На правах рукописи

Абузярова Наталья Фаирбаховна

Спектральный синтез для оператора дифференцирования и локальное описание подмодулей целых функций

1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Ростов-на-Дону – 2023

Работа выполнена в Институте математики с вычислительным центром — обособленном структурном подразделении ФГБНУ «Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук», г. Уфа

Официальные оппоненты:

Баранов Антон Дмитриевич
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Брайчев Георгий Генрихович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»

Каюмов Ильгиз Рифатович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита состоится 27.06.2023 в 16:00 часов на заседании диссертационного совета ЮФУ801.01.02 при ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул.Зорге, 21ж, и на сайте
https://hub.sfedu.ru/storage/1/1310704/ 48c37b68-12ad-4657-b49d-38f5fe5a3389/

Автореферат разослан «____» ____________ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук Кряквин В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы исследования.

Диссертационная работа посвящена изучению инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств в пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций и в пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале вещественной прямой, а также исследованию двойственных объектов — замкнутых подмодулей в специальных весовых модулях целых функций (над кольцом $\mathbb{C}[z]$).

Пусть X — линейное топологическое пространство бесконечно дифференцируемых или голоморфных функций, определенных в области вещественного или, соответственно, комплексного пространства. Для $h \in \mathbb{R}^n$ (или $h \in \mathbb{C}^n$) символом T_h обозначаем *оператор сдвига* аргумента: $T_h(f(\cdot)) = f(\cdot + h)$, $\mathcal{T} = \{h : \ h \in G\}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ (или $G \subset \mathbb{R}^n$). $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ — оператор дифференцирования, если $n = 1$, и D — семейство операторов частного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t_j}$, $j = 1, \ldots, n$, если $n > 1$.

Замкнутое подпространство $W \subset X$ называем *$\mathcal{T}$-инвариантным* (*D-инвариантным*), если $T_h(W) \subset W$ для всех $h \in G$ (соответственно, если $D(W) \subset W$).

Если X состоит из голоморфных функций или представляет собой квазианалитический класс бесконечно дифференцируемых функций, то $\mathcal{T}$-инвариантность подпространства $W \subset X$ равносильна его D-инвариантности, где D — оператор (частного) дифференцирования. Если же X — неквазианалитическое пространство бесконечно дифференцируемых функций, то при весьма естественных ограничениях на топологию в X каждое $\mathcal{T}$-инвариантное подпространство $W \subset X$ будет D-инвариантным, но не наоборот. Корневыми элементами оператора D и семейства операторов $\mathcal{T}$ служат экспоненциальные одночлены. Обычно изначально предполагают, что экспоненциальные функции содержатся и полны в X.

Задача спектрального анализа для инвариантного подпространства W: выяснить, каков запас экспоненциальных одночленов, содержащихся в W?

Задача спектрального синтеза для инвариантного подпространства W: при наличии в W непустого запаса экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$, найти возможные способы восстановления W по $\operatorname{Exp} W$, например, следующим образом: $W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$.

Отправной точкой исследований задач спектрального анализа и синтеза для $\mathcal{T}$-инвариантных и D-инвариантных подпространств принято считать фундаментальный принцип Л.Эйлера для множества решений однородного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами, установленный им в 1747 году [51]. В качестве следующей вехи в истории развития этих задач можно указать появление понятия "периодической в среднем функции". Оно было введено Л. Делсартом в 1935 году (см. [46]). Делсарт называл периодическими в среднем функциями решения однородного уравнения свертки с интегральным ядром специального вида и изучал вопросы приближения произвольных решений этого уравнения линейными комбинациями его экспоненциальных решений, то есть возможность спектрального синтеза для $\mathcal{T}$-инвариантного подпространства решений этого уравнения.

В другой (эквивалентной) форме понятие "периодичности в среднем"было рассмотрено в хорошо известных работах Л. Шварца [64], [65]. Л.Шварц доказал, что каждое $\mathcal{T}$-инвариантное подпространство в $C(\mathbb{R})$ и в $C^\infty(\mathbb{R})$, а также каждое D-инвариантное (эквивалентно, $\mathcal{T}$-инвариантное) подпространство в $H(\mathbb{C})$ допускает спектральный синтез: порождается содержащимся в нем непустым множеством экспоненциальных одночленов.

Периодичность в среднем для функций, непрерывных на прямой и на полупрямой изучалась Ж.-П. Каханом [54], [55], П. Кусисом [56], [57], [58], А.О. Гельфондом, А.Ф. Леонтьевым [24], [25], [32], [34], Д.Г. Диксоном [47], [48] и другими авторами.

В работе [33] А.Ф. Леонтьев установил допустимость спектрального синтеза подпространством решений однородного уравнения свертки в пространстве функций, непрерывных на интервале вещественной прямой.

Теорема о спектральном синтезе в ядре оператора свертки, действующего в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(G)$, где G — выпуклая область n-мерного вещественного простанства (в частности, $G = (a; b)$, если $n = 1$), доказана Л.Хермандером [40, глава 16], [53]. Л.Эренпрайсу [49], Б.Мальгранжу [59] принадлежит частный случай этого утверждения, соответствующий $G = \mathbb{R}^n$. Описание других результатов по аппроксимации и представлению решений однородного уравнения свертки (системы таких уравнений), рассматриваемых в пространствах $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $H(\mathbb{C}^n)$, можно найти, например, в обзоре К. Беренстейна и Д. Струппы [23].

Наиболее общий результат для однородного уравнения свертки в пространстве $H(G)$, где G — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, состоит в том, что множество решений такого уравнения (являющееся D-инвариантным подпространством) всегда допускает спектральный синтез. Для $n = 1$ это утверждение доказано И.Ф. Красичковым-Терновским [27], для $n > 1$ — Р.С. Юлмухаметовым [41], А.С Кривошеевым и В.В.Напалковым [29].

Еще одно направление исследований, которое представлено в литературе, касается спектрального синтеза в ядре оператора свертки, действующего в каком-либо пространстве ультрадифференцируемых функций. Например, Р. Мейз, Б.А. Тэйлор и Д. Вогт в работе [60] рассмотрели ядро "локального"оператора свертки, порожденного *обратимым* (!) ультрараспределением и действующего в пространстве ультрадифференцируемых функций Берлинга-Бьорка $\mathcal{E}_\omega(\mathbb{R})$. Авторы доказали, что каждое решение локального однородного уравнения свертки в пространстве $\mathcal{E}_\omega(\mathbb{R})$ локально аппроксимируется линейными комбинациями экспоненциальных решений этого уравнения, причем на более узком интервале, чем тот, на котором рассматривается само уравнение (более точно, доказано существование в ядре локального оператора свертки в $\mathcal{E}_\omega(\mathbb{R})$ локального базиса Шаудера из экспоненциальных решений). В работе [21] Д.А. Абаниной (Поляковой) рассмотрено ядро оператора свертки, порожденного мультипликатором, в пространстве ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале вещественной прямой. Найдены условия, при которых в подпространстве решений однородного уравнения свертки имеется экспоненциально-полиномиальный базис.

Среди исследований по спектральному анализу и синтезу для оператора дифференцирования в пространствах голоморфных функций важное место занимает цикл работ И.Ф. Красичкова-Терновского [26]–[28], посвященных задаче спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств в пространстве голоморфных функций на выпуклой области комплексной плоскости. В этих работах реализована программа исследований произвольных D-инвариантных подпространств пространства $H(G)$, где $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область. Эта программа включает в себя систематическое применение двойственной схемы, сводящей задачи о D-инвариантных подпространствах в $H(G)$ к эквивалентным задачам о замкнутых подмодулях в модуле целых функций экспоненциального типа, ассоциированном с областью G. (Двойственная схема из [26]–[28] имеет сходство с рассуждениями Л.Эренпрайса в [50].) Кроме теоремы о допустимости спектрального синтеза ядром оператора свертки, в [26]–[28] установлено, что в случае неограниченной выпуклой области G каждое D-инвариантное подпространство $W \subset H(G)$ допускает спектральный синтез, то есть порождается содержащимся в нем набором экспоненциальных одночленов. Этот результат является обобщением теоремы Л. Шварца, доказанной им для D-инвариантных подпространств в $H(\mathbb{C})$.

Возвращаясь к рассмотрению пространства X бесконечно дифференцируемых функций на интервале вещественной прямой, напомним, что для таких пространств, в случае их неквазианалитичности, каждое $\mathcal{T}$-инвариантное подпространство будет D-инвариантным, но не наоборот. При этом корневыми элементами как для оператора D, так и для группы операторов сдвига $\mathcal{T}$, являются одни и те же функции — экспоненциальные одночлены. Это означает, что, во-первых, не всякое утверждение о спектральном синтезе для $\mathcal{T}$-инвариантных подпространств в X будет справедливо для D-инвариантных подпространств этого пространства, а во-вторых, что результаты о спектральном синтезе для D-инвариантных подпространств содержат, как частные случаи, аналогичные утверждения о $\mathcal{T}$-инвариантных подпространствах в X.

Как нам известно, до 2008 года в подавляющем большинстве случаев авторами рассматривались либо подпространства голоморфных функций, для которых $\mathcal{T}$-инвариантность и D-инвариантность эквивалентны, либо

$\mathcal{T}$-инвариантные подпространства бесконечно дифференцируемых или ультрадифференцируемых функций.

В 2008 году А.Алеман и Б.Коренблюм в работе [44] рассмотрели именно D-инвариантные подпространства в пространстве $C^\infty(a;b)$ и акцентировали внимание на следующем факте: в $C^\infty(a;b)$ имеется два типа *нетривиальных D-инвариантных подпространств, не содержащих экспонент*. Первый тип — это подпространства вида

$$W_I = \{f \in C^\infty(a;b): \ f = 0 \text{ на } \ I\}, \tag{1}$$

где $I \subset (a;b)$ — относительно замкнутый промежуток; второй тип "патологических"(с точки зрения допустимости спектрального синтеза) D-инвариантных подпространств проиллюстрирован следующим примером:

$$W_{c,d} = \{f \in C^\infty(a;b): \ f^{(j)}(c) = f^{(j)}(d) = 0, \quad j = 0, 1, 2 \dots\},$$

где $c, \ d \in (a;b)$ $c \neq d$.

Ясно, что

$$W_{[c;d]} \subsetneq W_{c,d}.$$

Подпространства двух указанных типов отличаются друг от друга тем, что спектр сужения оператора дифференцирования

$$D: W_{[c;d]} \to W_{[c;d]}$$

дискретен, а спектр сужения оператора дифференцирования

$$D: W_{c,d} \to W_{c,d}$$

— нет, а именно: в [44] доказано, что он совпадает со всей комплексной плоскостью.

А. Алеман и Б. Коренблюм установили, что всякое D-инвариантное подпространство содержит "резидуальную часть"вида (1) и предложили ослабленную версию спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств $W \subset C^\infty(a;b)$ с дискретным спектром (то есть с дискретным спектром оператора сужения $D: W \to W$). Им удалось доказать эту версию для частного случая — D-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(a;b)$ с конечным спектром [44, предложение 6.1], после чего авторы ставят вопрос о двух возможных вариантах развития предложенной версии синтеза на случай D-инвариантных подпространств с бесконечным дискретным спектром.

Первый вариант, *слабый спектральный синтез*, состоит в том, что D-инвариантное подпространство W допускает слабый спектральный синтез, если оно может быть представлено в виде

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}, \tag{2}$$

где W_{I_W} — максимальное подпространство вида (1), содержащееся в W, $\operatorname{Exp} W$ — множество всех экспоненциальных одночленов, принадлежащих W.

Второй вариант — это возможность представления D-инвариантного подпространства W с дискретным спектром в виде прямой суммы (алгебраической и топологической):

$$W = W_{I_W} \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}. \tag{3}$$

Если спектр подпространства W конечен, то, согласно предложению 6.1 из [44], обе предложенные версии спектрального синтеза, (2) и (3), дают одно и то же представление:

$$W = W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W.$$

В диссертационной работе показано, что замеченные А.Алеманом и Б. Коренблюмом факты о D-инвариантных подпространствах пространства $C^\infty(a; b)$ и поставленные ими вопросы о возможных версиях спектрального синтеза допускают перенос на более широкий класс пространств $X \subseteq C^\infty(a; b)$, а именно, на пространства Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале вещественной прямой. Шкала таких пространств построена А.В. Абаниным в 2007–2008 гг. (см. [19], [20]).

Отметим, что все задачи, приводящие к результатам о спектральном синтезе в ядре оператора свертки, в том числе действующего локально, (или в пересечении таких ядер), рассмотренные в литературе для бесконечно дифференцируемых или ультрадифференцируемых функций, вкладываются как частный случай в задачу исследования версий спектрального синтеза (2) и (3) для общих D-инвариантных подпространств соответствующего функционального пространства. Это замечание, а также интерес других авторов к вопросам, поставленным в работе [44] (см. [43], [45]), подчеркивают актуальность исследований D-инвариантных подпространств бесконечно дифференцируемых и Ω-ультрадифференцируемых функций и связанных с ними других задач анализа.

В диссертации получены условия, при которых имеет место какая-либо из версий спектрального синтеза, (2) или (3), для D-инвариантных подпространств в пространстве Шварца $C^\infty(-a; a)$ и версия (2) в пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций, введенных А.В.Абаниным. Также изучены другие вопросы, возникающие на основном пути исследования и представляющие самостоятельный интерес; например, связи между поведением модуля и распределением нулевого множества целой функции, принадлежащей одному из специальных классов, определяемых исходной задачей спектрального синтеза.

Цели диссертационной работы:

1) получить общее необходимое и достаточное условие допустимости слабого спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств с дискретным спектром в пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций, это

условие будет формулироваться в терминах основного инструмента исследования инвариантных подпространств — специальных подмодулей целых функций;

2) из общего критерия, описанного в предыдущем пункте, вывести удобные для описания и проверки условия (слабой) синтезируемости D-инвариантного подпространства в терминах спектра и резидуального промежутка этого подпространства;

3) изучить подробно (в особенности, на классе подпространств, порожденных одним (Ω-ультра)распределением критический для слабого спектрального синтеза случай, когда радиус полноты системы экспоненциальных одночленов, содержащихся в D-инвариантном подпространстве, равен половине длины его резидуального промежутка;

4) изучить нулевые (под)множества и поведение делителей в алгебрах, двойственных исходным пространствам функций;

5) получить условия представимости D-инвариантного подпространства в пространстве Шварца в виде прямой алгебраической и топологической суммы его резидуальной и экспоненциальной компонент, предварительно введя новую характеристику комплексной последовательности, тесно связанную с понятием делителя в алгебре Шварца;

6) получить условия сохранения различных классов целых функций, выделенных в процессе исследований пп. 1)–5), при возмущении нулевых множеств входящих в них функций, а также приложения этих условий к вопросам спектрального синтеза, (не)полноты систем экспоненциальных функций.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) Доказаны теоремы о том, что

– D-инвариантное подпространство W пространства Ω-ультрадифференцируемых функций (и пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых функций) на интервале $(a;b)$, имеющее дискретный спектр, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль содержит подмодуль вида $\mathcal{J}(\varphi)$, то есть слабо локализуемый подмодуль, порожденный одной функцией.

– D-инвариантное подпространство W пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых функций, имеющее дискретный спектр, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль содержит функцию φ, порождающую слабо локализуемый главный подмодуль, то есть такую, что $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi)$.

2) Как следствие теорем из предыдущего пункта, установлено утверждение о том, что D-инвариантное подпространство с дискретным спектром W в пространстве Ω-ультрадифференцируемых (или всех бесконечно дифференцируемых) функций на интервале $(a;b)$

– всегда допускает слабый спектральный синтез, если $|I_{W_I}| > 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$ (в частности, если резидуальный промежуток I_W не компактен в $(a;b)$) ,

– может как допускать слабый спектральный синтез, так и не допускать его, если $|I_{W_I}| = 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$,
– тривиально (совпадает со всем пространством), если $|I_{W_I}| < 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$ (определение радиуса полноты $r(\Lambda)$ комплексной последовательности приведено ниже, на с. 16, после предложения 1.13).

3) Для подпространства W_S, порожденного одним распределением S в пространстве Шварца, установлены удобные для проверки достаточные условия допустимости слабого спектрального синтеза, формулируемые в терминах поведения $|\varphi|$, где φ — преобразование Фурье-Лапласа распределения S.

4) Доказан весовой критерий допустимости слабого спектрального синтеза подпространствами вида W_S.

5) Получены критерии того, что сдвиг целочисленной последовательности представляет собой нулевое множество делителя алгебры Шварца или весовой алгебры целых функций, реализующей пространство Ω-ультрараспределений.

6) Доказана теорема об условии на считающую функцию вещественной последовательности, необходимом для того, чтобы эта последовательность была нулевым множеством делителя алгебры Шварца; также показано, что это условие нельзя усилить на классе всех вещественных последовательностей.

7) Доказаны теоремы о представимости D-инвариантного подпространства в пространстве Шварца в виде прямой алгебраической и топологической суммы его резидуальной и экспоненциальной компонент; условия представимости имеют ту же форму, что и условия допустимости слабого спектрального синтеза, но вместо радиуса полноты использована введенная нами более тонкая характеристика комплексной последовательности, тесно связанная с понятием делителя в алгебре Шварца.

8) Получены неулучшаемые условия сохранения различных классов целых функций, в том числе класса делителей алгебры Шварца, класса функций, порождающих слабо локализуемые главные подмодули, при возмущении нулевых множеств; эти условия применены для получения новых утверждений о слабом спектральном синтезе и о (не)полноте систем экспоненциальных функций.

Методика исследования. В работе используется аппарат функционального анализа, в частности, теория двойственности для локально-выпуклых пространств; а также аппарат и аналитические методы теории целых и субгармонических функций.

Теоретическая и практическая ценность. В диссертации получены результаты теоретического характера по классической задаче спектрального синтеза для оператора дифференцирования в общих пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций, включающие в себя как частные случаи все известные к настоящему моменту результаты в указанном направлении. При этом примененный подход допускает дальнейшее развитие и распространение на аналогичные задачи для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Также при изучении возникающих в ходе основного исследования вопросов, касающихся свойств целых функций и их нулевых множеств, были разработаны новые методы и подходы, которые могут быть полезными для решения других задач теории функций. Поэтому результаты диссертации представляют интерес как для специалистов, проводящих исследования по теории целых и субгармонических функций, так и для специалистов, работающих в других областях анализа (спектральная теория дифференциальных операторов, уравнения свертки и их обобщения и др.)

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах.

1. Городской семинар им. А.Ф. Леонтьева по теории функций, БашГУ, г. Уфа, руководитель проф. Р. С. Юлмухаметов

2. Семинар "Комплексный и гармонический анализ"Института математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа), руководитель проф. И. Х. Мусин.

3. Семинар по анализу кафедры математического анализа и геометрии Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону), руководитель проф. А. В. Абанин.

4. Межвузовский научно-исследовательский семинар по математике «Анализ и его приложения» МПГУ (г. Москва), руководители проф. Г. Г. Брайчев, проф. И. В. Тихонов, проф. В. Б. Шерстюков.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях.

1. Международная научная конференция "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ г. Уфа, 24–26 сентября 2014 г.

2. Международная конференция "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ г. Уфа, 1–3 октября 2015 г.

3. Workshop and Autumn School "Spaces of Analytic Functions and Singular Integrals (SAFSI2015) PDMI RAS, St. Petersburg, October 12-15, 2015.

4. Уфимская международная математическая конференция, г. Уфа, 27–30 сентября 2016 г.

5. Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.–корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева, г. Уфа, 24–27 мая 2017 г.

6. Международная конференция "Комплексный анализ и геометрия г. Уфа, 23–26 сентября 2018 г.

7. Workshop “Reproducing Kernels in Function Spaces and Their Applications”, г. Санкт-Петербург, 3–7 июня 2019 г.

8. Международная научная конференция "Комплексный анализ и его приложения КФУ, г. Казань, 24–28 августа 2020 г.

9. 29th Summer St. Petersburg Meeting In Mathematical Analysis, Euler

International Mathematical Institute, St. Petersburg. 28 сентября–1 октября 2020 г.

10. Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа—2020"Уфа, 14–20 ноября 2020 г.

11. Международная школа-конференция "Комплексный анализ и его приложения филиал ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», г. Геленджик, 30 мая–5 июня 2021 г.

12. 30th Summer St. Petersburg Meeting In Mathematical Analysis, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg. 1–6 июля 2021 г.

13. Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа—2021"Уфа, 6–9 октября 2021 г.

14. Международная конференция "Вероятностные методы в анализе Сириус, г. Сочи, 6–10 декабря 2021 г.

15. 31th Summer St. Petersburg Meeting In Mathematical Analysis, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg. 22-27 августа 2022 г.

16. Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа—2022"Уфа, 28 сентября–1 октября 2022 г.

17. Вторая конференция Математических центров России (7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 18 работ в изданиях, входящих в БД Scopus и (или) Web of Science ([1]–[18]), все эти издания входят также в Перечень научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, представленных для защиты в диссертационные советы ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» ([1]–[18]). Из совместной работы [11] в диссертацию включены только результаты автора (лемма 1, теорема 1).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 118 наименований. Общий объем диссертации — 283 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении излагается история вопроса, приведены обзор литературы по теме диссертации, краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В **главе 1** рассматривается задача слабого спектрального синтеза для инвариантных подпространств оператора дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, действующего в пространстве $\mathcal{E}_a$, где $\mathcal{E}_a$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(-a; a)$ или пространство Ω-ультрадифференцируемых функций $\mathcal{U}_\Omega(-a; a)$.

Замкнутое подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$, инвариантное относительно дифференцирования: $D(W) \subset W$, — называем *D-инвариантным подпространством.*

Корневые элементы оператора D — это экспоненциальные одночлены

$$e_{k,\lambda}(t) = t^k e^{-\mathrm{i}\lambda t}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Если W — D-инвариантное подпространство и $e_{k,\lambda} \in W$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $e_{j,\lambda} \in W$, $j = 0, \ldots, k-1$.

Пусть W — нетривиальное (отличное от $\{\bar{0}\}$ и $\mathcal{E}_a$) D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}_a$. Обозначим символом $\operatorname{Exp} W$ совокупность всех экспоненциальных одночленов $e_{k,\lambda}$, содержащихся в нем, а символом E_W — множество показателей, по которым построена экспоненциальная система $\operatorname{Exp} W$, то есть *точка $\lambda \in \mathbb{C}$ содержится в E_W с кратностью k тогда и только тогда, когда* $e_{k,\lambda} \in W$, а $e_{k+1,\lambda} \notin W$.

Классическая задача спектрального синтеза для оператора дифференцирования D в $\mathcal{E}_a$ состоит в том, чтобы
выяснить, какие D-инвариантные подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ допускают спектральный синтез, то есть имеют вид

$$W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}?$$

Из условий на веса $\omega \in \Omega$, определяющие пространство $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$, следует, что $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$ представляет собой неквазианалитический класс функций. Поэтому множества вида

$$W_I = \{f \in \mathcal{E}_a : \ f = 0 \quad \text{на} \quad I\},$$

где $I \subsetneq (-a;a)$ — фиксированный относительно замкнутый в $(-a;a)$ промежуток, представляют собой *нетривиальные (!)* D-инвариантные подпространства в $\mathcal{E}_a$. Причем,

$$I \neq (-a;a) \Longrightarrow \operatorname{Exp} W_I = \emptyset.$$

Как уже отмечалось выше, впервые этот факт был замечен А. Алеманом и Б. Коренблюмом в работе [44] для пространства $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$. Также в этой работе доказано, что каждое нетривиальное D-инвариантное подпространство W в $C^\infty(-a;a)$ обязательно содержит "резидуальную часть— максимальное подпространство вида W_I. Иными словами, найдется относительно замкнутый в $(-a;a)$ промежуток I_W со свойствами:

$$W_{I_W} \subset W, \quad W_I \setminus W \neq \emptyset \; \forall \, I \subsetneq I_W.$$

Предложенное А.Алеманом и Б.Коренеблюмом доказательство этого факта довольно длинное и сложное; оно основано на результатах Д. Хитта [52] и Д.Сарасона [63] о структуре и свойствах "почти инвариантных"подпространств в пространстве Пэли-Винера. При подходе, предлагаемом в настоящей работе, описание "резидуальной"компоненты W_{I_W} данного нетривиального D-инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ является простым следствием принципов двойственности (общего и специального), составляющих содержание предложений 0.1 и 1.2. На самом деле, простым следствием используемого нами двойственного подхода является более общий факт, справедливый для произвольных замкнутых подпространств $\mathcal{E}_a$.

Предложение 1.1. *Для любого (не обязательно D-инвариантного) замкнутого подпространства $L \subset \mathcal{E}_a$ существует относительно замкнутый промежуток $I_L \subseteq (-a; a)$ со свойствами:*

$$W_{I_L} \subset L, \quad W_I \setminus L \neq \emptyset \ \forall\, I \subsetneq I_L.$$

Авторы работы [44] называют подпространства вида W_I "резидуальными"("residual subspace"). Следуя этой терминологии, промежуток I_L называем *резидуальным промежутком подпространства* L.

В неквазианалитических пространствах функций мы должны принимать во внимание наличие D-инвариантных подпространств вида W_I ("резидуальных подпространств"). Поэтому синтезировать D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ естественно из двух объектов: содержащегося в нем множества экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$ и его резидуального подпространства W_{I_W} (что как раз и было предложено А.Алеманом и Б.Коренблюмом в их работе [44] в качестве гипотезы для случая пространства $C^\infty(a; b)$).

Пусть W — нетривиальное D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}_a$ с запасом экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$ (возможно, пустым) и резидуальным промежутком I_W. Тогда D-инвариантное подпространство

$$\overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$$

содержится в W.

Будем говорить, что W допускает *спектральный синтез в слабом смысле* (*слабый спектральный синтез*), если

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}, \tag{4}$$

то есть W минимально среди *всех* D-инвариантных подпространств $\widetilde{W}$ с тем же запасом экспоненциальных одночленов: $\operatorname{Exp} \widetilde{W} = \operatorname{Exp} W$ и резидуальным промежутком $I_{\widetilde{W}} = I_W$.

Вопрос о том, *для каких нетривиальных D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$ имеет место соотношение* (4) — главный объект исследования главы 1.

Оказывается, что одним из условий, необходимых для представления D-инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ в виде (4), является дискретность спектра сужения оператора дифференцирования $D : W \to W$, называемого *спектром D-инвариантного подпространства* W и обозначаемого σ_W. В работе [44] авторы установили, что в этом случае спектр сужения оператора дифференцирования на подпространство $W \subset C^\infty(a;b)$, то есть спектр оператора

$$D : W \to W,$$

либо дискретен (в частности, пуст), либо совпадает со всей комплексной плоскостью [44, теорема 2.1]. Аналог этого утверждения для D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a = C^\infty(a;b)$ или $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$ устанавливается нами в следствии 1.5. В частности, доказано, что если спектр σ_W дискретен, то он равен $(-\mathrm{i}E_W)$.

Напомним, что $\mathcal{P}_a = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_a)$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье-Лапласа, действующее в пространствах (Ω-ультра)распределений. С индуцированной топологией, $\mathcal{P}_a$ — топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Топология этого модуля также допускает внутреннее описание с использованием системы весовых функций.

Согласно **общему принципу двойственности** (предложение 0.1), замкнутому подпространству $W \subset \mathcal{E}_a$ однозначно соответствует замкнутое подпространство $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$. Замкнутое подпространство W будет D-инвариантным тогда и только тогда, когда $z\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, то есть $\mathcal{J}$ — *замкнутый подмодуля* модуля $\mathcal{P}_a$.

В дальнейшем будут рассматриваться только замкнутые подмодули в $\mathcal{P}_a$ (если специально не оговорено противное), поэтому вместо термина "замкнутый подмодуль"для краткости будет использоваться термин "подмодуль".

Для подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ символом $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$ обозначаем его *нулевое множество*, которое определяется формулой

$$\mathcal{Z}_\mathcal{J} = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{J}} \mathcal{Z}_\varphi,$$

где $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество функции φ.

Индикаторным отрезком подмодуля $\mathcal{J}$ называется отрезок

$$[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}] \subset \overline{\mathbb{R}},$$

с концами в точках $c_\mathcal{J} = -\sup\limits_{\varphi \in \mathcal{J}} h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\mathcal{J} = \sup\limits_{\varphi \in \mathcal{J}} h_\varphi(\pi/2) \in \overline{\mathbb{R}}$;
где h_φ — индикатор функции φ.

Реализация двойственной схемы исследования D-инвариантных подпространств начинается со следующего утверждения.

Предложение 1.2. (**Специальный принцип двойственности.**) *Между совокупностью $\{W\}$ всех D-инвариантных подпространств пространства*

$\mathcal{E}_a$ и совокупностью $\{\mathcal{J}\}$ всех подмодулей модуля $\mathcal{P}_a$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу:

$$W \longleftrightarrow \mathcal{J} \Longleftrightarrow \mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0),$$

где $W^0 = \{S \in \mathcal{E}_a' : \; S(f) = 0 \; \forall f \in W\}$. При этом

$$I_W = [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \bigcap (-a; a), \quad E_W = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}.$$

Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ называется *слабо локализуемым*, если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi} \quad \text{и} \quad [-h_{\varphi}(-\pi/2); h_{\varphi}(\pi/2)] \subset [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$$

Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ называется *локализуемым* (*обильным*), если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$ со свойством $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi}$. Иными словами, локализуемый подмодуль — это слабо локализуемый подмодуль с индикаторным отрезком $[-a; a]$.

Слабо локализуемый подмодуль $\mathcal{J}$ обладает свойством максимальности: $\widetilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}$ для любого подмодуля $\widetilde{\mathcal{J}}$, такого, что

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{\mathcal{J}}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \quad \text{и} \quad [c_{\widetilde{\mathcal{J}}}; d_{\widetilde{\mathcal{J}}}] = [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}].$$

Из **специального принципа двойственности** выводится следующее утверждение.

Предложение 1.3. *D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ допускает спектральный синтез в слабом смысле тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ слабо локализуем.*

Предложение 1.3 — основа *двойственной схемы*: оно сводит задачу о слабом спектральном синтезе в $\mathcal{E}_a$ к эквивалентной двойственной задаче о слабой локализуемости подмодулей в $\mathcal{P}_a$. Эта схема восходит к работам И .Ф. Красичкова-Терновского и Л. Эренпрайса.

Пусть $\varphi \in \mathcal{P}_a$. Символом $\mathcal{J}_{\varphi}$ обозначаем *главный подмодуль*, порожденный функцией φ :

$$\mathcal{J}_{\varphi} := \overline{\{p\varphi : \; p \in \mathbb{C}[z]\}},$$

а символом $\mathcal{J}(\varphi)$ — слабо локализуемый подмодуль с нулевым множеством $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} = \mathcal{Z}_{\varphi}$ и индикаторным отрезком $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] = [-h_{\varphi}(-\pi/2); h_{\varphi}(\pi/2)]$.

Сформулируем основные утверждения о слабом спектральном синтезе, полученные в главе 1.

Теорема 1.7. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*

Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид (4), тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ содержит функцию φ со свойством $\mathcal{J}(\varphi) \subset \mathcal{J}$.

Теорема 1.7*. *Пусть $W \subset C^\infty(-a; a)$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*
Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид (4), тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ содержит функцию φ со свойством: $\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi$.

Следствие 1.6. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*
Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид (4), если его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ содержит функцию φ, порождающую слабо локализуемый главный подмодуль.

В частности, подпространство вида

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \ S(D^k f) = 0, \ k = 0, 1, 2 \dots\},$$

где $S \in \mathcal{E}'_a$ — фиксированный функционал, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда функция $\varphi = \mathcal{F}(S)$ порождает в $\mathcal{P}_a$ слабо локализуемый главный подмодуль.

Предложение 1.13. *D-инвариантное подпространство W, характеристики которого подчинены условию*

$$2\pi D_{BM}(E_W) = 2r(E_W) > |I_W|,$$

тривиально, то есть совпадает со всем $\mathcal{E}_a$ (напомним, что E_W — составленное с учетом кратностей множество показателей системы всех экспоненциальных одночленов, содержащихся в W).

Радиус полноты $r(\Lambda)$ комплексной последовательности

$$\Lambda = \{(\lambda_j, m_j)\}$$

($\lambda_j \in \mathbb{C}$, $m_j \in \mathbb{N}$ — кратность λ_j), определяется как инфимум положительных чисел r, таких, что экспоненциальная система

$$\mathrm{Exp}_\Lambda = \{e^{-i\lambda_j t}, te^{-i\lambda_j t}, \dots, t^{m_j-1}e^{-i\lambda_j t}, \ j = 1, 2, \dots\} \tag{5}$$

не полна в пространстве $C^\infty(-r; r)$ (или, что то же самое, в пространствах $C(-r; r)$, $\mathcal{L}^2(-r; r)$).

Более тонкая, чем обычная плотность, характеристика последовательности $\Lambda = \{(\lambda_j; m_j)\}$, связанная с вопросами полноты системы функций (5) — это *плотность Берлинга-Мальявена*, которую мы будем обозначать символом $D_{BM}(\Lambda)$. Она представляет собой специальную геометрическую характеристику последовательности, имеющую несколько эквивалентных определений. Согласно хорошо известной теореме Берлинга-Мальявена о радиусе полноты, справедливо равенство

$$r(\Lambda) = \pi D_{BM}(\Lambda).$$

Основные результаты о слабом спектральном синтезе в $\mathcal{E}_a$ для D-инвариантных подпространств общего вида содержатся в теореме 1.8.

Теорема 1.8. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*

1) *Если*

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = 2r(\mathrm{i}\sigma_W) < |I_W|,$$

где $|I_W|$ — длина промежутка I_W, то подпространство W допускает слабый спектральный синтез.

2) *В частности, если резидуальный промежуток I_W не компактен в $(-a; a)$, то подпространство W допускает слабый спектральный синтез.*

3) *W допускает спектральный синтез в классическом смысле тогда и только тогда, когда $I_W = (-a; a)$.*

Напомним, что целая функция ψ_0 называется *мультипликатором* пространства $\mathcal{P}_a$ если соответствие $\varphi \mapsto \varphi\psi_0$ определяет непрерывное отображение этого пространства в себя. Обозначим символом $\mathcal{M}_a$ множество всех мультипликаторов пространства $\mathcal{P}_a$.

Теорема 1.9. 1) *Пусть $W \subset \mathcal{E}_\infty$ — замкнутое подпространство с неограниченным резидуальным промежутком I_W.*

Если верна импликация

$$f \in W,\ S \in W^0 \Longrightarrow S(f(t+h)) = 0 \quad \forall h \in I \dotdiv \operatorname{ch}\operatorname{supp} S, \tag{6}$$

где $\operatorname{ch}\operatorname{supp} S$ — выпуклая оболочка носителя (Ω-ультра)распределения S, то W — D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез.

2) *Пусть $a < +\infty$, $W \subset \mathcal{E}_a$ — замкнутое подпространство с некомпактным в $(-a; a)$ резидуальным промежутком I_W, такое, что в W^0 имеется функционал S_0 со свойством $\mathcal{F}(S_0) \in \mathcal{M}_a$.*

Если импликация (6) верна, то W — D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез.

Для функционала $S \in \mathcal{E}'_a$ и относительно замкнутого интервала

$$I \subset (-a; a): \quad \widetilde{I} := I \dotdiv \operatorname{ch}\operatorname{supp} S \neq \emptyset,$$

рассмотрим *"локальный"оператор свертки $T_{S,I} : \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}(\widetilde{I})$*, определяемый формулой

$$g = T_{S,I}(f), \quad g(y) = S(f(x+y)),\ y \in \widetilde{I}.$$

Ядро этого оператора $W_{S,I} := \ker T_{S,I}$ — D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}_a$ с резидуальным промежутком $I_W = I$ и спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\mathcal{Z}_\varphi)$, где $\varphi = \mathcal{F}(S)$, $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество функции φ.

Теорема 1.10. *Ядро "локального"оператора свертки $W_{S,I}$ допускает слабый спектральный синтез.*

Теорема 1.11. *Пусть $\{S_\alpha\} \subset \mathcal{E}'_a$ — семейство функционалов, носитель каждого из которых есть $\{0\}$, $I \subset (-a;a)$ — относительно компактный промежуток, $0 \in I$.*

Если $\varphi_{\alpha_0} = \mathcal{F}(S_{\alpha_0}) \in \mathcal{M}_a$ для некоторого α_0, то D-инвариантное подпространство $W = \bigcap\limits_\alpha \ker T_{S_\alpha,I}$ допускает слабый спектральный синтез.

В главе 1 нами также установлено, что среди D-инвариантных подпространств W с дискретными спектрами σ_W, такими, что

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = 2r(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|, \tag{7}$$

имеются как допускающие слабый спектральный синтез (см., например, следствие 1.6), так и не допускающие его (теорема 1.12).

Глава 2 посвящена детальному изучению главных подмодулей в модуле Шварца $\mathbf{P}_a = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_a)$, где $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$. А именно, уточняется алгебраическая и топологическая структура главных подмодулей и выясняются условия их слабой локализуемости.

В главе 1 была обнаружена связь между слабой локализуемостью устойчивого подмодуля $\mathcal{J}$, такого, что

$$2r(\mathcal{Z}_\mathcal{J}) = 2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = d_\mathcal{J} - c_\mathcal{J},$$

и наличием в нем функции φ, порождающей слабо локализуемый главный подмодуль (следствие 1.3, теорема 1.3*).

Напомним, что $\mathcal{P}_a = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_a)$, где $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$ или $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$. Каждая ненулевая функция $\varphi \in \mathcal{P}_a$ порождает два, вообще говоря, различных подмодуля: главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi = \overline{\{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}}$ и подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$, состоящий из всех функций $\psi \in \mathcal{P}_a$, таких, что частное (ψ/φ) есть целая функция минимального типа при порядке 1. Ясно, что нулевое множество каждого из указанных подмодулей совпадает с $\mathcal{Z}_\varphi$, а индикаторный отрезок каждого из них равен индикаторному отрезку $[c_\varphi; d_\varphi]$ функции φ, где $c_\varphi = -h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\varphi = h_\varphi(\pi/2)$. Из самого определения подмодуля $\mathcal{J}(\varphi)$ следует, что он слабо локализуем. Поэтому справедливо включение

$$\mathcal{J}_\varphi \subseteq \mathcal{J}(\varphi).$$

Равенство

$$\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi) \tag{8}$$

эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ и верно не для каждой функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$.

Напомним, что *делителем пространства* $\mathcal{P}_\infty$ называется мультипликатор этого пространства $\varphi_0 \in \mathcal{M}_\infty$, для которого верна импликация

$$\Phi \in \mathcal{P}_\infty,\ \frac{\Phi}{\varphi_0} \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \frac{\Phi}{\varphi_0} \in \mathcal{P}_\infty.$$

Обсуждаются следующие две возможности реализации равенства (8) в модуле Шварца $\mathbf{P}_a$.
(I) Подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$, а значит, и главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$, содержит только функции вида $p\varphi$, $p \in \mathbb{C}[z]$. Иными словами, образующая φ такова, что совокупность целых функций минимального типа при порядке 1, представимых в виде Φ/φ, $\Phi \in \mathbf{P}_a$, совпадает с множеством многочленов $\mathbb{C}[z]$. В этом случае говорим, что оба подмодуля, $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$, *алгебраически порождены.*
(II) Множество $\mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi :\ \ p \in \mathbb{C}[z]\}$ не пусто, и для каждой функции $\Phi \in \mathcal{J}(\varphi)$ существует обобщенная последовательность многочленов p_α, такая, что $p_\alpha\varphi \to \Phi$ в топологии пространства $\mathbf{P}_a$.

Достаточное условие для реализации первой из указанных возможностей, (I), состоит в том, что функция φ — делитель алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$. Действительно, нетрудно видеть, что в этом случае

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi :\ \ p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{9}$$

Оказывается, что требование "φ — делитель алгебры $\mathbf{P}_\infty$"не является необходимым условием для справедливости (9). В качестве обоснования этого утверждения нами построен следующий пример.

Пусть $a > \pi$. Положим

$$\varphi(z) = \frac{s(z)}{s_1(z)} + \frac{\pi z s(z)}{s_0(z)},$$

где

$$s(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}, \quad s_1(z) = s(\sqrt{z}) = \frac{\sin \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}, \quad s_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{2^{2k}}\right).$$

Теорема 2.1. *Функция φ содержится в $\mathbf{P}_a$ и не является делителем алгебры $\mathbf{P}_\infty$. Подмодули $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi :\ \ p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Переходя к рассмотрению случая (II), введем обозначение

$$\mathbf{P}_{a,0} = \mathcal{F}(C_0^\infty(-a;a)).$$

Согласно теореме Пэли-Винера-Шварца [39, теорема 7.3.1], $\mathbf{P}_{a,0}$ — подпространство пространства $\mathbf{P}_a$, состоящее в точности из тех функций $\varphi \in \mathbf{P}_a$, которые убывают вдоль вещественной оси быстрее любой функции вида $|x|^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Заметим, что в случае (II) имеется очевидное необходимое условие слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$: подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ должен содержать элементы вида $\omega\varphi$, где ω — целая функция минимального экспоненциального типа, отличная от многочлена, то есть должно выполняться соотношение

$$\mathcal{J}_\varphi \setminus \{p\varphi :\ p \in \mathbb{C}[z]\} \neq \emptyset, \tag{10}$$

Мы устанавливаем необходимое и достаточное условие, при котором функция φ порождает главный подмодуль, удовлетворяющий соотношениям (10).

Теорема 2.2. *Главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ содержит функции Φ вида*

$$\Phi = \omega\varphi, \quad \omega - \textit{целая функция, отличная от многочлена,}$$

тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$.

Из теоремы 2.2 следует, что ожидать справедливости включения $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$ для всех функций

$$\Phi \in \mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi,\ p \in \mathbb{C}[z]\}$$

можно только, если $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$.

Если функция φ, порождающая главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$, лежит в $\mathbf{P}_{a,0}$, то задача о слабой локализуемости этого подмодуля оказывается эквивалентной задаче о весовой аппроксимации многочленами в некоторой *(вообще говоря, неметризуемой!)* топологии. Из результатов главы 1 следует, что эта задача может не иметь положительного решения. Мы строим примеры порождающих функций φ, показывающе, что и положительное решение возможно. Эти примеры подводят к общему условию слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, имеющему форму ограничений на поведение функции $\ln|\varphi|$.

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$. Не ограничивая общности, считаем, что $0 \notin \mathcal{Z}_\varphi$. Положим

$$u_*(x) = \ln U_*(x),$$

где

$$U_*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

$M_n = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |x^n \varphi(x)|$, $n = 0, 1, \ldots$ Отметим, что, так как $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, последовательность $\{M_n\}$ неквазианалитическая, функция $U_*(x)$ – всюду конечная, четная, возрастающая при $x \geq 0$ ($x \leq 0$), а функция $u_*(e^t)$ выпукла при всех $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что

$$\ln|\varphi(x)| \leq -u_*(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.4. *Предположим, что существует постоянная $L_0 > 0$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется $x' \in \mathbb{R}$ со свойствами $|x - x'| \leq L_0 u_*(x)$ и $\ln|\varphi(x')| \geq -L_0 u_*(x')$.*
Тогда подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем.

Доказательство теоремы 2.4 существенно использует результаты Р.С.Юлмухаметова о расщеплении функции из алгебры Шварца на произведение нескольких "почти равных"сомножителей (решение факторизационной проблемы Л. Эренпрайса).

Для получения удобного критерия слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в терминах аппроксимации многочленами в весовой норме, определяемой функцией φ, мы уточняем топологическую структуру главного подмодуля. А именно, доказываем, что, хотя топология пространства $\mathbf{P}_a$ неметризуемая (оно является локально-выпуклым пространством типа (LN^*)), главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ совпадает с *секвенциальным* замыканием множества $\{p\varphi \ p \in \mathbb{C}[z]\}$, то есть для любой функции $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$ имеется *счетная* последовательность многочленов $\{p_k\}_{k=1}^\infty$, такая, что

$$p_k\varphi \to \Phi$$

в топологии $\mathbf{P}_a$ (эквивалентно, в норме одного из пространств P_n). Этот факт составляет содержание **теоремы 2.6.**

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, $u(z)$ — наибольшая субгармоническая миноранта функции

$$\left(h_\varphi(\arg z)|z| - \ln|\varphi(z)|\right),$$

где h_φ — индикатор функции φ,

$$H_u = \{f \in H(\mathbb{C}) : \quad \|f(z)\|_u = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-u(z)} < +\infty\}.$$

Теорема 2.7. *Главный подмодуль J_φ, порожденный функцией $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, слабо локализуем тогда и только тогда, когда каждая функция $f \in H_u$ аппроксимируется многочленами в норме*

$$\|f\|' = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp\left(-u(z) - 2\ln(2 + |z|)\right).$$

Теорема 2.6 также позволяет уточнить один результат работы [45], касающийся D-инвариантных подпространств пространства $C^\infty(-a; a)$, двойственных к устойчивым подмодулям с критическим соотношением характеристик (7) (равенством половины длины индикаторного отрезка радиусу полноты нулевого множества). Это уточнение содержится предложении 2.1.

Предложение 2.1. *Последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *синтезируема тогда и только тогда, когда* $\Lambda = \mathcal{Z}_\varphi$ *для некоторой* $\varphi \in \mathbf{P}_a$*, порождающей в* $\mathbf{P}_a$ *слабо локализуемый главный подмодуль.*

Отметим, что, в силу двойственности между подмодулями в $\mathcal{P}_a$ и D-инвариантными подпространствами в $\mathcal{E}_a$, вместе с каждым доказанным утверждением о слабой локализуемости главного подмодуля, порожденного функцией $\varphi \in \mathcal{P}_a$, возникает и эквивалентное двойственное утверждение о допустимости слабого спектрального синтеза D-инвариантным подпространством

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \quad S(D^k f) = 0, \ k = 0, 1, 2, \dots\},$$

где S — (Ω-ультра)распределение, преобразование Фурье-Лапласа которого есть φ.

Например, эквивалентной двойственной теоремой для теоремы 2.7 будет
Теорема 2.7^{dual}**.** *D-инвариантное подпространство W_S пространства Шварца $C^\infty(-a;a)$, порожденное регулярным распределением $S \in C_0^\infty(-a;a)$, допускает спектральный синтез в слабом смысле тогда и только тогда, когда целая функция $\varphi = \mathcal{F}(S)$ удовлетворяет условию теоремы* 2.7 *о весовой аппроксимации многочленами.*

В **главе 3** мы изучаем структуру нулевых множеств и некоторые другие свойства делителей алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$ и пространств $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где

$$\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{или} \quad \Omega = \{r_n\omega\}, \ \ 0 < r_n \nearrow 1, \ n \to \infty, \tag{11}$$

ω — канонический вес.

Мотивацией к исследованию является прежде всего то, что нулевые множества делителей φ указанных пространств, с точностью до множителя $(-\mathrm{i})$, являются спектрами D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$ из класса D-инвариантных подпространств с критическим соотношением характеристик:

$$2r(\mathrm{i}\sigma_W) = 2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|.$$

А именно, если $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество делителя, $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, то

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \quad S(D^k f) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

— D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез, причем

$$\sigma_{W_S} = -\mathrm{i}\mathcal{Z}_\varphi, \quad I_{W_S} = [-h_\varphi(-\pi/2); h_\varphi(\pi/2)],$$

и значит,

$$|I_{W_S}| = 2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_{W_S}).$$

Кроме того, известно, что если φ — делитель $\mathbf{P}_\infty$ или $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$ для Ω, определенной в (11), $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, то оператор свертки T_S, порожденный (Ω-ультра)-распределением в соответствующем пространстве бесконечно дифференцируемых функций на прямой, сюръективен (см. [49] — для пространства $C^\infty(\mathbb{R})$,

[60] — для пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, если $\Omega = \{n\omega\}$, [22] — для пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, если $\Omega = \{r_n\omega\}$, $0 < r_n \nearrow 1$). Ядро оператора T_S есть D-инвариантное подпространство соответствующего пространства $\mathcal{E}_\infty$, допускающее спектральный синтез, причем функции $\ker T_S$ не только аппроксимируются экспоненциальными полиномами в топологии пространства $\mathcal{E}_\infty$, но и представляются в виде ряда (со скобками) из экспоненциальных мономов, также сходящегося в $\mathcal{E}_\infty$ (см. работы [49], [60], [22]). Важно отметить также, что делители алгебры Шварца и их нулевые (под)множества играют ключевую роль в исследовании вопроса о представлении D-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(-a;a)$ в виде прямой суммы (алгебраической и топологической) его резидуального W_{I_W} и экспоненциального $\overline{\operatorname{span}\operatorname{Exp} W}$ подпространств и справедливости для W фундаментального принципа в слабом смысле.

Напомним, что функции $\varphi \in \mathcal{P}_\infty$ являющиеся делителями в $\mathcal{P}_a$ называют еще *медленно убывающими* в $\mathcal{P}_\infty$, то есть удовлетворяющими аналитическим критериям из работ [49], [60, Теорема 2.6], [22, теорема 2]. Условия этих критериев, имеющие форму оценок снизу для функции $\ln|\varphi|$, называются *условиями медленного убывания в пространстве* $\mathcal{P}_\infty$. Мы в равной мере используем оба эквивалентных термина: "делитель"и "медленно убывающая функция".

Еще Л. Эренпрайс сформулировал в своей работе [49, §6] задачу о нахождении условий медленного убывания функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ в терминах каких-либо ограничений на ее нулевое множество $\mathcal{Z}_\varphi$. Там же он получил одно необходимое условие [49, предложение 6.1]:
если функция $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ медленно убывающая и $\mathcal{Z}_\psi = \{(\mu_j, m_j)\}$ — ее нулевое множество ($\mu_j \neq \mu_k$, $j \neq k$, m_j — кратность μ_j), то

$$\varliminf_{j\to\infty} \frac{m_j}{|\operatorname{Im}\mu_j| + \ln|\operatorname{Re}\mu_j|} < \infty. \tag{12}$$

Приведем другие известные нам результаты в указанном направлении. Первый из них состоит в том, что если нулевое множество $\mathcal{Z}_\varphi$ целой функции φ является ограниченным возмущением целочисленной последовательности, то есть для некоторого $L > 0$ и всех k выполнено

$$|\lambda_k - k| \leq L, \quad \lambda_k \in \mathcal{Z}_\varphi, \tag{13}$$

то φ — медленно убывающая функция ([62, теорема XXXIII], а также [38, теорема 1.1 и следствие]).

В работах [37] и [42] рассмотрены целые функции, нули которых имеют вид

$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{14}$$

где $l(t)$ — неограниченная функция аргумента $t \geq 0$.

В 2007 году А.М. Седлецкий доказал существование целой функции типа синуса, нули которой имеют асимптотику

$$\lambda_k = k + B_1 + B_2 \ln|k| + O(1), \quad |k| \to \infty, \quad B_1 \in \mathbb{C},\ B_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(см. [37, теорема 2]). Тем самым, был построен один из первых примеров медленно убывающей функции в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$, нулевое множество которой не удовлетворяет условию (13).

Несколько ранее, в 2002 году, авторами работы [61, § 4] было отмечено, без доказательства, что для последовательности

$$\lambda_k = k + \ln^+|k|, \quad k \in \mathbb{Z},$$

формула

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

также определяет целую функцию типа синуса.

Напомним, что *функцией типа синуса* называется целая функция φ, имеющая экспоненциальный тип и удовлетворяющая оценкам

$$C_1 e^{\pi|\operatorname{Im} z|} \le |\varphi(z)| \le C_2 e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \ge h_\varphi > 0, \ \ C_1,\ C_2 > 0. \tag{15}$$

Очевидно, все функции типа синуса являются делителями как алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$, так и пространств $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где Ω определяется формулой (11).

А.А. Юхименко доказал следующее утверждение.

Теорема V [42, теорема 1]. *Пусть $l(t)$ – положительная дифференцируемая вогнутая функция на положительной полуоси, такая, что*

$$l(t) = O(t^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Для того чтобы последовательность

$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{16}$$

была множеством нулей некоторой функции типа синуса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$t l'(t) = O(1), \quad t \to +\infty.$$

В параграфе 3.2 мы изучаем условия на возмущающую функцию l, при которых функция с нулевым множеством, определяемым формулами (16), будет делителем алгебры $\mathbf{P}_\infty$. При этом мы предъявляем более слабые, чем в работе [42], априорные требования к регулярности поведения функции l.

Предлагаемая нами техника отличается от метода работы [42]. Тем не менее, следует отметить, что доказательство первого утверждения технической леммы 3.1 мы проводим при помощи стандартных рассуждений, сходных с рассуждениями в доказательстве теоремы 1 работы [42, теорема 1]. Также, введенная автором в этом доказательстве функция $\rho(t) = 1/2 - \{t\}$, где $\{a\}$ — дробная часть числа $a \in \mathbb{R}$, используется нами при обосновании утверждения вспомогательной леммы 3.2. Приведем здесь точную формулировку одного из полученных нами результатов.

Пусть $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ — положительная вогнутая функция и $l(0) = 0$. Обозначим через E — множество тех значений $t \in (0; +\infty)$, для которых существует производная $l'(t)$, и положим

$$p(t) = \begin{cases} l'(t), & t \in E, \\ \inf\{l'(s),\ s :\ s \in E,\ s < t\}, & t \in (0; +\infty) \setminus E. \end{cases}$$

Функция p убывает на положительной полуоси и

$$l(t) = \int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s.$$

Теорема 3.2 *Пусть l — положительная вогнутая функция на $[0; +\infty)$, $l(0) = 0$, и*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\ln |l(t)|}{\ln t} \in [0; 1/2),$$

а функция φ определена формулой

$$\varphi(z) = \lim_{R \to \infty} \prod_{|\lambda_k| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right),$$

где

$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Для того, чтобы φ принадлежала алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ и была ее делителем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{p(t)t}{\ln t} = O(1), \quad t \to +\infty.$$

Параграф 3.3 посвящен изучению условий на функцию l, при которых последовательность

$$\{\lambda_k\}, \quad \lambda_k = k + l(|k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

представляет собой нулевое множество делителя пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где Ω определена в (11). Один из полученных в параграфе 3.3 результатов — это следующая теорема.

Теорема 3.6. *Предположим, что функция $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ при некотором $\alpha \in (0; 1)$ удовлетворяет условию*

$$l(t) - l(s) = O(t^\alpha - s^\alpha), \quad t, s \to \infty$$

а также, что существуют дифференцируемая функция $\mu : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ и строгий вес ν, со свойствами

$$\mu'(t) = O\left(\frac{\mu(t)}{t}\right), \quad t \to \infty,$$
$$\int^\infty \frac{\nu(t)l(t)}{t^2}\mathrm{d}t < \infty;$$

при этом

$$l(t) - l(s) = O(\mu(t) - \mu(s)), \quad t, s \to \infty,$$
$$\mu(t) = O(\nu(t)), \quad t \to \infty,$$

Тогда для любого канонического веса ω, такого, что

$$\nu(x) = O(\omega(x)) \quad \big(\nu(x) = o(\omega(x))\big), \quad x \to \infty,$$

функция

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

— делитель пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$ с $\Omega = \{n\omega\}$ (соответственно, с $\Omega = \{r_n\omega\}$).

В параграфе 3.4 исследуются необходимые и достаточные (как по отдельности, так и вместе) условия медленного убывания функций φ в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$, формулируемые в терминах ограничений на считающие функции и другие геометрические характеристики нулевых множеств $\mathcal{Z}_\varphi$.

Приведем формулировки двух теорем, иллюстрирующие результаты параграфа 3.4.

Пусть φ — функция из алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$ с множеством нулей

$$\mathcal{Z}_\varphi = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Обозначим $n(z, t)$ — число точек λ_j в круге $|w - z| \leq t$, $\nu(t)$ — число точек λ_j в промежутке $(0; t]$ при $t > 0$ и $(-\nu(t))$ — число точек λ_j в промежутке $[t; 0)$ при $t < 0$;

$$2\Delta = \lim_{j\to\infty} \frac{j}{|\lambda_j|}.$$

Теорема 3.8. *Если φ — делитель алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$, $\mathcal{Z}_\varphi \subset \mathbb{R}$, то*

$$\nu(t) - \Delta t = O(\ln^2 |t|), \quad |t| \to \infty.$$

Необходимое условие из теоремы 3.8 нельзя усилить. Подробнее об этом сказано в параграфе 3.4.

Теорема 3.9. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$, и существует конечный $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{j}{\lambda_j} = \Delta$.*

Для того чтобы целая функция экспоненциального типа

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right)$$

принадлежала алгебре Шварца и была ее делителем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия

$$n^+(0;x) - \Delta x = O(\ln^2 x), \quad x \to \infty,$$

$$\varlimsup_{A\to\infty} \varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{A \ln x} \left| \int_{A\ln x}^{x \ln x} \frac{n(0,t) - n(x + \mathrm{i}A\ln x, t)}{t} \mathrm{d}t \right| < +\infty.$$

В теореме 3.9 символом $n^+(0;x)$ обозначено число точек последовательности Λ в промежутке $(0;t]$, а символом $n(z,t)$ — число точек последовательности $\Lambda \bigcup (-\Lambda) = \{\pm\lambda_j\}$ в круге $|w - z| \le t$.

В параграфе 3.5 речь пойдет о делителях алгебры Шварца, нулевые множества которых содержатся в горизонтальной криволинейной полосе:

$$Z_\varphi \subset \{z : \quad |\mathrm{Im}\, z| < \alpha(|\mathrm{Re}\, z|)\},$$

где $\alpha : \mathbb{R} \to [1; +\infty)$ — четная функция, удовлетворяющая некоторым условиям роста и регулярности поведения. В частности, будут исследованы аналоги оценок вида (15) для таких функций.

Прежде всего сформулируем одно естественное обобщение требования (15) для функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, индикаторная диаграмма которой есть симметричный относительно начала координат отрезок мнимой оси длины 2σ:
для точек z, лежащих вне криволинейной полосы

$$\{z : \quad |\mathrm{Im}\, z| < \mathrm{const} \ln(|\mathrm{Re}\, z| + e)\}, \tag{17}$$

имеет место оценка

$$\ln |\varphi(z)| \ge \sigma |\mathrm{Im}\, z| - \mathrm{const} \ln(|\mathrm{Re}\, z| + e). \tag{18}$$

В этом случае все нули функции φ лежат в криволинейной полосе (17), и, в силу теоремы о минимуме модуля (об оценке снизу модуля аналитической функции в круге) [30, Ch. 1, Sec. 8, Th. 11] и аналитического критерия Л.Эренпрайса [49], φ — делитель алгебры $\mathbf{P}_\infty$.

Из доказываемого более общего факта, теоремы 3.11, будет следовать, справедливость обратного к только что сформулированному обобщению (15): *для любой медленно убывающей функции, все нули которой содержатся в полосе* (17), *верна оценка* (18).

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель этой алгебры, $\mathcal{Z}_\varphi = \{\lambda_j\}$ — ее нулевое множество. Без ограничения общности, всюду далее считаем, что

$$\varphi(0) = 1, \quad h_\varphi(-\pi/2) = h_\varphi(\pi/2) = a_\varphi \quad \text{— тип} \quad \varphi.$$

И пусть $\alpha : \mathbb{R} \to [1; +\infty)$ — четная функция, возрастающая на $[0; +\infty)$ и удовлетворяющая условиям

$$\alpha(e^s) \quad \text{— выпуклая функция на} \quad \mathbb{R},$$
$$\exists K > 1 : \ \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\alpha(Kx)}{K\alpha(x)} < 1.$$

Теорема 3.11 *Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель этой алгебры и для всех $\lambda_j \in \mathcal{Z}_\varphi$, за исключением, быть может, конечного числа точек, справедливо неравенство*

$$|\mathrm{Im}\,\lambda_j| \le \alpha(|\mathrm{Re}\,\lambda_j|).$$

Тогда существует постоянная $C_1 > 0$, такая, что

$$\ln|\varphi(z)| \ge a_\varphi|\mathrm{Im}\,z| - C_1\alpha(|z|), \quad \text{для всех} \quad z : \ |\mathrm{Im}\,z| \ge M_1\alpha(|\mathrm{Re}\,z|)$$

Криволинейная полоса (17) и оценка (18) соответствуют частному случаю теоремы 3.11, когда $\alpha(x) = \ln(x + e)$.

В **главе 4** мы рассматриваем пространство Шварца $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a; a)$ и изучаем условия представимости D-инвариантного подпространства W в этом пространстве в виде прямой (алгебраической и топологической) суммы:

$$W = \overline{\mathrm{span}\,\mathrm{Exp}\,W} \oplus W_{I_W}, \tag{19}$$

где $\mathrm{Exp}\,W$ — запас экспоненциальных одночленов, содержащихся в W, I_W — резидуальный промежуток этого подпространства.

Нам удается выяснить, что условия справедливости (19) для нетривиального D-инвариантного подпространства с бесконечным дискретным спектром аналогичны по форме условиям допустимости слабого спектрального синтеза, приведенным в главе 1 (теорема 1.8). При этом вместо плотности Берлинга-Мальявена $D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W)$ нужно использовать другую, более тонкую, характеристику последовательности $\Lambda := \mathrm{i}\sigma_W$, которую мы обозначим $D_{sd}(\Lambda)$.

Напомним, что алгебра Шварца $\mathbf{P}_\infty$ — это аналитическая реализация посредством преобразования Фурье-Лапласа сильного сопряженного к пространству $C^\infty(\mathbb{R})$, а медленно убывающие функции в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ суть в точности делители этой алгебры.

Пусть последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ имеет конечную плотность Берлинга-Мальявена: $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$.
Если Λ не является нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, то полагаем $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$;
в противном случае, $D_{sd}(\Lambda)$ определяем как инфимум множества всех положительных чисел c, таких, что в алгебре $\mathbf{P}_\infty$ имеется медленно убывающая функция экспоненциального типа πc, равная нулю на Λ.

Для разрешимости задачи о представлении D-инвариантного подпространства с бесконечным дискретным спектром в виде прямой суммы (19) величина $\pi D_{sd}(\Lambda)$ играет роль, аналогичную роли радиуса полноты $\rho(\Lambda)$ в теореме 1.8.

Для промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ символом $|I|$ обозначается его длина (конечная или равная $+\infty$).

Основные результаты, полученные по вопросу о представлении D-инвариантного подпространства W в виде (19), содержатся в теоремах 4.1, 4.2.

Теорема 4.1. I. *Пусть W — D-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_a$ с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W, причем $|I_W| < +\infty$*
1) *Если $|I_W| > 2\pi D_{sd}(\Lambda)$ и выполнены оба соотношения*

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j|} < +\infty, \qquad \varliminf_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j|} > -\infty, \tag{20}$$

то W имеет вид (19).
2) *Обратно, пусть W имеет вид* (19).
Тогда $|I_W| \geq 2\pi D_{sd}(\Lambda)$.
При этом, если $I_W \Subset (a; b)$, то справедливы оба неравенства (20). *Если же включение $I_W \subset (a; b)$ не компактно и точка a (или точка b) — граничная для I_W, то справедливо первое (соответственно, второе) из соотношений* (20).

II. *Среди D-инвариантных подпространств W с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W длины $2\pi D_{sd}(\Lambda)$ имеются как подпространства, допускающие представление* (19), *так и не допускающие его.*

Для D-инвариантных подпространств с дискретным спектром и резидуальным промежутком бесконечной длины имеет место следующий критерий.

Теорема 4.2. *Пусть W — D-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_\infty$ с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и неограниченным резидуальным промежутком $I_W = (-\infty; d]$ (либо $I_W = [c; +\infty)$).*

Представление (19) *для подпространства* W *верно тогда и только тогда, когда* $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ *и выполнено первое* (*соответственно, второе*) *из соотношений* (20).

Из теорем 4.1, 4.2 вытекает такое утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть* W — D*-инвариантное подпространство пространства* $\mathcal{E}_a$ *с дискретным спектром* $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ *и резидуальным промежутком* I_W.
Если $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$, *то представление* (19) *не будет иметь места.*

Для представления функций из D-инвариантных подпространств вида (19), при определенных дополнительных условиях имеется следующее уточнение.

Теорема 4.3. *Пусть* D*-инвариантное подпространство* $W \subset \mathcal{E}_a$ *имеет вид* (19), *и выполнено хотя бы одно из условий:* $|I_W| = +\infty$ *или* (20).
Тогда существует разбиение последовательности Λ *на попарно не пересекающиеся конечные подмножества:*

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k, \quad \Lambda_k \bigcap \Lambda_m \neq \emptyset, \ k \neq m,$$

такое, что любая функция $f \in W$ *единственным образом представляется в виде суммы* $f = f_1 + f_2$, *где*

$$f_1 \in W_{I_W}, \quad f_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_j \in \Lambda_k} p_j(t) e^{-\mathrm{i}\lambda_j t} \right),$$

p_j — *многочлены, причем внешняя сумма* (*по* k) *для* f_2 *сходится в топологии пространства* $\mathcal{E}_\infty = C^\infty(\mathbb{R})$.

Глава 5 посвящена рассмотрению важного в приложениях вопроса о сохранении принадлежности целой функции какому-либо специальному классу $Q \subset H(\mathbb{C})$, выделеннному, например, ограничениями на рост, при возмущениях ее нулей. Всюду в этой главе обозначаем символами $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}'_a$ пространство Шварца $C^\infty(-a; a)$ и сильное сопряженное к нему.

Первые результаты об устойчивости оценок роста целой функции при возмущении ее нулей относятся, по-видимому, к функции $\sin \pi z$. Они были получены в классических монографиях [62, глава VI] (теоремы XXXIII, XXXIV), [30], см. также [38]. Вопрос об устойчивости классов целых функций, близких к рассматриваемым в диссертационной работе как по структуре, так и по их роли в приложениях к другим задачам анализа, изучался в работах [31], [35], [36]). В работе [31] Б.Я. Левиным и И.В. Островским найдены необходимые и достаточные условия на ограниченные(!) возмущения нулевого множества, сохраняющие класс функций типа синуса. Таким образом, в частности, установлено, что *произвольные ограниченные возмущения нулей не сохраняют класс функций типа синуса.* А.М. Седлецкий в [35], [36] получил условия на возмущение нулевого множества, при которых сохраняется каждый из классов функций: $\mathcal{F}(C[-a;a])$, $\mathcal{F}(L^q(-a;a))$, $1 \le q < \infty$, $\mathcal{F}(L^q_u)$, где u — некоторый вес, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье-Лапласа. В целом, эти условия представляют собой требование довольно быстрого сближения вещественных частей невозмущенной и возмущенной последовательностей нулей при неограниченном возрастании индекса j.

Мы изучаем сохранение класса Q целых функций при возмущениях их нулевых множеств для случая, когда Q есть одно из шести специальных подмножеств алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_\infty)$ — образа при преобразовании Фурье-Лапласа пространства всех распределений с компактными носителями на вещественной прямой. Как и выше, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье-Лапласа (Ω-ультра)распределения.

Опишем подробнее эти подмножества, попутно упоминая об их роли в приложениях.

Хорошо известно, что каждую функцию $s \in \mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R})$ можно рассматривать как *регулярный* функционал, действующий в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$. Образ $\mathbf{P}_{\infty,0} = \mathcal{F}(\mathcal{D})$ совпадает с совокупностью всех целых функций экспоненциального типа, убывающих вдоль вещественной оси быстрее любой степени $|x|^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [39, теорема 7.3.1]).

Пусть $\psi \in \mathbf{P}_\infty$, $\mathcal{Z}_\psi = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ — ее нулевое множество, причем

$$|\mu_1| \le |\mu_2| \le \dots .$$

Класс P определим как совокупность всех функций $\psi \in \mathbf{P}_\infty$, нулевые множества которых удовлетворяют следующим двум условиям:
(Z1): $\varlimsup\limits_{j\to\infty} \frac{|\operatorname{Im}\mu_j|}{\ln|\mu_j|} < +\infty$.
(Z2): число точек $\mu_j \in \mathcal{Z}_\psi$ таких, что $|\operatorname{Re}\mu_j - x| \le 1$, есть величина $O(\ln|x|)$, $|x| \to \infty$.

Аналогичным образом определяем *класс P_0*:
$\psi \in P_0$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \mathbf{P}_{\infty,0}$ и ее нулевое множество удовлетворяет условиям *(Z1)* и *(Z2)*.

Третий из рассматриваемых нами классов целых функций — *класс P_{sd}* — образован медленно убывающими в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ функциями (делителями этой алгебры), нулевые множества которых удовлетворяют условию *(Z1)*. Согласно результатам, полученным в главе 3, для нулевого множества медленно убывающей функции условие *(Z2)* является следствием условия *(Z1)* (лемма 3.6).

Класс P_{wsd}, по определению, состоит из тех функций $\varphi \in P$, для которых

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\},$$

а *класс* P_{nwsd} — из функций $\varphi \in P$, таких, что

$$\mathcal{J}(\varphi) \supsetneqq \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

И наконец, *класс* P_{syn} определим как совокупность функций $\psi \in P$, таких, что $\mathcal{J}_\psi$ — слабо локализуемый подмодуль в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$.

Рассмотрение класса P_{syn} представляет интерес в связи с тем, что, согласно предложению 2.1 из главы 2, комплексная последовательность Λ есть нулевое множество функции из этого класса тогда и только тогда, когда эта последовательность *синтезируема* и удовлетворяет условиям *(Z1)*, *(Z2)*. Синтезируемые последовательности были введены недавно в работе [45], в связи с задачей спектрального синтеза для оператора дифференцирования в пространстве Шварца, точнее, в связи с изучением ситуации, когда для D-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(-a;a)$ имеет место равенство

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|, \tag{21}$$

где, как и выше, σ_W — спектр подпространства W, I_W — его резидуальный промежуток.

Из результатов глав 1–4 и определений классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd}, P_{syn} вытекают следующие соотношения:

$$P = P_0 \bigcup P_{wsd} \bigcup P_{nwsd},$$

при этом

$$P_{wsd} \bigcap P_{nwsd} = P_0 \bigcap P_{wsd} = P_0 \bigcap P_{nwsd} = \emptyset,$$
$$P_{sd} \subsetneqq P_{wsd} \subsetneqq \ P_{syn} \subsetneqq P,$$
$$P_{syn} \setminus P_{wsd} \subsetneqq P_0,$$
$$P_{syn} = P_{wsd} \bigcup \left(P_{syn} \bigcap P_0\right).$$

Отметим, что условие *(Z1)* означает принадлежность всех точек μ_j, $j \geq j_0$, криволинейной полосе $|y| \leq C_\psi \ln(|x|+2)$, а условие *(Z2)* представляет собой некоторое ограничение на степень сгущения точек μ_j. Эти условия выполнены, например, для последовательности $\{\mu_j\}$, целиком лежащей в какой-либо горизонтальной полосе и такой, что

$$n(z,1) = O(\ln|z|), \quad |z| \to \infty,$$

где $n(z,t)$ обозначает число точек μ_j в круге $|w-z| \leq t$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$, $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ — нулевые множества целых функций φ и ψ, соответственно. Следуя А.М. Седлецкому [35, глава 5], будем писать

$\Lambda, \mathcal{M} \in (A)$, если эти последовательности связаны некоторым симметричным условием (A), то есть

$$\Lambda, \mathcal{M} \in (A) \Longleftrightarrow \mathcal{M}, \Lambda \in (A),$$

и будем говорить, что *условие* (A) *сохраняет класс целых функций* Q, если из $\Lambda, \mathcal{M} \in (A)$ следует, что

$$\varphi \in Q \Longleftrightarrow \psi \in Q.$$

В качестве условия (A) мы рассматриваем следующие соотношения, связывающие Λ и $\mathcal{M}$:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(1), \quad \mathrm{Im}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(\ln|\mu_j|), \quad j \to \infty;$$

при выполнении этих соотношений будем говорить, что последовательности Λ и $\mathcal{M}$ получаются друг из друга *p-возмущением.*

Основные результаты о сохранении введенных классов целых функций при возмущениях их нулей содержатся в теоремах 5.1 и 5.2.

Теорема 5.1. 1. *Пусть для последовательности* $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ *выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность* $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *получена p-возмущением из* $\mathcal{M}$.
Тогда последовательности $\mathcal{M}$ *и* Λ *одновременно (не) являются нулевыми множествами функций, принадлежащих каждому из классов:* P *и* P_0.

2. *Пусть для последовательности* $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ *выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность* $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *получена p-возмущением из* $\mathcal{M}$.
Тогда последовательности $\mathcal{M}$ *и* Λ *одновременно (не) являются нулевыми множествами функций из класса* P_{syn}.

3. *Пусть для последовательности* $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ *выполнено условие (Z1) и последовательность* Λ *получается из* $\mathcal{M}$ *посредством p-возмущения.*
Тогда последовательности $\mathcal{M}$ *и* Λ *одновременно (не) являются нулевыми множествами функций из класса* P_{sd}.

4. *Пусть для последовательности* $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ *выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность* $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *получена p-возмущением из* $\mathcal{M}$.
Тогда последовательности $\mathcal{M}$ *и* Λ *одновременно (не) являются нулевыми множествами функций, принадлежащих каждому из классов:* P_{wsd} *и* P_{nwsd}.

Для последовательности нулей $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ произвольной функции ψ из класса Q (где Q — один из классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} или P_{syn}) рассмотрим возмущенную последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ такую, что

$$\lambda_j - \mu_j = l_j + \mathrm{i}\beta_j, \tag{22}$$

где $l_j = l(j)$, l — вогнутая положительная дифференцируемая функция, определенная на $[0; +\infty)$ и удовлетворяющая условиям

$$l'(t) < 1, \quad l(t) \le \mathrm{const} \cdot t^\gamma, t \in [0; +\infty),$$

при некотором $\gamma \in (0; 1/2)$ и

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\delta_0 l(t)}{l(\delta_0 t)} < 1$$

при некотором $\delta_0 \in (0; 1)$.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы соотношение* (22) *между невозмущенным* $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ *и возмущенным* $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *нулевыми множествами сохраняло каждый из классов* P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} *или* P_{syn}, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$l_j = O(1), \qquad \beta_j = O(\ln|\mu_j|), \qquad j \to \infty.$$

В параграфе 5.2 доказываются вспомогательные утверждения и проделывается аналитическая работа, подводящая к намеченной цели. Доказательства основных теорем о сохранении классов P, P_0, P_{sd}, P_{syn} представлены в параграфе 5.3.

Параграф 5.4 содержит применения основных результатов к задаче спектрального синтеза в пространстве Шварца, к вопросам сохранения свойства синтезируемости последовательности и свойства полноты и (бес)конечности недостатка (избытка) экспоненциальных систем в пространствах $L^p(-a; a)$ $(1 < p < +\infty)$ и $C[-a; a]$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть для последовательности* $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ *выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность* $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *получена p-возмущением из* $\mathcal{M}$.

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ *и* Λ *синтезируемы или нет одновременно.*

Теорема 5.4 *Пусть для последовательности* $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ *выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность* $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *получена p-возмущением из* $\mathcal{M}$.

Тогда

1) $D_{sd}(\Lambda) = D_{sd}(\mathcal{M})$;

2) *для D-инвариантных подпространств* W *и* $\widetilde{W}$ *со спектрами* $(-\mathrm{i}\mathcal{M})$ *и* $(-\mathrm{i}\Lambda)$ *и резидуальными промежутками* I, $\widetilde{I}$, *соответственно, пары соотношений*

$$W = W_I \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W} \quad \text{и} \quad D_{sd}(\mathcal{M}) < |I|$$

и

$$\widetilde{W} = W_{\widetilde{I}} \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} \widetilde{W}} \quad \text{и} \quad D_{sd}(\Lambda) < |\widetilde{I}|$$

имеют место или нет одновременно.

Для последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ обозначаем символом Exp_Λ соответствующую систему экспоненциальных одночленов и предположим, что

$$d_\Lambda := D_{BM}(\Lambda) < \infty.$$

Если система Exp_Λ полна в пространстве $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$ или в пространстве $C[-a;a]$, где $a = \pi d_\Lambda$, то ее *избытком* $E_p(\Lambda)$ ($p = +\infty$ соответствует пространству $C[-a;a]$) называется величина $m \in \mathbb{Z}_+ \bigcup \{+\infty\}$, такая, что, в случае конечного m, система, полученная удалением m элементов из Exp_Λ, полна в соответствующем пространстве, а полученная удалением $(m+1)$ элемента — уже нет; избыток $E_p(\Lambda)$ системы Exp_Λ равен $+\infty$, если после удаления любого конечного числа элементов оставшаяся система полна.

Для неполной в $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$ или в $C[-a;a]$ системы Exp_Λ ее *избытком* $E_p(\Lambda)$ ($p = +\infty$ соответствует пространству $C[-a;a]$) называется величина $m \in (-\mathbb{N}) \bigcup \{-\infty\}$, такая, что после добавления $(-m-1)$ элемента к Exp_Λ полученная система еще не полна, а после добавления $(-m)$ элементов — полна в соответствующем пространстве; избыток $E_p(\Lambda)$ неполной системы Exp_Λ равен $-\infty$, если добавление к ней любого конечного числа элементов приводит к неполной системе.

Пусть $\mathcal{L} = \{\Lambda\}$ — совокупность всех последовательностей $\Lambda \subset \mathbb{C}$,

$$0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots,$$

удовлетворяющих условиям *(Z1)*, *(Z2)*, то есть таких, что

$$|\mathrm{Im}\,\lambda_k| = O(\ln|\lambda_k|), \quad k \to +\infty.$$

$$n(t+1) - n(t) = O(\ln t), \quad t \to +\infty,$$

где $n(t)$ — считающая функция последовательности $\mathrm{Re}\,\Lambda$.

Далее, пусть $\{\nu_k\} \subset \mathbb{C}$ и

$$\mathcal{M} = \{\mu_k\}, \quad \mu_k = \lambda_k + \nu_k$$

— *возмущенная последовательность.*

Теорема 5.5. *Для того чтобы оба избытка, $E_p(\mathcal{M})$ и $E_p(\Lambda)$, были конечны или бесконечны и при этом одного знака:*

$$E_p(\mathcal{M}) = E_p(\Lambda) = +\infty \text{ или } -\infty$$

для всех последовательностей $\Lambda \in \mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы возмущающая последовательность $\{\nu_k\}$ удовлетворяла условиям

$$\mathrm{Re}\,\nu_k = O(1), \quad \mathrm{Im}\,\nu_k = O(\ln|\lambda_k|), \quad k \to +\infty,$$

то есть, чтобы последовательности Λ и $\mathcal{M}$ можно было получить друг из друга p-возмущением.

Публикации автора по теме диссертации

1. Абузярова, Н. Ф. Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси / Н. Ф. Абузярова // Уфимский математический журнал. - 2014. - Т. 6, № 4. - С. 3-18.
2. Абузярова, Н. Ф. Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций / Н. Ф. Абузярова // Доклады Академии наук. - 2014. - Т. 457, № 5. - С. 510-513. – DOI: 10.7868/S0869565214230042.
3. Абузярова, Н. Ф. Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси / Н. Ф. Абузярова // Уфимский математический журнал. - 2016. - Т. 8, № 1. - С. 3-14.
4. Абузярова, Н. Ф. О 2-порожденности слабо локализуемых подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси / Н. Ф. Абузярова // Уфимский математический журнал. - 2016. - Т. 8, № 3. - С. 8-21.
5. Абузярова, Н. Ф. Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца / Н. Ф. Абузярова // Математические заметки. - 2017. - Т. 102, № 2. - С. 163-177. – DOI: 10.4213/mzm11218.
6. Абузярова, Н. Ф. О сдвигах целочисленной последовательности, порождающих функции, обратимые по Эренпрайсу / Н. Ф. Абузярова // Записки научных семинаров ПОМИ. - 2019. - Т. 480. - С. 5-25. – Режим доступа: https://www.mathnet.ru/rus/znsl/v480/p5 (дата обращения 27.02.2023) (Англ. перевод: Abuzyarova, N. F. On Shifts of the Sequence of Integers Generating Functions that are Invertible in the Sense of Ehrenpreis / N. F. Abuzyarova // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 251, No. 2. – P. 161-175. – DOI 10.1007/s10958-020-05077-5)
7. Abuzyarova, N. F. Principal Submodules in the Module of Entire Functions, Which is Dual to the Schwarz Space, and Weak Spectral Synthesis in the Schwartz Space / N. F. Abuzyarova // Journal of Mathematical Sciences. - 2019. - V. 241, №6. - Pp. 658-671. – DOI: 10.1007/s10958-019-04453-0
8. Абузярова, Н. Ф. Обратимые по Эренпрайсу функции в алгебре Шварца / Н. Ф. Абузярова // Доклады Академии наук. - 2019. - Т. 484, № 1. - С. 7-11. – DOI:10.31857/S0869-565248417-11.
9. Абузярова, Н. Ф. Синтезируемые последовательности и главные подмодули в модуле Шварца / Н. Ф. Абузярова // Уфимский математический журнал. - 2020. - Т. 12, № 3. - С. 11-21.
10. Абузярова, Н. Ф. Главные подмодули в модуле Шварца / Н. Ф. Абузярова // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2020. - № 5. - С. 83-88. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-5-83-88
11. Абузярова, Н. Ф. О нулевых множествах слабо локализуемых главных

подмодулей в алгебре Шварца / Н. Ф. Абузярова, А. Ф. Сагадиева, З. Ю. Фазуллин // Челябинский физико-математический журнал. - 2020. - Т. 5, № 3. - С. 261-270. – DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15301

12. Abuzyarova, N. F. On conditions of invertibility in the sense of Ehrenpreis in the Schwartz algebra / N. F. Abuzyarova // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2021. - V. 42, № 6. - Pp. 1141-1153. – DOI: 10.1134/S1995080221060032
13. Абузярова, Н. Ф. Сохранение классов целых функций, выделяемых ограничениями на рост вдоль вещественной оси, при возмущениях их нулей / Н. Ф. Абузярова // Алгебра и анализ. - 2021. - Т. 33, № 4. - С. 1-31. (Англ. перевод: Abuzyarova, N. F. Preservation of classes of entire functions defined in terms of growth restrictions along the real axis under perturbations of their zero sets // St. Petersburg Math. J. – 2022. – V. 33. – Pp 585-606. – DOI: 10.1090/spmj/1716)
14. Абузярова, Н. Ф. Представление синтезируемых инвариантных относительно дифференцирования подпространств в пространстве Шварца / Н. Ф. Абузярова // Доклады Академии наук. - 2021. - Т. 498, № 1. - С. 5-9. – DOI: 10.31857/S2686954321030024.
15. Абузярова, Н. Ф. Об условии представления инвариантного относительно дифференцирования подпространства в пространстве Шварца в виде прямой суммы его резидуальной и экспоненциальной составляющих / Н. Ф. Абузярова // Уфимский математический журнал. - 2021. - Т. 13, № 4. - С. 3-7.
16. Abuzyarova, N. F. On properties of functions invertible in the sense of Ehrenpreis in the Schwartz algebra / N. F. Abuzyarova // Eurasian mathematical journal. - 2022. - V. 13, № 1. - Pp. 9-18. – DOI: 10.32523/2077-9879-2022-13-1-09-18
17. Abuzyarova, N. F. Differentiation operator in the Beurling space of ultradifferentiable functions of normal type on an interval / N. F. Abuzyarova // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2022. - V. 43, № 6. - Pp. 1472-1485. – DOI: 10.1134/S1995080222090025
18. Абузярова, Н. Ф. Представление инвариантных подпространств в пространстве Шварца / Н. Ф. Абузярова // Математический сборник. - 2022. - Т. 213, № 8. - С. 3-25. – DOI: 10.4213/sm9687

Цитированная литература

19. Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. — М.: Наука, 2007.
20. Абанин А. В. Ω-ультрараспределения // Известия РАН, сер. Матем. — 2008. — Т. 72, № 2. — С. 207–240.
21. Абанина Д. А. Экспоненциально-полиномиальный базис в пространстве

решений однородного уравнения свертки на классах ультрадифференцируемых функций // Владикавк. матем. журн. — 2011. — Т. 13, № 4. — С. 3–17.
22. Абанин А. В., Абанина Д. А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. матем. журн. — 2010. — Т. 12, № 3. — С. 3–20.
23. Беренстейн К., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Комплексный анализ – многие переменные – 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 54, ВИНИТИ, М. — 1989. — С. 5–111.
24. Гельфонд А. О. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Тр. МИАН СССР. — 1951. — Т. 38. — С. 42–67.
25. Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. — 1951. — Т. 29(71), № 3. — С. 477–500.
26. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. — 1972. — Т. 87(129), № 4. — С. 459–489.
27. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. — 1972. — Т. 88(130), № 1(5). — С. 3–30.
28. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб. — 1972. — Т. 88(130), № 3(7). — С. 331–352.
29. Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. — 1992. — Т. 47, № 6. — С. 3–58.
30. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций // М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
31. Левин Б. Я., Островский И. В. О малых возмущениях множества корней функций типа синуса // Изв. АН СССР, серия Матем. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 87–110.
32. Леонтьев А. Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка // Труды IV Всесоюзного матем. съезда. — 1961. — Т. II. — С. 648–660.
33. Леонтьев А. Ф. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т.29, № 2. — С. 269–328.
34. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент — М.: Наука, 1976. — 536 с.
35. Седлецкий А. М.Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, I // Совр. Матем. Фунд. Напр. — 2003. — Т. 5. — С. 3-–152.
36. Седлецкий А. М. Негармонический анализ // Функциональный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ, М. — 2006. — Т. 96. — С. 106-–211.

37. Седлецкий А. М. Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 2. — С. 262-–271.
38. Хейфиц А. И. Характеристика нулей некоторых специальных классов целых функций конечной степени // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1969. — Т. 9. — С. 3–13.
39. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье // М.: Мир, 1986.
40. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: Мир, 1986.
41. Юлмухаметов Р. С. Однородные уравнения свертки // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 316, № 2. — С. 312–315.
42. Юхименко А. А. Об одном классе функций типа синуса // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83, № 6. — С. 941-–954.
43. Aleman A., Baranov A., Belov Yu. Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation // Journal of Functional Analysis. — 2015. — V. 268. — Pp. 2421–2439.
44. Aleman A., Korenblum B. Derivation-invariant subspaces of C^∞ // Comp. Meth. and Function Theory. — 2008. V. 8, № 2. — Pp. 493–512.
45. Baranov A, Belov Yu. Synthesizable differentiation-invariant subspaces // Geometric and Functional Analysis. — 2019. — V. 29, № 1. — Pp. 44–71.
46. Delsarte L. Les fonctions moyenne-périodiques // J. math, pures et appl. — 1935. — V. 14. — Pp. 403–453.
47. Dickson D. G. Expansions in series of solutions of linear difference-differential and infinite order differential equations with constant coefficients // Mem. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 23.
48. Dickson D. G. Analytic mean periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1964. — V. 110, № 2. — Pp. 361–374.
49. Ehrenpreis L. Solution of some problems of division, IV // Amer. J. Math. — 1960. — V. 57, № 1. — Pp. 522–588.
50. Ehrenpreis L. Mean periodic functions. I. Varieties whose annihilator ideals are principal // Amer. J. Math.— 1955. — V. 77, № 2. — Pp. 293–328.
51. Euler L. De integratione aequationum differentialum altiorum gradum // Miscellanea Berol. — 1743. — № 7. — Pp. 193–242.
52. Hitt D. Invariant subspaces of H^2 of an annulus // Pacific J. Math. — 1988. — V. 134, № 1. — Pp. 101–120.
53. Hörmander L. Convolution equations in convex domains // Invent. math. — 1968. — V. 4. — Pp. 306–317.
54. Kahane J. P. Sur les fonctions moyenne—pérlodiques bornées // Ann. Inst. Fourier. — 1957. — V. 7. — Pp. 293–314.
55. Kahane J. P. Lectures on Mean Periodic Functions. — Bombay: Tata Institute of Fundamental Research — 1957. — 152 p.

56. Koosis P. Note sur les fonctions moyenne-périodiques // Ann. Inst. Fourier. — 1956. — V. 6. — Pp. 357–360.
57. Koosis P. Approximation of certain functions by exponentials on a half line // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — V. 8, № 3. — Pp. 428–435.
58. Koosis P. On functions which are mean periodic on a half-line // Gommuns Pure and Appl. Math. — 1957. — V. 10, № 1. — Pp. 133–149.
59. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivees partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier. — 1956. — V. 6. — Pp. 271–355.
60. Meise R., Taylor B. A., Vogt D. Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J. — 1987. — T. 36, № 4. — C. 729–756.
61. Ortega-Cerda J., Seip K. Fourier frames // Annals of Math. — 2002. — V. 155. Pp. 789–806.
62. Paley R. E. A. C., Wiener N. Fourier transforms in the complex domain // N. Y.: AMS, 1934.
63. Sarason D. A remark on the Volterra operator // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — V. 12. — Pp. 244–246.
64. Schwartz L. Theorie générale des fonctions moyenne-périodique // Ann. of Math. — 1947. — V. 48, № 4. — Pp. 857–929.
65. Schwartz L. Théorie des distributions vol. I, II. — Paris: Hermann, 1950–51.