1$ и $\beta = 1/4$.

В §3 дана постановка задачи, в §3.1 уравнения (10), (11) дополнены условиями

$$S(z, t)|_{\Gamma} = S^{(0)}(\tau), \quad W(z, t)|_{\Gamma} = W^{(0)}(\tau), \quad (13)$$

где $\Gamma = \{(z, t): z = z(\tau), t = t(\tau)\}$ — кусочно-гладкая ориентированная линия, $S^{(0)}(\tau)$, $W^{(0)}(\tau)$ — заданные на Γ функции.

Исследование ограничиваем рассмотрением трех типов контура Γ .

$$(i): \quad \Gamma = \{-\infty < z < +\infty, t = 0\}, \text{ начальная задача,} \quad (14)$$

$$(ii): \quad \Gamma = \{t \geq 0, z = 0\}, \text{ краевая задача,} \quad (15)$$

$$(iii): \quad \Gamma = \{z \geq 0, t = 0\} \cup \{t \geq 0, z = 0\}, \text{ начально-краевая задача.} \quad (16)$$

В §3.2 постановка задачи переформулирована для инвариантов Римана $R^1(z, t)$, $R^2(z, t)$, к которым приводятся уравнения (10), (11)

$$R_t^1 + \lambda^1 R_z^1 = 0, \quad R_t^2 + \lambda^2 R_z^2 = 0, \quad (17)$$

где $\lambda^1(R^1, R^2)$, $\lambda^2(R^1, R^2)$ — характеристические направления.

Уравнения (17) дополнены условиями, аналогичными (13)

$$R^1(z, t)|_{\Gamma} = R_0^1(\tau), \quad R^2(z, t)|_{\Gamma} = R_0^2(\tau), \quad (18)$$

В случае (12) связь инвариантов Римана и исходных переменных, а также функций $\lambda^1(R^1, R^2)$, $\lambda^2(R^1, R^2)$, определяется соотношениями

$$R^{1,2} = W \mp \frac{S^\beta}{\beta}, \quad W = \frac{R^1 + R^2}{2}, \quad S^\beta = \frac{\beta(R^2 - R^1)}{2}, \quad (19)$$

$$\lambda^1 = \frac{1 + \beta}{2} R^1 + \frac{1 - \beta}{2} R^2, \quad \lambda^2 = \frac{1 - \beta}{2} R^1 + \frac{1 + \beta}{2} R^2. \quad (20)$$

В общем случае $P = P(S)$ соотношения вида (19), (20) указаны в §3.2.

В §4 описано построение решения при помощи метода годографа на основе закона сохранения. В §4.1.1 построено двухпараметрическое неявное решение задачи (17), (18)

$$R^1(z, t) = R_0^1(b) = r^1(b), \quad R^2(z, t) = R_0^2(a) = r^2(a), \quad (21)$$

$$t(a, b) = \frac{1}{2}(t(a) + t(b)) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ab}} (\psi^t dt - \varphi^t dz), \quad (22)$$

$$z(a, b) = \frac{1}{2}(z(a) + z(b)) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ab}} (\psi^z dt - \varphi^z dz), \quad (23)$$

где $z(a)$, $z(b)$, $t(a)$, $t(b)$ — координаты и моменты времени на кривой Γ , соответствующие значениям параметров a , b ; Γ_{ab} — часть линии Γ .

В случае контура (14)

$$\varphi^t(R^1, R^2 | r^1, r^2) = \frac{2 {}_2F_1(\alpha, 1 - \alpha; 1; x)}{\beta(r^2 - r^1)^\alpha (R^2 - R^1)^{1-\alpha}}, \quad x = \frac{(R^1 - r^1)(R^2 - r^2)}{(R^1 - R^2)(r^1 - r^2)},$$

где $\alpha = (1 + \beta)/(2\beta)$, ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, функции $\varphi^t = \varphi^t(R^1, R^2 | r^1, r^2)$, то есть зависит как от основных аргументов R^1 , R^2 , так и от параметров $r^1 = R_0^1(b)$, $r^2 = R_0^2(a)$ (функции ψ^t , φ^z , ψ^z в случае контура (14) не требуются).

В §4.1.2 указано, что явное решение на линиях $t(a(\tau), b(\tau)) = t_*$ определяется задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_\tau = -t_b(a, b), \quad b_\tau = t_a(a, b), \quad Z_\tau = J(a, b), \quad (24)$$

$$a|_{\tau=0} = a_*, \quad b|_{\tau=0} = b_*, \quad Z|_{\tau=0} = Z_*,$$

$$J(a, b) = (\lambda^2(r^1(b), r^2(a)) - \lambda^1(r^1(b), r^2(a)))t_a(a, b)t_b(a, b),$$

где (a_*, b_*) — точка на изолинии $t(a(\tau), b(\tau)) = t_*$, соответствующая параметру $\tau = 0$, которая разыскивается путем построения изолиний функции $t(a, b)$ на плоскости (a, b) , $Z(\tau) = z(a(\tau), b(\tau))$, Z_* — координата Z при $\tau = 0$, $J(a, b)$ — якобиан преобразования $(a, b) \leftrightarrow (z, t)$.

Окончательно, однопараметрическое (параметр τ) явное решение задачи на линии уровня $t(a(\tau), b(\tau)) = t_*$ имеет вид

$$R^1(z, t_*) = R_0^1(b(\tau)), \quad R^2(z, t_*) = R_0^2(a(\tau)), \quad t_* = t(a_*, b_*), \quad z = Z(\tau).$$

В §4.1.3 предложена важная модификация метода годографа, позволяющая практически без дополнительных преобразований строить решение на линиях уровня функции $z(a, b) = z_*$. Уравнения задачи (24) заменяются уравнениями $a_\tau = -z_b(a, b)$, $b_\tau = z_a(a, b)$ с соответствующими начальными условиями. Для вычисления производных $z_b(a, b)$, $z_a(a, b)$ не требуется соотношения (23) — достаточно воспользоваться связями $z_a = \lambda^1(r^1(a, b), r^2(a, b))t_a$, $z_b = \lambda^2(r^1(a, b), r^2(a, b))t_b$. Построенный на плоскости (a, b) набор изолиний $t(a, b) = t_*$, $z(a, b) = z_*$ позволяет получить решение $R^1(z_*, t_*) = R_0^1(b)$, $R^2(z_*, t_*) = R_0^2(a)$ в точке (z_*, t_*) .

В §4.1.4 сформулированы и доказаны некоторые утверждения о периодичности решений. Если для начальной задачи (контур (14)) данные

(13) периодичны (по пространству), то периодичность сохраняется и для решения; если для краевой задачи (контур (15)) данные (13) периодичны (по времени), то периодичность сохраняется и для решения.

Исследованию задачи при специальном конститутивном соотношении $P = (1/2)S^2$ ($\beta = 1$) посвящен §5, в котором построены решения начальной и краевой задач (§5.1), и начально-краевой задачи (§5.2). В этом случае практически все формулы §4 записываются в явной форме и, в частности, для (22), (23) имеем (функции не зависят от R^1, R^2)

$$\varphi^t = \frac{2}{r^2 - r^1}, \quad \psi^t = \frac{r^1 + r^2}{r^2 - r^1}, \quad \varphi^z = \frac{r^1 + r^2}{r^2 - r^1}, \quad \psi^z = \frac{2r^1 r^2}{r^2 - r^1}, \quad (25)$$

что позволяет, в зависимости от вида контура Γ_{ab} , без труда определить функции $t(a, b)$, $z(a, b)$.

Для контура $\Gamma_{ab} = \Gamma_1 = \{z \in [a, b], t = 0, b > a\}$, соответствующего начальной задаче (см. (14))

$$t(a, b) = \frac{b - a}{r^2(a) - r^1(b)}, \quad z(a, b) = \frac{br^2(a) - ar^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}. \quad (26)$$

Для контура $\Gamma_{ab} = \Gamma_2 = \{t \in [a, b], z = 0, a > b\}$, соответствующего краевой задаче (см. (15))

$$t(a, b) = \frac{ar^2(a) - br^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}, \quad z(a, b) = \frac{(a - b)r^1(b)r^2(a)}{r^2(a) - r^1(b)}. \quad (27)$$

Для контур $\Gamma_{ab} = \Gamma_3 = \{z \in [0, b], t = 0, b > 0\} \cup \{t \in [0, a], z = 0, a > 0\}$, соответствующего начально-краевой задаче (см. (16))

$$t(a, b) = \frac{b + ar^2(a)}{r^2(a) - r^1(b)}, \quad z(a, b) = r^2(a) \frac{b + ar^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}. \quad (28)$$

В §5.1, §5.2 указано, что соотношения (26)–(28) можно получить и без использования функций (25) и соотношений (22), (23), так как при $\beta = 1$ система (17) расщепляется на два не связанных между собой уравнения Хопфа $R_t^1 + R^1 R_z^1 = 0$, $R_t^2 + R^2 R_z^2 = 0$, ($\lambda^1 = R^1$, $\lambda^2 = R^2$), связь между которыми осуществляется через условия (18).

В случае несогласованных начальных и краевых данных при решении начально-краевой задачи возникают сильные разрывы (ударные волны) и/или слабые разрывы (волновые фронты), поведение которых исследовано в §5.3, §5.4, а в §6 детально описано поведение сильного разрыва

решения, возникающего в результате опрокидывания профиля непрерывного решения. Результаты вычислительных экспериментов приведены в §7 для начально-краевой задачи в случае несогласованных начальных и краевых условий (ударные волны, §7.1, §7.3), согласованных условий (волновые фронты, §7.2). В §7.4 для конкретных параметров продемонстрировано возникновение и поведение сильного разрыва решения. Результаты некоторых расчетов для начально-краевой задачи в случае согласованных и несогласованных условий показаны на рис. 2 (параметры и данные указаны на рисунке).

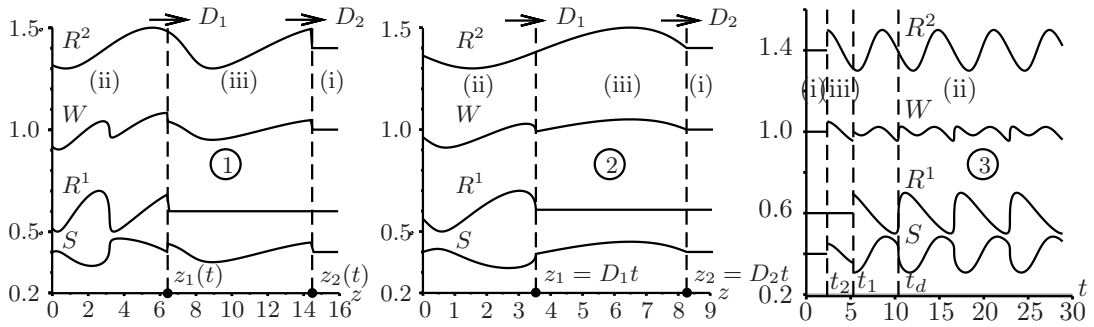


Рис. 2. Возможные схемы эволюции решения для начально-краевой задачи.

$S|_{t \geq 0, z=0} = S_0$, $S|_{z \geq 0, t=0} = S_0$, $W|_{z \geq 0, t=0} = W_0$, $W_0 = 1$, $S_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$.

①, ③. Ударные волны. $W|_{t \geq 0, z=0} = W_0(1 + \varepsilon \cos t)$. Несогласованные условия.

①. Скорости и положения сильных разрывов в момент $t = 10$: $D_1 = 0.65$, $D_2 = 1.45$, $z_1 = 6.470$, $z_2 = 14.492$.

③. Зависимость решения от времени t при фиксированном $z = z_* = 3.405$. Моменты, в которые регистрируются разрывы решения, $t_1 = 5.300$, $t_2 = 2.352$.

②. Волновые фронты. $W|_{t \geq 0, z=0} = W_0(1 + \varepsilon \sin t)$. Согласованные условия

②. Скорости и положения слабых разрывов в момент $t = 5.9$: $D_1 = 0.6$, $D_2 = 1.4$, $z_1 = 3.54$, $z_2 = 8.26$

Глава 3 посвящена построению и исследованию главных членов асимптотических разложений задачи о квазистационарном вращательно-симметричном течении в бесконечном цилиндрическом канале с неровными стенками для жидкости с вязкостью, зависящей от координат. Уравнения Навье–Стокса, на основе которых строится задача, описывающая течение несжимаемой жидкости с переменной вязкостью, указаны в §8.1 (в цилиндрических координатах (r, θ, z) при условии отсутствия азимутальной скорости ($v = 0$) и зависимости от угла θ ($\partial_\theta = 0$)) в терминах напряжений–деформаций (удобно для переменной вязкости)

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad \mathbb{T} = \mu(r, z)\mathbb{D}, \quad (29)$$

$$u_t + uu_r + wu_z = -p_r + \frac{1}{r}(r\mathbb{T}^{rr})_r + (\mathbb{T}^{rz})_z - \frac{1}{r}(\mathbb{T}^{\theta\theta}),$$

$$w_t + uw_r + ww_z = -p_z + \frac{1}{r}(r\mathbb{T}^{rz})_r + (\mathbb{T}^{zz})_z,$$

$$\mathbb{D}^{rr} = 2u_r, \quad \mathbb{D}^{\theta\theta} = \frac{2u}{r}, \quad \mathbb{D}^{zz} = 2w_z, \quad \mathbb{D}^{r\theta} = \mathbb{D}^{z\theta} = 0, \quad \mathbb{D}^{rz} = u_z + w_r,$$

где u, w — радиальная и осевая компоненты скорости, p — давление, $\mathbb{D}, \mathbb{T}$ — тензоры деформаций и вязких напряжений, $\mu(r, z)$ — кинематическая вязкость жидкости.

Главные члены асимптотики построены в §8.2. В уравнениях (29) осуществляется замена переменных (по сравнению с главой 2, здесь иные порядки вязкости μ и давления p)

$$u \rightarrow \varepsilon u, \quad r \rightarrow \varepsilon r, \quad p \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} p, \quad \mu \rightarrow \varepsilon \mu, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (30)$$

где ε — малый параметр: отношение характерного радиуса цилиндра и характерного размера в осевом направлении, все новые переменные (и параметры) считаем имеющими порядок малости $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Сохраняя лишь главные члены, получим при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотические уравнения

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, \quad 0 = -p_z + \frac{1}{r}(\mu r w_r)_r, \quad p_z = p_z(z, t). \quad (31)$$

Введена функция тока $\psi(r, z)$: $ru = -\psi_z$, $rw = \psi_r$, и рассматривается течение, для которого вязкость выбирается зависящей от r, z (типично для турбулентных течений)

$$\mu = \mu(r, z) = \eta^2(z) - r^2, \quad \mu_r(0, z) = 0. \quad (32)$$

Здесь $\eta(z)$ — функция, определяющая границу бесконечной цилиндрической области ($0 \leq r \leq \eta(z)$).

Выбирая параметр (точнее функцию) $\delta(z)$, определяющий шероховатость стенки, уравнения (31) решаем в области (а не в области $r \leq \eta(z)$)

$$\mathbb{C} = \{(r, z): 0 \leq r \leq h(z), \quad -\infty < z < \infty\}, \quad h(z) = \eta(z) - \delta(z),$$

где $h(z)$ — фактический радиус области, в которой происходит течение жидкости (см. рис. 3).

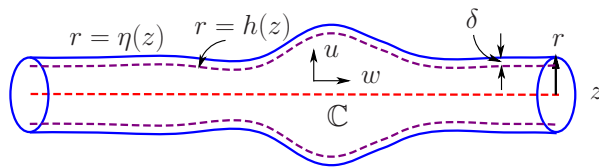


Рис. 3. Схема области. Пунктир показывает область шероховатости

Наличие шероховатости $\delta(z)$ типично при исследовании турбулентных течений, и связано с тем, что, как показывает анализ решения, при $\delta(z) = 0$ скорости u , w имеют сингулярности при $r = \eta(z)$.

Для уравнений (31) задаем условия на оси цилиндра

$$u(0, z) = 0, \quad w_r(0, z) = 0, \quad \psi(0, z) = 0, \quad (33)$$

и кинематическое краевое условие (в терминах компонент скорости такое условие имеет вид $u(h(z), z) = h_z(z)w(h(z), z)$)

$$\psi(h(z), z) = Q, \quad Q = \int_0^{h(z)} r w(r, z) dr = \int_0^{h(z)} \psi_r(r, z) dr, \quad (34)$$

которое соответствует отсутствию нормальной компоненты скорости на границе $z = h(z)$. Величина Q — полурасход жидкости, являющийся, в силу уравнения неразрывности и условия непроницаемости стенки цилиндра для жидкости (34), постоянным, и далее задаваемый как

$$Q = \psi(h(\infty), \infty) = \text{const}. \quad (35)$$

Окончательно, в терминах функции тока, асимптотическая задача, то есть уравнения (31), (32) и условия (33)–(35), принимает вид

$$\mu(r, z) \left(\frac{1}{r} \psi_r \right)_r = \frac{1}{2} r p_z(t), \quad \psi(0, z) = 0, \quad \psi(h(z), z) = Q. \quad (36)$$

Подчеркнем, что граница $r = h(z)$ не является обычной свободной границей жидкости, хотя на ней и задано кинематическое условие. Выбор вязкости в виде (32), приводящей к сингулярности скорости при $r = \eta(z)$, и использование параметра шероховатости δ , позволяет считать границу $r = \eta(z) - \delta(z) = h(z)$ твердой границей, на которой задается условие непроницаемости, а условие прилипания отсутствует.

Задача (36) является линейной и в §9 построено решение в аналитической форме (аргументы функций $\eta(z)$, $h(z)$ опущены для сокращения)

$$\psi(r, z) = \frac{1}{8} p_z \left((\eta^2 - r^2) \ln \frac{\eta^2 - r^2}{\eta^2} - \frac{r^2(\eta^2 - h^2)}{h^2} \ln \frac{\eta^2 - h^2}{\eta^2} \right) + \frac{Q r^2}{h^2}, \quad (37)$$

$$w(r, z) = -\frac{1}{r} \psi_r(r, z), \quad u(r, z) = \frac{1}{r} \psi_z(r, z).$$

Обратим внимание на то, что при специальном выборе $p_z(t) = p_z^*$, где $p_z^* = 8Q/(h_\infty^2 + \eta_\infty^2 \ln(1 - h_\infty^2/\eta_\infty^2))$, на прямолинейных участках границы

$h(z) = \text{const}$, $\eta(z) = \text{const}$, в частности, при $z = \infty$, выполняется условие прилипания $w(h_\infty, \infty) = 0$, $\eta_\infty = \eta(\infty)$, $h_\infty = h(\infty)$. При $p_z(t) \neq p_z^*$ (несогласованность градиента давления и расхода) возможно возникновение противотока или отрывов.

Структура течения детально исследована в §10. Показано, что при любом расходе жидкости в областях, в которых кривизна боковой границы цилиндра (в данном случае h_{zz}) отрицательна, в стационарном течении имеются вихри. Результат получен для почти «произвольной» вязкости вида ((32)), является частным случаем)

$$\mu(r, z) = \mu(r, \eta(z)), \quad \mu(\eta(z), \eta(z)) = 0. \quad (38)$$

Функция тока (ср. с (37)) в этом случае записывается в форме ($s = r^2$)

$$\psi(s, z) = \frac{1}{8}p_z\varphi(s, z) - \frac{1}{8}p_z\frac{s}{h^2}\varphi(h^2, z) + \frac{Qs}{h^2}, \quad \varphi(s, z) = \int_0^s \frac{(s-s')ds'}{\mu(s', \eta(z))}, \quad (39)$$

и $\psi(s, z)$ при $p_z < 0$ является выпуклой функцией по переменной s .

В §11 представлены результаты расчетов, в частности, показанные на рис. 4 для варианта, когда боковая поверхность задана уравнением $r = \eta(z) = 1 + \alpha(e^{-\beta(z-z_0)^4} + e^{-\beta(z+z_0)^2})$, шероховатость $\delta = \text{const}$ и имеются участки для которых $h_{zz}(z) < 0$.

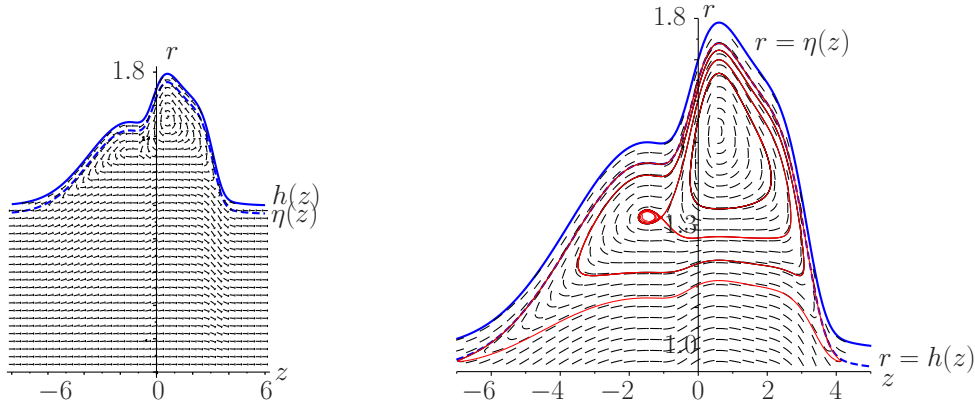


Рис. 4. Слева: поле скоростей, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $\delta = 0.05$, $z_0 = 1.5$, $p_z = -5.600$, $Q = 1$, $p_z^* = -5.612$. Справа: фрагмент области с вихрями

В главе 4 основное внимание фокусируется на сравнении результатов вычислений методом конечных объемов (HLL аппроксимация, §12.1) решения начально-краевой задачи для системы гиперболических уравнений с результатами, полученными аналитически-численным методом.

Вычислительный эксперимент показал, что указанный метод конечных объемов позволяет при соответствующем выборе параметров (шаги по времени и координате) уверенно идентифицировать разрывы решения (сильные и слабые). Проверка точности расчетов проведена путем сравнения результатов интегрирования задачи методом конечных объемов с результатами «эталонных» решений, указанными в §7.1–§7.3. Результаты расчетов приведены в §12.2–§12.6, и некоторые из них представлены на рис. 5 для задачи с начальными данными (см. (14)).

Для начальной задачи результаты вычислений методом конечных объемов при $\beta = 1/4$ сравнивались с результатами расчетов, полученными на основе §4 (см. рис. 5 (1, 2)), а при $\beta = 1$ — с результатами, полученными на основе §7 (см. рис. 5 (3, 4)). Для начально-краевой задачи (см. (16)) сравнение проводилось в случае $\beta = 1$. Относительная погрешность вычислений не превышала 0.0025 (поточечное сравнение). Существенное качественное различие между случаями $\beta = 1$ и $\beta = 1/4$ отсутствует. Возникают движущиеся с различными скоростями пилообразные профили инвариантов Римана R^1 , R^2 , что и приводит, в частности, к возникновению дополнительных «зубцов» на профиле скорости W и «ступенек» на профиле сечения S (переменные связаны соотношениями (19)). Особенно ярко такой эффект проявляется при $\beta = 1$ (см. рис. 5 (3, 4)). Кроме этого, расчеты для начальной задачи позволили выявить «порождение» временной периодичности пространственной периодичностью начальных данных.

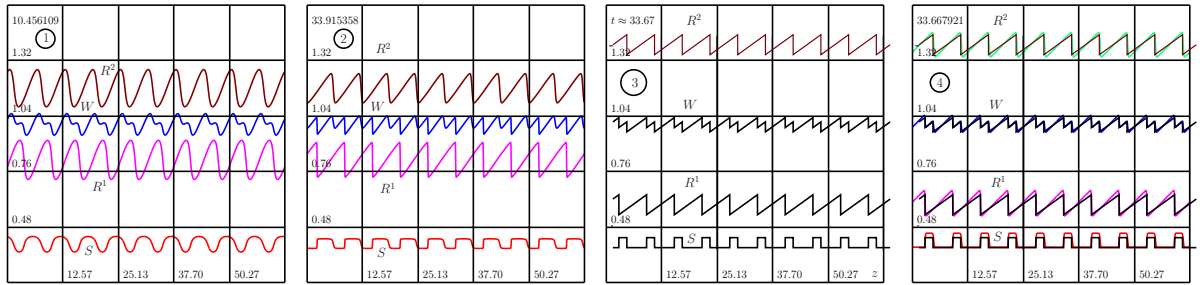


Рис. 5. Начальная задача. $W_0 = 1$, $S = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$.

$$S|_{t \geq 0, z=0} = S_0, S|_{z \geq 0, t=0} = S_0, W|_{z \geq 0, t=0} = W_0, W|_{t \geq 0, z=0} = W_0(1 + \varepsilon \sin t).$$

①, ②. $\beta = 1/4$, $\Delta z_i = 0.013$, $\tau = 0.0035$. Решение в моменты $t \approx 10.46$, $t \approx 33.92$.

③, ④. $\beta = 1$, $\Delta z_i = 0.013$, $\tau = 0.0035$.

③. Точное решение в момент $t \approx 33.67$.

④. Сравнение точного решения с решением методом конечных объемов, $t \approx 33.67$.

При реализации алгоритма метода конечных объемов система (10), (11) приводилась к консервативной форме (при $\mu = 0$) с условиями

Ренкина–Гюгонио на разрывах (§12.1)

$$\mathbf{U}_t + F_z(\mathbf{U}) = 0, \quad D[\mathbf{U}] = [F(\mathbf{U})], \quad (40)$$

$$\mathbf{U} = (S, SW), \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \left(SW, SW^2 + \int^S s P_s(s) ds - \frac{1}{4} \omega_0^2 S^2 \right).$$

В §13 исследовано влияние вращения жидкости (азимутальная скорость $v = r\omega_0 \neq 0$) на поведение течения. В частности, обнаружено, что вращение сглаживает профили W , S . По крайней мере, на достаточно длительном интервале времени не наблюдается возникновения ударных волн и волновых фронтов, как это происходит при $\omega_0 = 0$.

В Заключение изложены основные результаты и выводы диссертационной работы:

1. Построены (на основе теории мелкой воды) и исследованы уравнения для главных членов асимптотического разложения задачи о вращательно-симметричном течении жидкости в цилиндрической области с податливыми границами.
2. Показано, что в случае выбора определяющего соотношения, при котором реакция внешней среды пропорциональна степени радиуса области ($P \sim R^{4\beta}$), периодические возмущения первоначально постоянной скорости течения приводят к образованию на податливой прямолинейной границе пилообразных или ступенчатых структур.
3. Построены и исследованы уравнения для главных членов асимптотического разложения задачи о квазистационарном вращательно-симметричном течении в цилиндрической области с неподвижными иррегулярными границами в случае вязкости жидкости, зависящей от координат.
4. Построены численные и точное (для $\beta = 1$) решения для начальной, краевой и начально-краевой задач в случае податливых границ области. Показано, что при изменении показателя степени β от $1/4$ до 1 решения совпадают качественно, и различаются лишь количественными характеристиками. Показано, что несогласованность начальных и краевых условий приводит к образованию на податливой границе области ударных волн и волновых фронтов.
5. Показано, что наличие азимутального вращения течения жидкости приводит к сглаживанию ступенчатых структур на податливой границе, а при интенсивном вращении тип асимптотических уравнений изменяется с гиперболического на эллиптический.

6. Предложена модификация аналитически-численного метода решения задачи Коши для квазилинейных уравнений в производных первого порядка, позволяющая строить и исследовать решение на линиях уровня постоянного времени или постоянной координаты.
7. Построено точное решение линейных асимптотических уравнений и показано, что в окрестности неровностей с отрицательной кривизной профиля границы образуются стационарные вихри. Доказано, что этот результат справедлив для некоторого класса зависимостей вязкости жидкости от координат.
8. Построены разрывные решения, возникающие в процессе опрокидывания профиля непрерывного решения, в случае начально-краевой задачи для системы уравнений Хопфа.

Приложения содержат детальный вывод некоторых громоздких соотношений, используемых в диссертационной работе.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня изданий совета ЮФУ801.01.09 и перечня ВАК, баз Scopus и Web of Science

1. Жуков, М. Ю. Асимптотические модели течения в трубе с податливыми стенками / М. Ю. Жуков, Н. М. Полякова // Владикавказ. мат. журн. — 2023. — Т. 25, вып. 2 — С. 89–102. — DOI: 10.46698/i3568-6388-7809-и.
2. Полякова, Н. М. Начально-краевая задача о течении в кровеносном сосуде / Н. М. Полякова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2022. — № 4-1. — С. 42–54. — DOI: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-42-54.
3. Жуков, М. Ю. Квазистационарное турбулентное течение в цилиндрическом канале с неровными стенками / М. Ю. Жуков, Н. М. Полякова, Е. В. Ширяева // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2020. — № 1. — С. 4–10. — DOI: 10.18522/1026-2237-2020-1-4-10.
4. Полякова, Н. М. О вычислении коэффициента турбулентного переноса в задаче о седиментации примеси / Н. М. Полякова, Е. В. Ширяева // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2017. — № 4-1 (196-1). — С. 44–50.
5. Полякова, Н. М. Исследование обобщенной модели формирования рН-градиента при изоэлектрофокусировании / Н. М. Полякова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2015. — № 1 (185). — С. 45–49.
6. Жукова, Н. М. Нестационарная задача изоэлектрического фокусирования аминокислот в заданном рН-градиенте / Н. М. Жукова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2013. — № 5. — С. 20–24.

Монографии и статьи, опубликованные в прочих изданиях

7. Жуков, М. Ю. Математическое моделирование процессов электрофореза / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова. — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2019. — 160 с.
8. Жуков, М. Ю. Моделирование испарения капли жидкости / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова. — Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015. — 208 с.
9. Shiryaeva, E.V. Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part IV: Theory / E.V. Shiryaeva, N.M. Zhukova (Polyakova) , M.Yu. Zhukov // Статья в открытом архиве. <https://arxiv.org/abs/1311.5907v1>. — 2013. — С. 1–15.

В сборниках трудов конференций

10. Полякова, Н. М. Вращательно-симметричное турбулентное течение в цилиндрическом сосуде с неравномерным профилем стенок / Н. М. Полякова // Труды XX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону, 2020 г. Ростов-на-Дону, Таганрог: Изд-во ЮФУ. — 2020. — Т. 1. — С. 213–217.
11. Полякова, Н. М. Образование пространственно-временных структур в испаряющейся капле жидкости, содержащей примеси / Н. М. Полякова // Труды XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». — 2018. — Т. 1. — С. 198–202.
12. Полякова, Н. М. Моделирование клиновидной дегидратации высыхающей капли крови / Н. М. Полякова // Труды XVIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2016. — Т. 2. — С. 151–155.
13. Жукова, Н. М. Влияние локальных нарушений условия электронейтральности на динамику формирования рН-градиента в растворе / Н. М. Жукова // Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону, 2014 . — 2014. — С. 201–205.
14. Жуков, М. Ю. Моделирование эволюции сгустка крови в сосуде / М. Ю. Жуков, Н. М. Жукова // Труды XVI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2012. — Т. 1. — С. 94–98.
15. Жукова, Н. М. Нестационарная задача изоэлектрического фокусирования аминокислот в заданном рН градиенте / Н. М. Жукова // Труды XV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2011. — Т. 2. — С. 86–90.
16. Полякова, Н. М. Вихревое течение жидкости с турбулентной вязкостью между ребристыми плоскостями / Н. М. Полякова, В. И. Цветкова // Материалы XXX научной конференции «Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2023. — С. 327–330.
17. Полякова, Н. М. Численная верификация асимптотической модели течения между ребристыми плоскостями жидкости с переменной вязкостью / Н. М. Полякова, В. И. Цветкова // Тезисы докладов XVII Всероссийской школы «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете». Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. ЮФУ. — 2023. — С. 89.
18. Полякова, Н. М. Стационарное турбулентное течение крови. / Н. М. Полякова // Материалы докладов международной конференции «Modern Methods, Problems

- and Applications of Operator Theory and Harmon. Ростов-на-Дону. Изд. Ростовского отделения Российской инженерной академии. — 2019. — С. 96.
19. Полякова, Н. М. Математическая модель седиментации примеси в испаряющейся капле жидкости / Н. М. Полякова // Материалы докладов международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», 2018 г., г. Ростов-на-Дону. — 2018. — С. 96.
 20. Полякова, Н. М. Моделирование высыхающей капли биологической жидкости / Н. М. Полякова // Материалы докладов международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», 2017 г., г. Ростов-на-Дону. — 2017. — С. 107–108.
 21. Poliakova, N. M. Turbulent blood flow in a cylindrical vessel with an irregular walls profile. / Poliakova N.M., Petrukhina T.A. // Тезисы докладов Международной конференции «International Conference on Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» (PHENMA 2020). Rostov-on-Don, Taganrog. Southern Federal University Press. — 2021. — P. 214.
 22. Полякова, Н. М. Вращательно-симметричное турбулентное течение в цилиндрическом сосуде с неравномерным профилем стенок / Н. М. Полякова // Тезисы XX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2020. — С. 147.
 23. Полякова, Н. М. Образование пространственно-временных структур в испаряющейся капле жидкости, содержащей примеси / Н. М. Полякова // Тезисы XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2018. — С. 108.
 24. Полякова, Н. М. Моделирование клиновидной дегидратации высыхающей капли крови / Н. М. Полякова // Тезисы XVIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2016. — С. 138.
 25. Полякова, Н. М. Описание переноса сгустка крови в сосуде / Н. М. Полякова // Тезисы докладов Международной конференции «Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2015. — 2015. — С. 27.
 26. Жукова, Н. М. Влияние локальных нарушений условия электронейтральности на динамику формирования рН-градиента в растворе / Н. М. Жукова // Тезисы XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2014. — С. 58.
 27. Жуков, М. Ю. Моделирование эволюции сгустка крови в сосуде / М. Ю. Жуков, Н. М. Жукова // Тезисы XVI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2012. — С. 40.
 28. Жукова, Н. М. Нестационарная задача изоэлектрического фокусирования аминокислот в заданном рН градиенте / Н. М. Жукова // Тезисы XV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону. Изд. ЮФУ. — 2011. — С. 22.

Полякова Наталья Михайловна

Моделирование вращательно-симметричных течений в цилиндрических
областях с податливыми и неровными границами

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____ г. Заказ № _____

Формат 60 × 84/32. Усл. печ. л. 0.7. Тираж 100 экз.

ЦКП ИПК ЮФУ, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, к. 104