Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение ФГБНУ УФИЦ РАН

На правах рукописи

Абузярова Наталья Фаирбаховна

Спектральный синтез для оператора дифференцирования и локальное описание подмодулей целых функций

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Уфа-2023

1

Оглавление

Введение

0.1 Тема исследования

Вопросы, рассматриваемые в настоящей работе, относятся к одному из описанных ниже двух типов связанных между собой классических задач анализа, обозначаемых здесь **I** и **II**, соответственно.

I. Пусть X — линейное топологическое пространство над полем комплексных чисел, $A : X \to X$ — линейный непрерывный оператор.
Изучаются следующие вопросы.

I.1) Существуют ли A-*инвариантные* подпространства $W \subseteq X$, то есть замкнутые подпространства W в X такие, что $A(W) \subset W$?

I.2) Что представляют собой собственные и корневые элементы оператора A? Образуют ли они в X полную систему?

I.3) *Задача спектрального анализа для оператора A.*
Как устроен спектр сужения оператора A на A-инвариантное подпространство W, то есть спектр оператора $A : W \to W$? Каков запас корневых элементов W_A оператора $A : W \to W$?
Под спектром оператора сужения $A : W \to W$, как обычно, понимается дополнение $\mathbb{C}$ до множества *регулярных точек* λ этого оператора. Последние же определяются фактом существования линейного непрерывного оператора $(A - \lambda\,\mathbf{id})^{-1} : W \to W$, где $\mathbf{id}$ — тождественный оператор.

I.4) *Задача спектрального синтеза для A-инвариантных подпространств.*
При наличии в нетривиальном A-инвариантном подпространстве W непустого запаса W_A корневых элементов оператора A, исследовать возможные способы восстановления W по W_A, например, следующим образом: $W = \overline{\operatorname{span} W_A}$.

В литературе имеется множество исследований, относящихся к различным пространствам X и операторам A, для которых ответы на вопросы I.1)–I.4) (или, по крайней мере, на часть из них) положительны и содержательны (см., например, обзор Н.К. Никольского [41]). В обзоре

[41] также указаны работы, авторы которых рассматривали вопрос I.1) в ситуациях, когда наличие положительного ответа на вопрос о существовании A-инвариантных подпространств далеко не очевидно.

Значительное количество исследований по задаче **I** касается спектрального анализа и синтеза для $\mathcal{T}$-инвариантных подпространств (или их частных случаев), где

$$\mathcal{T} = \{T_h\} \quad h \in \mathbb{C}^n \text{ (или } \mathbb{R}^n)$$

— группа операторов сдвига T_h, действующая в каком-либо функциональном пространстве X:

$$T_h : X \to X, \qquad T_h(f(\cdot)) = f(\cdot + h), \quad f \in X.$$

Рассматривались и более общие ситуации, когда $\mathcal{T} = \{h : \ h \in G\}$, $G \subsetneq \mathbb{C}^n$ или $G \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Если X состоит из голоморфных функций или представляет собой квазианалитический класс бесконечно дифференцируемых функций, то $\mathcal{T}$-инвариантность подпространства $W \subset X$ равносильна его D-инвариантности, где D — оператор (частного) дифференцирования. Если же X — неквазианалитическое пространство бесконечно дифференцируемых функций, то, при весьма естественных ограничениях на топологию в X, каждое $\mathcal{T}$-инвариантное подпространство $W \subset X$ будет D-инвариантным, но не наоборот. Корневыми элементами оператора D и семейства операторов $\mathcal{T}$ служат экспоненциальные одночлены. Обычно изначально предполагают, что система экспонененциальных функций содержится и полна в X.

Исследования $\mathcal{T}$-инвариантных (или, эквивалентно, D-инвариантных, в случае пространства голоморфных функций) подпространств в том или ином обрамлении проводились многими авторами, см. [4], [6], [10]–[12], [16]–[18], [21], [28], [31]–[34], [38]–[40], [42], [43], [65], [68], [86], [87], [89]–[91], [95]–[97], [100]–[102], [106], [107], [117], [118][1]. Также изучались задачи спектрального анализа и синтеза для подпространств голоморфных функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования или других обобщений оператора дифференцирования (см. [22], [25], [36], [37], [44], [50], [52], [53], [62], [63]). Последние, в частности, могут быть определены как сопряженные к операторам умножения на степень независимой переменной или многочлен, действующим в пространстве целых функций — аналитической реализации сильного сопряженного к

[1]В дальнейшем изложении мы будем более подробно цитировать работы из этого списка.

X (см., например, работы В.А. Ткаченко [52], [53]). Легко видеть, что оператор дифференцирования D является сопряженным с оператором умножения на независимую переменную. Это объясняет тесную связь задач типа **I** для случая $A = D$ со следующими вопросами (задача типа **II**). Мы ограничиваемся здесь рассмотрением случая функций одной переменной.

II. Пусть P — линейное топологическое пространство (вектор-)функций, аналитических в области $G \subset \mathbb{C}$; $\mathcal{I} \subset P$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно умножения на независимую переменную (*подмодуль* в широком смысле, согласно терминологии работ [19], [20], [24]):

$$f \in \mathcal{I}, \quad zf \in P \Longrightarrow zf \in \mathcal{I};$$

в частности, P может быть топологической алгеброй с операцией обычного умножения функций, а $\mathcal{I}$ — идеалом этой алгебры.

Задача локального описания идеалов и подмодулей включает в себя следующие вопросы.

II.1) Всякий ли нетривиальный подмодуль (идеал) $\mathcal{I}$ *закреплен*, то есть множество общих нулей всех принадлежащих ему функций не пусто?

II.2) При каких условиях закрепленный подмодуль (идеал) однозначно определяется набором общих нулей содержащихся в нем функций: *допускает локальное описание*?

В литературе имеется много исследований задач типа **II**. Кроме уже цитированных работ [19], [20], [24], принадлежащих И.Ф. Красичкову-Терновскому, отметим работы А. Картана [81], Л. Хермандера [15], [94], Д.Д. Келлехера и Б.А.Тэйлора [98], а также работы из библиографии обзора [41]. Приведенный здесь список, конечно, не является исчерпывающим по задаче локального описания идеалов и подмодулей. Он лишь дает некоторое представление о широте круга авторов, занимавшихся этой задачей.

Вопросы, аналогичные II.1) и II.2), изучались и для более общего случая так называемых *π-подмодулей* $\mathcal{J}$ в пространстве (или в π-модуле) P (см., например, [8], [22], [26], [60], [61]). Напомним, что для фиксированного многочлена $\pi \in \mathbb{C}[z]$ пространство P называется *π-модулем*, если $\pi f \in P$ для всех $f \in P$; замкнутое подпространство $\mathcal{J} \subset P$ называется *π-подмодулем в* P, если выполнена импликация

$$f \in \mathcal{J},\ \pi f \in P \Longrightarrow \pi f \in \mathcal{J}.$$

В настоящей работе мы рассматриваем вопросы I.1)–I.4) для оператора дифференцирования D, действующего в локально-выпуклом пространстве бесконечно дифференцируемых функций X, непрерывно вложенном в пространство $C^\infty(-a;a)$ (включая и случай $X = C^\infty(-a;a)$). Точнее, рассматриваемое пространство X — это или все пространство $C^\infty(-a;a)$, или пространство Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале $(-a;a)$, определяемое при помощи правильной последовательности весов $\Omega = \{\omega_n\}$ (см. [1], [2]). Применяемый нами подход (двойственная схема, о которой подробнее будет сказано ниже) сводит задачи спектрального анализа и синтеза в X к эквивалентным задачам о подмодулях в специальных модулях целых функций, вследствие чего возникает необходимость исследования поведения и свойств целых функций, принадлежащих указанным модулям.

0.2 Исторический обзор, актуальность и цели исследования

Отправной точкой исследований задач спектрального анализа и синтеза для $\mathcal{T}$-инвариантных и D-инвариантных подпространств принято считать фундаментальный принцип Л.Эйлера для множества решений однородного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами, установленный им в 1747 году [92]. В качестве следующей вехи в истории развития этих задач можно указать появление понятия "периодической в среднем функции". Оно было введено Л. Делсартом в 1935 году (см. [85]). Делсарт называл периодическими в среднем функциями решения однородного уравнения свертки с интегральным ядром специального вида и изучал вопросы приближения произвольных решений этого уравнения линейными комбинациями его экспоненциальных решений, то есть возможность спектрального синтеза для $\mathcal{T}$-инвариантного подпространства решений этого уравнения. Отметим, что сам оператор свертки был введен в литературу С.Пинкерле еще 1888 году; и вначале он использовался для исследования рядов Дирихле (см. [110], обзор [75]).

В другой (эквивалентной) форме понятие "периодичности в среднем" было рассмотрено в хорошо известных работах Л. Шварца [115], [116]. Пусть $X = C(\mathbb{R})$ или $C^\infty(\mathbb{R})$. Функция $f \in X$ называется *периодической в среднем*, если замыкание линейной оболочки множества $\{T_h(f)\}_{h\in\mathbb{R}}$ не совпадает со всем X. Это равносильно тому, что для некоторого ненулевого функционала $S \in X'$ будет $S(T_h(f)) = 0$ при всех $h \in \mathbb{R}$, то есть f

удовлетворяет однородному уравнению свертки

$$S * f = 0. \tag{0.2.1}$$

Для $X = H(\mathbb{C})$ можно дать эквивалентное определение понятия *периодической в среднем* функции f как такого элемента пространства $H(\mathbb{C})$, для которого замыкание линейной оболочки множества всех производных

$$\{f^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

есть собственное подпространство $H(\mathbb{C})$. В этом случае периодичность в среднем целой функции f также эквивалентна ее принадлежности множеству решений однородного уравнения свертки (0.2.1), но с $S \in H'(\mathbb{C})$ и справедливому, соответственно, в $\mathbb{C}$, а не в $\mathbb{R}$.

Л.Шварц доказал, что каждое $\mathcal{T}$-инвариантное подпространство в $C(\mathbb{R})$ и в $C^\infty(\mathbb{R})$, а также каждое D-инвариантное (эквивалентно, $\mathcal{T}$-инвариантное) подпространство в $H(\mathbb{C})$ допускает спектральный синтез: порождается содержащимся в нем непустым множеством экспоненциальных одночленов.

Периодичность в среднем для функций, непрерывных на прямой и на полупрямой изучалась также Ж.-П. Каханом [96], [97], П. Кусисом [100], [101], [102]. Частный случай однородного уравнения свертки — дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами — исследовался, например, в уже цитированных выше работах А.О. Гельфонда, А.Ф. Леонтьева, Д.Г. Диксона (см. [10], [11], [31], [34], [86], [87])

В работе [32] А.Ф. Леонтьев установил допустимость спектрального синтеза подпространством решений однородного уравнения свертки в пространстве функций, непрерывных на интервале вещественной прямой.

Теорема о спектральном синтезе в ядре оператора свертки, действующего в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(G)$, где G — выпуклая область n-мерного вещественного простанства (в частности, $G = (a; b)$, если $n = 1$) доказана Л.Хермандером [59, глава 16], [95]. Л.Эренпрайсу [90], Б.Мальгранжу [106] принадлежит частный случай этого утверждения, соответствующий $G = \mathbb{R}^n$. Описание других результатов по аппроксимации и представлению решений однородного уравнения свертки (системы таких уравнений), рассматриваемых в пространствах $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $H(\mathbb{C}^n)$, можно найти, например, в обзоре К. Беренстейна и Д. Струппы [6].

Наиболее общий результат для однородного уравнения свертки в пространстве $H(G)$, где G — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, состоит в том, что множество решений такого уравнения (являющееся D-инвариантным подпространством) всегда допускает спектральный синтез. Для $n = 1$ это утверждение доказано И.Ф. Красичковым-Терновским [17], для $n > 1$ — Р.С. Юлмухаметовым [65], А.С Кривошеевым и В.В.Напалковым [28].

Еще одно направление исследований, которое представлено в литературе, касается спектрального синтеза в ядре оператора свертки, действующего в каком-либо пространстве ультрадифференцируемых функций. Например, Р. Мейз, Б. А. Тэйлор и Д. Вогт в работе [107] рассмотрели ядро "локального"оператора свертки, порожденного *обратимым* (!) ультрараспределением и действующего в пространстве ультрадифференцируемых функций Берлинга-Бьорка $\mathcal{E}_\omega(\mathbb{R})$. Авторы доказали, что каждое решение локального однородного уравнения свертки в пространстве $\mathcal{E}_\omega(\mathbb{R})$ локально аппроксимируется линейными комбинациями экспоненциальных решений этого уравнения, причем на более узком интервале, чем тот, на котором рассматривается само уравнение (более точно, доказано существование в ядре локального оператора свертки в $\mathcal{E}_\omega(\mathbb{R})$ локального базиса Шаудера из экспоненциальных решений). Пространство $\mathcal{E}_\omega(\mathbb{R})$ — пространство ультрадифференцируемых функций Берлинга-Бьорка максимального типа — введено в рассмотрение и изучалось в работах [76]–[78]. В работе [4] Д.А. Абаниной (Поляковой) рассмотрено ядро оператора свертки, порожденного мультипликатором, в пространстве ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале вещественной прямой. Найдены условия, при которых в подпространстве решений однородного уравнения свертки имеется экспоненциально-полиномиальный базис.

Среди исследований по спектральному анализу и синтезу для оператора дифференцирования в пространствах голоморфных функций важное место занимает цикл работ И.Ф. Красичкова-Терновского [16]–[18], посвященных задаче спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств в пространстве голоморфных функций на выпуклой области комплексной плоскости. В этих работах реализована программа исследований произвольных D-инвариантных подпространств пространства $H(G)$, где $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область. Эта программа включает в себя систематическое применение двойственной схемы, сводящей задачи о D-инвариантных подпространствах в $H(G)$ к эквивалентным задачам о замкнутых подмодулях в модуле целых функций экспоненциального типа, ассоциированном с областью G. (Двойственная схема из [16]–[18] имеет сходство с рассуждениями Л.Эренпрайса в [89].) Кроме теоремы о допустимости спектрального синтеза ядром оператора свертки, в [16]–[18] установлено, что в случае неограниченной выпуклой области G каждое D-инвариантное подпространство $W \subset H(G)$ допускает спектральный синтез, то есть порождается содержащимся в нем набором экспоненциальных одночленов. Этот результат является обобщением теоремы Л. Шварца, доказанной им для D-инвариантных подпространств в $H(\mathbb{C})$.

Результаты работ [16]–[18], а также работ [21], [25], [26], [44], [50], [61], [62], [63] демонстрируют высокую эффективность двойственного метода, использующего подмодули целых функций в качестве инструмента для изучения инвариантных подпространств.

Возвращаясь к рассмотрению пространства X бесконечно дифференцируемых функций на интервале вещественной прямой, напомним, что для таких пространств, в случае их неквазианалитичности, каждое $\mathcal{T}$-инвариантное подпространство будет D-инвариантным, но не наоборот. При этом корневыми элементами как для оператора D, так и для группы операторов сдвига $\mathcal{T}$, являются одни и те же функции — экспоненциальные одночлены. Это означает, что, во-первых, не всякое утверждение о спектральном синтезе для $\mathcal{T}$-инвариантных подпространств в X будет справедливо для D-инвариантных подпространств этого пространства, а во-вторых, что результаты о спектральном синтезе для D-инвариантных подпространств содержат, как частные случаи, аналогичные утверждения о $\mathcal{T}$-инвариантных подпространствах в X.

Впервые в литературе общие D-инвариантные подпространства бесконечно дифференцируемых функций были рассмотрены в 2008 году в работе А. Алемана и Б. Коренблюма [71]. Авторами этой работы рассматривались D-инвариантные подпространства в пространстве $C^\infty(a;b)$, и было сделано важное наблюдение о наличии в $C^\infty(a;b)$ двух типов нетривиальных D-инвариантных подпространств, не содержащих экспонент. Первый тип — это подпространства вида

$$W_I = \{f \in C^\infty(a;b) : \ f = 0 \text{ на } \ I\}, \tag{0.2.2}$$

где $I \subset (a;b)$ — относительно замкнутый промежуток; второй тип "патологических"(с точки зрения допустимости спектрального синтеза) D-инвариантных подпространств проиллюстрирован следующим примером:

$$W_{c,d} = \{f \in C^\infty(a;b) : \ f^{(j)}(c) = f^{(j)}(d) = 0, \quad j = 0, 1, 2 \dots\},$$

где $c, \ d \in (a;b)$ $c \neq d$.

Ясно, что

$$W_{[c;d]} \subsetneq W_{c,d}.$$

Подпространства двух указанных типов отличаются друг от друга тем, что спектр сужения оператора дифференцирования

$$D : W_{[c;d]} \to W_{[c;d]}$$

дискретен, а спектр сужения оператора дифференцирования

$$D : W_{c,d} \to W_{c,d}$$

— нет, а именно: в [71] доказано, что он совпадает со всей комплексной плоскостью.

А. Алеман и Б. Коренблюм установили, что всякое D-инвариантное подпространство содержит "резидуальную часть"вида (0.2.2) и предложили ослабленную версию спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств $W \subset C^{\infty}(a; b)$ с дискретным спектром (то есть с дискретным спектром оператора сужения $D : W \to W$). Им удалось доказать эту версию для частного случая — D-инвариантного подпространства $W \subset C^{\infty}(a; b)$ с конечным спектром [71, предложение 6.1], после чего авторы ставят вопрос о двух возможных вариантах развития предложенной версии синтеза на случай D-инвариантных подпространств с бесконечным дискретным спектром.

Первый вариант, *слабый спектральный синтез*, состоит в том, что D-инвариантное подпространство W допускает слабый спектральный синтез, если оно может быть представлено в виде

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}, \tag{0.2.3}$$

где W_{I_W} — максимальное подпространство вида (0.2.2), содержащееся в W, $\operatorname{Exp} W$ — множество всех экспоненциальных одночленов, принадлежащих W.

Второй вариант — это возможность представления D-инвариантного подпространства W с дискретным спектром в виде прямой суммы (алгебраической и топологической):

$$W = W_{I_W} \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}. \tag{0.2.4}$$

Если спектр подпространства W конечен, то, согласно предложению 6.1 из [71], обе предложенные версии спектрального синтеза, (0.2.3) и (0.2.4), дают одно и то же представление:

$$W = W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W.$$

В настоящей работе будет показано, что замеченные А.Алеманом и Б. Коренблюмом факты о D-инвариантных подпространствах пространства $C^{\infty}(a; b)$ и поставленные ими вопросы о возможных версиях спектрального синтеза допускают перенос на более широкий класс пространств $X \subseteq C^\infty(a;b)$, а именно, на пространства Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале вещественной прямой. Шкала таких пространств построена А.В. Абаниным в 2007–2008 гг. (см. [1], [2]). А. В. Абанин обобщает подход Берлинга-Бьорка к определению пространств ультрадифференцируемых функций из работ [76]–[78] и предлагает шкалу пространств, задаваемых последовательностями весов, которая содержит все рассматривавшиеся ранее пространства ультрадифференцируемых функций [9], [35], [76], [77], [78], [80], [82], [83], [99], [111], [112]. При этом в [1], [2] установлены аналоги основополагающих утверждений классической теории распределений Шварца (в частности, аналог теоремы Пэли-Винера-Шварца) для введенных общих пространств Ω-ультрараспределений.

Отметим, что все задачи, приводящие к результатам о спектральном синтезе в ядре оператора свертки, в том числе действующего локально, (или в пересечении таких ядер), рассмотренные в литературе для бесконечно дифференцируемых или ультрадифференцируемых функций, вкладываются как частный случай в задачу исследования версий спектрального синтеза (0.2.3) и (0.2.4) для общих D-инвариантных подпространств соответствующего функционального пространства. Это замечание, а также интерес других авторов к вопросам, поставленным в работе [71] (см. [70], [72]), подчеркивают актуальность исследований D-инвариантных подпространств бесконечно дифференцируемых и Ω-ультрадифференцируемых функций и связанных с этим вопросом других задач анализа.

Основной целью настоящей работы является получение условий, при которых имеет место какая-либо из версий спектрального синтеза, (0.2.3) или (0.2.4), для D-инвариантных подпространств в пространстве Шварца $C^\infty(-a;a)$ и в пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций, введенных А.В.Абаниным. Также мы изучаем другие вопросы, возникающие на основном пути исследования, но вместе с тем, представляющие самостоятельный интерес; например, связи между поведением модуля и распределением нулевого множества целой функции, принадлежащей одному из специальных классов, определяемых исходной задачей спектрального синтеза.

Структура работы.

Основная часть диссертации состоит из пяти глав, заключения и библиографии, содержащей 118 наименований. Также приведен список работ автора по теме диссертации.

Оставшаяся часть Введения содержит еще два параграфа, 0.3 и 0.4.

В параграфе 0.3 изложен вспомогательный материал, необходимый для дальнейшей работы: даны определения и перечислены свойства пространств Ω-ультрадифференцируемых функций $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$ и сопряженных к ним пространств $\mathcal{U}'_\Omega(-a;a)$ (пространств Ω-ультрараспределений), весовых модулей целых функций, двойственных $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$, в силу аналога теоремы Пэли-Винера-Шварца; сформулирован общий принцип двойственности для введенных пространств.

Параграф 0.4 представляет собой краткое содержание глав 1-5, в том числе, — формулировки основных результатов работы.

Для удобства читателя каждая из пяти глав начинается со своего собственного краткого введения, которое частично дублирует материал параграфа 0.4. Это позволяет, после ознакомления с параграфом 0.3, читать каждую главу независимо, обращаясь к предшествующему материалу лишь по ссылкам.

0.3 Предварительные сведения: обозначения, определения и свойства исследуемых пространств

0.3.1 Пространства $\mathcal{E}_a$

Для $a \in (0;+\infty]$ символом $\mathcal{E}_a$ обозначаем одно из двух следующих пространств: $C^\infty(-a;a)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(-a;a)$, снабженное стандартной метризуемой топологией, или $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$ — пространство Ω-ультрадифференцируемых функций (короче, Ω-УДФ) на интервале $(-a;a)$, определяемое *правильной* весовой последовательностью $\Omega = \{\omega_n\}$ (возрастающей или убывающей).

Как уже было отмечено выше, пространства $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$ введены в работах А.В. Абанина [1], [2] с целью охватить все известные ранее пространства ультрадифференцируемых функций, такие, как пространства Берлинга-Бьорка, Румье-Коматсу и др., при помощи единого подхода, основанного на преобразовании Фурье.

Сначала мы напомним некоторые понятия и обозначения из [1], [2], затем дадим строгие определения пространств Ω-УДФ.

Весовой функцией или *весом* называется произвольная измеримая (по мере Лебега) функция $\omega : \mathbb{R} \to [0;\infty)$, локально ограниченная в $\mathbb{R}$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\omega(t)}\mathrm{d}t < \infty, \tag{0.3.1}$$

$$\int_1^\infty \frac{\overline{\omega}(t)}{t^2}\mathrm{d}t < \infty, \tag{0.3.2}$$

где $\overline{\omega}(t) := \sup\{\omega(s) : \ |s| \le t\}$.

Четный непрерывный на $\mathbb{R}$ и неубывающий на $[0;\infty)$ вес v называется *каноническим*, если

$$\ln|t| = o(v(|t|)), \quad |t| \to +\infty, \tag{0.3.3}$$

$$\exists\, C > 0 : \ v(t' + t'') \le C(v(t') + v(t'') + 1), \ t', t'' \in \mathbb{R}, \tag{0.3.4}$$

и функция $\xi_v(x) = v(e^x)$ выпукла на $\mathbb{R}$.

Будем говорить, что последовательность весов $\Omega = \{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ принадлежит классу $\mathcal{DW}^{proj}$ (или классу $\mathcal{DW}^{ind}$), если существуют постоянные $C_n \ge 0$ такие, что

$$\omega_n(t) + \ln(1 + |t|) \le \omega_{n+1}(t) + C_n, \ t \in \mathbb{R} \tag{0.3.5}$$

(соответственно,

$$\omega_{n+1}(t) + \ln(1 + |t|) \le \omega_n(t) + C_n, \ t \in \mathbb{R}). \tag{0.3.6}$$

Положим $\mathcal{DW} = \mathcal{DW}^{proj} \bigcup \mathcal{DW}^{ind}$.

Весовая последовательность $\Omega \in \mathcal{DW}$ *правильная*, если существует канонический вес v со свойством:

$$\omega_n(t' + t'') \le \omega_{n+1}(t') + v(|t''|), \ \forall t', t'' \in \mathbb{R}, \ \forall n = 1, 2, \dots,$$

если $\Omega \in \mathcal{DW}^{proj}$;
и, соответственно,

$$\omega_{n+1}(t' + t'') \le \omega_n(t') + v(|t''|), \ \forall t', t'' \in \mathbb{R}, \ \forall n = 1, 2, \dots,$$

если $\Omega \in \mathcal{DW}^{ind}$).

Класс всех правильных последовательностей обозначаем

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^{proj} \bigcup \mathcal{W}^{ind};$$

вес v называется *ассоциированным* с Ω.

В дальнейшем *мы рассматриваем только правильные последовательности*, так как именно для них справедлив аналог теоремы Пэли-Винера-Шварца, устанавливающий двойственность между пространствами Ω-УДФ и соответствующими весовыми модулями целых функций (теорема

A ниже). Правильными будут, например, последовательности $\Omega \in \mathcal{DW}$, состоящие из субаддитивных функций, последовательности вида

$$(\Omega) = \{n\omega\},\ n \in \mathbb{N},$$

где ω — фиксированный вес, удовлетворяющий (0.3.3), и вида

$$\{\Omega\} = \{\omega/n\},\ n \in \mathbb{N},$$

где ω — вес, удовлетворяющий (0.3.3), (0.3.4), а также

$$(\Omega) = \{q_n\omega\}, \quad 0 < q_n \nearrow 1,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\{\Omega\} = \{r_n\omega\}, \quad 0 < r_n^{-1} \nearrow 1,\ n \in \mathbb{N},$$

где ω — фиксированный почти субаддитивный вес, удовлетворяющий (0.3.3), (0.3.4), и наконец,

$$(\Omega) = \{\omega(n|x|)\}, \quad \{\Omega\} = \{\omega(|x|/n)\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где ω — фиксированный канонический вес.
(См. [1, главы 2, 6].)

Пусть $\omega_n \in \Omega$, K — компакт в $\mathbb{R}$, положим

$$\mathcal{D}_{\omega_n}(K) = \{g \in C_0(K):\ \|g\|_{\omega_n} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{g}(x)|e^{\omega_n(x)} < \infty\},$$

где $C_0(K)$ — пространство непрерывных на K функций с носителями, содержащимися в K, $\hat{g}$ — преобразование Фурье функции g, и обозначим

$$\mathcal{D}_{\omega_n}(\mathbb{R}) = \bigcup_{K\subset\mathbb{R}} \mathcal{D}_{\omega_n}(K).$$

Для $0 < c_k \nearrow a$, $k = 1, 2, \ldots$, введем нормированные пространства

$$\mathcal{U}_{\omega_n}[-c_k; c_k] = \{f \in C[-c_k; c_k]:\ \exists g \in \mathcal{D}_{\omega_n}(\mathbb{R}):\ f = g|_{[-c_k;c_k]}\},$$

с нормой

$$\|f\|_{\omega_n,k} = \inf\{\|g\|_{\omega_n}:\ g \in \mathcal{D}_{\omega_n}(\mathbb{R}),\ g|_{[-c_k;c_k]}\}$$

и наконец, положим

$$\mathcal{U}_{(\Omega)}[-c_k; c_k] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_{\omega_n}[-c_k; c_k],$$

если $\Omega \in \mathcal{D}W^{proj}$, и

$$\mathcal{U}_{\{\Omega\}}[-c_k; c_k] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_{\omega_n}[-c_k; c_k],$$

если $\Omega \in \mathcal{D}W^{ind}$. Пространства $\mathcal{U}_{(\Omega)}[-c_k; c_k]$ и $\mathcal{U}_{\{\Omega\}}[-c_k; c_k]$ снабжаются топологиями проективного и индуктивного предела последовательностей банаховых пространств $\mathcal{U}_{\omega_n}[-c_k; c_k]$, соответственно.

Теперь для заданных последовательности весов $\Omega \in \mathcal{W}$ и $a \in (0; +\infty]$ можем дать точное определение пространства Ω-ультрадифференцируемых функций:

$$\mathcal{U}_{\Omega}(-a; a) = \{f \in C(-a; a) : f|_{[-c_k; c_k]} \in \mathcal{U}_{\Omega}[-c_k; c_k] \ \forall k = 1, 2, \dots\}.$$

В линейном пространстве $\mathcal{U}_{\Omega}(-a; a)$ вводится топология проективного предела последовательности пространств $\mathcal{U}_{\Omega}[-c_k; c_k]$, $k \in \mathbb{N}$, относительно отображений сужения.

Перечислим свойства пространств $\mathcal{U}_{\Omega}(-a; a)$, установленные в работах [1] и [2]. Пространства, $\mathcal{U}_{(\Omega)}[-c_k; c_k]$, $\mathcal{U}_{(\Omega)}(-a; a)$ принадлежат классу локально-выпуклых пространств типа (M^*), то есть являются полными метризуемыми пространствами, которые также отделимы и рефлексивны. Пространство $\mathcal{U}_{\{\Omega\}}[-c_k; c_k]$ относится к классу локально-выпуклых пространств типа (LN^*). В частности, оно полное, отделимое, рефлексивное и неметризуемое, этими же четырьмя свойствами обладает и пространство $\mathcal{U}_{\{\Omega\}}(-a; a)$. Для пространства $\mathcal{U}_{\Omega}(-a; a)$ справедливы теорема об открытом отображении и теорема о замкнутом графике.

Также отметим, что пространство $\mathcal{U}_{\Omega}(-a; a)$ содержит все многочлены и все экспоненты $e^{-\mathrm{i}tz}$, $z \in \mathbb{C}$, и представляет собой топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[t]$, $t \in \mathbb{R}$. Оператор дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ действует линейно и непрерывно в $\mathcal{U}_{\Omega}(-a; a)$. А оператор сдвига аргумента на произвольное фиксированное значение $h \in \mathbb{R}$

$$f \mapsto f(\cdot - h)$$

является линейным топологическим изоморфизмом пространств $\mathcal{U}_{\Omega}(-a; a)$ и $\mathcal{U}_{\Omega}(-a + h; a + h)$.

Свойствами, перечисленными в предыдущих двух абзацах, очевидно, обладает и пространство $C^{\infty}(-a; a)$. Таким образом, предыдущие два абзаца верны для любого из пространств, которые мы обозначаем общим символом $\mathcal{E}_a$.

Ясно, что пространства, аналогичные введенным, можно рассматривать и на произвольном (конечном или бесконечном) интервале $(a; b)$

вещественной прямой. Симметричный интервал $(-a;a)$ взят нами лишь для удобства некоторых обозначений. Все обозначения, определения и результаты настоящей работы с очевидными изменениями переносятся на случай произвольного интервала $(a;b)\subset\mathbb{R}$.

0.3.2 Сильное сопряженное пространство $\mathcal{E}'_a$

В случае, когда $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$, хорошо известно, что сильное сопряженное пространство $\mathcal{E}'_a$ есть пространство распределений с компактными носителями, содержащимися в интервале $(-a;a)$.

Для описания сопряженных пространств $\mathcal{U}'_\Omega(-a;a)$ к пространствам Ω-УДФ напомним определения соответствующих пространств $\mathcal{D}_\Omega(-a;a)$ пробных Ω-УДФ:

$$\mathcal{D}_{(\Omega)}(-a;a) := \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\omega_n}[-c_k;c_k],$$

$$\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(-a;a) := \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\omega_n}[-c_k;c_k].$$

При этом пространство $\mathcal{D}_{(\Omega)}(-a;a)$ снабжается топологией строгого индуктивного предела последовательности пространств Фреше

$$\bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\omega_n}[-c_k;c_k], \quad k=1,2,\ldots;$$

а пространство $\mathcal{D}_{\{\Omega\}}(-a;a)$ — топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств

$$\mathcal{D}_{\omega_n}[-c_k;c_k], \quad k=1,2,\ldots$$

(см. [1, глава 2]).

Пространство всех Ω-ультрараспределений $\mathcal{D}'_\Omega := \mathcal{D}'_\Omega(\mathbb{R})$, по определению, есть пространство всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}_\Omega(\mathbb{R})$ (см. об этом и о перечисленных в следующем абзаце свойствах Ω-ультрараспределений в [1, главы 2, 3]).

Так как Ω — правильная последовательность (рассматривать только такие весовые последовательности мы условились выше), то всякое классическое распределение $S\in\mathcal{D}'$ будет также Ω-ультрараспределением. Для Ω-ультрараспределений справедлив принцип локализации, аналогичный хорошо известному для классических распределений. Понятие равенства Ω-ультрараспределения S нулю на открытом множестве и понятие носителя S определяются так же, как и в классическом случае. При этом, если носители Ω-ультрараспределения S и пробной Ω-УДФ f не пересекаются, то $S(f) = 0$. Если $S \in \mathcal{D}'_\Omega \bigcap \mathcal{D}'_{\widetilde{\Omega}}$ для двух различных весовых последовательностей Ω, $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{W}$, то носитель S как Ω-ультрараспределения совпадает с его носителем как $\widetilde{\Omega}$-ультрараспределения.

Далее, согласно теореме 5.2.2 из [1],
множество $\mathcal{U}'_\Omega(-a;a)$ *всех линейных непрерывных функционалов на пространстве* $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$ *совпадает с множеством тех Ω-ультрараспределений, которые имеют компактный носитель, лежащий в* $(-a;a)$.

Также отметим следующий важный факт:
для $S \in \mathcal{E}'_a$ *и* $f \in \mathcal{E}_a$ *из того, что*

$$\operatorname{supp} S \bigcap \operatorname{supp} f = \emptyset$$

следует $S(f) = 0$. (См. [1, 5.2].)

0.3.3 Весовые пространства целых функций $\mathcal{P}_a$ и аналитическая реализация пространств Ω-ультрараспределений

Для весовой функции ω, согласно [1, 1.4], рассмотрим ее продолжение в $\mathbb{C}$:

$$H_\omega(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x + \xi y)}{1 + \xi^2} \mathrm{d}\xi.$$

Эта функция неотрицательна в $\mathbb{C}$, $H_\omega(z) = H_\omega(\bar{z})$, $z \in \mathbb{C}$, также H_ω гармонична в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости.

Для каждой функции $\omega_n \in \Omega$, где $\Omega \in \mathcal{W}$, и каждого $k = 1, 2, \ldots$, положим

$$\mathcal{P}_{n,k} = \left\{ \varphi \in H(\mathbb{C}) : \ \|\varphi\|_{n,k} := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp\left(c_k |\operatorname{Im} z| + H_{\omega_n}(-z)\right)} < \infty \right\}, \tag{0.3.7}$$

где, как и выше, $0 < c_k \nearrow a$.
$\mathcal{P}_{n,k}$ — банахово пространство.

Пусть

$$\mathcal{P}_{(\Omega),a} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_{n,k},$$

если $\Omega \in \mathcal{W}^{proj}$, и

$$\mathcal{P}_{\{\Omega\},a} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_{n,k},$$

если $\Omega \in \mathcal{W}^{ind}$.

Наделенное топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств

$$\mathcal{P}_{n,k}, \quad n,k \in \mathbb{N},$$

$\mathcal{P}_{(\Omega),a}$ — локально-выпуклое пространство типа (LN^*).

В пространстве $\mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$ вводится топология строгого индуктивного предела последовательности пространств Фреше

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_{n,k}\Big), \quad n \in \mathbb{N};$$

этот индуктивный предел является регулярным.

Нам понадобится еще одно пространство целых функций:

$$\mathbf{P}_a := \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k,$$

где

$$P_k = \Big\{\varphi \in \ H(\mathbb{C}) : \|\varphi\|_k := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp\left(c_k|\operatorname{Im} z| + k\ln\left(2+|z|\right)\right)}\Big\}. \qquad (0.3.8)$$

Пространство $\mathbf{P}_a$, как это принято, снабжаем топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств P_k, с которой оно становится локально-выпуклым пространством типа (LN^*).

В дальнейшем изложении символом $\mathcal{P}_a$ будем обозначать одно из пространств $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$, $\mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$ или $\mathbf{P}_a$.

Локально-выпуклое пространство $\mathcal{P}_a$ обладает следующими свойствами: оно полное, отделимое, рефлексивное, борнологическое. Кроме того, для $\mathcal{P}_a$ справедливы теоремы об открытом отображении и о замкнутом графике.

Известно *описание ограниченных множеств $B \subset \mathcal{P}_a$* для различных $\mathcal{P}_a$:

1) *если $\mathcal{P}_a = \mathbf{P}_a$, то множество $B \subset \mathcal{P}_a$ ограниченно тогда и только тогда, когда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ оно содержится и ограниченно в банаховом пространстве P_k;*

2) *если $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_{(\Omega),a}$, то множество $B \subset \mathcal{P}_a$ ограниченно тогда и только тогда, когда для некоторых $n, k \in \mathbb{N}$ оно содержится и ограниченно в банаховом пространстве $\mathcal{P}_{n,k}$;*

3) *если $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$), то множество $B \subset \mathcal{P}_a$ ограниченно тогда и только тогда, когда при некотором $n \in \mathbb{N}$ оно содержится и ограниченно в каждом из банаховых пространств $\mathcal{P}_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots$*

Нам также понадобится описание *секвенциальной сходимости* (то есть сходимости счетной последовательности) в локально-выпуклых пространствах типа (LN^*).

Пусть

$$\mathcal{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k,$$

где X_k —банахово пространство, — локально-выпуклое пространство указанного типа.

Тогда *для того чтобы счетная последовательность элементов $x_n \in \mathcal{X}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходилась к элементу x_0 в топологии пространства $\mathcal{X}$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$ выполнялсь соотношения:*

$$x_n \in X_{k_0},\ n = n_0, n_0+1, \ldots, \quad \text{и} \quad x_n \to x_0 \quad \text{в норме пространства} \quad X_{k_0}$$

(см. [45].)

Важным для нас будет следующий факт, вытекающий из определения пространства $\mathcal{P}_a$ и топологии в нем:

операция умножения на независимую переменную действует из $\mathcal{P}_a$ в $\mathcal{P}_a$ непрерывно, то есть пространство $\mathcal{P}_a$ обладает структурой топологического модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$.

Так как пространство $\mathcal{E}_a$ содержит все экспоненты

$$e^{-\mathrm{i}tz}, \quad z \in \mathbb{C},$$

точнее, их сужения на интервал $(-a; a)$, то для каждого элемента $S \in \mathcal{E}'_a$ сильного сопряженного корректно определено *преобразование Фурье-Лапласа*:

$$S \mapsto \mathcal{F}(S)(z) := S(e^{-\mathrm{i}tz}), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{E}'_a \to H(\mathbb{C}).$$

Теорема A. *Преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ устанавливает линейный топологический изоморфизм пространств $\mathcal{E}'_a$ и $\mathcal{P}_a$.*

В случае, когда $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$, сформулированная теорема представляет собой хорошо известный факт, теорему Пэли-Винера-Шварца (см., например, [58, теорема 7.3.1]). Для пространств Ω-УДФ $\mathcal{E}_a = \mathcal{U}_\Omega(-a;a)$, задаваемых правильными весовыми последовательностями Ω, эта теорема доказана А.В. Абаниным [1, теорема 5.4.2], [2]. Также в [1] установлено, что в случае правильной последовательности Ω норму $\|\varphi\|_{n,k}$ в формуле (0.3.7) можно определить без использования гармонического продолжения H_{ω_n} весовой функции ω_n следующим образом:

$$\|\varphi\|_{n,k} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp\left(c_k|\mathrm{Im}\, z| + \omega_n(-\mathrm{Re}\, z)\right)}.$$

Пространства $\mathcal{P}_{n,k}$ при этом, вообще говоря, изменятся, но пространства $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$ и $\mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$ и топологии в них останутся без изменений.

Для замкнутого подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ его *аннуляторное подпространство* — это замкнутое подпространство в сопряженном $\mathcal{E}'_a$, определяемое формулой

$$W^0 = \{S \in \mathcal{E}'_a : \ S(f) = 0 \ \forall\, f \in W\}.$$

Из рефлексивности пространств $\mathcal{E}_a$, теоремы Хана-Банаха и теоремы А вытекает

Предложение 0.1. (**Общий принцип двойственности.**) *Между совокупностью $\{W\}$ всех замкнутых подпространств пространства $\mathcal{E}_a$ и совокупностью $\{\mathcal{J}\}$ всех замкнутых подпространств пространства $\mathcal{P}_a$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу:*

$$W \longleftrightarrow \mathcal{J} \Longleftrightarrow \mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0).$$

Перечислим некоторые свойства целых функций — элементов пространства $\mathcal{P}_a$.

В силу условия (0.3.2), все функции из $\mathcal{P}_a$ принадлежат классу C (классу Картрайт). В частности, каждая функция $\varphi \in \mathcal{P}_a$ имеет экспоненциальный тип, меньший a, и вполне регулярный рост при порядке 1 во всей комплексной плоскости. Более того, после домножения на подходящий множитель вида $e^{-\mathrm{t}_\varphi z}$, $t_\varphi \in \mathbb{R}$, она становится целой функцией с индикатором

$$h_\varphi(\theta) = \pi\Delta_\varphi|\sin\theta|, \qquad \Delta_\varphi < a,$$

где $2\Delta_\varphi$ — плотность последовательности нулей $\mathcal{Z}_\varphi$ функции φ. Соответственно, индикаторная диаграмма функции φ представляет собой отрезок мнимой оси

$$\mathrm{i}[-h_\varphi(-\pi/2); h_\varphi(\pi/2)].$$

Укажем еще связь с *радиусом полноты* $r(\Lambda)$ *комплексной последовательности*

$$\Lambda = \{(\lambda_j, m_j)\}$$

($\lambda_j \in \mathbb{C}$, $m_j \in \mathbb{N}$ — кратность λ_j), определяемым как инфимум положительных чисел r, таких, что экспоненциальная система

$$\mathrm{Exp}_\Lambda = \{e^{-\mathrm{i}\lambda_j t},\, te^{-\mathrm{i}\lambda_j t}, \dots, t^{m_j-1}e^{-\mathrm{i}\lambda_j t},\ j = 1, 2, \dots,\} \tag{0.3.9}$$

не полна в пространстве $C^\infty(-r; r)$ (или, что то же самое, в пространствах $C(-r; r)$, $\mathcal{L}^2(-r; r)$). Согласно результатам Берлинга-Мальявена [104], включая хорошо известнуютеорему о мультипликаторе, в силу (0.3.2) и (0.3.8), соотношение $r(\Lambda) < a$ эквивалентно тому, что $\Lambda \subset \mathcal{Z}_\varphi$ для некоторой функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$. Более того, в этом случае $r(\Lambda) \le \pi\Delta_\varphi$, а если $\Lambda = \mathcal{Z}_\varphi$, то $r(\Lambda) = \pi\Delta_\varphi$. И наконец, для $\Lambda = \mathcal{Z}_\varphi$, где $\varphi \in \mathbf{P}_a$, система функций (0.3.9) не полна и в пространствах $C[-r(\Lambda); r(\Lambda)]$, $\mathcal{L}^2(-r(\Lambda); r(\Lambda))$.

Более тонкая, чем обычная плотность, характеристика последовательности $\Lambda = \{(\lambda_j; m_j)\}$, связанная с вопросами полноты системы функций (0.3.9) — это *плотность Берлинга-Мальявена*, которую мы будем обозначать символом $D_{BM}(\Lambda)$. Она представляет собой специальную геометрическую характеристику последовательности, имеющую несколько эквивалентных определений (см. [104], [23]). Согласно теореме Берлинга-Мальявена о радиусе полноты, справедливо равенство

$$r(\Lambda) = \pi D_{BM}(\Lambda).$$

Замечание 0.1. Всюду далее для последовательности кратных точек $\Lambda \subset \mathbb{C}$ мы используем одно из двух стандартных обозначений:

$$\Lambda = \{\lambda_j\}, \qquad |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots,$$

или

$$\Lambda = \{(\lambda_j, m_j)\}, \qquad ,\lambda_j \ne \lambda_k,\ j \ne k,\ m_j \in \mathbb{N}.$$

При этом система экспоненциальных одночленов (0.3.9) строится по последовательности Λ с учетом кратностей ее элементов.

0.4 Краткое содержание глав 1-5

0.4.1 Обзор главы 1

В главе 1 рассматривается задача слабого спектрального синтеза для инвариантных подпространств оператора дифференцирования $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, действующего в пространстве $\mathcal{E}_a$ всех бесконечно дифференцируемых или Ω-ультрадифференцируемых функций.

Замкнутое подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$, инвариантное относительно дифференцирования: $D(W) \subset W$, — называем *D-инвариантным подпространством.*

Корневые элементы оператора D — это экспоненциальные одночлены

$$e_{k,\lambda}(t) = t^k e^{-\mathrm{i}\lambda t}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Легко видеть, что если W — D-инвариантное подпространство и $e_{k,\lambda} \in W$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $e_{j,\lambda} \in W$, $j = 0, \ldots, k-1$.

Пусть W — нетривиальное (отличное от $\{\bar{0}\}$ и $\mathcal{E}_a$) D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}_a$. Обозначим символом $\operatorname{Exp} W$ совокупность всех экспоненциальных одночленов $e_{k,\lambda}$, содержащихся в нем, а символом E_W — множество показателей, по которым построена экспоненциальная система $\operatorname{Exp} W$, то есть *точка $\lambda \in \mathbb{C}$ содержится в E_W с кратностью k тогда и только тогда, когда $e_{k,\lambda} \in W$, а $e_{k+1,\lambda} \notin W$.*

Из установленной выше двойственности (предложение 0.1) следует, что E_W — последовательность кратных точек комплексной плоскости с единственной предельной точкой в бесконечности. Нетривиальность W влечет неравенство для радиуса полноты этой последовательности: $r(E_W) < a$.

Классическая задача спектрального синтеза для оператора дифференцирования D в $\mathcal{E}_a$ состоит в том, чтобы
выяснить, какие D-инвариантные подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ допускают спектральный синтез, то есть имеют вид

$$W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}?$$

Из условия (0.3.2) следует, что пространство $\mathcal{U}_\Omega(-a; a)$ представляет собой неквазианалитический класс функций. Поэтому множества вида

$$W_I = \{f \in \mathcal{E}_a : \ f = 0 \quad \text{на} \quad I\},$$

где $I \subsetneq (-a; a)$ — фиксированный относительно замкнутый в $(-a; a)$ промежуток, представляют собой *нетривиальные (!)* D-инвариантные подпространства в $\mathcal{E}_a$. Причем, условие $I \neq (-a; a)$, влечет соотношение

$$\operatorname{Exp} W_I = \emptyset.$$

Как уже отмечалось выше, впервые этот факт был замечен А. Алеманом и Б. Коренблюмом в работе [71] для пространства $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a; a)$. Также в этой работе доказано, что каждое нетривиальное D-инвариантное подпространство W в $C^\infty(-a; a)$ обязательно содержит *резидуальную часть* — максимальное подпространство вида W_I. Иными словами, найдется относительно замкнутый в $(-a; a)$ промежуток I_W со свойствами:

$$W_{I_W} \subset W, \quad W_I \setminus W \neq \emptyset \; \forall \, I \subsetneq I_W.$$

Предложенное А.Алеманом и Б.Коренеблюмом доказательство довольно длинное и сложное; оно основано на результатах Д. Хитта [93] и Д.Сарасона [114] о структуре и свойствах "почти инвариантных"подпространств в пространстве Пэли-Винера. При подходе, предлагаемом в настоящей работе, описание "резидуальной"компоненты W_{I_W} данного нетривиального D-инвариантного подпространства W в одном из пространств $\mathcal{E}_a$ является простым следствием принципов двойственности (общего и специального), составляющих содержание предложений 0.1 и 1.2. На самом деле, простым следствием используемого нами двойственного подхода является более общий факт, справедливый для произвольных замкнутых подпространств $\mathcal{E}_a$.

Предложение 1.1. *Для любого (не обязательно D-инвариантного) замкнутого подпространства $L \subset \mathcal{E}_a$ существует относительно замкнутый промежуток $I_L \subseteq (-a; a)$ со свойствами:*

$$W_{I_L} \subset L, \quad W_I \setminus L \neq \emptyset \; \forall \, I \subsetneq I_L.$$

Авторы работы [71] называют подпространства вида W_I "резидуальными"("residual subspace"). Следуя этой терминологии, промежуток I_L называем *резидуальным промежутком подпространства* L.

Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство, такое, что

$$I_W = (-a; a), \quad \operatorname{Exp} W \neq \emptyset.$$

Для каждого b из интервала $(r(\mathrm{i}E_W); a)$ рассмотрим D-инвариантное подпространство $W_b \subset \mathcal{E}_a$, определяемое условием

$$W_b^0 = W^0 \bigcap \mathcal{E}'[-b; b].$$

Получим целое семейство нетривиальных D-инвариантных $\{W_b\}$ подпространств, таких, что

$$I_{W_b} = [-b; b], \quad \operatorname{Exp} W_b = \operatorname{Exp} W.$$

Каждое такое подпространство содержит D-инвариантное подпространство $\overline{W_{I_b} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$, которое a priori не допускает спектрального синтеза (1.1.1) в силу теоремы о единственности периодического в среднем продолжения, установленной в [32] (см. также [46]).

Заметим теперь, что, с одной стороны, подпространство W, допускающее спектральный синтез, минимально среди *всех* D-инвариантных подпространств $\widetilde{W}$ с тем же запасом экспоненциальных одночленов:

$$\operatorname{Exp} \widetilde{W} = \operatorname{Exp} W.$$

С другой стороны, в неквазианалитических пространствах функций мы должны принимать во внимание наличие D-инвариантных подпространств вида W_I ("резидуальных подпространств"). Поэтому синтезировать D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ естественно из двух объектов: содержащегося в нем множества экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$ и его резидуального подпространства W_{I_W} (что как раз и было предложено А.Алеманом и Б.Коренблюмом в их работе [71] в качестве гипотезы для случая пространства $C^\infty(a;b)$).

Пусть W — нетривиальное D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}_a$ с запасом экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$ (возможно, пустым) и резидуальным промежутком I_W. Тогда D-инвариантное подпространство

$$\overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$$

содержится в W.

Будем говорить, что W допускает *спектральный синтез в слабом смысле* (*слабый спектральный синтез*), если

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}, \tag{0.4.1}$$

то есть W минимально среди *всех* D-инвариантных подпространств $\widetilde{W}$ с тем же запасом экспоненциальных одночленов: $\operatorname{Exp} \widetilde{W} = \operatorname{Exp} W$ и резидуальным промежутком $I_{\widetilde{W}} = I_W$.

Вопрос о том, *для каких нетривиальных D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$ имеет место соотношение* (0.4.1) — главный объект исследования главы 1.

Оказывается, что одним из условий, необходимых для представления D-инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ в виде (0.4.1) является дискретность спектра сужения оператора дифференцирования $D : W \to W$, называемого *спектром D-инвариантного подпространства* W и обозначаемого σ_W.

В работе [71] авторы рассматривали задачу спектрального анализа в пространстве $C^\infty(-a;a)$ и установили, что в этом случае спектр сужения оператора дифференцирования на подпространство W, то есть спектр оператора

$$D : W \to W,$$

либо дискретен (в частности, пуст), либо совпадает со всей комплексной плоскостью [71, теорема 2.1]. Аналог этого утверждения для D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a$ устанавливается в следствии 1.5. В частности, доказано, что если спектр σ_W дискретен, то он равен $(-\mathrm{i}E_W)$.

Далее, в главе 4, мы рассмотрим другую, усиленную и отличную от (0.4.1), версию спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств в пространстве Шварца $C^\infty(-a;a.)$

Напомним, что $\mathcal{P}_a$ — топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$.

Согласно **общему принципу двойственности** (предложение 0.1), замкнутому подпространству $W \subset \mathcal{E}_a$ однозначно соответствует замкнутое подпространство $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$. Нетрудно проверить, что замкнутое подпространство W будет D-инвариантным тогда и только тогда, когда $z\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, то есть $\mathcal{J}$ — *замкнутый подмодуля* модуля $\mathcal{P}_a$.

В дальнейшем будут рассматриваться только замкнутые подмодули в $\mathcal{P}_a$ (если специально не оговорено противное), поэтому вместо термина "замкнутый подмодуль"для краткости будет использоваться термин "подмодуль".

Для подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ символом $\mathcal{Z}_\mathcal{J}$ обозначаем его *нулевое множество*, которое определяется формулой

$$\mathcal{Z}_\mathcal{J} = \bigcap_{\varphi\in\mathcal{J}} \mathcal{Z}_\varphi,$$

где $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество функции φ.

Индикаторным отрезком подмодуля $\mathcal{J}$ называется отрезок

$$[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}] \subset \overline{\mathbb{R}},$$

с концами в точках $c_\mathcal{J} = -\sup\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\mathcal{J} = \sup\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} h_\varphi(\pi/2) \in \overline{\mathbb{R}}$; здесь, как и выше, h_φ — индикатор функции φ.

Реализация двойственной схемы исследования D-инвариантных подпространств начинается со следующего утверждения.

Предложение 1.2. (**Специальный принцип двойственности.**) *Между совокупностью $\{W\}$ всех D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a$ и совокупностью $\{\mathcal{J}\}$ всех подмодулей модуля $\mathcal{P}_a$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу:*

$$W \longleftrightarrow \mathcal{J} \Longleftrightarrow \mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0),$$

где $W^0 = \{S \in \mathcal{E}'_a : \ S(f) = 0 \ \forall \, f \in W\}$. При этом

$$I_W = [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \bigcap (-a; a), \quad E_W = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}.$$

Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ называется *слабо локализуемым*, если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi} \quad \text{и} \quad [-h_{\varphi}(-\pi/2); h_{\varphi}(\pi/2)] \subset [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$$

Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ называется *локализуемым* (*обильным*), если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$ со свойством $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi}$. Иными словами, локализуемый подмодуль — это слабо локализуемый подмодуль с индикаторным отрезком $[-a; a]$.

Слабо локализуемый подмодуль $\mathcal{J}$ обладает свойством максимальности: $\widetilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}$ для любого подмодуля $\widetilde{J}$, такого, что

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{\mathcal{J}}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \quad \text{и} \quad [c_{\widetilde{\mathcal{J}}}; d_{\widetilde{\mathcal{J}}}] = [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}].$$

Из **специального принципа двойственности** выводится следующее утверждение.

Предложение 1.3. *D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ допускает спектральный синтез в слабом смысле тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ слабо локализуем.*

Предложение 1.3 — основа *двойственной схемы*: оно сводит задачу о слабом спектральном синтезе в $\mathcal{E}_a$ к эквивалентной двойственной задаче о слабой локализуемости подмодулей в $\mathcal{P}_a$. Эта схема, как уже упоминалось выше, восходит к работам И .Ф. Красичкова-Терновского и Л. Эренпрайса.

Пусть $\varphi \in \mathcal{P}_a$. Символом $\mathcal{J}_{\varphi}$ обозначаем *главный подмодуль*, порожденный функцией φ :

$$\mathcal{J}_{\varphi} := \overline{\{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}},$$

а символом $\mathcal{J}(\varphi)$ — слабо локализуемый подмодуль с нулевым множеством $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} = \mathcal{Z}_{\varphi}$ и индикаторным отрезком $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] = [-h_{\varphi}(-\pi/2); h_{\varphi}(\pi/2)]$.

Сформулируем здесь основные утверждения о слабом спектральном синтезе, полученные в главе 1.

Теорема 1.7. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W. Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид* (0.4.1), *тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ содержит функцию φ со свойством $\mathcal{J}(\varphi) \subset \mathcal{J}$.*

Теорема 1.7*. *Пусть $W \subset C^\infty(-a; a)$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W. Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид* (0.4.1), *тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ содержит функцию φ со свойством: $\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi$.*

Следствие 1.6. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W. Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид* (0.4.1), *если его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ содержит функцию φ, порождающую слабо локализуемый главный подмодуль.*

В частности, подпространство вида

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \ S(D^k f) = 0, \ k = 0, 1, 2 \ldots\},$$

где $S \in \mathcal{E}'_a$ — фиксированный функционал, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда функция $\varphi = \mathcal{F}(S)$ порождает в $\mathcal{P}_a$ слабо локализуемый главный подмодуль.

Предложение 1.13. *D-инвариантное подпространство W, характеристики которого подчинены условию*

$$2\pi D_{BM}(E_W) = 2r(E_W) > |I_W|,$$

тривиально, то есть совпадает со всем $\mathcal{E}_a$ (напомним, что E_W — составленное с учетом кратностей множество показателей системы всех экспоненциальных одночленов, содержащихся в W).

Основные результаты о слабом спектральном синтезе в $\mathcal{E}_a$ для D-инвариантных подпространств общего вида содержатся в теореме 1.8:

Теорема 1.8. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*

1) *Если*

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = 2r(\mathrm{i}\sigma_W) < |I_W|,$$

где $|I_W|$ — длина промежутка I_W, то подпространство W допускает слабый спектральный синтез.

2) В частности, если резидуальный промежуток I_W не компактен в $(-a;a)$, то подпространство W допускает слабый спектральный синтез.

3) W допускает спектральный синтез в классическом смысле тогда и только тогда, когда $I_W = (-a;a)$.

Напомним, что целая функция ψ_0 называется *мультипликатором* пространства $\mathcal{P}_a$ если соответствие $\varphi \mapsto \varphi\psi_0$ определяет непрерывное отображение этого пространства в себя. Обозначим символом $\mathcal{M}_a$ множество всех мультипликаторов пространства $\mathcal{P}_a$.

Теорема 1.9. 1) *Пусть $W \subset \mathcal{E}_\infty$ — замкнутое подпространство с неограниченным резидуальным промежутком I_W.*

Если верна импликация

$$f \in W,\ S \in W^0 \Longrightarrow S(f(t+h)) = 0 \quad \forall h \in I \dotdiv \operatorname{ch}\operatorname{supp} S, \tag{0.4.2}$$

где $\operatorname{ch}\operatorname{supp} S$ — выпуклая оболочка носителя (Ω-ультра)распределения S, то W — D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез.

2) Пусть $a < +\infty$, $W \subset \mathcal{E}_a$ — замкнутое подпространство с не компактным в $(-a;a)$ резидуальным промежутком I_W, такое, что в W^0 имеется функционал S_0 со свойством $\mathcal{F}(S_0) \in \mathcal{M}_a$.

Если импликация (0.4.2) верна, то W — D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез.

Для функционала $S \in \mathcal{E}'_a$ и относительно замкнутого интервала

$$I \subset (-a;a): \quad \widetilde{I} := I \dotdiv \operatorname{ch}\operatorname{supp} S \neq \emptyset,$$

рассмотрим *"локальный"оператор свертки* $T_{S,I} : \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}(\widetilde{I})$, определяемый формулой

$$g = T_{S,I}(f), \quad g(y) = S(f(x+y)),\ y \in \widetilde{I}.$$

Ядро этого оператора $W_{S,I} := \ker T_{S,I}$ — D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}_a$ с резидуальным промежутком $I_W = I$ и спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\mathcal{Z}_\varphi)$, где $\varphi = \mathcal{F}(S)$, $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество функции φ.

Теорема 1.10. *Ядро "локального"оператора свертки $W_{S,I}$ допускает слабый спектральный синтез.*

Теорема 1.11. *Пусть* $\{S_\alpha\} \subset \mathcal{E}'_a$ *— семейство функционалов, носитель каждого из которых есть* $\{0\}$, $I \subset (-a; a)$ *— относительно компактный промежуток,* $0 \in I$.

Если $\varphi_{\alpha_0} = \mathcal{F}(S_{\alpha_0}) \in \mathcal{M}_a$ *для некоторого* α_0, *то* D*-инвариантное подпространство* $W = \bigcap\limits_{\alpha} \ker T_{S_\alpha, I}$ *допускает слабый спектральный синтез.*

В главе 1 нами также установлено, что среди D-инвариантных подпространств W с дискретными спектрами σ_W, такими, что

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = 2r(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|,$$

имеются как допускающие слабый спектральный синтез (см., например, следствие 1.6), так и не допускающие его (теорема 1.12).

0.4.2 Обзор главы 2

Глава 2 посвящена детальному изучению главных подмодулей в модуле Шварца: уточнению их алгебраической и топологической структуры и выяснению условий слабой локализуемости.

Роль главных подмодулей в решении задачи локального описания (а значит, и задачи спектрального синтеза) устанавливается в главе 1. А именно, обнаруживается, связь между слабой локализуемостью устойчивого подмодуля $\mathcal{J}$, такого, что

$$2r(\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}) = 2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = d_{\mathcal{J}} - c_{\mathcal{J}},$$

и наличием в нем функции φ, порождающей слабо локализуемый главный подмодуль (следствие 1.3, теорема 1.3*). Соответствующие двойственные утверждения о D-инвариантных подпространствах: теорема 1.12 и следствие 1.6 — также приведены в главе 1. Вместе с тем, не каждый главный подмодуль слабо локализуем (теоремы 1.1, 1.2). Таким образом, важность изучения главных подмодулей для исследования основного вопроса о спектральном синтезе не вызывает сомнений.

Каждая ненулевая функция $\varphi \in \mathcal{P}_a$ порождает два, вообще говоря, различных подмодуля: главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi = \overline{\{p\varphi :\ p \in \mathbb{C}[z]\}}$ и подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$, состоящий из всех функций $\psi \in \mathcal{P}_a$, таких, что частное (ψ/φ) есть целая функция минимального типа при порядке 1. Ясно, что нулевое множество каждого из указанных подмодулей совпадает с $\mathcal{Z}_\varphi$, а индикаторный отрезок каждого из них равен индикаторному отрезку $[c_\varphi; d_\varphi]$ функции φ, где $c_\varphi = -h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\varphi = h_\varphi(\pi/2)$. Из самого определения подмодуля $\mathcal{J}(\varphi)$ следует, что он слабо локализуем. Поэтому справедливо включение

$$\mathcal{J}_\varphi \subseteq \mathcal{J}(\varphi).$$

Равенство

$$\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi) \tag{0.4.3}$$

эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, и поэтому верно не для каждой функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$.

Напомним, что *делителем пространства* $\mathcal{P}_\infty$ называется мультипликатор этого пространства $\varphi_0 \in \mathcal{M}_\infty$, для которого верна импликация

$$\Phi \in \mathcal{P}_\infty,\ \frac{\Phi}{\varphi_0} \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \frac{\Phi}{\varphi_0} \in \mathcal{P}_\infty.$$

Всюду в главе 2 речь идет о модуле Шварца $\mathbf{P}_a$ и его подмодулях. Обсуждаются следующие две возможности реализации равенства (0.4.3).

(I) Подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$, а значит, и главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$, содержит только функции вида $p\varphi$, $p \in \mathbb{C}[z]$. Иными словами, образующая φ такова, что совокупность целых функций минимального типа при порядке 1, представимых в виде Φ/φ, $\Phi \in \mathbf{P}_a$, совпадает с множеством многочленов $\mathbb{C}[z]$. В этом случае говорим, что оба подмодуля, $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$, *алгебраически порождены*.

(II) Множество $\mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi :\ p \in \mathbb{C}[z]\}$ не пусто, и для каждой функции $\Phi \in \mathcal{J}(\varphi)$ существует обобщенная последовательность многочленов p_α, такая, что $p_\alpha\varphi \to \Phi$ в топологии пространства $\mathbf{P}_a$.

Достаточное условие для реализации первой из указанных возможностей, (I), состоит в том, что функция φ — делитель алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$. Действительно, нетрудно видеть, что в этом случае

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi :\quad p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{0.4.4}$$

Оказывается, что требование "φ — делитель алгебры $\mathbf{P}_\infty$"не является необходимым условием для справедливости (0.4.4). В качестве обоснования этого утверждения нами построен следующий пример.

Пусть $a > \pi$. Положим

$$\varphi(z) = \frac{s(z)}{s_1(z)} + \frac{\pi z s(z)}{s_0(z)},$$

где

$$s(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}, \quad s_1(z) = s(\sqrt{z}) = \frac{\sin \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}, \quad s_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{2^{2k}}\right).$$

Теорема 2.1. *Функция φ содержится в $\mathbf{P}_a$ и не является делителем алгебры $\mathbf{P}_\infty$. Подмодули $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Переходя к рассмотрению случая (II), введем обозначение

$$\mathbf{P}_{a,0} = \mathcal{F}(C_0^\infty(-a; a)).$$

Согласно теореме Пэли-Винера-Шварца [58, теорема 7.3.1], $\mathbf{P}_{a,0}$ — подпространство пространства $\mathbf{P}_a$, состоящее в точности из тех функций $\varphi \in \mathbf{P}_a$, которые убывают вдоль вещественной оси быстрее любой функции вида $|x|^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Заметим, что в случае (II) имеется очевидное необходимое условие слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$: подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ должен содержать элементы вида $\omega\varphi$, где ω — целая функция минимального экспоненциального типа, отличная от многочлена, то есть должно выполняться соотношение

$$\mathcal{J}_\varphi \setminus \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\} \neq \emptyset, \tag{0.4.5}$$

Мы устанавливаем необходимое и достаточное условие, при котором функция φ порождает главный подмодуль, удовлетворяющий соотношениям (0.4.5).

Теорема 2.2. *Главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ содержит функции Φ вида*

$$\Phi = \omega\varphi, \quad \omega - \text{целая функция, отличная от многочлена,}$$

тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$.

Из теоремы 2.2 следует, что ожидать справедливости включения $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$ для всех функций

$$\Phi \in \mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi, \ p \in \mathbb{C}[z]\}$$

можно только, если $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$.

Если функция φ, порождающая главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ лежит в $\mathbf{P}_{a,0}$, то задача о слабой локализуемости этого подмодуля оказывается эквивалентной задаче о весовой аппроксимации многочленами в некоторой (вообще говоря, неметризуемой!) топологии. Из результатов главы 1 следует, что эта задача может не иметь положительного решения.

Мы начинаем с примеров порождающих функций φ, показывающих, что и положительное решение возможно. Эти примеры затем подводят к следующему достаточному условию слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, имеющему форму ограничений на поведение функции $\ln|\varphi|$.

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$. Не ограничивая общности, считаем, что $0 \notin \mathcal{Z}_\varphi$. Положим

$$u_*(x) = \ln U_*(x),$$

где

$$U_*(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

$M_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^n\varphi(x)|$, $n = 0, 1, \ldots$ Отметим, что, так как $\varphi \in \mathcal{P}_{a,0}$, последовательность $\{M_n\}$ неквазианалитическая, функция $U_*(x)$ – всюду конечная, четная, возрастающая при $x \geq 0$ ($x \leq 0$), а функция $u_*(e^t)$ выпукла при всех $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что

$$\ln|\varphi(x)| \leq -u_*(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.4. *Предположим, что существует постоянная $L_0 > 0$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется $x' \in \mathbb{R}$ со свойствами $|x - x'| \leq L_0 u_*(x)$ и $\ln|\varphi(x')| \geq -L_0 u_*(x')$.*

Тогда подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем.

Доказательство теоремы 2.4 существенно использует результаты работ Р.С.Юлмухаметова [66], [67] о расщеплении функции из алгебры Шварца на произведение нескольких "почти равных"сомножителей (решение факторизационной проблемы Л. Эренпрайса).

Дальнейшее изложение содержит примеры применения доказанной теоремы 2.4.

Для получения удобного критерия слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в терминах аппроксимации многочленами в весовой норме, определяемой функцией φ, мы уточняем топологическую структуру главного подмодуля. А именно, доказываем, что, хотя топология пространства $\mathbf{P}_a$ неметризуемая (оно является локально-выпуклым пространством типа (LN^*)), главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ совпадает с *секвенциальным* замыканием множества $\{p\varphi\ p \in \mathbb{C}[z]\}$, то есть для любой функции $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$ имеется *счетная* последовательность многочленов $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что

$$p_k\varphi \to \Phi$$

в топологии $\mathbf{P}_a$ (эквивалентно, в норме одного из пространств P_n, см. (0.3.8)). Сформулированное утверждение составляет содержание теоремы 2.6.

Весовой критерий слабой локализуемости главного подмодуля — это теорема 2.7. Приведем ее точную формулировку.

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, $u(z)$ — наибольшая субгармоническая миноранта функции

$$(h_\varphi(\arg z)|z| - \ln|\varphi(z)|)\,,$$

где h_φ — индикатор функции φ,

$$H_u = \{f \in H(\mathbb{C}): \quad \|f(z)\|_u = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-u(z)} < +\infty\}.$$

Теорема 2.7. *Главный подмодуль J_φ, порожденный функцией $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, слабо локализуем тогда и только тогда, когда каждая функция $f \in H_u$ аппроксимируется многочленами в норме*

$$\|f\|' = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp\left(-u(z) - 2\ln\left(2+|z|\right)\right).$$

Теорема 2.6 также позволяет уточнить один результат работы [72], касающийся D-инвариантных подпространств пространства $C^\infty(-a;a)$, двойственных к устойчивым подмодулям с критическим соотношением характеристик (равенством половины длины индикаторного отрезка радиусу полноты нулевого множества). Авторами работы [72] было предложено следующее определение. Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $D_{BM}(\Lambda) < \infty$, называется *синтезируемой*, если существует единственное (и потому допускающее слабый спектральный синтез) D-инвариантное подпространство W с резидуальным промежутком $[-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)]$. и спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$. В качестве уточнения критерия синтезируемости комплексной последовательности (см. [72, теорема 2.1]) из сказанного выше и теоремы 2.6 мы получаем

Предложение 2.1. *Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ синтезируема тогда и только тогда, когда $\Lambda = \mathcal{Z}_\varphi$ для некоторой $\varphi \in \mathbf{P}_a$, порождающей в $\mathbf{P}_a$ слабо локализуемый главный подмодуль.*

Отметим, что, в силу двойственности между подмодулями в $\mathcal{P}_a$ и D-инвариантными подпространствами в $\mathcal{E}_a$ (предложения 1.2 и 1.3), вместе с каждым доказанным утверждением о слабой локализуемости главного подмодуля, порожденного функцией $\varphi \in \mathcal{P}_a$, возникает и эквивалентное двойственное утверждение о допустимости слабого спектрального синтеза D-инвариантным подпространством

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \quad S(D^k f) = 0, \; k = 0, 1, 2, \dots\},$$

где S — (Ω-ультра)распределение, преобразование Фурье-Лапласа которого есть φ.

Например, эквивалентной двойственной теоремой для теоремы 2.7 будет

Теорема 2.7^{dual}**.** *D-инвариантное подпространство W_S пространства Шварца $C^\infty(-a; a)$, порожденное регулярным распределением $S \in C_0^\infty(-a; a)$, допускает спектральный синтез в слабом смысле тогда и только тогда, когда целая функция $\varphi = \mathcal{F}(S)$ удовлетворяет условию теоремы 2.7 о весовой аппроксимации многочленами.*

Мы не будем останавливаться на формулировках других двойственных утверждений такого рода о слабом спектральном синтезе, так как из приведенного примера (теоремы 2.7^{dual}) становится ясно, как это сделать.

0.4.3 Обзор главы 3

В главе 3 мы изучаем структуру нулевых множеств и некоторые другие свойства делителей алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$ и пространств $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где

$$\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{или} \quad \Omega = \{r_n \omega\}, \;\; 0 < r_n \nearrow 1, \; n \to \infty, \tag{0.4.6}$$

ω — канонический вес.

Мотивацией к исследованию является прежде всего то, что нулевые множества делителей φ указанных пространств, с точностью до множителя $(-\mathrm{i})$, являются спектрами D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$ из класса D-инвариантных подпространств с критическим соотношением характеристик:

$$2r(\mathrm{i}\sigma_W) = 2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|.$$

А именно, если $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество делителя, $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, то, согласно предложениям 1.3 и 1.11 из главы 1,

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \quad S(D^k f) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

— D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез, причем

$$\sigma_{W_S} = -\mathrm{i}\mathcal{Z}_\varphi, \quad I_{W_S} = [-h_\varphi(-\pi/2); h_\varphi(\pi/2)],$$

и значит,

$$|I_{W_S}| = 2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_{W_S}).$$

Кроме того, известно, что если φ — делитель $\mathbf{P}_\infty$ или $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$ для Ω, определенной в (0.4.6), $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, то оператор свертки T_S, порожденный (Ω-ультра)распределением в соответствующем пространстве бесконечно дифференцируемых функций на прямой сюръективен (см. [90] — для пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, [107] — для пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, если $\Omega = \{n\omega\}$, [3] — для пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, если $\Omega = \{r_n\omega\}$). Ядро оператора T_S есть D-инвариантное подпространство соответствующего пространства $\mathcal{E}_\infty$, допускающее спектральный синтез, причем функции $\ker T_S$ не только аппроксимируются экспоненциальными полиномами в топологии пространства $\mathcal{E}_\infty$, но и представляются в виде ряда (со скобками) из экспоненциальных мономов, также сходящегося в $\mathcal{E}_\infty$ (см. работы [90], [107], [3]).

Важно отметить также, что, как будет показано в главе 4, делители алгебры Шварца и их нулевые (под)множества играют ключевую роль в исследовании вопроса о представлении D-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(-a; a)$ в виде прямой суммы (алгебраической и топологической) его резидуального W_{I_W} и экспоненциального $\overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$ подпространств и справедливости для W фундаментального принципа в слабом смысле.

Напомним, что функции $\varphi \in \mathcal{P}_\infty$ являющиеся делителями в $\mathcal{P}_a$ называют еще *медленно убывающими* в $\mathcal{P}_\infty$, то есть удовлетворяющими аналитическим критериям из работ [90], [107, Теорема 2.6], [3, теорема 2] и [5, теорема 1], приведенным в главе 1 в теоремах E, F и G перед предложением 1.11. Условия этих критериев, имеющие форму оценок снизу для функции $\ln|\varphi|$, называются *условиями медленного убывания в пространстве* $\mathcal{P}_\infty$. В дальнейшем мы в равной мере будем использовать оба эквивалентных термина: "делитель"и "медленно убывающая функция".

Еще Л. Эренпрайс сформулировал в своей работе [90, §6] задачу о нахождении условий медленного убывания функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ в терминах каких-либо ограничений на ее нулевое множество $\mathcal{Z}_\varphi$. Там же он получил одно необходимое условие [90, предложение 6.1]:

если функция $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ медленно убывающая и $\mathcal{Z}_\psi = \{(\mu_j, m_j)\}$ — ее нулевое множество ($\mu_j \neq \mu_k$, $j \neq k$, m_j — кратность μ_j), то

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{m_j}{|\mathrm{Im}\,\mu_j| + \ln|\mathrm{Re}\,\mu_j|} < \infty. \tag{0.4.7}$$

Приведем другие известные нам результаты в указанном направлении. Первый из них состоит в том, что если нулевое множество $\mathcal{Z}_\varphi$ целой функции φ является ограниченным возмущением целочисленной последовательности, то есть для некоторого $L > 0$ и всех k выполнено

$$|\lambda_k - k| \leq L, \quad \lambda_k \in \mathcal{Z}_\varphi, \tag{0.4.8}$$

то φ — медленно убывающая функция ([109, теорема XXXIII], а также [55, теорема 1.1 и следствие]).

В работах [49] и [69] рассмотрены целые функции, нули которых имеют вид

$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{0.4.9}$$

где $l(t)$ — неограниченная функция аргумента $t \geq 0$.

В 2007 году А.М. Седлецкий в [49] для вырожденной гипергеометрической функции

$$\Phi(a, c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{c(c+1)\ldots(c+k-1)} \frac{z^k}{k!}, \quad a, c \in \mathbb{C},\ a,\ c, (c-a) \notin \mathbb{Z}_+,$$

показал, что, при дополнительных условиях $\mathrm{Re}\,c = 2\mathrm{Re}\,a$, $c - 2a \neq 0$, функция

$$\varphi(z) = e^{-\mathrm{i}\pi z}\Phi(a, c; 2\pi\mathrm{i}z)$$

будет целой функцией экспоненциального типа, удовлетворяющей оценкам

$$C_1|z|^{-\mathrm{Re}\,a}e^{\pi|\mathrm{Im}\,z|} \leq |\varphi(z)| \leq C_2|z|^{-\mathrm{Re}\,a}e^{\pi|\mathrm{Im}\,z|}, \quad |\mathrm{Im}\,z| \geq h_\varphi > 0,$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные, а нули λ_k, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, функции φ имеют асимптотику

$$\lambda_k = k + B_1 + B_2\ln|k| + O(1), \quad |k| \to \infty, \quad B_1 \in \mathbb{C},\ B_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(см. [49, теорема 2]). Тем самым, был построен один из первых примеров медленно убывающей функции в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$, нулевое множество которой не удовлетворяет условию (0.4.8).

Несколько ранее, в 2002 году, авторами работы [108, § 4] было отмечено, без доказательства, что для последовательности

$$\lambda_k = k + \ln^+ |k|, \quad k \in \mathbb{Z},$$

формула

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

определяет целую функцию типа синуса.

Напомним, что *функцией типа синуса* называется целая функция φ, имеющая экспоненциальный тип и удовлетворяющая оценкам

$$C_1 e^{\pi|\operatorname{Im} z|} \le |\varphi(z)| \le C_2 e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \ge h_\varphi > 0, \ \ C_1, \ C_2 > 0. \quad (0.4.10)$$

Очевидно, все функции типа синуса являются делителями как алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$, так и пространств $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где Ω определяется формулой (0.4.6).

В статье [69] А.А. Юхименко доказал следующее утверждение.

Теорема V [69, теорема 1]. *Пусть $l(t)$ – положительная дифференцируемая вогнутая функция на положительной полуоси, такая, что*

$$l(t) = O(t^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Для того чтобы последовательность (0.4.9) *была множеством нулей некоторой функции типа синуса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$tl'(t) = O(1), \quad t \to +\infty.$$

В параграфе 3.2 мы изучаем условия на возмущающую функцию l, при которых функция с нулевым множеством, определяемым формулами (0.4.9), будет делителем алгебры $\mathbf{P}_\infty$. При этом мы предъявляем более слабые, чем в работе [69], априорные требования к регулярности поведения функции l. В доказательствах нами развивается и используется техника оценивания, основанная на следующем интегральном представлении для $\ln|\varphi|$, полученном С.Ю. Фаворовым в [54, лемма 1]:

Теорема F. ([54, лемма 1]) *Пусть последовательность*

$$A = \{a_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

удовлетворяет условиям

$$\exists \lim_{R\to\infty} \sum_{|a_j|<R} a_j^{-1},$$

$$n_A(0,t) = O(t), \quad t \to \infty,$$
$$n_A(0,t+1) - n_A(0,t) = o(t), \quad t \to \infty,$$

где $n_A(z,t)$ – число точек a_j в круге $|w-z| \le t$. Тогда формула

$$g(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$$

корректно определяет целую функцию экспоненциального типа и для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место представление

$$\ln|g(z)| = \int_0^\infty \frac{n_A(0,t) - n_A(z,t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Предлагаемая нами техника отличается от метода работы [69]. Тем не менее, следует отметить, что доказательство первого утверждения леммы 3.1 мы проводим при помощи стандартных рассуждений, сходных с рассуждениями в доказательстве теоремы 1 работы [69, теорема 1] (см. цитированную выше теорему V). Также, введенная автором в этом доказательстве функция $\rho(t) = 1/2 - \{t\}$, где $\{a\}$ — дробная часть числа $a \in \mathbb{R}$, используется нами при обосновании утверждения леммы 3.2. Приведем здесь точную формулировку одного из полученных нами результатов.

Пусть $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ — положительная вогнутая функция и $l(0) = 0$. Обозначим через E — множество тех значений $t \in (0; +\infty)$, для которых существует производная $l'(t)$, и положим

$$p(t) = \begin{cases} l'(t), & t \in E, \\ \inf\{l'(s),\ s:\ s \in E,\ s < t\}, & t \in (0; +\infty) \setminus E. \end{cases}$$

Функция p убывает на положительной полуоси и

$$l(t) = \int_0^t p(s)\, \mathrm{d}s.$$

Теорема 3.2 *Пусть l — положительная вогнутая функция на $[0; +\infty)$, $l(0) = 0$, и*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln|l(t)|}{\ln t} \in [0; 1/2),$$

а функция φ определена формулой

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Для того, чтобы φ принадлежала алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ и была ее делителем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{p(t)t}{\ln t} = O(1), \quad t \to +\infty.$$

Дальнейшее содержание параграфа 3.2 определяется следующим замечанием: все условия на нулевое множество функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, полученные авторами цитированных выше работ, как и полученные нами здесь, влекут бо́льшую регулярность поведения $|\varphi|$, чем требуется для медленного убывания φ. А именно, в каждом из этих случаев оказывается, что $|\varphi|$ удовлетворяет следующему условию:

$$\exists a > 0: \ \forall x \in \mathbb{R} \ \exists x' \in \mathbb{R}: \ |x - x'| \leq a, \quad |\varphi(x')| \geq (a + |x'|)^{-a}.$$

Такие функции были введены Л. Эренпрайсом в [90, §2] и названы им *очень медленно убывающими.* Для распределения $S \in (C^\infty(\mathbb{R}))'$ очень медленное убывание функции $\varphi = \mathcal{F}(S) \in \mathbf{P}_\infty$ влечет соотношение

$$S * \mathcal{D}'_{\mathbf{F}} = \mathcal{D}'_{\mathbf{F}},$$

то есть обратимости S в пространстве $\mathcal{D}'_{\mathbf{F}}$ [90, теорема 2.2*], где $\mathcal{D}'_{\mathbf{F}}$ — пространство всех распределений конечного порядка (определение см. [88], [7]). В замечании после теоремы 2.2* в работе [90] Л. Эренпрайс пишет, что ему неизвестно, существуют ли распределения $S \in (C^\infty(\mathbb{R}))'$, *обратимые в пространствах $C^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}' = (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$, но не обратимые в пространстве $\mathcal{D}'_{\mathbf{F}}$.* Этот вопрос, в силу теорем 2.2 и 2.2* из [90], эквивалентен вопросу *существования медленно убывающей функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, которая не будет очень медленно убывающей.* Хотя, как указано в работе Л.Хермандера [56, § 6], позже Л.Эренпрайс и П. Мальявен в совместной работе построили такие функции, в теореме 3.3 мы приведем свой ответ на этот вопрос, используя технику, основанную на представлении С. Ю. Фаворова (теорема F).

Параграф 3.3 посвящен изучению условий на функцию l, при которых последовательность

$$\{\lambda_k\}, \quad \lambda_k = k + l(|k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

представляет собой нулевое множество делителя пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где Ω определена в (0.4.6). Один из полученных в параграфе 3.3 результатов — это следующая теорема.

Теорема 3.6. *Предположим, что функция* $l : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *при некотором* $\alpha \in (0;1)$ *удовлетворяет условию*

$$l(t) - l(s) = O(t^\alpha - s^\alpha), \quad t, s \to \infty$$

а также, что существуют дифференцируемая функция $\mu : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *и строгий вес* ν, *со свойствами*

$$\mu'(t) = O\left(\frac{\mu(t)}{t}\right), \quad t \to \infty,$$
$$\int^\infty \frac{\nu(t)l(t)}{t^2}\mathrm{d}t < \infty;$$

при этом

$$l(t) - l(s) = O(\mu(t) - \mu(s)), \quad t, s \to \infty,$$
$$\mu(t) = O(\nu(t)), \quad t \to \infty,$$

Тогда для любого канонического веса ω, *такого, что*

$$\nu(x) = O(\omega(x)) \quad \big(\nu(x) = o(\omega(x))\big), \quad x \to \infty,$$

функция

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

— делитель пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$ *с* $\Omega = \{n\omega\}$ *(соответственно, с* $\Omega = \{r_n\omega\}$*).*

В параграфе 3.4 исследуются необходимые и достаточные (как по отдельности, так и вместе) условия медленного убывания функций φ в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$, формулируемые в терминах ограничений на считающие функции и другие геометрические характеристики нулевых множеств $\mathcal{Z}_\varphi$. В этом направлении перед началом исследований нам был известен лишь цитированный выше результат Л. Эренпрайса (0.4.7) и работа С.Ю. Фаворова [54] (содержащая, в том числе, теорему F). Из представления теоремы F можно, конечно, сразу получить результаты об условиях на считающие функции нулевого множества $\mathcal{Z}_\varphi$, гарантирующие медленное убывание φ в алгебре Шварца. Но в этом случае условия будут формулироваться в виде сходимости некоторых несобственных интегралов, и поэтому их нельзя назвать ни геометрически наглядными, ни удобными для проверки.

Приведем формулировки двух теорем, иллюстрирующие результаты параграфа 3.4.

Пусть φ — функция из алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$ с множеством нулей

$$\mathcal{Z}_\varphi = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Обозначим $n(z,t)$ — число точек λ_j в круге $|w-z| \le t$, $\nu(t)$ — число точек λ_j в промежутке $(0;t]$ при $t>0$ и $(-\nu(t))$ — число точек λ_j в промежутке $[t;0)$ при $t<0$;

$$2\Delta = \lim_{j\to\infty} \frac{j}{|\lambda_j|}.$$

Теорема 3.8. *Если φ — делитель алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$, $\mathcal{Z}_\varphi \subset \mathbb{R}$, то*

$$\nu(t) - \Delta t = O(\ln^2 |t|), \quad |t| \to \infty.$$

Необходимое условие из теоремы 3.8 нельзя усилить. Подробнее об этом сказано в параграфе 3.4.

Теорема 3.9. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, и существует конечный $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{j}{\lambda_j} = \Delta$.*

Для того чтобы целая функция экспоненциального типа

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right)$$

принадлежала алгебре Шварца и была ее делителем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия

$$n^+(0;x) - \Delta x = O(\ln^2 x), \quad x \to \infty,$$

$$\varlimsup_{A\to\infty} \varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{A\ln x} \left| \int_{A\ln x}^{x\ln x} \frac{n(0,t) - n(x + \mathrm{i}A\ln x, t)}{t} \mathrm{d}t \right| < +\infty.$$

В теореме 3.9 символом $n^+(0;x)$ обозначено число точек последовательности Λ в промежутке $(0;t]$, а символом $n(z,t)$ — число точек последовательности $\Lambda \bigcup (-\Lambda) = \{\pm\lambda_j\}$ в круге $|w-z| \le t$.

В параграфе 3.5 речь пойдет о делителях алгебры Шварца, нулевые множества которых содержатся в горизонтальной криволинейной полосе:

$$Z_\varphi \subset \{z : \quad |\mathrm{Im}\, z| < \alpha(|\mathrm{Re}\, z|)\},$$

где $\alpha : \mathbb{R} \to [1;+\infty)$ — четная функция, удовлетворяющая некоторым условиям роста и регулярности поведения. В частности, будут исследованы аналоги оценок вида (0.4.10) для таких функций.

Прежде всего сформулируем одно естественное обобщение требования вида (0.4.10) для функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, индикаторная диаграмма которой есть симметричный относительно начала координат отрезок мнимой оси длины 2σ:

для точек z, лежащих вне криволинейной полосы

$$\{z : \quad |\operatorname{Im} z| < \operatorname{const} \ln(|\operatorname{Re} z| + e)\}, \tag{0.4.11}$$

имеет место оценка

$$\ln |\varphi(z)| \geq \sigma |\operatorname{Im} z| - \operatorname{const} \ln(|\operatorname{Re} z| + e). \tag{0.4.12}$$

В этом случае все нули функции φ лежат в криволинейной полосе (0.4.11), и, в силу теоремы о минимуме модуля (об оценке снизу модуля аналитической функции в круге) [29, Ch. 1, Sec. 8, Th. 11] и аналитического критерия Л.Эренпрайса (теорема E), φ — делитель алгебры $\mathbf{P}_\infty$.

Из доказываемого более общего факта, теоремы 3.11, будет следовать, справедливость обратного к только что сформулированному обобщению (0.4.10):

для любой медленно убывающей функции, все нули которой содержатся в полосе (0.4.11), *верна оценка* (0.4.12).

Сформулируем теорему 3.11. Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель этой алгебры, $\mathcal{Z}_\varphi = \{\lambda_j\}$ — ее нулевое множество. Без ограничения общности, всюду далее считаем, что

$$\varphi(0) = 1, \quad h_\varphi(-\pi/2) = h_\varphi(\pi/2) = a_\varphi \quad \text{— тип} \quad \varphi.$$

И пусть $\alpha : \mathbb{R} \to [1; +\infty)$ — четная функция, возрастающая на $[0; +\infty)$ и удовлетворяющая условиям

$$\alpha(e^s) \quad \text{— выпуклая функция на} \quad \mathbb{R},$$
$$\exists K > 1 : \ \varlimsup_{x \to \infty} \frac{\alpha(Kx)}{K\alpha(x)} < 1.$$

Теорема 3.11 *Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель этой алгебры и для всех $\lambda_j \in \mathcal{Z}_\varphi$, за исключением, быть может, конечного числа точек, справедливо неравенство*

$$|\operatorname{Im} \lambda_j| \leq \alpha(|\operatorname{Re} \lambda_j|).$$

Тогда существует постоянная $C_1 > 0$, такая, что

$$\ln |\varphi(z)| \geq a_\varphi |\operatorname{Im} z| - C_1 \alpha(|z|), \quad \textit{для всех} \quad z : \ |\operatorname{Im} z| \geq M_1 \alpha(|\operatorname{Re} z|)$$

Криволинейная полоса (0.4.11) и оценка (0.4.12) соответствуют частному случаю теоремы 3.11, когда $\alpha(x) = \ln(x + e)$.

0.4.4 Обзор главы 4

Задача спектрального синтеза в слабом смысле для оператора дифференцирования в пространстве Шварца $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a; a)$, сформулированная в [71, § 6], изучает вопрос о справедливости представления

$$W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W + W_{I_W}}, \tag{0.4.13}$$

где $\operatorname{span} X$ — линейная оболочка множества $X \subset \mathcal{E}_a$. Такое представление D-инвариантного подпространства W выступает в роли обобщения равенства

$$W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}; \tag{0.4.14}$$

а последнее означает, что подпространство W допускает *спектральный синтез в классическом смысле.*

Причина рассмотрения для D-инвариантных подпространств *слабого спектрального синтеза* (0.4.13) вместо классического, выражаемого формулой (0.4.14), состоит в наличии в $\mathcal{E}_a$ подпространств вида W_I (очевидно, D-инвариантных, нетривиальных при $I \neq (-a; a)$, и не содержащих экспоненциальных одночленов).

Результаты о *спектральном синтезе в слабом смысле* (0.4.13) содержатся в теоремах 1.7, 1.7*, 1.8, предложении 1.13 главы 1. В частности, D-инвариантное подпространство W с конечным спектром допускает слабый спектральный синтез (0.4.13). Более того, в этом случае W есть прямая сумма (алгебраическая и топологическая) конечномерного подпространства $\operatorname{span} \operatorname{Exp} W$ и резидуального подпространства W_{I_W} :

$$W = \operatorname{span} \operatorname{Exp} W(\Lambda) \oplus W_{I_W}, \tag{0.4.15}$$

(это утверждение было получено в [71, предложение 6.1] А.Алеманом и Б.Коренблюмом).

Версия слабого спектрального синтеза (0.4.13) послужила вариантом обобщения (0.4.15) на случай подпространства W с бесконечным дискретным спектром σ_W (в этом случае последовательность показателей E_W, по которым строится система корневых элементов оператора $D : W \to W$, есть $(\mathrm{i}\sigma_W)$). С другой стороны, в работе [71, § 6] был сформулирован вопрос о справедливости представления в виде прямой (алгебраической и топологической) суммы:

$$W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W} \oplus W_{I_W} \tag{0.4.16}$$

для D-инвариантного подпространства W с бесконечным дискретным спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W. Авторы работы [71] пишут, что им не известен ответ на этот вопрос.

Нам удается выяснить, что условия справедливости (0.4.16) для нетривиального D-инвариантного подпространства с бесконечным дискретным спектром аналогичны по форме условиям допустимости слабого спектрального синтеза (0.4.13), приведенным в главе 1 (теорема 1.8). При этом вместо плотности Берлинга-Мальявена $D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W)$ будет использоваться другая, более тонкая, характеристика последовательности $\Lambda := \mathrm{i}\sigma_W$, которую мы обозначим $D_{sd}(\Lambda)$.

Для определения новой характеристики произвольной комплексной последовательности Λ нам понадобятся медленно убывающие функции в алгебре Шварца. Эти функции суть в точности делители алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$.

Пусть последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ такова, что $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$. Введем характеристику $D_{sd}(\Lambda)$:

если Λ не является нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, то полагаем $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$;

в противном случае, $D_{sd}(\Lambda)$ определяем как инфимум множества всех положительных чисел c, таких, что в алгебре $\mathbf{P}_\infty$ имеется медленно убывающая функция экспоненциального типа πc, равная нулю на Λ.

Для разрешимости задачи о представлении D-инвариантного подпространства с бесконечным дискретным спектром в виде прямой суммы (0.4.16) величина $\pi D_{sd}(\Lambda)$ играет роль, аналогичную роли радиуса полноты $\rho(\Lambda)$ в теореме 1.8.

Напомним, что для промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ символом $|I|$ обозначается его длина (конечная или равная $+\infty$), а также, что в этой главе мы рассматриваем $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$.

Сформулируем основные результаты, полученные по вопросу о представлении D-инвариантного подпространства W в виде (0.4.16).

Теорема 4.1. I. *Пусть W — D-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_a$ с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W, причем $|I_W| < +\infty$*

1) *Если $|I_W| > 2\pi D_{sd}(\Lambda)$ и выполнены оба соотношения*

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j|} < +\infty, \qquad \varliminf_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j|} > -\infty, \tag{0.4.17}$$

то W имеет вид (0.4.16).

2) *Обратно, пусть W имеет вид* (0.4.16).

Тогда $|I_W| \geq 2\pi D_{sd}(\Lambda)$.

При этом, если $I_W \Subset (a;b)$, то справедливы оба неравенства (0.4.17). *Если же включение $I_W \subset (a;b)$ не компактно и точка a (или точка b)*

— граничная для I_W, то справедливо первое (соответственно, второе) из соотношений (0.4.17).

II. *Среди D-инвариантных подпространств W с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W длины $2\pi D_{sd}(\Lambda)$ имеются как подпространства, допускающие представление* (0.4.16), *так и не допускающие его.*

Для D-инвариантных подпространств с дискретным спектром и резидуальным промежутком бесконечной длины имеет место следующий критерий.

Теорема 4.2. *Пусть W — D-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_\infty$ с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и неограниченным резидуальным промежутком $I_W = (-\infty; d]$ (либо $I_W = [c; +\infty)$).*

Представление (0.4.16) *для подпространства W верно тогда и только тогда, когда $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ и выполнено первое (соответственно, второе) из соотношений* (0.4.17).

Из теорем 4.1, 4.2 вытекает такое утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть W — D-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_a$ с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W.*

Если $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$, то представление (0.4.16) *не будет иметь места.*

Для представления функций из D-инвариантных подпространств вида (0.4.16), при определенных дополнительных условиях имеется следующее уточнение.

Теорема 4.3. *Пусть D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ имеет вид* (0.4.16), *и выполнено хотя бы одно из условий: $|I_W| = +\infty$ или* (0.4.17).

Тогда существует разбиение последовательности Λ на попарно не пересекающиеся конечные подмножества:

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k, \quad \Lambda_k \bigcap \Lambda_m \neq \emptyset,\ k \neq m,$$

такое, что любая функция $f \in W$ единственным образом представляется в виде суммы $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1 \in W_{I_W}, \quad f_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_j \in \Lambda_k} p_j(t) e^{-\mathrm{i}\lambda_j t} \right),$$

p_j — многочлены, причем внешняя сумма (по k) для f_2 сходится в топологии пространства $\mathcal{E}_\infty = C^\infty(\mathbb{R})$.

0.4.5 Обзор главы 5

Глава 5 посвящена рассмотрению важного в приложениях вопроса о сохранении принадлежности целой функции какому-либо специальному классу $Q \subset H(\mathbb{C})$, выделеннному, например, ограничениями на рост, при возмущениях ее нулей. Всюду в этой главе обозначаем символами $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}'_a$ пространство Шварца $C^\infty(-a;a)$ и сильное сопряженное к нему.

Первые результаты об устойчивости оценок роста целой функции при возмущении ее нулей относятся, по-видимому, к функции $\sin \pi z$. Они были получены в классических монографиях [109, глава VI] (теоремы XXXIII, XXXIV), [29], см. также [55]. Вопрос об устойчивости классов целых функций, близких к рассматриваемым в настоящей работе как по структуре, так и по их роли в приложениях к другим задачам анализа, изучался в работах [30], [47], [48]).

В работе [30] Б.Я. Левиным и И.В. Островским найдены необходимые и достаточные условия на ограниченные(!) возмущения нулевого множества, сохраняющие класс функций типа синуса. Таким образом, в частности, установлено, что *произвольные ограниченные возмущения нулей не сохраняют класс функций типа синуса.*

А.М. Седлецкий в [47], [48] получил условия на возмущение нулевого множества, при которых сохраняется каждый из классов функций: $\mathcal{F}(C[-a;a])$, $\mathcal{F}(L^q(-a;a))$, $1 \le q < \infty$, $\mathcal{F}(L^q_u)$, где u — некоторый вес, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье-Лапласа. В целом, эти условия представляют собой требование довольно быстрого сближения вещественных частей невозмущенной и возмущенной последовательностей нулей при неограниченном возрастании индекса j.

В главе 5 мы изучаем сохранение класса Q целых функций при возмущениях их нулевых множеств для случая, когда Q есть одно из шести специальных подмножеств алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_\infty)$ — образа при преобразовании Фурье-Лапласа пространства всех распределений с компактными носителями на вещественной прямой. Как и выше, формула

$$\psi(z) = S(e^{-\mathrm{i}tz})$$

определяет преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}(S)$ (Ω-ультра)распределения S.

Опишем подробнее эти подмножества, попутно упоминая об их роли в приложениях.

Хорошо известно, что каждую функцию $s \in \mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R})$ можно рассматривать как *регулярный* функционал, действующий в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$. Образ $\mathbf{P}_{\infty,0} = \mathcal{F}(\mathcal{D})$ совпадает с совокупностью всех целых функций экспоненциального типа, убывающих вдоль вещественной оси быстрее любой степени $|x|^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [58, теорема 7.3.1]).

Пусть $\psi \in \mathbf{P}_\infty$, $\mathcal{Z}_\psi = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ — ее нулевое множество, причем

$$|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \dots .$$

Класс P определим как совокупнсть всех функций $\psi \in \mathbf{P}_\infty$, нулевые множества которых удовлетворяют следующим двум условиям:
(Z1): $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \frac{|\operatorname{Im}\mu_j|}{\ln|\mu_j|} < +\infty$.
(Z2): число точек $\mu_j \in \mathcal{Z}_\psi$ таких, что $|\operatorname{Re}\mu_j - x| \leq 1$, есть величина $O(\ln|x|)$, $|x| \to \infty$.

Аналогичным образом определяем *класс P_0*:
$\psi \in P_0$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \mathbf{P}_{\infty,0}$ и ее нулевое множество удовлетворяет условиям *(Z1)* и *(Z2)*.

Третий из рассматриваемых нами классов целых функций — *класс P_{sd}* — образован медленно убывающими в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ функциями (делителями этой алгебры), нулевые множества которых удовлетворяют условию *(Z1)*. Согласно результатам, полученным в главе 3, для нулевого множества медленно убывающей функции условие *(Z2)* является следствием условия *(Z1)* (см. лемму 3.6).

В главе 4 обнаруживается важная роль функций из класса P_{sd} в вопросах представления слабо синтезируемых D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a$ в виде прямой суммы их резидуальных и экспоненциальных составляющих и разложения в ряды (со скобками) из экспоненциальных одночленов функций из таких подпространств.

Еще одно важное приложение медленно убывающих функций касается понятия *обратимости* распределения $S \in \mathcal{E}'_a$ в пространствах $\mathcal{E}_\infty$ и $\mathcal{D}' = (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$, то есть справедливости соотношений

$$S * \mathcal{E}_\infty = \mathcal{E}_\infty,$$

$$S * \mathcal{D}' = \mathcal{D}',$$

где $*$ — свертка. Оно состоит в том, что распределение $S \in \mathcal{E}'_\infty$ обратимо в пространствах $\mathcal{E}_\infty$ и $\mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда его преобразование Фурье-Лапласа $\psi = \mathcal{F}(S)$ есть медленно убывающая функция (см. теоремы I и 2.2, предложение 2.7 в [90]).

Класс P_{wsd}, по определению, состоит из тех функций $\varphi \in P$, для которых

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi :\ p \in \mathbb{C}[z]\},$$

а *класс* P_{nwsd} — из функций $\varphi \in P$, таких, что

$$\mathcal{J}(\varphi) \supsetneqq \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

И наконец, *класс* P_{syn} определим как совокупность функций $\psi \in P$, таких, что $\mathcal{J}_\psi$ — слабо локализуемый подмодуль в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$.

Рассмотрение класса P_{syn} представляет интерес в связи с тем, что, согласно предложению 2.1 из главы 2, комплексная последовательность Λ есть нулевое множество функции из этого класса тогда и только тогда, когда эта последовательность *синтезируема* и удовлетворяет условиям *(Z1)*, *(Z2)*. Синтезируемые последовательности были введены недавно в работе [72], в связи с задачей спектрального синтеза для оператора дифференцирования в пространстве Шварца, точнее, в связи с изучением ситуации, когда для D-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(-a;a)$ имеет место равенство

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|, \qquad (0.4.18)$$

где, как и выше, σ_W — спектр подпространства W, I_W — его резидуальный промежуток.

Из определений классов P_{wsd} и P_{nwsd} видим, что функции, содержащиеся в них, тоже представляют интерес с точки зрения "пограничного"случая задачи слабого спектрального синтеза, а именно: если $\varphi \in P_{wsd}$, то порождаемый этой функцией главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем, и значит, является аннуляторным подмодулем D-инвариантного подпространства W, допускающего спектральный синтез в слабом смысле, причем спектр и резидуальный промежуток этого подпространства удовлетворяют соотношению (0.4.18); если же ψ — функция из P_{nwsd}, то главный подмодуль $\mathcal{J}_\psi$ не является слабо локализуемым, что эквивалентно недопустимости спектрального синтеза в слабом смысле подпространством W, для которого $\mathcal{J}_\psi$ — аннуляторный подмодуль.

Между введенными классами функций имеют место следующие соотношения:

$$P = P_0 \bigcup P_{wsd} \bigcup P_{nwsd},$$

при этом

$$P_{wsd} \bigcap P_{nwsd} = P_0 \bigcap P_{wsd} = P_0 \bigcap P_{nwsd} = \emptyset,$$

$$P_{sd} \subsetneqq P_{wsd} \subsetneqq \ P_{syn} \subsetneqq P,$$

$$P_{syn} \setminus P_{wsd} \subsetneqq P_0,$$

$$P_{syn} = P_{wsd} \bigcup \left(P_{syn} \bigcap P_0 \right).$$

Справедливость этих соотношений следует из результатов глав 1–4 и определений классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd}, P_{syn}.

Отметим, что условие *(Z1)* означает принадлежность всех точек μ_j, $j \geq j_0$, криволинейной полосе $|y| \leq C_\psi \ln(|x|+2)$, а условие *(Z2)* представляет собой некоторое ограничение на степень сгущения точек μ_j. Эти условия выполнены, например, для последовательности $\{\mu_j\}$, целиком лежащей в какой-либо горизонтальной полосе и такой, что

$$n(z,1) = O(\ln|z|), \quad |z| \to \infty,$$

где $n(z,t)$ обозначает число точек μ_j в круге $|w-z| \leq t$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$, $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ — нулевые множества целых функций φ и ψ, соответственно.

Следуя А.М. Седлецкому [47, глава 5], будем писать $\Lambda, \mathcal{M} \in (A)$, если эти последовательности связаны некоторым симметричным условием (A), то есть

$$\Lambda, \mathcal{M} \in (A) \Longleftrightarrow \mathcal{M}, \Lambda \in (A),$$

и будем говорить, что *условие* (A) *сохраняет класс целых функций* Q, если из $\Lambda, \mathcal{M} \in (A)$ следует, что

$$\varphi \in Q \Longleftrightarrow \psi \in Q.$$

В качестве условия (A) мы рассматриваем следующие соотношения, связывающие Λ и $\mathcal{M}$:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(1), \quad \mathrm{Im}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(\ln|\mu_j|), \quad j \to \infty;$$

при выполнении этих соотношений будем говорить, что последовательности Λ и $\mathcal{M}$ получаются друг из друга *p-возмущением.*

Основные результаты о сохранении введенных классов целых функций при возмущениях их нулей содержатся в теоремах 5.1 и 5.2.

Теорема 5.1. 1. *Пусть для последовательности* $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ *выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность* $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *получена p-возмущением из* $\mathcal{M}$.

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ *и* Λ *одновременно (не) являются нулевыми множествами функций, принадлежащих каждому из классов:* P *и* P_0.

2. *Пусть для последовательности* $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ *выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность* $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *получена p-возмущением из* $\mathcal{M}$.

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ одновременно (не) являются нулевыми множествами функций из класса P_{syn}.

3. *Пусть для последовательности $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ выполнено условие (Z1) и последовательность Λ получается из $\mathcal{M}$ посредством p-возмущения.*

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ одновременно (не) являются нулевыми множествами функций из класса P_{sd}.

4. *Пусть для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ получена p-возмущением из $\mathcal{M}$.*

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ одновременно (не) являются нулевыми множествами функций, принадлежащих каждому из классов: P_{wsd} и P_{nwsd}.

Для последовательности нулей $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ произвольной функции ψ из класса Q (где Q — один из классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} или P_{syn}) рассмотрим возмущенную последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ такую, что

$$\lambda_j - \mu_j = l_j + \mathrm{i}\beta_j, \tag{0.4.19}$$

где $l_j = l(j)$, l — вогнутая положительная дифференцируемая функция, определенная на $[0; +\infty)$ и удовлетворяющая условиям

$$l'(t) < 1, \quad l(t) \leq \mathrm{const} \cdot t^\gamma, t \in [0; +\infty),$$

при некотором $\gamma \in (0; 1/2)$ и

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\delta_0 l(t)}{l(\delta_0 t)} < 1$$

при некотором $\delta_0 \in (0; 1)$.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы соотношение (0.4.19) между невозмущенным $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ и возмущенным $\Lambda = \{\lambda_j\}$ нулевыми множествами сохраняло каждый из классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} или P_{syn}, необходимо и достаточно, чтобы*

$$l_j = O(1), \qquad \beta_j = O(\ln|\mu_j|), \quad j \to \infty.$$

Кратко опишем содержание пятой главы по параграфам. В параграфе 5.2 приводятся и доказываются вспомогательные утверждения и проделывается аналитическая работа, подводящая к намеченной цели. Основные теоремы о сохранении классов P, P_0, P_{sd}, P_{syn} представлены в параграфе 5.3. Параграф 5.4 содержит применения основных результатов к задаче спектрального синтеза в пространстве Шварца, сохранения свойства синтезируемости последовательности, свойства полноты и (бес)конечности недостатка (избытка) экспоненциальных систем в пространствах $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$ и $C[-a;a]$. В этом параграфе доказаны следующие теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ получена р-возмущением из $\mathcal{M}$.*

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ синтезируемы или нет одновременно.

Теорема 5.4 *Пусть для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ получена р-возмущением из $\mathcal{M}$.*

Тогда

1) $D_{sd}(\Lambda) = D_{sd}(\mathcal{M})$;

2) *для D-инвариантных подпространств W и $\widetilde{W}$ со спектрами $(-\mathrm{i}\mathcal{M})$ и $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальными промежутками I, $\widetilde{I}$, соответственно, пары соотношений*

$$W = W_I \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W} \quad \text{и} \quad D_{sd}(\mathcal{M}) < |I|$$

и

$$\widetilde{W} = W_{\widetilde{I}} \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} \widetilde{W}} \quad \text{и} \quad D_{sd}(\Lambda) < |\widetilde{I}|$$

имеют место или нет одновременно.

Для последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ обозначаем символом $\operatorname{Exp}_\Lambda$ соответствующую систему экспоненциальных одночленов и предположим, что

$$d_\Lambda := D_{BM}(\Lambda) < \infty.$$

Если система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ полна в пространстве $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$ или в пространтсве $C[-a;a]$, где $a = \pi d_\Lambda$, то ее *избытком* $E_p(\Lambda)$ ($p = +\infty$ соответствует пространству $C[-a;a]$) называется величина $m \in \mathbb{Z}_+ \bigcup \{+\infty\}$, такая, что, в случае конечного m, система, полученная удалением m элементов из $\operatorname{Exp}_\Lambda$, полна в соответствующем пространстве, а полученная удалением $(m+1)$ элемента — уже нет; избыток $E_p(\Lambda)$ системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ равен $+\infty$, если после удаления любого конечного числа элементов оставшаяся система полна.

Для неполной в $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$ или в $C[-a;a]$ системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ ее *избытком* $E_p(\Lambda)$ ($p = +\infty$ соответствует пространству $C[-a;a]$) называется величина $m \in (-\mathbb{N}) \bigcup \{-\infty\}$, такая, что после добавления $(-m-1)$ элемента к $\operatorname{Exp}_\Lambda$ полученная система еще не полна, а после добавления $(-m)$ элементов — полна в соответствующем пространстве;

избыток $E_p(\Lambda)$ неполной системы Exp_Λ равен $-\infty$, если добавление к ней любого конечного числа элементов приводит к неполной системе.

Пусть $\mathcal{L} = \{\Lambda\}$ — совокупность всех последовательностей $\Lambda \subset \mathbb{C}$,

$$0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots,$$

удовлетворяющих условиям *(Z1)*, *(Z2)*, то есть таких, что

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| = O(\ln |\lambda_k|), \quad k \to +\infty.$$

$$n(t+1) - n(t) = O(\ln t), \quad t \to +\infty,$$

где $n(t)$ — считающая функция последовательности $\operatorname{Re} \Lambda$.

Далее, пусть $\{\nu_k\} \subset \mathbb{C}$ и

$$\mathcal{M} = \{\mu_k\}, \quad \mu_k = \lambda_k + \nu_k$$

— возмущенная последовательность.

Теорема 5.5. *Для того чтобы оба избытка, $E_p(\mathcal{M})$ и $E_p(\Lambda)$, были конечны (или бесконечны и одного знака:*

$$E_p(\mathcal{M}) = E_p(\Lambda) = +\infty \text{ или } -\infty$$

для всех последовательностей $\Lambda \in \mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы возмущающая последовательность $\{\nu_k\}$ удовлетворяла условиям

$$\operatorname{Re} \nu_k = O(1), \quad \operatorname{Im} \nu_k = O(\ln |\lambda_k|), \quad k \to +\infty,$$

то есть, чтобы последовательности Λ и $\mathcal{M}$ можно было получить друг из друга p-возмущением.

Глава 1

Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространствах Шварца и Ω-ультрадифференцируемых функций

1.1 Введение

1.1.1 Задача спектрального синтеза для оператора дифференцирования D в $\mathcal{E}_a$

Пусть $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ — оператор дифференцирования, действующий в пространстве $\mathcal{E}_a$. Замкнутое подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$, инвариантное относительно дифференцирования: $D(W) \subset W$, называем *D-инвариантным подпространством.*

Корневые элементы оператора D — это экспоненциальные одночлены

$$e_{k,\lambda}(t) = t^k e^{-\mathrm{i}\lambda t}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Легко видеть, что если W — D-инвариантное подпространство и $e_{k,\lambda} \in W$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $e_{j,\lambda} \in W$, $j = 0, \ldots, k-1$.

Рассмотрим нетривиальное (отличное от $\{\bar{0}\}$ и $\mathcal{E}_a$) D-инвариантное подпространство W. Обозначим символом $\operatorname{Exp} W$ совокупность всех экспоненциальных одночленов $e_{k,\lambda}$, содержащихся в нем, а символом E_W — множество показателей, по которым построена экспоненциальная система $\operatorname{Exp} W$: *точка $\lambda \in \mathbb{C}$ содержится в E_W с кратностью k тогда и только* *тогда, когда* $e_{k,\lambda} \in W$, *а* $e_{k+1,\lambda} \notin W$.

Из установленной выше двойственности (предложение 0.1) следует, что E_W — последовательность кратных точек комплексной плоскости с единственной предельной точкой в бесконечности. Нетривиальность W влечет неравенство для радиуса полноты этой последовательности: $r(E_W) < a$.

Классическая задача спектрального синтеза для оператора дифференцирования D в $\mathcal{E}_a$ состоит в том, чтобы
выяснить, какие D*-инвариантные подпространства* $W \subset \mathcal{E}_a$ *допускают спектральный синтез, то есть имеют вид*

$$W = \overline{\operatorname{span}\operatorname{Exp} W}? \tag{1.1.1}$$

Из условия (0.3.2) следует, что пространство $\mathcal{U}_\Omega(-a;a)$ представляет собой неквазианалитический класс функций. Поэтому множества вида

$$W_I = \{f \in \mathcal{E}_a : \ f = 0 \quad \text{на} \quad I\},$$

где $I \subsetneq (-a;a)$ — фиксированный относительно замкнутый в $(-a;a)$ промежуток, представляют собой *нетривиальные (!)* D-инвариантные подпространства в $\mathcal{E}_a$. Причем, соотношение $I \neq (-a;a)$, влечет

$$\operatorname{Exp} W_I = \emptyset.$$

Как уже отмечалось выше, впервые этот факт был замечен А. Алеманом и Б. Коренблюмом в работе [71] для пространства $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$. Также в этой работе доказано, что каждое нетривиальное D-инвариантное подпространство W в $C^\infty(-a;a)$ обязательно содержит "резидуальную часть— максимальное подпространство вида W_I. Иными словами, найдется относительно замкнутый в $(-a;a)$ промежуток I_W со свойствами:

$$W_{I_W} \subset W, \quad W_I \setminus W \neq \emptyset \ \forall\, I \subsetneq I_W.$$

Отметим, что доказательство этого факта, предложенное А.Алеманом и Б.Коренеблюмом, довольно длинное и сложное; оно основано на результатах Д. Хитта [93] и Д.Сарасона [114] о структуре и свойствах "почти инвариантных"подпространств в пространстве Пэли-Винера. При подходе, предлагаемом в настоящей работе, описание "резидуальной"компоненты W_{I_W} данного нетривиального D-инвариантного подпространства W одного из пространств $\mathcal{E}_a$ является простым следствием принципов двойственности (общего и специального — предложения 0.1 и 1.2). На самом деле, простым следствием используемого нами двойственного подхода является и более общий факт, справедливый для произвольных замкнутых подпространств $\mathcal{E}_a$. Сформулируем его здесь, а обоснование приведем в замечании 1.1 после доказательства предложения 1.2.

Предложение 1.1. *Для любого (не обязательно D-инвариантного) замкнутого подпространства $L \subset \mathcal{E}_a$ существует относительно замкнутый промежуток $I_L \subseteq (-a; a)$ со свойствами:*

$$W_{I_L} \subset L, \quad W_I \setminus L \neq \emptyset \; \forall \, I \subsetneq I_L.$$

Авторы работы [71] называют подпространства вида W_I "резидуальными"("residual subspace"). Следуя этой терминологии, промежуток I_L называем *резидуальным промежутком подпространства* L.

Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство, такое, что

$$I_W = (-a; a), \quad \operatorname{Exp} W \neq \emptyset.$$

Для каждого b из интервала $(r(\mathrm{i}E_W); a)$ рассмотрим D-инвариантное подпространство $W_b \subset \mathcal{E}_a$, определяемое условием

$$W_b^0 = W^0 \bigcap \mathcal{E}'[-b; b].$$

Получим целое семейство нетривиальных D-инвариантных $\{W_b\}$ подпространств, таких, что

$$I_{W_b} = [-b; b], \quad \operatorname{Exp} W_b = \operatorname{Exp} W.$$

Каждое такое подпространство содержит D-инвариантное подпространство $\overline{W_{I_b} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$, которое a priori не допускает спектрального синтеза (1.1.1) в силу теорем о единственности периодического в среднем продолжения (о котором см. [32], [46]).

Заметим теперь, что, с одной стороны, подпространство W, допускающее спектральный синтез, минимально среди *всех* D-инвариантных подпространств $\widetilde{W}$ с тем же запасом экспоненциальных одночленов:

$$\operatorname{Exp} \widetilde{W} = \operatorname{Exp} W.$$

С другой стороны, — в неквазианалитических пространствах функций мы должны принимать во внимание наличие D-инвариантных подпространств вида W_I ("резидуальных подпространств"). Поэтому синтезировать D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ естественно из двух объектов: содержащегося в нем множества экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$ и его резидуального подпространства W_{I_W} (что как раз и было предложено А.Алеманом и Б.Коренблюмом в их работе [71] в качестве гипотезы для случая пространства $C^\infty(a; b)$).

Пусть W — нетривиальное D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}_a$ с запасом экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$ (возможно, пустым) и резидуальным промежутком I_W. Тогда D-инвариантное подпространство

$$\overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$$

содержится в W.

Будем говорить, что W допускает *спектральный синтез в слабом смысле* (*слабый спектральный синтез*), если

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}, \tag{1.1.2}$$

то есть W минимально среди *всех* D-инвариантных подпространств $\widetilde{W}$ с тем же запасом экспоненциальных одночленов: $\operatorname{Exp} \widetilde{W} = \operatorname{Exp} W$ и резидуальным промежутком $I_{\widetilde{W}} = I_W$.

Вопрос о том, *для каких нетривиальных D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$ имеет место соотношение* (1.1.2), — главный объект исследования настоящей главы.

Оказывается, что одним из условий, необходимых для представления D-инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ в виде (1.1.2) является дискретность спектра сужения оператора дифференцирования $D : W \to W$, называемого *спектром D-инвариантного подпространства* W и обозначаемого σ_W.

В работе [71] авторы рассматривали задачу в пространстве $C^\infty(-a; a)$ и установили, что в этом случае спектр сужения оператора дифференцирования на подпространство W, то есть спектр оператора

$$D : W \to W,$$

либо дискретен (в частности, пуст), либо совпадает со всей комплексной плоскостью [71, теорема 2.1]. Аналог этого утверждения для D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a$ устанавливается в следствии 1.5. В частности, доказано, что если спектр σ_W дискретен, то он равен $(-\mathrm{i}E_W)$.

Далее, в главе 4, мы рассмотрим другую, усиленную и отличную от (1.1.2), версию спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств в пространстве Шварца $C^\infty(-a; a.)$ Здесь же ослабленная версия спектрального синтеза (1.1.2) изучается для общих пространств $\mathcal{E}_a$, определенных выше, с ипользованием в качестве инструмента исследования подмодулей двойственног модуля $\mathcal{P}_a$.

1.1.2 Двойственность. Локальное описание подмодулей в $\mathcal{P}_a$

Согласно **общему принципу двойственности** (предложение 0.1), замкнутому подпространству $W \subset \mathcal{E}_a$ однозначно соответствует замкнутое подпространство $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$. Нетрудно проверить, что замкнутое подпространство W будет D-инвариантным тогда и только тогда, когда $z\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, то есть $\mathcal{J}$ — *замкнутый подмодуля* модуля $\mathcal{P}_a$ (над кольцом $\mathbb{C}[z]$).

В дальнейшем будут рассматриваться только замкнутые подмодули в $\mathcal{P}_a$ (если специально не оговорено противное), поэтому вместо термина "замкнутый подмодуль"для краткости будет использоваться термин "подмодуль".

Для подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ символом $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ обозначаем его *нулевое множество*, которое определяется формулой

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{J}} \mathcal{Z}_{\varphi},$$

где $\mathcal{Z}_{\varphi}$ — нулевое множество функции φ.

Индикаторным отрезком подмодуля $\mathcal{J}$ называется отрезок

$$[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \subset \overline{\mathbb{R}}, \tag{1.1.3}$$

с концами в точках $c_{\mathcal{J}} = -\sup_{\varphi \in \mathcal{J}} h_{\varphi}(-\pi/2)$, $d_{\mathcal{J}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{J}} h_{\varphi}(\pi/2) \in \overline{\mathbb{R}}$; здесь, как и выше, h_{φ} — индикатор функции φ.

Предложение 1.2. (**Специальный принцип двойственности.**) *Между совокупностью $\{W\}$ всех D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a$ и совокупностью $\{\mathcal{J}\}$ всех подмодулей модуля $\mathcal{P}_a$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу:*

$$W \longleftrightarrow \mathcal{J} \Longleftrightarrow \mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0),$$

где $W^0 = \{S \in \mathcal{E}'_a : \ S(f) = 0 \ \forall \, f \in W\}$. При этом

$$I_W = [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \bigcap (-a; a), \quad E_W = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}. \tag{1.1.4}$$

Доказательство. С учетом изложенного выше, видим, что в доказательстве нуждается лишь первое соотношение в (1.1.4).

Обозначим $I_0 = (-a; a)\bigcap[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$. Как уже отмечалось во Введении, операторы сдвига аргумента

$$f \mapsto f(\cdot + y), \quad (f \mapsto f(\cdot - y)), \quad y > 0,$$

действуют непрерывно в пространствах $\mathcal{E}(-a; +\infty)$ и $\mathcal{E}(-\infty; a)$, соответственно.

Для функции $f \in W_{I_0} \subset \mathcal{E}_a$ можем написать представление

$$f = f_- + f_+, \quad f_- \in W_{I_-}, \quad f_+ \in W_{I_+},$$

где $I_- = (-\infty; d_{\mathcal{J}}]$, $I_+ = [c_{\mathcal{J}}; +\infty)$, $W_{I_-} \subset \mathcal{E}(-\infty; a)$, $W_{I_+} \subset \mathcal{E}(-a; +\infty)$.

Далее, если $S \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{J})$, то

$$\operatorname{supp} g(\cdot - y)\bigcap \operatorname{supp} S = \emptyset, \quad g \in W_{I_-},\ y > 0,$$

$$\operatorname{supp} \tilde{g}(\cdot + y)\bigcap \operatorname{supp} S = \emptyset, \quad \forall\, \tilde{g} \in W_{I_+},\ y > 0.$$

Отсюда следует, что

$$S(f) = S(f_- + f_+) = \lim_{y \to 0+} \left(S(f_-(x - y)) + S(f_+(x + y))\right) = 0$$

для любого ультрараспределения $S \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{J})$. Значит, в силу принципа двойственности, будет $W_{I_0} \subset W$.

Рассмотрим теперь произвольный относительно замкнутый в $(-a; a)$ промежуток I' такой, что $I' \subsetneq I_0$. Из определения величин $c_{\mathcal{J}}$, $d_{\mathcal{J}}$ и перечисленных во Введении фактов общей теории Ω-УДФ и (Ω-ультра)-распределений выводим, что для любого $c' \in (c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}) \setminus I'$ найдутся $S \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{J})$, $f \in \mathcal{E}_a$ и $\delta > 0$ со свойствами

$$S(f) \neq 0, \quad \operatorname{supp} f \subset (c' - \delta; c' + \delta) \subset (c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}) \setminus I'.$$

Следовательно, по принципу двойственности, $f \notin W$. С другой стороны, справедливо включение $f \in W_{I'}$. Сказанное выше означает, что промежуток I_0 будет минимальным среди всех относительно замкнутых в $(-a; a)$ промежутков I, для которых $W_I \subset W$.

Таким образом, получаем $I_W = I_0$, что и завершает доказательство.

□

Замечание 1.1. Понятие индикаторного отрезка может быть определено при помощи формул (1.1.3) и для замкнутого подпространства $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$, не являющегося подмодулем. Используя рассуждения, примененные для доказательства первого из соотношений (1.1.4), для произвольного замкнутого подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ и соответствующего ему замкнутого подпространства $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$, нетрудно обосновать утверждение сформулированного выше предложения 1.1.

Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ называется *слабо локализуемым*, если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi} \quad \text{и} \quad [-h_{\varphi}(-\pi/2); h_{\varphi}(\pi/2)] \subset [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$$

Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ называется *локализуемым* (*обильным*), если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$ со свойством $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi}$. Иными словами, локализуемый подмодуль — это слабо локализуемый подмодуль с индикаторным отрезком $[-a; a]$.

Слабо локализуемый подмодуль $\mathcal{J}$ обладает свойством максимальности: $\widetilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}$ для любого подмодуля $\widetilde{J}$, такого, что

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{\mathcal{J}}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \quad \text{и} \quad [c_{\widetilde{\mathcal{J}}}; d_{\widetilde{\mathcal{J}}}] = [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}].$$

Используя **специальный принцип двойственности**, выводим следующее утверждение.

Предложение 1.3. *D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ допускает спектральный синтез в слабом смысле тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ слабо локализуем.*

Предложение 1.3 и составляет основу *двойственной схемы*: оно сводит задачу о спектральном синтезе к эквивалентной двойственной задаче локального описания. Данная схема, как уже упоминалось во Введении, восходит к работам И.Ф. Красичкова-Терновского и Л. Эренпрайса. Из абстрактных методов работ [19], [20], [24] мы увидим, что исследование вопроса о слабой локализуемости подмодуля в модуле $\mathcal{P}_a$ сводится к изучению двух других свойств подмодулей: устойчивости и насыщенности.

Свойство устойчивости и слабая локализуемость подмодуля связаны: *всякий слабо локализуемый подмодуль устойчив.*

Однако *обратное неверно*: *не всякий устойчивый подмодуль в $\mathcal{P}_a$ слабо локализуем* (см. теорему 1.1 ниже).

Мы сначала исследуем устойчивость (параграф 1.2), а затем — слабую локализумость устойчивого подмодуля (эквивалентную его насыщенности) — в параграфе 1.3. Тем самым, решается задача локального описания в слабом смысле для подмодулей в модуле $\mathcal{P}_a$ и описываются классы слабо локализуемых подмодулей.

В первом пункте параграфа 1.4 доказывается важный факт: двойственность дискретности спектра D-инвариантного подпространства W и устойчивости его аннуляторного подмодуля $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ (предложение 1.12 и следствие 1.5). Из этого факта, учитывая предложение 1.3 и сказанное выше о связи свойств слабой локализуемости и устойчивости заключаем, что слабый спектральный синтез возможен только для D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$ с дискретным спектром.

Далее в параграфе 1.4 полученные в параграфах 1.2 и 1.3 результаты о подмодулях применяются для решения задачи спектрального синтеза в пространстве $\mathcal{E}_a$, в том числе для доказательства сформулированных выше, в п.1.1.2, утверждений.

1.2 Устойчивость — необходимое условие слабой локализуемости подмодуля в $\mathcal{P}_a$

1.2.1 Определение устойчивости. Некоторые классы устойчивых подмодулей в $\mathcal{P}_a$

В терминологии, связанной со свойством устойчивости, мы следуем работам [19], [20].

Из определения и топологических свойств модуля $\mathcal{P}_a$ нетрудно вывести, что он *b-устойчив*, то есть
для любого ограниченного множества $B \subset \mathcal{P}_a$ множество

$$B' := \left\{ \frac{\varphi}{z-\lambda} :\ \varphi \in B,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi(\lambda) = 0 \right\}$$

ограничено в $\mathcal{P}_a$.

Из того, что $\mathcal{P}_a$ — b-устойчивое борнологическое пространство, следует, его *поточечная устойчивость*:
для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и окрестности нуля $U \subset \mathcal{P}_a$ найдется окрестность нуля U'_λ, такая, что

$$\varphi \in U'_\lambda, \quad \varphi(\lambda) = 0 \Longrightarrow \frac{\varphi}{z-\lambda} \in U$$

(см. [20, § 4]).

Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ называется *устойчивым в точке* $\lambda \in \mathbb{C}$, если из того, что функция $\varphi \in \mathcal{J}$ обращается в этой точке в нуль с кратностью, большей, чем кратность λ как нуля подмодуля $\mathcal{J}$, следует, что $\frac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{J}$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ *устойчив*, если он устойчив во всех точках $\lambda \in \mathbb{C}$.

Из результатов работы [20, предложения 4.2–4.6] и поточечной устойчивости модуля $\mathcal{P}_a$ следует, что устойчивый хотя бы в одной точке подмодуль $\mathcal{J}$ этого модуля устойчив во всех точках.

Сейчас мы приведем описание некоторых классов устойчивых подмодулей в $\mathcal{P}_a$.

Напомним, что подмодуль, *порожденный функциями* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{P}_a$ (короче, $m-$*порожденный* подмодуль) определяется формулой

$$\mathcal{J}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m} := \overline{\{p_1\varphi_1 + \cdots + p_m\varphi_m : \; p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{C}[z]\}}.$$

Подмодуль, порожденный одной функцией (1-порожденный) называется *главным.*

Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ *порожденный семейством функций*

$$\mathcal{S} = \{\varphi_\alpha\} \subset \mathcal{P}_a,$$

по определению есть замыкание в $\mathcal{P}_a$ множества всех конечных сумм вида

$$p_1\varphi_{\alpha_1} + \cdots + p_k\varphi_{\alpha_k}, \quad \text{где} \quad \varphi_{\alpha_j} \in \{\varphi_\alpha\}, \quad p_j \in \mathbb{C}[z].$$

Иными словами, $\mathcal{J}$ — минимальный подмодуль в $\mathcal{P}_a$, обладающий свойством: $\mathcal{S} \subset \mathcal{J}$.

Главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ всегда устойчив.

Действительно, пусть $0 \notin \mathcal{Z}_\varphi$, $\varphi(0) = 1$, $\psi \in \mathcal{J}_\varphi$, $\psi(0) = 0$. По определению главного подмодуля существует обобщенная последовательность многочленов $\{p_\alpha\}$ такая, что

$$p_\alpha\varphi \to \psi.$$

Следовательно, $p_\alpha(0) \to 0$ и $p_\alpha(0)\varphi \to 0$. Полагая $q_\alpha = \frac{p_\alpha - p_\alpha(0)}{z}$ и используя свойство поточечной устойчивости модуля $\mathcal{P}_a$, получим

$$\frac{\psi}{z} = \lim_{\alpha\nearrow} q_\alpha\varphi \in \mathcal{J}_\varphi.$$

В отличие от главного подмодуля, m-порожденный подмодуль, при $m > 1$, автоматически устойчивым не является. Конструкции неустойчивых подмодулей, служащие также важными иллюстрациями некоторых аспектов задач спектрального синтеза в $\mathcal{E}_a$ и локального описания подмодулей в $\mathcal{P}_a$, приводятся в п.1.4.3 настоящей главы.

Напомним, что символом $\mathcal{M}_a$ мы обозначаем множество всех мультипликаторов пространства $\mathcal{P}_a$, то есть функций $\psi_0 \in \mathcal{P}_a$, таких, что соответствие $\varphi \mapsto \varphi\psi_0$ определяет непрерывное отображение пространства $\mathcal{P}_a$ в себя.

Начиная с этого момента, до замечания 1.3, предполагаем, что ω — канонический вес и $\mathcal{P}_a$ совпадает с одним из следующих модулей:
1) $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$, где $\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty}$;
2) $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$, где $\Omega = \{r_n\omega\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < r_n \nearrow 1$;
3) $\mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$, где $\Omega = \{\omega/n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\Omega = \{q_n\omega\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < q_n^{-1} \nearrow 1$.
4) $\mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$, где $\Omega = \{q_n\omega\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < q_n^{-1} \nearrow 1$.

При этом в случаях 2) и 4) ($\mathcal{P}_a$ — модуль, двойственный к пространству Ω-УДФ нормального типа) дополнительно потребуем, чтобы вес ω был *почти субаддитивным*:

$$\forall\, p > 1\ \exists C > 0:\ \omega(x' + x'') \le p(\omega(x') + \omega(x'')) + C, \quad x', x'' \in \mathbb{R}. \quad (1.2.1)$$

В работах [5], [3] получено описание множества $\mathcal{M}_a$ всех мультипликаторов для $\mathcal{P}_{\{r_n\omega\},a}$, $0 < r_n \nearrow 1$. Если $a < +\infty$ или вместо интервала $(-a; a)$ рассматривается луч, то

$$\mathcal{M}_a = \left\{\psi \in H(\mathbb{C}):\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\psi(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}} < \infty\right\} \quad (1.2.2)$$

(см. [5, Предложение 1]).

Если же $a = \infty$, то

$$\mathcal{M}_a = \left\{\psi \in H(\mathbb{C}):\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0:\ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\psi(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+N|\operatorname{Im} z|}} < \infty\right\} \quad (1.2.3)$$

(см. [3, Теорема 1]).

Используя ту же схему, что и в двух последних цитированных работах, можно показать, что для пространства $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, где $\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty}$ или $\Omega = \{\omega/n\}_{n=1}^{\infty}$, множество всех его мультипликаторов $\mathcal{M}_a$ состоит из всех функций минимального типа $\psi \in \mathcal{P}_{\Omega,a}$, если $a < +\infty$ или вместо конечного интервала $(-a; a)$ взят луч; и $\mathcal{M}_a = \mathcal{P}_{\Omega,a}$ при $a = \infty$.

Аналогично можно проверить, что для модуля $\mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$, где

$$\Omega = \{q_n\omega\}_{n=1}^{\infty}, \quad 0 < q_n^{-1} \nearrow 1,$$

при $a < +\infty$ и при рассмотрении луча $(a; +\infty)$ или $(-\infty; a)$ вместо конечного интервала сохраняется описание (1.2.2) множества мультипликаторов. А для пространства на всей прямой $\mathcal{P}_{\{\Omega\},\infty}$ будет справедлива следующая модификация (1.2.3):

$$\mathcal{M}_a = \left\{\psi \in H(\mathbb{C}):\ \ \exists N_0 > 0:\ \forall \varepsilon > 0\ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\psi(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+N_0|\operatorname{Im} z|}} < \infty\right\} \quad (1.2.4)$$

Предложение 1.4. *Пусть функции φ, $\psi \in \mathcal{P}_a$ имеют минимальный тип при порядке 1, и, дополнительно, если $\mathcal{P}_a$ — модуль, двойственный к пространству Ω-УДФ нормального типа, то для некоторых*

$$r', r'' \in (0;1): \quad r' + r'' < 1,$$

если $\Omega = \{r_n\omega\}$, $r_n \nearrow 1$
(или $r' + r'' \leq 1$, если $\Omega = \{q_n\omega\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < q_n^{-1} \nearrow 1$) выполнено

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x)|}{e^{r'\omega(|x|)}} < \infty, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\psi(x)|}{e^{r''\omega(|x|)}} < \infty. \tag{1.2.5}$$

Тогда подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$, порожденный этими функциями в $\mathcal{P}_a$, устойчив.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1.$$

Воспользуемся следующим утверждением ([20, Предложение 4.9]).

Теорема I. *Устойчивость 2-порожденного подмодуля $\mathcal{J}_{\varphi,\psi} \subset \mathcal{P}_a$ равносильна тому, что тождественный нуль можно аппроксимировать в топологии $\mathcal{P}_a$ функциями вида $(p\varphi - q\psi)$, где p, q — многочлены, удовлетворяющие условию $p(0) = q(0) = 1$.*

Подробные рассуждения проведем для модуля $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$ такого, что

$$\Omega = \{r_n\omega\}, \quad 0 < r_n \nearrow 1, \quad a < \infty.$$

Для других случаев доказательство аналогичное.

Фиксируем $\delta > 0$ такое, что $r' + r'' + 3\delta < 1$. В силу условий на вес ω, можем применить известные результаты о весовой аппроксимации экспонентами и многочленами на вещественной оси из монографии [103, VI. H.1,2]. В ней рассмотрен *четный* вес W, заданный на вещественной оси и удовлетворяющий условиям

0) сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln W(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x;$$

1а) $W(x) \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, для каждого натурального n отношение $x^n/W(x)$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$,

1б) $\ln W(x)$ выпуклая функция аргумента $t = \ln|x|$;

2) для каждого $\delta > 1$ существует постоянная $C_\delta > 0$, такая, что

$$x^2 W(x) \leq C_\delta(\delta x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

В монографии [103, гл. VI] доказаны следующие две теоремы о весовой аппроксимации.

Теорема K. (де Бранж). *Пусть вес W удовлетворяет условиям* **0)**, **1a)**.

Тогда множество сужений на $\mathbb{R}$ всех целых функций f, таких, что

$$\ln|f(z)| \le c_0|\operatorname{Im} z| + \varepsilon|z| + c_1, \quad z \in \mathbb{C},$$

и растущих на вещественной оси медленнее, чем W:

$$\frac{|f(x)|}{W(x)} \to 0, \quad x \to \pm\infty$$

совпадает с замыканием в норме.

$$\|f\|_W = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{W(x)} \tag{1.2.6}$$

множества конечных линейных комбинаций функций вида

$$e^{\mathrm{i}tx}, \quad -c_0 \le t \le c_0.$$

(*Это замыкание обозначается $\mathcal{C}_W(c_0)$.*)

Положим

$$\mathcal{C}_W(0+) = \bigcap_{c_0>0} \mathcal{C}_W(c_0).$$

Из теоремы K нетрудно вывести, что каждый элемент множества $\mathcal{C}_W(0+)$ есть сужение на $\mathbb{R}$ целой функции минимального типа при порядке 1, растущей на вещественной оси медленнее, чем W:

$$\frac{|f(x)|}{W(x)} \to 0, \quad x \to \pm\infty. \tag{1.2.7}$$

Теорема L. (П. Кусис). *Пусть вес W удовлетворяет условиям* **0)**, **1)** *и* **2)**.

Тогда каждая функция из $\mathcal{C}_W(0+)$ аппроксимируется многочленами в норме (1.2.6).

Пусть φ и ψ удовлетворяют (1.2.5). Тогда для них выполнено (1.2.7) с весами $W_1(x) := e^{(r'+\delta)\omega(|x|)}$ и $W_2(x) := e^{(r''+\delta)\omega(|x|)}$, соответственно. При этом функции W_1, W_2 удовлетворяют условиям **0)**, **1)** и, вообще говоря, не удовлетворяют условию **2)**. Однако, прослеживая доказательство Кусиса (стр. 226–229 в [103, VI.H.2]), видим, что аппроксимация функций

φ и ψ многочленами на вещественной оси возможна в норме $\|\cdot\|_{\widetilde{W}}$, где $\widetilde{W} := (1+|x|)^2 W_1$ (для функции φ) или $\widetilde{W} := (1+|x|)^2 W_1$ (для функции ψ).

Из сказанного выше следует, что существуют последовательности многочленов $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ со свойствами

$$p_k(0) = 1,\ q_k(0) = 1,\ k = 1, 2, \dots,$$

и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x) - p_k(x)|}{e^{(r'+\delta)\omega(|x|)}} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{1.2.8}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\psi(x) - q_k(x)|}{e^{(r''+\delta)\omega(|x|)}} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.2.9}$$

Принимая во внимание почти субаддитивность веса ω и условие

$$\omega(t) = o(t), \quad t \to \infty,$$

используем стандартные рассуждения, включающие применение принципа Фрагмена-Линделефа (см. [1, § 1.4] [103, VI.H.2]). Из описания топологии пространства $\mathcal{P}_a$ (в том числе, критерия сходимости счетной последовательности в локально-выпуклых пространствах типа (LN^*)) и соотношений (1.2.5) выводим, что

$$q_k\varphi - p_k\psi \to 0, \quad k \to \infty,$$

в пространстве $\mathcal{P}_a$. Следовательно, в силу цитированного в начале настоящего доказательства критерия устойчивости 2-порожденного подмодуля из [20], $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ — устойчивый подмодуль.

□

Замечание 1.2. Вместо условий (1.2.5) в случае модулей нормального типа, определяемых весовыми последовательностями

$$\Omega = \{r_n\omega\}, \quad 0 < r_n \nearrow 1,$$

$$\Omega = \{q_n\omega\}, \quad 0 < q_n^{-1} \nearrow 1,$$

можно потребовать, чтобы

$$\{\varphi, \psi\} \bigcap \mathcal{M}_a \neq \emptyset. \tag{1.2.10}$$

Следствие 1.1. *Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{P}_a$ — функции минимального экспоненциального типа. А в случае, когда $\mathcal{P}_a$ — модуль, двойственный к пространству Ω-УДФ нормального типа, дополнительно выполнены условия типа* (1.2.5) *для каждой пары функций*

$$\varphi_1, \quad \varphi_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Тогда m-порожденный подмодуль $\mathcal{J}$ с образующими $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ устойчив.

Доказательство. Приведем доказательство только для случая, когда $\mathcal{P}_a$ — модуль, двойственный к пространству Ω-УДФ нормального типа. Иначе, утверждение следствия 1.1 есть частный случай следствия 1.2, приводимого далее.

Не ограничивая общности, считаем, что

$$\varphi_j(0) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Из предложения 1.4 следует, что все 2-порожденные подмодули

$$\mathcal{J}_{\varphi_1, \varphi_{j+1}} = \overline{\{p\varphi_1 + q\varphi_{j+1}\}}, \quad p,\ q \in \mathbb{C}[z], \quad j = 1, \dots, m-1,$$

устойчивы. Применим необходимую часть абстрактного критерия устойчивости для 2-порожденного подмодуля (теорема I, цитированная нами в доказательстве предложения 1.4) к подмодулю $\mathcal{J}_{\varphi_1, \varphi_{j+1}}$, найдем обобщенные последовательности многочленов $p_\alpha^{(j)}$, $q_\alpha^{(j)}$ такие,что

$$p_\alpha^{(j)}(0) = q_\alpha^{(j)}(0) = 1, \quad p_\alpha^{(j)}\varphi_1 - q_\alpha^{(j)}\varphi_{j+1} \to 0 \qquad (1.2.11)$$

для каждого $j = 1, 2, \dots, m-1$.

Приведем полную форму предложения 4.9 из [20] (для m-порожденных подмодулей).

Теорема J. *Для того чтобы подмодуль $\mathcal{J}$, порожденный функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{P}_a$, такими, что $\varphi_j(0) = 1$, $j = 1, \dots, m$, был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора комплексных чисел c_j, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющих соотношению $c_1 + \dots + c_m = 0$, тождественный нуль являлся точкой прикосновения множества*

$$\{s_1\varphi_1 + \dots + s_m\varphi_m\},$$

где

$$s_j \in \mathbb{C}[z], \quad s_j(0) = c_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Положим

$$s_{1,\alpha} = -\sum_{j=2}^{m} c_j p_\alpha^{(j-1)},$$

и для $j = 2, \ldots, m$ —

$$s_{j,\alpha} = c_j q_\alpha^{(j-1)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$s_{j,\alpha}(0) = c_j, \quad j = 1, \ldots, m, \ \forall\, \alpha,$$

и

$$s_{1,\alpha}\varphi_1 + \cdots + s_{m,\alpha}\varphi_m \to 0$$

в топологии пространства $\mathcal{P}_a$.

Следовательно, по теореме J, $\mathcal{J}$ — устойчивый подмодуль.

□

Следствие 1.2. *Пусть $\mathcal{S} = \{\varphi_\alpha\} \subset \mathcal{P}_a$ — семейство функций минимального экспоненциального типа и, дополнительно, $\mathcal{S} \bigcap \mathcal{M}_a \neq \emptyset$ для случая, когда $\mathcal{P}_a$ — модуль, двойственный к пространству Ω-УДФ нормального типа.*

Тогда подмодуль $\mathcal{J}$, порожденный семейством $\mathcal{S}$ в $\mathcal{P}_a$, устойчив.

Доказательство. Рассмотрим подробно случай модуля, двойственного к пространству Ω-УДФ нормального типа.

Без ограничения общности можем считать, что $\varphi_\alpha(0) = 1$ для всех α. Пусть $\psi \in \mathcal{J}$ и $\psi(0) = 0$. Обозначим φ_{α_0} функцию из $\mathcal{S} \bigcap \mathcal{M}_a$.

Так как все элементы подмодуля $\mathcal{J}$ имеют минимальный экспоненциальный тип, из предложения 1.4 и замечания 1.2 после него выводим, что $\mathcal{J}_{\psi,\varphi_{\alpha_0}}$ — устойчивый подмодуль. Следовательно,

$$\frac{\psi}{z} \in \mathcal{J}_{\psi,\varphi_{\alpha_0}} \subset \mathcal{J}.$$

□

Замечание 1.3. Рассмотрим модуль $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, где $\Omega = \{\omega_n\}$ — последовательность канонических весов. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_{\Omega,a}$ — функции минимального экспоненциального типа, а $\mathcal{M}_a$, как и выше, — множество всех мультипликаторов пространства $\mathcal{P}_{\Omega,a}$. По той же схеме, что и предложение 1.4, доказывается такое утверждение:

если φ, $\psi \in \mathcal{M}_a$, то подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ устойчив.

Здесь нам в любом случае приходится усиливать условие (1.2.10), либо заменяя его условием $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_a$; либо добавляя к (1.2.10) требование: существует счетная последовательность многочленов $\{p_k\}$, сходящаяся к φ в топологии пространства $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, такая, что
(UB) операторы умножения на p_k, $k = 1, 2, \dots$, действующие в $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, равномерно ограничены по k.

Замечание 1.4. Из предыдущего замечания следует, что для модуля $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, задаваемого последовательностью канонических весов, справедливо утверждение, аналогичное следствию 1.2, а именно:
подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_{\Omega,a}$, порожденный семейством $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_a$, состоящим из функций минимального экспоненциального типа, устойчив.

Замечание 1.5. 1) Для того, чтобы функция $\varphi \in \mathcal{P}_a$ удовлетворяла условию (1.2.5) или $\varphi \in \mathcal{M}_a$, вообще говоря, не обязательно требовать, чтобы ее тип при порядке 1 равнялся нулю (см. (1.2.3), (1.2.4)). Появление в предложении 1.4, следствиях 1.1, 1.2 и замечаниях 1.3, 1.4 условия равенства нулю экспоненциального типа порождающих подмодуль функций связано с тем, что для применения критерия устойчивости И.Ф. Красичкова-Терновского из [20] мы используем аппрроксимацию этих функций многочленами в весовой норме на вещественной прямой. Согласно первой лемме в [103, VI.H], такая аппроксимация возможна только для целых функций минимального экспоненциального типа.
2) Утверждения, аналогичные предложению 1.4 и следствиям 1.1, 1.2, в модуле Шварца $\mathbf{P}_a$ тривиальны, так как все содержащиеся в нем функции минимального экспоненциального типа — это многочлены.

Пусть теперь $\mathcal{P}_a$ — любой из модулей $\mathbf{P}_a$, $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$ или $\mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$, где Ω — правильная весовая последовательность.

Следующую группу устойчивых подмодулей образуют так называемые *exp*-подмодули. Такие подмодули двойственны к D-инвариантным подпространствам, равным пересечению конечного или бесконечного числа ядер локальных операторов свертки.

Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ — замкнутое подпространство Тогда его *индикаторный отрезок* определяется так же, как и для подмодуля:

$$[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \subset \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{где} \quad c_{\mathcal{J}} = -\sup_{\varphi \in \mathcal{J}} h_\varphi(-\pi/2), \quad d_{\mathcal{J}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{J}} h_\varphi(\pi/2),$$

где, как обычно, h_φ — индикатор функции φ.

Предложение 1.5. 1) *Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_\infty$ — замкнутое подпространство с неограниченным индикаторным отрезком $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}] \subset \overline{\mathbb{R}}$, такое, что вместе со всякой функцией $\varphi \in \mathcal{J}$ ему принадлежит и функция $e^{ihz}\varphi$, если только ее индикаторная диаграмма есть подмножество отрезка $[\mathrm{i}c_\mathcal{J}; \mathrm{i}d_\mathcal{J}]$.*

Тогда $\mathcal{J}$ — устойчивый подмодуль.

2) *Пусть $a < \infty$ и $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ — замкнутое подпространство с некомпактным в $(-a; a)$ индикаторным отрезком $[c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$, причем существует ненулевая функция $\varphi_0 \in \mathcal{M}_a \bigcap \mathcal{J}$.*

Предположим, что выполнено условие $(*)$: вместе со всякой функцией $\varphi \in \mathcal{J}$ подпространству $\mathcal{J}$ принадлежит и функция $e^{ihz}\varphi$, если только ее индикаторная диаграмма содержится в $[\mathrm{i}c_\mathcal{J}; \mathrm{i}d_\mathcal{J}] \bigcap (-a; a)$.

Тогда $\mathcal{J}$ — устойчивый подмодуль.

Доказательство. 1) Не ограничивая общности, можем считать, что

$$c_\mathcal{J} > 0, \quad d_\mathcal{J} = +\infty.$$

Нетрудно проверить справедливость соотношения

$$z\varphi = \lim_{\tau \to 0} \frac{e^{\mathrm{i}\,\tau z}\varphi - \varphi}{\tau},$$

в топологии пространства $\mathcal{P}_\infty$. Отсюда и из условия $(*)$ следует, что $\mathcal{J}$ — подмодуль. Докажем, что он устойчив.

Пусть

$$\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_\mathcal{J}, \quad \psi \in \mathcal{J}, \quad \psi(\lambda_0) = 0.$$

В подмодуле $\mathcal{J}$ имеется функция φ_0 со свойством $\varphi_0(\lambda_0) = 1$.

Рассмотрим функционалы

$$S, \quad S_{\lambda_0}, \quad S_0, \quad \widetilde{S}_0 \in \mathcal{E}'(0; +\infty),$$

которые являются прообразами при преобразовании Фурье-Лапласа функций

$$\psi, \quad \frac{\psi}{z - \lambda_0}, \quad \varphi_0, \quad \frac{\varphi_0 - 1}{z - \lambda_0},$$

соответственно. Заметим, что действие функционалов

$$S_1 = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\varphi_0 - 1}{z - \lambda_0}\psi\right), \quad S_2 = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\psi}{z - \lambda_0}\varphi_0\right)$$

на функцию $f \in \mathcal{E}_\infty$ осуществляется по формулам

$$(S_1, f) = (\widetilde{S}_0, S * f), \quad (S_2, g) = (S_{\lambda_0}, S_0 * f), \qquad (1.2.12)$$

где $(S * f)(\tau) = (S, f(t+\tau))$ — свертка.

Пусть $W \subset \mathcal{E}_\infty$ — D-инвариантное подпространство, для которого $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$. С учетом условия $(*)$, из (1.2.12) получаем, что

$$(S_1, f) = 0, \quad (S_2, f) = 0, \qquad f \in W.$$

Поэтому $S_1 \in W^0$, $S_2 \in W^0$ или, что эквивалентно,

$$\frac{\varphi_0 - 1}{z - \lambda_0}\psi \in \mathcal{J}, \quad \frac{\psi}{z - \lambda_0}\varphi_0 \in \mathcal{J}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{\psi}{z - \lambda_0} = \frac{\psi}{z - \lambda_0}\varphi_0 - \frac{\varphi_0 - 1}{z - \lambda_0}\psi \in \mathcal{J},$$

то есть подмодуль $\mathcal{J}$ устойчив в точке λ_0. Согласно предложению 4.2 из работы [20] и замечанию 1 в конце п. 1 § 4 этой же работы, устойчивость подмодуля в какой-нибудь одной точке λ_0 влечет его устойчивость в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\mathcal{J}$ – устойчивый подмодуль.

2) Доказательство проводится по той же схеме, что и в п. 1), с использованием функции $\varphi_0 \in \mathcal{J} \bigcap \mathcal{M}_a$. Точку λ_0 следует взять из множества $\mathcal{Z}_{\varphi_0} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$.

□

Для произвольной пары множеств $A,\ B \subset \mathbb{R}$ символом $A \div B$ обозначаем их *геометрическую разность* — множество, состоящее из всех точек $x \in \mathbb{R}$ таких, что $x + B \subset A$.

Предложение 1.6. *Пусть $\varphi \in \mathcal{P}_a$, $I \subset (-a; a)$ — относительно замкнутый интервал, такой, что*

$$I \div [c_\varphi; d_\varphi] \neq \emptyset,$$

(где $c_\varphi = -h_\varphi(-\pi/2)$ $d_\varphi = h_\varphi(\pi/2)$.

Тогда замкнутое подпространство

$$\mathcal{J}_{\varphi,exp} := \overline{\operatorname{span}\{e^{-\mathrm{i}tz}\varphi : \ t \in I \div [c_\varphi; d_\varphi]\}} \tag{1.2.13}$$

есть устойчивый подмодуль с индикаторным отрезком $\overline{I}$ и нулевым множеством $\mathcal{Z}_\varphi$ (exp-подмодуль, порожденный функцией φ).

Доказательство. Для проверки того, что $\mathcal{J}_{\varphi,exp}$ — подмодуль, достаточно обосновать включение $z\varphi \in \mathcal{J}_{\varphi,exp}$. Имеем

$$\frac{e^{-\mathrm{i}tz}-1}{t} - z \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0$$

в норме

$$\|f\|_{\varepsilon,c_0} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varepsilon|\operatorname{Im} z|+c_0\ln(e+|z|)}}$$

при любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $c_0 > 1$. Отсюда, учитывая, что весовая последовательность $\Omega \in \mathcal{D}W$, нетрудно вывести, что

$$\frac{e^{-\mathrm{i}tz}-1}{t}\varphi \to z\varphi \quad \text{при} \quad t \to 0$$

в топологии модуля $\mathcal{P}_a$. Также легко видеть, что индикаторный отрезок подмодуля $\mathcal{J}_{\varphi,exp}$ равен $\overline{I}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}_{\varphi,exp}} = \mathcal{Z}_\varphi$.

Без ограничения общности считаем,что $\varphi(0) = 1$. Как уже отмечалось ранее, в доказательстве предыдущего утверждения, в силу результатов работы [20], достаточно доказать, что подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,exp}$ устойчив в нуле.

Пусть $\Psi \in \mathcal{J}_{\varphi,exp}$, $\Psi(0) = 0$. Согласно (1.2.13) имеем

$$\Psi = \lim_{\alpha\nearrow} \Psi_\alpha,$$

где

$$\Psi_\alpha = (a_{1,\alpha}e^{-\mathrm{i}t_{1,\alpha}z} + \dots + a_{n_\alpha,\alpha}e^{-\mathrm{i}t_{n,\alpha}z})\varphi,$$

$a_{j,\alpha} \in \mathbb{C}$, $t_{j,\alpha} \in I \div [c_\varphi; d_\varphi]$, $j = 1, \dots, n_\alpha$.

Полагая

$$\Phi_\alpha = \sum_{j=1}^{n_\alpha} a_{j,\alpha}(e^{-\mathrm{i}t_{j,\alpha}z} - 1)\varphi,$$

напишем представление

$$\Psi_\alpha = \Phi_\alpha + \Psi_\alpha(0)\varphi.$$

Учитывая, что

$$\Psi_\alpha(0) = (a_{1,\alpha} + \dots + a_{n_\alpha,\alpha}) \to 0,$$

получим

$$\Psi = \lim \Phi_\alpha. \tag{1.2.14}$$

Далее,

$$\Phi_\alpha(0) = 0, \qquad \frac{\Phi_\alpha}{z} = \sum_{j=1}^{n_\alpha} a_{j,\alpha}\frac{e^{-\mathrm{i}t_{j,\alpha}z}-1}{z}\varphi.$$

Выражение
$$\frac{e^{-\mathrm{i}t_{j,\alpha}z}-1}{z}$$
представляет собой целую функцию экспоненциального типа $|t_{j,\alpha}|$, ограниченную на вещественной оси. Согласно лемме из работы [103, VI.H.1], верно включение
$$\frac{e^{-\mathrm{i}t_{j,\alpha}z}-1}{z}\in\overline{\operatorname{span}\{e^{-\mathrm{i}tz}:\ |t|\le|t_{j,\alpha}|\}},$$
где замыкание берется в норме
$$\|f\|_W=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|f(x)|}{W(x)},$$
W — произвольный фиксированный вес, такой, что
$$W(x)\ge 1,\ x\in\mathbb{R},\quad W(x)\to\infty,\ |x|\to\infty.$$

Полагая $W(x)=\ln(e+|x|)$ и учитывая, что для весов $\omega_n\in\Omega$ выполнены соотношения (0.3.5), (0.3.6), при помощи стандартных рассуждений типа Фрагмена-Линделефа выводим, что
$$\frac{e^{-\mathrm{i}t_{j,\alpha}z}-1}{z}\varphi\in\overline{\operatorname{span}\{e^{-\mathrm{i}tz}\varphi\ \ t\in I\div[c_\varphi;d_\varphi]},$$
$j=1,\dots,n_\alpha$, $\forall\,\alpha$, где замыкание берется в топологии пространства $\mathcal{P}_a$. Отсюда получаем, что
$$\frac{\Phi_\alpha}{z}\in\mathcal{J}_{\varphi,exp}$$
для каждого α.

Принимая во внимание (1.2.14) и поточечную устойчивость модуля $\mathcal{P}_a$, заключаем, что
$$\frac{\Psi}{z}=\lim\frac{\Phi_\alpha}{z}.$$
Следовательно, $\frac{\Psi}{z}\in\mathcal{J}_{\varphi,exp}$ и $\mathcal{J}_{\varphi,exp}$ — устойчивый подмодуль.

□

Предложение 1.7. *Пусть $I\subset(-a;a)$ — относительно замкнутый интервал, $0\in I$, $\mathcal{S}=\{\varphi_\alpha\}\subset\mathcal{P}_a$, причем каждая из функций φ_α имеет минимальный экспоненциальный тип и $\mathcal{S}\bigcap\mathcal{M}_a\ne\emptyset$.*

Тогда
$$\mathcal{J}=\overline{\operatorname{span}\{e^{-\mathrm{i}tz}\varphi_\alpha:\ t\in I,\ \varphi_\alpha\in\mathcal{S}\}}$$
— устойчивый подмодуль.

Доказательство. Аналогично доказательству п.2 предложения 1.5.

□

1.2.2 Устойчивые подмодули, не являющиеся слабо локализуемыми

Авторы работы [70, теорема 1.2], хотя и в двойственных терминах, построили первый пример устойчивого, но не слабо локализуемого подмодуля в $\mathbf{P}_a$. Этот подмодуль 1-порожден. В замечании 1.7 о нем будет сказано подробнее.

В рамках исследования вопроса об устойчивых подмодулях, которые не являются слабо локализуемыми, нами выделен класс функций $\varphi \in \mathcal{P}_a = \mathbf{P}_a$, каждая из которых порождает не слабо локализуемый главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ в модуле Шварца $\mathbf{P}_a$. Сформулируем и докажем соответствующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть образующая подмодуля* $\mathcal{J}_\varphi$ *имеет вид*

$$\varphi = \frac{\Phi}{f},$$

где $\Phi = e^{i\gamma z} S \in \mathbf{P}_a$, S *– функция типа синуса,* $\gamma \in \mathbb{R}$, f *– целая функция минимального типа при порядке 1.*

Если для порядков функции f *на лучах* $\arg z = 0$ *и* $\arg z = \pi$, *определяемых равенствами*

$$\rho_0 = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln|f(r)|}{\ln r}, \quad \rho_\pi = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln|f(-r)|}{\ln r}, \quad \textit{соответственно,}$$

выполнено одно из соотношений

$$\rho_0 < 1/4 < 1/2 \le \rho_\pi \quad \textit{или} \quad \rho_\pi < 1/4 < 1/2 \le \rho_0, \tag{1.2.15}$$

то подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ *не является слабо локализуемым.*

Доказательство теоремы 1.1.

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1. *В условиях сформулированной теоремы существует положительное число* d, *такое, что при каждом натуральном* n *функция* φ *может быть представлена в виде произведения двух целых функций* $\varphi_{1,n}$ *и* $\varphi_{2,n}$, *удовлетворяющих условию: при всех* z, *лежащих вне полосы* $|\operatorname{Im} z| < 3d$, *справедливы неравенства*

$$\left|\ln|\varphi_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|\varphi(z)|\right| \le \ln(1+|z|) + A_0, \tag{1.2.16}$$

где A_0 *– положительная постоянная, зависящая только от* d, a, b.

Доказательство леммы 1.1.

Так как нулевое множество функции φ является частью нулевого множества функции типа синуса, оно содержится в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| < d/2$ (см., например, [105, гл. III, лек. 22]).

Воспользуемся следующей теоремой Р.С. Юлмухаметова о факторизации [66, теорема 2].

Теорема B. *Пусть f – целая функция, все нули которой лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| \le d/2$, и существует целая функция F, делящаяся на функцию f и удовлетворяющая условиям*

$$\ln|F(z)| \le H(z), \quad F(0) = 1,$$

где функция H липшицева:

$$|H(z') - H(z'')| \le \sigma|z' - z''|, \quad z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Тогда f представляется в виде произведения двух целых функций, f_1 и f_2, причем для z, $|\operatorname{Im} z| \ge 3d$, и любого $p \ge 1$ выполняется соотношение

$$|\ln|f_1(z)| - \ln|f_2(z)|| \le \frac{C_0}{p}\left(H(z) - \ln|F(z)|\right) + C_1 + \ln(1 + |z|) + C_2 + C_3 e^p,$$

где C_j – некоторые постоянные, зависящие от σ, d, $H(0)$.

Положим $f = \varphi$, $F = \Phi$, $H(re^{i\theta}) = h_\Phi(\theta)r$, h_Φ – индикатор функции Φ, $\sigma = \max\limits_{\theta \in [0;2\pi]} |h_\Phi(\theta)|$, $p = 1$. Учитывая, что в силу свойств функций типа синуса (см. [105]) при $|\operatorname{Im} z| \ge 3d$ будет

$$|H(z) - \ln|F(z)|| = |h_\Phi(\arg z)|z| - \ln|\Phi(z)|| \le C_4,$$

где постоянная C_4 зависит только от функции Φ, получаем представление функции φ в виде произведения двух целых функций, $\varphi_{1,1}$ и $\varphi_{2,1}$, причем

$$|\ln|\varphi_{1,1}(z)| - \ln|\varphi_{2,1}(z)|| \le \ln(1 + |z|) + A_0, \quad |\operatorname{Im} z| \ge 3d, \tag{1.2.17}$$

постоянная A_0 зависит только от функции Φ.

Из (1.2.17) и равенства

$$\ln|\varphi| = \ln|\varphi_{1,1}| + \ln|\varphi_{2,1}|,$$

выводим оценку

$$\left|\ln|\varphi_{1,1}(z)| - \frac{1}{2}\ln|\varphi(z)|\right| \le \frac{1}{2}\ln(1 + |z|) + \frac{A_0}{2}, \quad |\operatorname{Im} z| \ge 3d. \tag{1.2.18}$$

Применяя теперь цитированную выше теорему Р.С. Юлмухаметова к функции $f = \varphi_{1,1}$ с теми же F, H, σ и p, что и выше, получим представление

$$\varphi_{1,1} = \varphi_{1,2}\varphi_{2,2},$$

в котором целая функция $\varphi_{1,2}$ удовлетворяет оценке

$$\left|\ln|\varphi_{1,2}(z)| - \frac{1}{2}\ln|\varphi_{1,1}(z)|\right| \le \frac{1}{2}\ln(1+|z|) + \frac{A_0}{2}, \quad |\mathrm{Im}\, z| \ge 3d.$$

Из этой оценки и (1.2.18) следует, что

$$\left|\ln|\varphi_{1,2}(z)| - \frac{1}{2^2}\ln|\varphi(z)|\right| \le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)(\ln(1+|z|) + A_0), \quad |\mathrm{Im}\, z| \ge 3d.$$

Продолжая этот процесс, через n шагов получим представление функции φ в виде произведения двух целых функций $\varphi_{1,n}$ и $\varphi_{2,n}$, причем для всех z, лежащих вне полосы $|\mathrm{Im}\, z| < 3d$ будет выполняться требуемая оценка (1.2.16).

□

Ясно, что $\Phi \in \mathcal{J}(\varphi)$. Докажем, что в условиях теоремы функция Φ не может принадлежать главному подмодулю $\mathcal{J}_\varphi$. Предположим противное: пусть существует обобщенная последовательность многочленов p_α, такая, что $p_\alpha\varphi$ сходится к Φ в пространстве $\mathbf{P}_a$. Фиксируем натуральное число n_0, для которого функция $\varphi\varphi_{1,n_0}$ лежит в $\mathbf{P}_a$. Используя свойства пространств $\mathbf{P}_a$, $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{P}_a)$, нетрудно установить существование *счетной* подпоследовательности $p_{\alpha_k}\varphi\varphi_{1,n_0}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся к функции $\Phi\varphi_{1,n_0}$ в одной из норм $\|\cdot\|_{m_0}$ (определенных в (0.3.8)). В частности, эта подпоследовательность ограничена по указанной норме: для некоторой постоянной $C > 0$ и всех натуральных k имеем

$$|p_{\alpha_k}(z)\varphi(z)\varphi_{1,n_0}(z)| \le C(1+|z|)^{m_0}\exp(b_{m_0}y^+ - a_{m_0}y^-), \quad y = \mathrm{Im}\, z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этих неравенств, леммы 1.1 и свойств функций типа синуса, получим, что на прямой $\mathrm{Im}\, z = y_0$, $|y_0| \ge 3d$, справедливы оценки

$$|p_{\alpha_k}(z)| \le \tilde{C}(1+|z|)^{m_0+1}|\omega(z)|^{1+2^{-n_0}}, \tag{1.2.19}$$

где $\tilde{C}$ – положительная постоянная, зависящая только от d.

Предположим, что выполнено первое из соотношений (1.2.15), и оценим $|p_{\alpha_k}(z)|$ на полупрямой $z = x + iy_0$, $x > 0$, $y_0 \ge 3d$.

Согласно замечанию после теоремы 3 в [105, §14.2] и с учетом того, что функция f имеет минимальный тип при порядке 1, для всех $x \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$ можем написать

$$\ln |f(x+iy_0)| = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |f(t)|}{(t-x)^2 + y_0^2} \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{\infty} \ln \left| \frac{x+iy_0-\lambda_j}{x+iy_0-\bar{\lambda}_j} \right|,$$

где $\{\lambda_j\}$ – множество нулей функции f, принадлежащих верхней полуплоскости.

Оценим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|f(t)|}{(t-x)^2+y_0^2} \mathrm{d}\, t$ при положительных x и y_0. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |f(t)|}{(t-x)^2 + y_0^2} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln |f(t)|}{(t-x)^2 + y_0^2} \mathrm{d}t + \int_{0}^{2x} \frac{\ln |f(t)|}{(t-x)^2 + y_0^2} \mathrm{d}t + \int_{2x}^{+\infty} \frac{\ln |f(t)|}{(t-x)^2 + y_0^2} \mathrm{d}t = I_1 + I_2 + I_3. \quad (1.2.20)$$

Для первого слагаемого справедлива оценка

$$|I_1| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |f(t)||}{t^2 + y_0^2} \mathrm{d}t < +\infty, \quad (1.2.21)$$

конечность интеграла следует из замечания в [105, §14.2]. Далее, для любого положительного числа $\varepsilon < 1/8 - \rho_0/2$ найдутся положительные постоянные b_ε, c_ε такие, что при всех $x > 0$ будет

$$\ln |f(x)| \leq b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon.$$

Поэтому слагаемые I_2 и I_3 можно оценить следующим образом:

$$I_2 \leq (2^{\rho_0+\varepsilon} b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon) \int_0^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^2 + y_0^2} \leq \frac{\pi}{y_0} \left(2^{\rho_0+\varepsilon} b_\varepsilon x^{\rho_0+\varepsilon} + c_\varepsilon \right), \quad (1.2.22)$$

$$I_3 \leq (b_\varepsilon + c_\varepsilon) \left(\int_1^{+\infty} \frac{t^{\rho_0+\varepsilon}}{t^2/4 + y_0^2} \mathrm{d}t + y_0^{-2} \right) \leq \leq (b_\varepsilon + c_\varepsilon) \left(4 \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2-\rho_0-\varepsilon}} + y_0^{-2} \right). \quad (1.2.23)$$

Из соотношений (1.2.19)–(1.2.23) следует, что на полупрямой

$$z = x + iy_0, \quad x > 0, \quad y_0 \geq 3d$$

верны оценки

$$|p_{\alpha_k}(z)| \le C'(1+|z|)^{m_0+1}\exp(C''|z|^{\rho_0+\varepsilon}), \quad k=1,2,\dots,$$

где C', C'' – положительные постоянные, зависящие от ε и y_0 и не зависящие от x и k.

Из этих оценок, используя принцип Фрагмена-Линделефа, нетрудно вывести, что

$$|p_{\alpha_k}(z)| \le C\exp(|z|^{\rho_0+2\varepsilon}), \quad z\in\mathbb{C}, \quad k=1,2,\dots,$$

причем постоянная $C>0$ зависит от ε и не зависит от k и z. Отсюда, в свою очередь, следует, что функция f (равная пределу последовательность p_{α_k}) должна иметь во всей плоскости порядок, меньший, чем $1/4$, чего не может быть в силу условий (1.2.15).

$\square$

Замечание 1.6. Требование $\max(\rho_0,\rho_\pi)\ge 1/2$ является необходимым для того, чтобы могло иметь место строгое неравенство

$$\min(\rho_0,\rho_\pi) < \max(\rho_0,\rho_\pi),$$

в силу теоремы Вимана (см., например, [29, гл. 1, §18, теорема 30]).

Замечание 1.7. Опишем теперь упоминавшийся выше пример главного не слабо локализуемого подмодуля, построенный авторами в работе [70] и покажем, что соответствующая теорема 1.2 из [70] может быть выведена из только что доказанной теоремы 1.1.

Положим

$$\varphi_0(z)=\frac{\sin\pi z}{U(z)V(z)}, \quad \text{где} \quad U(z)=\frac{\sin\pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}, \quad V(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2^{2n}+1}\right). \tag{1.2.24}$$

Теорема 1.2 работы [70] утверждает, что D-инвариантное подпространство $W\subset C^\infty(-2\pi;2\pi)$, для которого $\mathcal{F}(W^0)=\mathcal{J}_{\varphi_0}$, не допускает слабого спектрального синтеза. В двойственной формулировке это означает, что главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_0}$ не является слабо локализуемым в $\mathbf{P}_{2\pi}$.

Функция φ_0, определенная в (1.2.24), удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Чтобы обосновать это, докажем две простые леммы, нужные и в дальнейшем.

Пусть

$$s(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi z},\quad s_1(z)=s(\sqrt{z})=\frac{\sin\pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}=U(z),$$

$$s_0(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{2^{2k}}\Big)=V(-2z).$$

Хорошо известно, что для функции s имеют место оценки

$$|s(z)|\le\frac{c_0e^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{\pi(1+|z|)},\quad z\in\mathbb{C},\tag{1.2.25}$$

$$|s(z)|\ge\frac{m_de^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{\pi|z|},\quad |z-k|\ge d,\quad k\in\mathbb{Z},\tag{1.2.26}$$

где c_0 – абсолютная постоянная, $d\in(0;1/2)$ – произвольное число, m_d – положительное число, зависящее от d. Из (1.2.25) следует, что целая функция s_1 допускает оценку сверху:

$$|s_1(z)|\le\frac{c_0e^{\pi\sqrt{|z|}|\sin(\theta/2)|}}{\pi(1+\sqrt{|z|})},\quad z=re^{i\theta},\quad -\pi<\theta\le\pi,\quad r>0.\tag{1.2.27}$$

Лемма 1.2. *Пусть число* $d_0\in(0;1/2)$ *столь мало, что* $\left|\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}-1\right|\le1/2$ *при* $\pi|\xi|\le d_0$. *Тогда существует постоянная* $c_{d_0}>0$, *такая, что*

$$|s_1(z)|\ge\frac{c_{d_0}e^{\pi\sqrt{|z|}|\sin(\theta/2)|}}{1+|z|},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{z:\,|z-k^2|<3d_0\right\}.\tag{1.2.28}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для всех z, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{d_0}{|k|}\le|z-k|\le d_0,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{1.2.29}$$

выполняется оценка

$$|s(z)|\ge\frac{d_0}{4|z|^2}.\tag{1.2.30}$$

Из неравенств (1.2.26) и (1.2.30) стандартными методами выводится оценка

$$|s(z)|\ge\frac{c_{d_0}e^{\pi|\operatorname{Im}z|}}{1+|z|^2}\quad z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\{z:\,|z-k|<d_0/|k|\},\tag{1.2.31}$$

где c_{d_0} – положительная постоянная, зависящая от d_0. Утверждение леммы, в свою очередь, следует из (1.2.31).

$\square$

Лемма 1.3. *При всех $\theta \in (-\pi; \pi)$ имеет место асимптотическое равенство*

$$\ln s_0(re^{i\theta}) = \frac{(\ln r)^2}{\ln 8} + \frac{i\theta \ln r}{\ln 4} + o(\ln r), \quad r \to \infty. \tag{1.2.32}$$

Существуют число $\delta > 0$ и множество $E_0 \subset (-\infty; 0)$ нулевой относительной меры, такие, что для всех $x \in (-\infty; 0) \setminus E_0$ выполняется неравенство

$$\ln |s_0(x)| \geq \delta \left(\ln \left(|x| + 1\right)\right)^2. \tag{1.2.33}$$

Доказательство. Считающая функция нулей $n(r)$ функции s_0 удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$n(r) = \frac{\ln r}{\ln 4} + o(\ln r), \quad r \to \infty. \tag{1.2.34}$$

Поэтому, согласно теореме 1 работы [14], функция s_0 имеет *сильный регулярный рост* и для нее имеет место асимптотическое соотношение (1.2.32).

В силу (1.2.34) для функции s_0 выполнены условия теоремы 3.6.1 [79]. Эта теорема утверждает, что

$$\frac{\min\limits_{|z|=r} |s_0(z)|}{\max\limits_{|z|=r} |s_0(z)|} \to 1, \tag{1.2.35}$$

когда $r \to +\infty$, оставаясь вне некоторого множества нулевой относительной меры E_0.

Из (1.2.35) получаем, что для некоторого числа $\delta > 0$ неравенство (1.2.33) выполняется всюду на вещественной полуоси $(-\infty; 0)$, за исключением множества E_0.

$\square$

Используя соотношения между функциями s_1, s_0 и U, V, а также доказанные в леммах 1.2, 1.3 оценки для них, видим, что для функции φ_0 из (1.2.24) выполнены условия теоремы 1.1:

$$\varphi_0 = \frac{\sin \pi z}{f}, \quad \text{где} \quad f = UV,$$

при этом порядки ρ_0 и ρ_π функции f равны, соответственно, 0 и 1/2. Применение теоремы 1.1 дает отличное от приведенного в [70] доказательство отсутствия свойства слабой локализуемости у главного подмодуля $\mathcal{J}_{\varphi_0}$ в любом модуле $\mathbf{P}_a$, $a > \pi$.

При помощи конструкции из теоремы 1.1 можно доказать существование не слабо локализуемых главных подмодулей в модулях $\mathcal{P}_{\Omega,a}$ для последовательностей весов Ω, порожденных одной весовой функцией ω, то есть имеющих один из видов

$$\{n\omega\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{\omega}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{q_n\omega\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{\omega}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad 0 < q_n \nearrow 1,$$

при этом

$$\tilde{\rho} = \overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{\ln\omega(x)}{\ln|x|} < \frac{1}{4}. \tag{1.2.36}$$

Рассмотрим подробно случай, когда $\Omega = \{n\omega\}$.

Теорема 1.2. *Пусть образующая подмодуля $\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{P}_{\Omega,a}$ имеет вид*

$$\varphi = \frac{\Phi}{f},$$

где Φ — функция типа синуса, f – целая функция минимального типа при порядке 1.

Если для порядков функции f на лучах $\arg z = 0$ *и* $\arg z = \pi$, *определяемых равенствами*

$$\rho_0 = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln|f(r)|}{\ln r}, \quad \rho_\pi = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln|f(-r)|}{\ln r}, \quad \textit{соответственно,}$$

выполнено одно из соотношений

$$\tilde{\rho} \le \rho_0 < 1/4 < 1/2 \le \rho_\pi \quad \textit{или} \quad \tilde{\rho} \le \rho_\pi < 1/4 < 1/2 \le \rho_0, \tag{1.2.37}$$

то подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ не является слабо локализуемым.

Доказательство. Ясно, что

$$\varphi \in \mathbf{P}_a \subset \mathcal{P}_{\Omega,a}, \quad \Phi \in \mathcal{J}(\varphi).$$

Докажем, что в условиях теоремы функция Φ не может принадлежать главному подмодулю $\mathcal{J}_\varphi$. Предположим противное: пусть существует обобщенная последовательность многочленов p_α, такая, что $p_\alpha\varphi$ сходится к Φ в пространстве $\mathcal{P}_{\Omega,a}$.

Согласно лемме 1.1, найдется натуральное число n_0, для которого функция $\varphi\varphi_{1,n_0}$ лежит в $\mathcal{P}_{\Omega,a}$. Используя свойства топологий пространств $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}_{\Omega,a})$, нетрудно установить существование номера m_0 и *счетной* подпоследовательности

$$p_{\alpha_k}\varphi\varphi_{1,n_0}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

сходящейся к функции $\Phi\varphi_{1,n_0}$ в норме $\|\cdot\|_{m_0,m_0}$, определенной в формуле (0.3.7) (п.1.1.1).

В частности, эта подпоследовательность ограничена по указанной норме: для некоторой постоянной $C > 0$ и всех натуральных k имеем

$$|p_{\alpha_k}(z)\varphi(z)\varphi_{1,n_0}(z)| \le C\exp(c_{m_0}|\mathrm{Im}\, z| + H_{m_0\omega}(-z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этих неравенств, леммы 1.1, свойств функций типа синуса, получим, что на любой фиксированной прямой $\mathrm{Im}\, z = y_0$, $|y_0| \ge 3d$, справедливы оценки

$$|p_{\alpha_k}(z)| \le \widetilde{C}(1+|z|)|f(z)|^{1+2^{-n_0}}\exp(H_{m_0\omega}(-z)), \tag{1.2.38}$$

где $\widetilde{C}$ – положительная постоянная, зависящая только от y_0, а положительное число d таково, что все нули Φ (функции типа синуса!) содержатся в горизонтальной полосе $|\mathrm{Im}\, z| \le d/2$.

Предположим, что выполнено первое из соотношений (1.2.37), и оценим $|p_{\alpha_k}(z)|$ на полупрямой $z = x + iy_0$, $x > 0$, $y_0 \ge 3d$. Выберем $\varepsilon \in (0; 1/8 - \rho_0/2)$. Используя соотношения (1.2.20)–(1.2.23) для оценки $\ln|f|$ и аналогичные соображения для оценки функции $H_{m_0\omega}$, с учетом условия $\tilde{\rho} \le \rho_0$, как и в доказательстве теоремы 1.1 устанавливаем, что на полупрямой $z = x + iy_0$, $x > 0$, $y_0 \ge 3d$ верны оценки

$$|p_{\alpha_k}(z)| \le C'(1+|z|)\exp(C''|z|^{\rho_0+\varepsilon}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где C', C'' – положительные постоянные, зависящие от ε и y_0 и не зависящие от x и k.

Из этих оценок при помощи принципа Фрагмена-Линделефа выводим, что

$$|p_{\alpha_k}(z)| \le C\exp(|z|^{\rho_0+2\varepsilon}), \quad z \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

причем постоянная $C > 0$ зависит от ε и не зависит от k и z. Отсюда следует, что функция f (равная пределу последовательность p_{α_k}) должна иметь во всей плоскости порядок, меньший, чем $1/4$, чего не может быть в силу условий (1.2.37).

□

Приведем пример функции, для которой выполнены условия доказанной теоремы.

Пусть $\Omega = \{n\omega\}$, ω — весовая функция, для которой порядок $\tilde{\rho}$, определенный в (1.2.36), удовлетворяет соотношениям

$$0 < \tilde{\rho} \le 1/5.$$

Рассмотрим модуль $\mathcal{P}_{\Omega,a}$.

Положим

$$\varphi_1(z) = \frac{\sin \pi z}{U(z)\widetilde{V}(z)},$$

где функция U определена в (1.2.24) и

$$\widetilde{V}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{j^{\nu}}\right),$$

$\nu = [\tilde{\rho}^{-1}]$. Нетрудно проверить, что $\varphi_1 \in \mathbf{P}_a \subset \mathcal{P}_{\Omega,a}$.

Так же, как это было сделано при рассмотрении подмодуля $\mathcal{J}_{\varphi_0} \subset \mathbf{P}_a$, порожденного функцией φ_0 из (1.2.24), убеждаемся в том, что функция $f_1 = U\widetilde{V}$ имеет порядки $\rho_0 = 1/2$ и

$$\rho_\pi = [\tilde{\rho}^{-1}]^{-1} \in [\tilde{\rho}; 1/4).$$

Следовательно, для функции φ_1 выполнены условия теоремы 1.2 и главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1} \subset \mathcal{P}_{\Omega,a}$ не является слабо локализуемым.

1.3 Критерий слабой локализуемости в $\mathcal{P}_a$

1.3.1 Свойство b-насыщенности

Как мы увидели в предыдущем параграфе, устойчивость подмодуля — необходимое, но не достаточное условие для его слабой локализуемости. С другой стороны, имеются целые классы устойчивых подмодулей. Для того чтобы выделить среди них те, которые будут слабо локализуемыми, обратимся к абстрактной схеме И.Ф. Красичкова-Терновского [19], [20]. Напомним некоторые определения и факты из этих работ. Мы формулируем их для случая пространства целых скалярных функций.

Отделимое локально-выпуклое пространство $\mathcal{P} \subset H(\mathbb{C})$ называется *b-устойчивым*, если для любого ограниченного множества $B \subset \mathcal{P}$ множество всех *целых* функций ψ вида

$$\psi = \frac{\varphi}{z - \lambda}, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ \varphi \in B,$$

содержится и ограничено в $\mathcal{P}$.

Пространство $\mathcal{P}$ называется *аналитически уплотненным*, если для любого конечного набора функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{P}$ множество

$$B = \{\psi \in H(\mathbb{C}) : \ |\psi(z)| \le |\varphi_1(z)| + \cdots + |\varphi_m(z)|, \ z \in \mathbb{C}\}$$

содержится и ограничено в $\mathcal{P}$.

Множество $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ *b-насыщено относительно функции* $\varphi \in \mathcal{P}$, если существует ограниченное множество $B \subset \mathcal{P}$, для которого выполнена импликация: если целая функция ν во всей комплексной плоскости удовлетворяет неравенству

$$|\nu(z)\psi(z)| \le |\psi(z)| + |\varphi(z)|$$

для любого элемента $\psi \in B \bigcap \mathcal{J}$, то $\nu = const$.

Замкнутое подпространство $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ называем *подмодулем* в $\mathcal{P}$, если верна импликация:

$$\varphi \in \mathcal{J}, \ p \in \mathbb{C}[z], \ p\varphi \in \mathcal{P} \Longrightarrow p\varphi \in \mathcal{J}.$$

(Заметим, что здесь не требуется, чтобы прстранство $\mathcal{P}$ было модулем над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$.)

Понятия *устойчивости* и нулевого множества $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ для $\mathcal{J}$ определяются так же, как и в случае, когда $\mathcal{P}$ — топологический модуль над кольцом $\mathbb{C}[z]$.

Для борнологических b-устойчивых пространств в работе [19] доказано следующее утверждение.

Теорема С. (**Борнологический вариант индивидуальной теоремы.**) *Пусть $\mathcal{J}$ — устойчивый подмодуль в отделимом борнологическом b-устойчивом пространстве $\mathcal{P}$, $\psi \in \mathcal{P}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\psi}$.*

Для того чтобы $\psi \in \mathcal{J}$, необходимо и достаточно, чтобы подмодуль $\mathcal{J}$ был b-насыщен относительно ψ.

Мы получим удобное для проверки достаточное условие b-насыщенности.

Предложение 1.8. *Пусть $\mathcal{P}$ — аналитически уплотненное отделимое борнологическое b-устойчивое локально-выпуклое пространство целых функций, $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$, $\varphi \in \mathcal{P}$. Предположим, что для некоторой функции $\psi \in \mathcal{J}$ множество*

$$B_{\varphi,\psi} := \left\{ \Psi \in \mathcal{P} : \ \frac{\Psi}{\psi} \in H(\mathbb{C}), \ |\Psi(z)| \le |\varphi(z)| + |\psi(z)|, \ z \in \mathbb{C} \right\} \quad (1.3.1)$$

принадлежит $\mathcal{J}$.

Тогда множество $\mathcal{J}$ b-насыщено относительно функции φ.

Доказательство. Определим ограниченное в $\mathcal{P}$ множество

$$B = \{\Phi \in H(\mathbb{C}) : \ |\Phi(z)| \le |\varphi(z)| + |\psi(z)|, \ z \in \mathbb{C}\}.$$

Пусть ν — произвольная целая функция, удовлетворяющая во всей комплексной плоскости неравенству

$$|\nu(z)\Phi(z)| \le |\varphi(z)| + |\Phi(z)| \tag{1.3.2}$$

для любого элемента $\Phi \in B \bigcap \mathcal{J}$. Полагая $\Phi = \psi \in \mathcal{J} \bigcap B$, получим

$$|\nu(z)\psi(z)| \le |\varphi(z)| + |\psi(z)|, \ z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда и из условия предложения выводим, что

$$\Phi_1 = \nu\psi \in \mathcal{J} \bigcap B.$$

Следовательно,

$$|\nu(z)\Phi_1(z)| \le |\varphi(z)| + |\Phi_1(z)|, \ z \in \mathbb{C}.$$

Откуда вытекает соотношение

$$\left|\frac{1}{2}\nu^2(z)\psi(z)\right| \le |\varphi(z)| + |\psi(z)|, \ z \in \mathbb{C},$$

означающее, что $\frac{1}{2}\nu^2\psi \in B \bigcap \mathcal{J}$.

Действуя аналогично, получим включения

$$\frac{1}{2^{k-1}}\nu^k\psi \in B \bigcap \mathcal{J}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Следовательно,

$$\frac{|\nu(z)|^k}{2^{k+1}} \le \frac{|\varphi(z)|}{|\psi(z)|} + 1, \ z \in \mathbb{C}, \ k = 2, 3, \ldots$$

Эти соотношения выполнены только в случае $\nu = \text{const}$. Вспоминая, что ν — произвольная целая функция, удовлетворяющая (1.3.2), заключаем, что множество $\mathcal{J}$ b-насыщено относительно функции φ.

$\square$

Замечание 1.8. Если дополнительно известно, что $\mathcal{J}$ — устойчивый подмодуль и $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi}$, то доказанное достаточное условие b-насыщенности $\mathcal{J}$ относительно φ будет и необходимым. Действительно, в этом случае, в силу борнологического варианта индивидуальной теоремы (теорема C), имеем $\varphi \in \mathcal{J}$. Поэтому, полагая $\psi = \varphi$, получим требуемое.

1.3.2 Основной критерий слабой локализуемости и его следствия

Используя теорему C и предложение 1.8, мы докажем критерий слабой локализуемости устойчивого подмодуля в модуле $\mathcal{P}_a$. Затем из этого критерия выведем ряд следствий, которые в двойственной интерпретации дают решение задачи о слабом спектральном синтезе для оператора дифференцирования в пространстве $\mathcal{E}_a$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$ обозначим через $\mathcal{J}(\varphi)$ подмодуль, состоящий из всех функций $\psi \in \mathcal{P}_a$ вида $\psi = \omega\varphi$, где ω – целая функция минимального типа при порядке 1. Иначе говоря, подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ состоит из всех функций $\psi \in \mathcal{P}_a$, которые делятся на φ и имеют ту же индикаторную диаграмму, что и φ. Ясно, что $\mathcal{J}(\varphi)$ — слабо локализуемый подмодуль.

Предложение 1.9. *Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ — устойчивый подмодуль. Если функция $\varphi \in \mathcal{P}_a$ удовлетворяет условиям*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi} \quad [h_{\varphi}(-\pi/2); h_{\varphi}(\pi/2)] \subset (c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}),$$

то справедливо включение $J(\varphi) \subset \mathcal{J}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $\psi \in \mathcal{J}(\varphi)$. Из соотношений $c_{\mathcal{J}} < c_{\varphi}$, $d_{\mathcal{J}} > d_{\varphi}$, с учетом определения величин $c_{\mathcal{J}}$ и $d_{\mathcal{J}}$ (формула (1.1.3)), следует существование функций $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{J}$ таких, что

$$c_{\mathcal{J}} \le c_{\varphi_1} < c_{\varphi}, \quad d_{\varphi} < d_{\varphi_2} \le d_{\mathcal{J}}.$$

Положим $\varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2$. Эта функция имеет вполне регулярный рост при порядке 1. Замечая, что индикаторная диаграмма функции $\psi \in \mathcal{J}(\varphi)$ есть $\mathrm{i}[c_{\varphi}; d_{\varphi}]$, и значит, компактно принадлежит индикаторной диаграмме функции φ_B, заключаем, что

$$\frac{\psi(z)}{\varphi_B(z)} \to 0, \quad z = re^{i\theta}, \tag{1.3.3}$$

когда $r \to \infty$, оставаясь вне некоторого множества нулевой относительной меры. Причем соотношение (1.3.3) выполняется равномерно по

$$\theta \in \{|\pi/2 - \theta| < \delta\} \bigcup \{|-\pi/2 - \theta| < \delta\},$$

где $\delta > 0$ достаточно мало.

Покажем, что подмодуль $\mathcal{J}$ b-насыщен относительно функции ψ. Положим $B = \{\varphi_B\}$ и рассмотрим целую функцию ρ, удовлетворяющую оценке

$$|\rho(z)\varphi_B(z)| \le |\psi(z)| + |\varphi_B(z)|, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.3.4}$$

Из теоремы о сложении индикаторов при умножении на функцию вполне регулярного роста следует, что, функция ρ минимального типа при порядке 1. В силу принципа максимума модуля, из (1.3.3) следует, что эта функция ограничена на мнимой оси, и значит, $\rho = const$. Отсюда заключаем, что устойчивый подмодуль $\mathcal{J}$ b-насыщен относительно функции ψ. Согласно борнологическому варианту индивидуальной теоремы, получим $\psi \in \mathcal{J}$.

□

Замечание 1.9. При помощи рассуждений из доказательства предложения 1.9 нетрудно убедиться в том, что подмодуль $\mathcal{J}$ (не обязательно устойчивый) с индикаторным отрезком

$$[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}], \quad d_{\mathcal{J}} - c_{\mathcal{J}} > 0$$

будет b-насыщен относительно любой функции $\psi \in \mathcal{P}_a$, удовлетворяющей условию

$$[h_{\psi}(-\pi/2); h_{\psi}(\pi/2)] \subset (c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}). \tag{1.3.5}$$

Следовательно, подмодуль $\mathcal{J}$ с максимально возможным индикаторным отрезком $[-a; a]$ будет b-насыщен относительно любой функции $\psi \in \mathcal{P}_a$.

Основной критерий слабой локализуемости содержится в следующей теореме.

Теорема 1.3. *Устойчивый подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ слабо локализуем тогда и только тогда, когда в нем имеется функция φ такая, что*

$$\mathcal{J}(\varphi) \subset \mathcal{J}.$$

Доказательство. Ясно, что в доказательстве нуждается лишь достаточность.

1) Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{J}(\varphi) \subset \mathcal{J}$ и индикаторная диаграмма функции φ совпадает с отрезком $\mathrm{i}\,[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$. Отметим, что если $\mathcal{P}_a$ — модуль Шварца, то нетривиальным будет лишь случай $c_{\mathcal{J}} < d_{\mathcal{J}}$; а для модулей, двойственных к пространствам Ω-УДФ случай $c_{\mathcal{J}} = d_{\mathcal{J}}$ также нетривиален.

Пусть функция $\psi \in \mathcal{P}_a$ удовлетворяет условиям

$$\mathcal{Z}_{\psi} \supset \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}, \qquad \mathrm{i}\,[c_{\psi}; d_{\psi}] \subset \mathrm{i}\,[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}].$$

Для модуля $\mathcal{P}_a$ выполнены все условия предложения 1.8, а из включения $\mathcal{J}(\varphi) \subset \mathcal{J}$ и условий на индикаторные диаграммы функций φ и ψ следует, что множество (1.3.1), определяемое этими функциями, принадлежит $\mathcal{J}$ (оно совпадает с $\mathcal{J}(\varphi)$). Применяя предложение 1.8, выводим, что подмодуль $\mathcal{J}$ b-насыщен относительно ψ. И значит, согласно борнологическому варианту индивидуальной теоремы, $\psi \in \mathcal{J}$. Принимая во внимание произвольность ψ, заключаем, что $\mathcal{J}$ — слабо локализуемый подмодуль.

2) Теперь рассмотрим случай, когда

$$\mathcal{J}(\varphi) \subset \mathcal{J}, \quad [c_\varphi; d_\varphi] \subsetneq [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \subset (a; b).$$

В этом случае значение хотя бы одного из выражений

$$\delta_1 := c_\varphi - c_{\mathcal{J}} \quad \text{или} \quad \delta_2 := d_{\mathcal{J}} - d_\varphi$$

положительно. Пусть, например, они оба положительны: $(\delta_1,\, \delta_2 > 0)$.

В силу предложения 1.9, для всех $\delta' \in [0; \delta_1)$ и $\delta'' \in [0; \delta_2)$. будет

$$\mathcal{J}(e^{i\delta' z}\varphi) \subset \mathcal{J}, \quad \mathcal{J}(e^{-i\delta'' z}\varphi) \subset \mathcal{J}.$$

В частности,

$$e^{i\delta' z}\varphi, \quad e^{-i\delta'' z}\varphi \in \mathcal{J}, \quad \delta' \in [0; \delta_1), \; \delta'' \in [0; \delta_2). \tag{1.3.6}$$

Положим $\Phi = (e^{i\delta_1 z} + e^{-i\delta_2 z})\varphi$. В топологии $\mathcal{P}_a$ выполнены предельные соотношения

$$\lim_{\delta' \to \delta_1} e^{i\delta' z}\varphi = e^{i\delta_1 z}\varphi, \quad \lim_{\delta'' \to \delta_2} e^{-i\delta'' z}\varphi = e^{-i\delta_2 z}\varphi.$$

Отсюда, учитывая (1.3.6), выводим, что $\Phi \in \mathcal{J}$.

Произвольная функция $\Psi \in \mathcal{J}(\Phi)$ представляется в виде

$$\Psi = \rho\Phi = \rho(e^{i\delta_1 z} + e^{-i\delta_2 z})\varphi,$$

где ρ — целая функция минимального экспоненциального типа.

Нетрудно убедиться в том, что $\rho\varphi \in \mathcal{P}_a$. Используя предложение 1.9, получаем

$$\rho\varphi \in \mathcal{J}, \quad \Psi_{\delta'} = e^{i\delta' z}\rho\varphi \in \mathcal{J}, \quad \forall\, \delta' \in (0; \delta_1),$$
$$\Psi_{\delta''} = e^{-i\delta'' z}\rho\varphi \in \mathcal{J}, \quad \forall\, \delta'' \in (0; \delta_2).$$

Далее, из соотношения

$$\Psi = \lim\,(\Psi_{\delta'} + \Psi_{\delta''}) \quad \text{as} \quad \delta' \to \delta_1, \quad \delta'' \to \delta_2,$$

следует, что $\Psi \in \mathcal{J}$. В силу произвольности $\Psi \in \mathcal{J}(\Phi)$, верно соотношение $\mathcal{J}(\Phi) \subset \mathcal{J}$.

Таким образом, подмодуль $\mathcal{J}$ содержит подмодуль $\mathcal{J}(\Phi)$, порожденный функцией Φ, индикаторная диаграмма которой есть $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$. Поэтому, согласно п. 1 настоящего доказательства, $\mathcal{J}$ — слабо локализуемый подмодуль.

3) Осталось рассмотреть случай, когда $c_{\mathcal{J}} = a$ или (и) $d_{\mathcal{J}} = b$.

Пусть $\Psi \in \mathcal{P}_a$ и $\mathrm{i}[c_\Psi; d_\Psi] \subset \mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$, $\mathcal{Z}_\Psi \supset \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$. Проверим, что $\Psi \in \mathcal{J}$. Для этого выберем и фиксируем отрезок $[c'; d']$ такой, что

$$[c'; d'] \subset (a; b) \bigcap [c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}], \quad [c_\Psi; d_\Psi] \subset [c'; d'], \quad [c_\varphi; d_\varphi] \subset [c'; d']. \qquad (1.3.7)$$

Обозначим $\mathcal{J}'$ слабо локализуемый подмодуль с индикаторным отрезком $[c'; d']$ и нулевым множеством $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}'} = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$. Легко видеть, что $\widetilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \bigcap \mathcal{J}'$ — замкнутый устойчивый подмодуль с индикаторным отрезком $[c'; d']$ и множеством нулей $\mathcal{Z}_{\widetilde{\mathcal{J}}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$.

Из включений (1.3.7) следует, что $\mathcal{J}(\varphi) \subset \widetilde{\mathcal{J}}$. Отсюда, согласно п.1 и п.2 настоящего доказательства, следует, что $\widetilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}'$. Снова принимая во внимание соотношения (1.3.7) получаем требуемое включение:

$$\Psi \in \widetilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}.$$

$\square$

Следствие 1.3. *Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ — устойчивый подмодуль. Если существует функция $\varphi_0 \in \mathcal{J}$, порождающая слабо локализуемый главный подмодуль, то подмодуль $\mathcal{J}$ тоже слабо локализуем. (Иными словами, устойчивый подмодуль $\mathcal{J}$, содержащий слабо локализуемый главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_0}$, слабо локализуем.)*

Доказательство. По условию имеем

$$\mathcal{J}(\varphi_0) = \mathcal{J}_{\varphi_0} \subset \mathcal{J}.$$

Применяя теорему 1.3, заключаем, что $\mathcal{J}$ — слабо локализуемый подмодуль.

$\square$

Замечание 1.10. Как увидим из предложения 1.11 в начале следующего пункта, условия следствия 1.3 выполнены, если, например, $\mathcal{J}$ содержит делитель пространства $\mathcal{P}_\infty$.

С использованием следствия 1.3 и материала следующей главы, полученного независимо, выводим следующий критерий слабой локализуемости в модуле Шварца $\mathbf{P}_a$.

Теорема 1.3*. *Устойчивый подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathbf{P}_a$ слабо локализуем тогда и только тогда, когда он содержит слабо локализуемый главный подмодуль.*

Действительно, достаточная часть сформулированной теоремы — частный случай следствия 1.3, а необходимая получается из рассуждений в начале доказательства теоремы 2.4.

Принимая во внимание соотношение определение радиуса полноты комплексной последовательности, теорему Берлинга-Мальявена о радиусе полносты, утверждающую, что $r(\Lambda) = \pi D_{BM}(\Lambda)$ и другую известную теорему Берлинга-Мальявена (о мультипликаторе) (см., например, [104, X-XI]), получаем такое утверждение.

Предложение 1.10. *Подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ нетривиален (содержит ненулевые функции) тогда и только тогда, когда выполнено соотношение*

$$d_{\mathcal{J}} - c_{\mathcal{J}} \geq 2\pi D_{BM}(\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}). \tag{1.3.8}$$

Из предложения 1.10 следует, что и задача локального описания в слабом смысле нетривиальна лишь для подмодулей, удовлетворяющих (1.3.8). Оказывается, что при этом принципиально различаются два случая:

$$d_{\mathcal{J}} - c_{\mathcal{J}} = 2\pi D_{BM}(\mathcal{Z}_{\mathcal{J}})$$

и

$$d_{\mathcal{J}} - c_{\mathcal{J}} > 2\pi D_{BM}(\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}).$$

А именно, во первом случае существуют устойчивые, но не локализуемые в слабом смысле подмодули (теоремы 1.1, 1.2). С другой стороны, во втором случае это не так, что показывает следующая теорема, содержащая удобное достаточное условие слабой локализуемости устойчивого подмодуля.

Теорема 1.4. *Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ — устойчивый подмодуль.*
Если

$$d_{\mathcal{J}} - c_{\mathcal{J}} > 2\pi D_{BM}(\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}), \tag{1.3.9}$$

то $\mathcal{J}$ нетривиальный и слабо локализуемый.

Доказательство. Из теорем Берлинга-Мальявена, Пэли-Винера-Шварца-Абанина (теорема A во Введении) и свойств весов из Ω вытекает существование ненулевой функции

$$\varphi_0 \in \mathbf{P}_a \subset \mathcal{P}_a$$

со свойствами

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{Z}_{\varphi_0}, \quad [h_{\varphi_0}(-\pi/2); h_{\varphi_0}(\pi/2)] \subset (c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}).$$

Согласно предложению 1.9, справедливо включение $\mathcal{J}(\varphi_0) \subset \mathcal{J}$. Применяя теорему 1.3, получаем нужное утверждение.

□

Следствие 1.4. *Если индикаторный отрезок устойчивого подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ не компактен в $(-a; a)$, подмодуль $\mathcal{J}$ слабо локализуем.*

В частности, устойчивый подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$ локализуем тогда и только тогда, когда

$$c_{\mathcal{J}} = -a, \quad d_{\mathcal{J}} = a.$$

Замечание 1.11. В силу теоремы 1.4, следствие 1.3 фактически представляет интерес только для нетривиальных устойчивых подмодулей $\mathcal{J}$ таких, что

$$d_{\mathcal{J}} - c_{\mathcal{J}} = 2\pi D_{BM}(\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}). \tag{1.3.10}$$

Укажем здесь простейшую ситуацию, в которой не применима теорема 1.4, но работает следствие 1.3. Для этого напомним, что *делителем алгебры Шварца* $\mathbf{P}_\infty$ называется функция $\varphi_0 \in \mathbf{P}_\infty$, для которой верна импликация

$$\Phi \in \mathbf{P}_\infty,\ \Phi/\varphi_0 \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \Phi/\varphi_0 \in \mathbf{P}_\infty.$$

Из этого определения нетрудно вывести, что в модуле Шварца $\mathbf{P}_a$ главный подмодуль, порожденный принадлежащим ему делителем алгебры Шварца φ_0, имеет вид

$$\mathcal{J}_{\varphi_0} = \{p\varphi_0 :\ p \in \mathbb{C}[z]\},$$

и следовательно, слабо локализуем. Пусть $\mathcal{J}$ — устойчивый подмодуль в модуле Шварца $\mathbf{P}_a$, удовлетворяющий условию (1.3.10) и содержащий делитель алгебры Шварца φ_0. Согласно следствию 1.3, $\mathcal{J}$ — слабо локализуемый подмодуль.

Главные подмодули, порожденные делителями пространства $\mathcal{P}_\infty$ в $\mathcal{P}_a$, будут рассмотрены в следующем пункте, а также в главе 2 при изучении главных подмодулей.

1.3.3 Классы слабо локализуемых подмодулей

Из результатов об устойчивых подмодулях, полученнных в п.2.1 настоящей главы, и следствия 1.3 и теоремы 1.4 об условиях слабой локализуемости выведем ряд утверждений о слабой локализуемости некоторых классов подмодулей в $\mathcal{P}_a$.

Для этого сначала напомним, что *делителем пространства* $\mathcal{P}_\infty$ называется мультипликатор этого пространства $\varphi_0 \in \mathcal{M}_\infty$, для которого верна импликация

$$\Phi \in \mathcal{P}_\infty,\ \Phi/\varphi_0 \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \Phi/\varphi_0 \in \mathcal{P}_\infty.$$

Характеризация делителей *алгебры Шварца* $\mathbf{P}_\infty$ была получена еще Л. Эренпрайсом ([90, Theorem 1]):

Теорема E. *Функция* $\varphi_0 \in \mathbf{P}_\infty$ *является делителем* $\mathbf{P}_\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\exists\, A > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R} :\ |x-y| \le A \ln(|x|+e) \quad и \quad |\varphi_0(y)| \ge (|y|+e)^{-A}.$$

(В случае алгебры Шварца, очевидно, любая функция $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ является мультипликатором.)

Затем, в работе [107, Теорема 2.6] было найдено следующее описание делителей пространства $\mathcal{P}_{(\Omega),\infty}$ для весовой последовательности

$$\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty},$$

ω — канонический вес (в этом случае, как в алгебре Шварца, любая функция $\psi \in \mathcal{P}_{(\Omega),\infty}$ — мультипликатор $\mathcal{P}_{(\Omega),\infty}$):

Теорема G. *Функция* $\varphi_0 \in \mathcal{P}_{(\Omega),\infty}$ *является делителем пространства* $\mathcal{P}_{(\Omega),\infty}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\exists\, A > 0 :\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R} :\ |x-y| \le A\omega(x) \quad и \quad |\varphi_0(y)| \ge e^{-A\omega(y)}.$$

Функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ (или $\varphi \in \mathcal{P}_{(\Omega),\infty}$), удовлетворяющие условиям теоремы E (соответственно, теоремы G) называют *медленно убывающими* ("slowly decreasing") в алгебре $\mathbf{P}_\infty$ (или, соответственно, $\mathcal{P}_{(\Omega),\infty}$).

Для пространства $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$, где $a \le \infty$ и

$$\Omega = \{q_n\omega\},\ 0 < q_n \nearrow 1,$$

ω — канонический вес, аналогичный результат получен в работах [5, теорема 1], [3, теорема 2]:

Теорема H. *Мультипликатор φ_0 пространства $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$, где $\Omega = \{q_n\omega\}_{n=1}^{\infty}$, ω — канонический вес, является делителем этого пространства тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists\, r_0 > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :\ |x| \geq r_0\ \exists\, y \in \mathbb{R} :$$
$$|x - y| \leq \delta\omega(x) \quad \textit{и} \quad |\varphi_0(y)| \geq e^{-\varepsilon\omega(y)}.$$

Предложение 1.11. *Пусть $\mathcal{P}_a = \mathbf{P}_a$ или $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, где Ω — последовательность канонических весов.*

Если $\varphi \in \mathcal{P}_a$ — делитель соответствующего пространства $\mathcal{P}_\infty$, то $\mathcal{J}_\varphi$ — слабо локализуемый подмодуль.

Доказательство. В случае, когда $\mathcal{P}_a = \mathbf{P}_a$, очевидно, будет

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi :\ p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Пусть теперь φ — делитель пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$ и $\psi = \nu\varphi \in \mathcal{J}(\varphi)$. Тогда $\nu \in \mathcal{P}_{\Omega,a}$ — функция минимального экспоненциального типа. Принимая во внимание условия на веса ω_n (они канонические и удовлетворяют (0.3.5), (0.3.6)), применим результаты о весовой аппроксимации многочленами на вещественной оси из [103, VI.H] (см. цитированные в доказательстве предложения 1.4 теоремы K и L). Из них выводим существование последовательности многочленов $\{p_k\}$, сходящейся к ν в норме

$$\|\cdot\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\cdot|}{e^{\omega_n(x)}}$$

для некоторго n в случае последовательности (Ω) (для всех n, в случае последовательности $\{\Omega\}$). Из этого факта, используя известные рассуждения типа Фрагмена-Линделефа [1, § 1.4], [103, VI.H.2] и определение мультипликатора, заключаем, что

$$p_k\varphi \to \nu\varphi \quad \text{в топологии пространства} \quad \mathcal{P}_{\Omega,a}.$$

Следовательно, $\psi \in \mathcal{J}_\varphi$. И значит, $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi)$, то есть главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем.

□

Теорема 1.5. *Предположим, что либо*
1) *$\mathcal{P}_{\Omega,a}$ — модуль, порожденный такой же весовой последовательностью, как в следствии 1.2, $\mathcal{S} = \{\varphi_\alpha\} \subset \mathcal{P}_a$ — семейство функций минимального экспоненциального типа, и найдется функция $\varphi_{\alpha_0} \in \mathcal{S}$ — делитель соответствующего пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$;*

либо
2) $\mathcal{P}_{\Omega,a}$ — *модуль, порожденный последовательностью канонических весов* $\Omega = \{\omega_n\}$, $\mathcal{S} = \{\varphi_\alpha\} \subset \mathcal{M}_a$ — *семейство функций минимального экспоненциального типа, и в* $\mathcal{S}$ *найдется функция* φ_{α_0} — *делитель пространства* $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$.

Тогда подмодуль $\mathcal{J}$, *порожденный семейством* $\mathcal{S}$ *в* $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, *слабо локализуем.*

Доказательство. В силу следствия 1.2 и замечания 1.4, $\mathcal{J}$ — устойчивый подмодуль. Для этого подмодуля выполнено соотношение (1.3.10), и он содержит функцию φ_{α_0}, порождающую слабо локализуемый главный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_{\alpha_0}}$ (согласно предложению 1.11).

Так как $\mathcal{J}_{\varphi_{\alpha_0}} \subset \mathcal{J}$, применяя следствие 1.3, заключаем, что $\mathcal{J}$ — слабо локализуемый подмодуль.

□

Замечание 1.12. Учитывая замечание 1.3, во втором утверждении теоремы 1.5 вместо условия $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_a$ можем потребовать выполнения условия: существует $\psi_0 \in \mathcal{S} \bigcap \mathcal{M}_a$, такая, что

$$\psi_0 = \lim_{k\to\infty} p_k \quad \text{в топологии пространства} \quad \mathcal{P}_{\Omega,a}, \quad p_k \in \mathbb{C}[z]$$

и последовательность многочленов $\{p_k\}$ удовлетворяет условию **(UB)** (см. замечание 1.3).

Теорема 1.6. *Пусть* $\mathcal{P}_a$ — *любой из модулей* $\mathbf{P}_a$, $\mathcal{P}_{(\Omega),a}$ *или* $\mathcal{P}_{\{\Omega\},a}$, *где* Ω — *правильная весовая последовательность*

Тогда замкнутые подпространства $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}_a$, *рассмотренные в предложениях* 1.5, 1.6, 1.7, *представляют собой слабо локализуемые подмодули.*

Доказательство. Заметим, что подпространства $\mathcal{J}$ из условия являются устойчивыми подмодулями. Это доказано в предложениях 1.5, 1.6, 1.7. Кроме того, нетрудно проверить, что во всех рассматриваемых случаях для подмодуля $\mathcal{J}$ справедливо соотношение (1.3.9).

Применяя теорему 1.4, заключаем, что $\mathcal{J}$ — слабо локализуемый подмодуль.

□

1.4 Решение задачи о слабом спектральном синтезе в пространстве $\mathcal{E}_a$

1.4.1 Спектр D-инвариантного подпространства

Из отмеченной выше необходимости устойчивости подмодуля для его слабой локализуемости и предложения 1.3 следует, что ожидать синтезируемости в слабом смысле можно только для D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$, анннуляторные подмодули которых устойчивы. В связи с этим необходимо выяснить, в чем заключается эквивалентное двойственное свойство соответствующего D-инвариантного подпространства.

Первый шаг на этом пути был сделан в работе [71] для D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a; a)$. Ее авторы определили *спектр* σ_W подпространства W как дополнение $\mathbb{C}$ до множества *регулярных точек* сужения оператора дифференцирования $D : W \to W$, то есть до множества точек $\mu \in \mathbb{C}$ со свойством:

$$(D - \mu\,\mathbf{id}) : W \to W$$

— биекция, где $\mathbf{id}$ — тождественный оператор. Если $\mu \in \mathbb{C}$ — регулярная точка, то существует линейный непрерывный обратный оператор

$$(D - \mu\,\mathbf{id})^{-1} : W \to W.$$

В теореме 2.1 и предложении 3.1 работы [71] были установлены следующие факты:
1) спектр σ_W D-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(-a; a)$ либо совпадает со всей комплексной плоскостью, либо представляет собой конечное или счетное (может быть, пустое) множество (кратных) точек в $\mathbb{C}$ с единственной возможной предельной точкой в бесконечности;
2) если $\sigma_W \neq \mathbb{C}$, то $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ устойчив во всех точках $\lambda \notin \mathrm{i}\sigma_W$ (следовательно, как уже отмечалось в п.1.2.1, согласно [20, предложения 4.2–4.6], подмодуль $\mathcal{J}$ устойчив во всех точках комплексной плоскости).

Второе из только что сформулированных утверждений получено в работе [71] в другой форме, так как авторы этой работы не использовали двойственный метод перехода к подмодулям целых функций.

Наша цель состоит в том, чтобы установить аналог первого из приведенных утверждений о спектре для D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a$ в общем случае (включающем пространства Ω-УДФ), а также доказать, что дискретность спектра σ_W D-инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ *равносильна* устойчивости его аннуляторного подмодуля $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$.

Предложение 1.12. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство, $\mathcal{J}$ — его аннуляторный подмодуль.*
Точка $\mu \in \mathbb{C}$ будет регулярной для сужения оператора дифференцирования

$$D : W \to W$$

тогда и только тогда, когда выполнены оба следующих условия:
1) $\mathrm{i}\mu \notin \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$;
2) *подмодуль $\mathcal{J}$ устойчив в точке $\lambda = \mathrm{i}\mu$.*

Доказательство.
Необходимость.
1) Если $\mu \notin \sigma_W$, то, очевидно, $e^{\mu t} \notin W$, и значит, согласно принципу двойственности, $\mathrm{i}\mu \notin \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$.
2) Без ограничения общности можем считать, что $\mu = 0$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{J}$, $\varphi(0) = 0$. Обозначим

$$S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi), \quad \widetilde{S} = \mathrm{i}\mathcal{F}^{-1}(\frac{\varphi}{z}),$$

D^* — оператор обобщенного дифференцирования, действующий в $\mathcal{E}'_a$ и сопряженный к D. Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathcal{F}(D^*(\widetilde{S})) = \varphi.$$

Это эквивалентно соотношению

$$D^*(\widetilde{S}) = S.$$

Для произвольной функции $f \in W$ найдется функция $g \in W$, такая, что $Dg = f$. Поэтому

$$\widetilde{S}(f) = \widetilde{S}(Dg) = D^*(\widetilde{S})(g) = S(g) = 0.$$

Следовательно,

$$\widetilde{S} \in W^0, \qquad \frac{\varphi}{z} \in \mathcal{J}.$$

Достаточность.
Без ограничения общности считаем, что $\mu = 0$.

Пусть A — оператор обратного сдвига, действующий в $\mathcal{P}_a$ по формуле

$$A(\psi)(z) = \frac{\psi(z) - \psi(0)}{z}.$$

Рассматривая $\mathcal{E}_a$ как реализацию сильного сопряженного $\mathcal{P}'_a$ (что возможно в силу рефлексивности этих пространств), видим, что поднятие

$\widehat{A}$ сопряженного к A оператора A^*, действует в $\mathcal{E}_a$ и удовлетворяет соотношению:

$$D\widehat{A}(f) = -\mathrm{i}f, \quad f \in \mathcal{E}_a. \tag{1.4.1}$$

Аналогично, для поднятия $\widehat{D}$ сопряженного D^* к оператору дифференцирования D имеем

$$A\widehat{D}(\varphi) = -\mathrm{i}\varphi \tag{1.4.2}$$

($\widehat{D}$ действует в $\mathcal{P}_a$).

Пусть $\mathcal{J}$ — устойчивый подмодуль и $0 \notin \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\varphi$, $\varphi(0) = 1$. Обозначая $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, можем написать

$$W = W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \ S(D^k f) = 0, \ k = 0, 1, 2, \dots\}. \tag{1.4.3}$$

Для $g \in W_S$ положим

$$f = \mathrm{i}\widehat{A}(g) - S(\mathrm{i}\widehat{A}(g)). \tag{1.4.4}$$

Ясно, что $S(f) = 0$. В силу (1.4.1) будет

$$Df = g,$$

Поэтому

$$S(D^k f) = 0, \ k = 0, 1, 2, \dots$$

И значит, $f \in W_S$.

Таким образом, оператор $D : W_S \to W_S$ сюръективен. Инъективность этого оператора очевидна: так как $\varphi(0) = 1$, уравнение $Df = 0$ имеет в W_S только нулевое решение.

Пусть теперь W — произвольное D-инвариантное подпространство. По условию в его аннуляторном подмодуле $\mathcal{J}$ найдется функция φ такая, что $\varphi(0) = 1$. Для произвольной функции $\psi \in \mathcal{J}$ имеем

$$\psi = z\frac{\psi - \psi(0)\varphi}{z} + \psi(0)\varphi.$$

Из этого представления и устойчивости $\mathcal{J}$ следует, что

$$\mathcal{J} = z\mathcal{J} + \mathcal{J}_\varphi.$$

В силу принципа двойственности, $W = W_1 \bigcap W_S$, где W_1 — D-инвариантное подпространство, аннуляторный подмодуль которого есть $z\mathcal{J}$, а W_S — D-инвариантное подпространство, определяемое по функционалу $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ формулой (1.4.3). Для функции $g \in W$ определим функцию f по формуле (1.4.4). Как и выше, видим, что $f \in W_S$. Учитывая (1.4.1), (1.4.2), получаем справедливость включения $f \in W_1$. Следовательно, $f \in W$, и $D : W \to W$ — сюръективный оператор. Инъективность этого оператора очевидна.

$\square$

Следствие 1.5. *Для спектра D-инвариантного подпространства $W \subset \mathcal{E}_a$ имеет место одно из соотношений:*
либо $\sigma_W = -\mathrm{i}\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$, где $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ (что равносильно устойчивости аннуляторного подмодуля $\mathcal{J}$),
либо $\sigma_W = \mathbb{C}$ (это эквивалентно тому, подмодуль $\mathcal{J}$ неустойчив).

1.4.2 Критерий допустимости слабого спектрального синтеза и его следствия

В силу специального принципа двойственности (предложения 1.2) и следствия 1.5, критерий допустимости слабого спектрального синтеза дается следующей теоремой, двойственной к теореме 1.3.

Теорема 1.7. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*

Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид (1.1.2), *тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ содержит функцию φ со свойством $\mathcal{J}(\varphi) \subset \mathcal{J}$.*

Аналогичным образом, используя теорему **1.3*** вместо теоремы 1.3, для D-инвариантных подпространств в пространстве Шварца $C^\infty(-a; a)$ выводим такой критерий.

Теорема 1.7*. *Пусть $W \subset C^\infty(-a; a)$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*

Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид (1.1.2), *тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ содержит функцию φ со свойством: $\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi$.*

Снова принимая во внимание специальный принцип двойственности (предложение 1.2) и следствие 1.5, в качестве двойственного к следствию 1.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 1.6. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*

Подпространство W допускает слабый спектральный синтез, то есть имеет вид (1.1.2), *если его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$*

содержит функцию φ, порождающую слабо локализуемый главный подмодуль.

В частности, подпространство вида

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \ S(D^k f) = 0, \ k = 0, 1, 2 \dots\},$$

где $S \in \mathcal{E}'_a$ — фиксированный функционал, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда функция $\varphi = \mathcal{F}(S)$ порождает в $\mathcal{P}_a$ слабо локализуемый главный подмодуль.

Иллюстрацией к следствию 1.6 служит подпространство W_S порожденное функционалом S, удовлетворяющим условию:
$\varphi = \mathcal{F}(S)$ — делитель пространства $\mathcal{P}_\infty = \mathbf{P}_\infty$ или $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где $\Omega = \{\omega_n\}$ состоит из канонических весов. Действительно, в этом случае, согласно предложению 1.11, аннуляторный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем.

Двойственнным к предложению 1.10 будет

Предложение 1.13. *D-инвариантное подпространство W, характеристики которого подчинены условию*

$$2\pi D_{BM}(E_W) = 2r(E_W) > |I_W|,$$

тривиально, то есть совпадает со всем $\mathcal{E}_a$ (напомним, что E_W — составленное с учетом кратностей множество показателей системы $\operatorname{Exp} W$ *всех экспоненциальных одночленов, содержащихся в W).*

Двойственные утверждения к теореме 1.4 и следствию 1.4 собраны в следующей теореме.

Теорема 1.8. *Пусть $W \subset \mathcal{E}_a$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком I_W.*

1) *Если*

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = 2r(\mathrm{i}\sigma_W) < |I_W|,$$

где $|I_W|$ — длина промежутка I_W, то подпространство W допускает слабый спектральный синтез.

2) *В частности, если резидуальный промежуток I_W не компактен в $(-a; a)$, то подпространство W допускает слабый спектральный синтез.*

3) *W допускает спектральный синтез в классическом смысле тогда и только тогда, когда $I_W = (-a; a)$.*

Замечание 1.13. Отметим, что в работе [70] методами, отличными от двойственной схемы, а именно, развивающими подход А.Алемана и Б.Коренблюма из [71], были получены утверждени е предложения 1.13 и утверждения пп. 1) и 2) теоремы 1.8 в пространстве Шварца $C^\infty(a;b)$. Примерно в то же время независимо нами была реализована двойственная схема для пространства Шварца и с ее помощью доказаны эти же утверждения (см. работы [2] и [5] из "Списка работ автора"на с. 281).

Следующие три теоремы получаются как утверждения, двойственные к предложениям 1.5, 1.6, 1.7 и теореме 1.6.

Теорема 1.9. 1) *Пусть $W \subset \mathcal{E}_\infty$ — замкнутое подпространство с неограниченным резидуальным промежутком I_W.*

Если верна импликация

$$f \in W,\ S \in W^0 \Longrightarrow S(f(t+h)) = 0 \quad \forall h \in I \div \operatorname{ch}\operatorname{supp} S, \tag{1.4.5}$$

где $\operatorname{ch}\operatorname{supp} S$ — выпуклая оболочка носителя (Ω-ультра)распределения S, то W — D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез.

2) *Пусть $a < +\infty$, $W \subset \mathcal{E}_a$ — замкнутое подпространство с не компактным в $(-a;a)$ резидуальным промежутком I_W, такое, что в W^0 имеется функционал S_0 со свойством $\mathcal{F}(S_0) \in \mathcal{M}_a$.*

Если импликация (1.4.5) верна, то W — D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез.

Для функционала $S \in \mathcal{E}_a'$ и относительно замкнутого интервала

$$I \subset (-a;a):\ \widetilde{I} := I \div \operatorname{ch}\operatorname{supp} S \neq \emptyset,$$

рассмотрим *"локальный"оператор свертки*

$$T_{S,I} : \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}(\widetilde{I}),$$

определяемый формулой

$$g = T_{S,I}(f), \quad g(y) = S(f(x+y)),\ y \in \widetilde{I}.$$

Ядро этого оператора $W_{S,I} := \ker T_{S,I}$ — D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}_a$ с резидуальным промежутком $I_W = I$ и спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\mathcal{Z}_\varphi)$, где $\varphi = \mathcal{F}(S)$, $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество функции φ.

Теорема 1.10. *Ядро "локального"оператора свертки $W_{S,I}$ допускает слабый спектральный синтез.*

Теорема 1.11. *Пусть $\{S_\alpha\} \subset \mathcal{E}'_a$ — семейство функционалов, носитель каждого из которых есть $\{0\}$, $I \subset (-a;a)$ — относительно компактный промежуток, $0 \in I$.*

Если $\varphi_{\alpha_0} = \mathcal{F}(S_{\alpha_0}) \in \mathcal{M}_a$ для некоторого α_0, то D-инвариантное подпространство $W = \bigcap\limits_\alpha \ker T_{S_\alpha,I}$ допускает слабый спектральный синтез.

В силу фактов о подмодулях, установленных выше (теоремы 1.1 и 1.2), среди D-инвариантных подпространств W с дискретными спектрами σ_W, такими, что

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = 2r(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|,$$

имеются как допускающие слабый спектральный синтез (см., например, следствие 1.6), так и не допускающие его. Приведем точную формулировку соответствующего утверждения.

Пусть $\mathcal{P}_a = \mathbf{P}_a$ или $\mathcal{P}_{\Omega,a}$, где $\Omega = \{n\omega\}$, причем

$$\tilde{\rho} = \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{\ln \omega(x)}{\ln |x|} < \frac{1}{4}.$$

Теорема 1.12. *Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_a$ такая же, как в теореме 1.1 или $\varphi \in \mathcal{P}_{\Omega,a}$ — как в теореме 1.2. Положим $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \in \mathcal{E}'_a$,*

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \ S(D^k f) = 0, \ k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Тогда W_S — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром, не допускающее слабый спектральный синтез.

1.4.3 Примеры неустойчивых подмодулей и D-инвариантных подпространств с недискретным спектром

В следствии 1.5 установлено, что нетривиальное D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ либо имеет дискретный спектр ($\Longleftrightarrow$ устойчивый аннуляторный подмодуль), либо $\sigma_W = \mathbb{C}$ ($\Longleftrightarrow$ аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ не является устойчивым).

Как уже отмечалось, впервые задача спектрального анализа для оператора дифференцирования в пространстве $C^\infty(a;b)$ была рассмотрена

А. Алеманом и Б. Коренблюмом. В том числе они построили следующий пример D-инвариантного подпространства $W_{c,d} \subset C^\infty(a;b)$, спектр которого совпадает со всей комплексной плоскостью: пусть c, $d \in (a;b)$, $c \neq d$,

$$W_{c,d} = \{f \in C^\infty(a;b): \quad f^{(k)}(c) = f^{(k)}(d) = 0, \ \forall\, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Мы получаем обобщение этого примера, а именно: строим неустойчивый 2-порожденный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2} \in \mathcal{P}_a$ с непустым нулевым множеством. В свою очередь, подпространство W в $\mathcal{E}_a$, для которого этот подмодуль является аннуляторным, представляет собой пример нетривиального D-инвариантного подпространства, содержащего экспоненты (то есть с непустым множеством E_W), со спектром $\sigma_W = \mathbb{C}$.

Предложение 1.14. *Пусть φ_1, φ_2 — какие-нибудь функции из $\mathcal{P}_a$ с индикаторными диаграммами $\mathrm{i}[c_1; d_1]$, $\mathrm{i}[c_2; d_2]$ и нулевыми множествами $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, соответственно, причем $\mathcal{Z}_1 \bigcap \mathcal{Z}_2 \neq \emptyset$.*

Если выполнены условия

$$[c_1; d_1] \subset (-a; 0), \quad [c_2; d_2] \subset (0; a),$$

то 2-порожденный подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$ не устойчив.

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}} = \mathcal{Z}_1 \bigcap \mathcal{Z}_2$, а индикаторный отрезок подмодуля $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$ есть $[c_1; d_2]$.

Согласно специальному принципу двойственности (предложение 1.2) существует единственное D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ такое, что $\mathcal{F}(W^0) = \mathcal{J}$, при этом $I_W = [c_1; d_2]$, $E_W = \mathcal{Z}_1 \bigcap \mathcal{Z}_2$.

Также, в силу двойственности, если $f \in \mathcal{E}_a$, то

$$f \in W \iff S_j(f^{(k)}) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \tag{1.4.6}$$

где $S_j = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j)$ $j = 1, 2$. В частности, если функция $f \in \mathcal{E}_a$ обращается в нуль на множестве $[c_1 - \varepsilon; d_1 + \varepsilon] \bigcup [c_2 - \varepsilon; d_2 + \varepsilon]$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f \in W$.

Предположим, что подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$ устойчив. Тогда, замечая, что $2\pi D_{BM}(\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}) < d_2 - c_1$ и применяя теорему 1.4, выводим, что $\mathcal{J}_{\varphi_1,\varphi_2}$ — локализуемый подмодуль, и значит,

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span}(\operatorname{Exp} W)}.$$

Система экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$ строится по последовательности показателей $E_W = \mathcal{Z}_1 \bigcap \mathcal{Z}_2$. Поэтому она не полна в пространствах $C[c_j; d_j]$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим функцию $g \in W$, равную нулю на $[c_1; d_1] \bigcup [c_2; d_2]$, но такую, что $g \neq 0$ на I_W. Из сказанного выше следует, что g есть элемент замыкания линейного множества $\mathrm{span}(\mathrm{Exp}\, W)$ в каждом из пространства $C[c_1; d_1]$, $C[c_2; d_2]$, $C[c_1; d_2]$. Но тогда, в силу единственности периодического в среднем продолжения (см. [32, § 9]), [46, § 1],

$$g = 0 \quad \text{на} \quad I_W = [c_1; d_2].$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

□

Замечание 1.14. Нетрудно построить m-порожденные неустойчивые подмодули в $\mathcal{P}_a$ для любого фиксированного $m > 1$, используя ту же схему, что и в предложении 1.14.

Как мы уже видели ранее, необходимым и достаточным условием слабой локализуемости подмодуля в модуле $\mathcal{P}_a$ является наличие у него двух свойств: устойчивости и b-насыщенности. Рассмотрение главных подмодулей в п.2.2 показало, что второе из этих свойств, b-насыщенность, вообще говоря, не является следствием первого — устойчивости. Теперь мы приводим пример, показывающий, что и b-насыщенность подмодуля не обязательно влечет его устойчивость.

Пусть $a < +\infty$. Рассмотрим две последовательности отрезков:

$$S_k^+ = [a(1 - 2^{-k}); a(1 - 2^{-k} + 2^{-k-2})],$$

$$S_k^- [-a(1 - 2^{-k} + 2^{-k-2}); -a(1 - 2^{-k})], \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим

$$W = \left\{ f \in \mathcal{E}_a : \; f = 0 \text{ на } \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k^+ \bigcup S_k^-) \right\}.$$

Нетрудно проверить, что W — D-инвариантное подпространство,

$$E_W = \emptyset, \quad I_W = (-a; a).$$

Следовательно, либо $\sigma_W = \emptyset$, либо $\sigma_W = \mathbb{C}$. Первое невозможно, потому что в таком случае, в силу теоремы 1.8, подпространство W допускало бы слабый спектральный синтез и, значит, равнялось бы $\{\bar{0}\}$, что неверно. Таким образом, $\sigma_W = \mathbb{C}$. Согласно следствию 1.5, аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ не устойчив. Но при этом индикаторный отрезок подмодуля $\mathcal{J}$ есть $\overline{I_W} = [-a; a]$ (предложение 1.2). Поэтому, в силу замечания 1.9, $\mathcal{J}$ — b-насыщенный подмодуль.

Аналогично, можно построить примеры b-насыщенных и неустойчивых подмодулей $\widetilde{\mathcal{J}}$ с $\mathcal{Z}_{\widetilde{\mathcal{J}}} \neq \emptyset$. Пусть $\mathcal{S} = \{\varphi_k^+, \varphi_k^-\} \subset \mathcal{P}_a$ — семейство функций, таких, что индикаторная диаграмма функции $\varphi_k^{\pm}$ есть $(\mathrm{i}S_k^{\pm})$ и

$$\Lambda := \bigcap_k (\mathcal{Z}_{\varphi_k^+} \bigcap \mathcal{Z}_{\varphi_k^-}) \neq \emptyset.$$

Тогда подмодуль $\widetilde{\mathcal{J}}$, порожденный семейством $\mathcal{S}$, b-насыщенный, так как его индикаторный отрезок есть $[-a; a]$, при этом он неустойчив и $\mathcal{Z}_{\widetilde{\mathcal{J}}} = \Lambda$. (Для проверки отсутствия у подмодуля $\widetilde{\mathcal{J}}$ свойства устойчивости нужно использовать рассуждения, сходные с примененными в доказательстве предложения 1.14).

Глава 2

Главные подмодули в модуле Шварца

2.1 Введение

Настоящая глава посвящена детальному изучению главных подмодулей, в том числе уточнению их алгебраической и топологической структуры и выяснению условий слабой локализуемости.

Каждая ненулевая функция $\varphi \in \mathcal{P}_a$ порождает два, вообще говоря, различных подмодуля: главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi = \overline{\{p\varphi :\ p \in \mathbb{C}[z]\}}$ и подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$, состоящий из всех функций $\psi \in \mathcal{P}_a$, таких, что частное (ψ/φ) есть целая функция минимального типа при порядке 1. Ясно, что нулевое множество каждого из указанных подмодулей совпадает с $\mathcal{Z}_\varphi$, а индикаторный отрезок каждого из них равен индикаторному отрезку $[c_\varphi; d_\varphi]$ функции φ, где $c_\varphi = -h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\varphi = h_\varphi(\pi/2)$. Из самого определения подмодуля $\mathcal{J}(\varphi)$ следует, что он слабо локализуем. Поэтому справедливо включение

$$\mathcal{J}_\varphi \subseteq \mathcal{J}(\varphi).$$

Равенство

$$\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi) \tag{2.1.1}$$

эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, и поэтому верно не для каждой функции $\varphi \in \mathcal{P}_a$.

Всюду далее в этой главе рассматриваются модуль Шварца $\mathbf{P}_a$ и его подмодули.

В параграфе 2.2 мы обсуждаем следующие две возможности реализации равенства (2.1.1).

(I) Подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$, а значит, и главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$, содержит только функции вида $p\varphi$, $p \in \mathbb{C}[z]$. Иными словами, образующая φ такова, что совокупность целых функций минимального типа при порядке 1, представимых в виде Φ/φ, $\Phi \in \mathbf{P}_a$, совпадает с множеством многочленов $\mathbb{C}[z]$. В этом случае говорим, что оба подмодуля, $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$, *алгебраически порождены.*

(II) Множество $\mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}$ не пусто, и для каждой функции $\Phi \in \mathcal{J}(\varphi)$ существует обобщенная последовательность многочленов p_α, такая, что $p_\alpha\varphi \to \Phi$ в топологии пространства $\mathbf{P}_a$.

Достаточное условие для реализации первой из указанных возможностей, (I), состоит в том, что функция φ — делитель алгебры $\mathbf{P}_\infty$. Действительно, нетрудно видеть, что в этом случае

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{2.1.2}$$

Оказывается, что требование "φ — делитель алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$"не является необходимым условием для справедливости (2.1.2). В качестве обоснования этого утверждения нами построен пример (теорема 2.1).

Переходя к рассмотрению случая (II), введем обозначение

$$\mathbf{P}_{a,0} = \mathcal{F}(C_0^\infty(-a;a)).$$

Согласно теореме Пэли-Винера-Шварца [58, теорема 7.3.1], $\mathbf{P}_{a,0}$ — подпространство пространства $\mathbf{P}_a$, состоящее в точности из тех функций $\varphi \in \mathbf{P}_a$, которые убывают вдоль вещественной оси быстрее любой функции вида $|x|^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Заметим, что в случае (II) имеется очевидное необходимое условие слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$: подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ должен содержать элементы вида $\omega\varphi$, где ω — целая функция минимального экспоненциального типа, отличная от многочлена, то есть должно выполняться соотношение

$$\mathcal{J}_\varphi \setminus \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\} \neq \emptyset, \tag{2.1.3}$$

Мы устанавливаем необходимое и достаточное условие, при котором функция φ порождает главный подмодуль, удовлетворяющий соотношениям (2.1.3) (теорема 2.2).

Если функция φ, порождающая главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$, лежит в $\mathbf{P}_{a,0}$, то задача о слабой локализуемости этого подмодуля оказывается эквивалентной задаче о весовой аппроксимации многочленами в некоторой неметризуемой (!) топологии. Как мы уже видели в главе 1, эта задача может не иметь положительного решения. В параграфе 2.3 рассматриваются примеры порождающих функций φ, показывающие, что положительное решение тоже возможно.

Эти примеры подводят нас к общему достаточному условию слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, имеющему форму ограничений на поведение функции $\ln|\varphi|$ (теорема 2.4 в параграфе 2.4).

Иллюстрации применения теоремы 2.4 содержатся в параграфе 2.5.

Для получения удобного критерия слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в терминах аппроксимации многочленами в весовой норме, определяемой функцией φ, мы уточняем топологическую структуру главного подмодуля. А именно, доказываем, что, хотя топология пространства $\mathbf{P}_a$ неметризуемая (оно является локально-выпуклым пространством типа (LN^*)), главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ совпадает с *секвенциальным* замыканием множества $\{p\varphi\ p \in \mathbb{C}[z]\}$, то есть для любой функции $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$ имеется *счетная* последовательность многочленов $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что

$$p_k\varphi \to \Phi$$

в топологии $\mathbf{P}_a$ (эквивалентно, в норме одного из пространств P_n, см. (0.3.8)). Сформулированное утверждение составляет содержание теоремы 2.6.

Весовой критерий слабой локализуемости главного подмодуля (теорема 2.7) выводится с использованием теоремы 2.6.

Теорема 2.6 позволяет уточнить один результат работы [72], касающийся D-инвариантных подпространств пространства $C^\infty(-a;a)$, двойственных к устойчивым подмодулям с критическим соотношением характеристик (длины индикаторного отрезка и радиуса полноты нулевого множества). Авторами работы [72] было предложено следующее определение. Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $D_{BM}(\Lambda) < \infty$, называется *синтезируемой*, если существует единственное (и потому допускающее слабый спектральный синтез) D-инвариантное подпространство W со спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком $[-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)]$.

В качестве уточнения критерия синтезируемости комплексной последовательности, установленного в теореме 2.1 работы [72], из сказанного выше и теоремы 2.6 мы получаем

Предложение 2.1. *Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ синтезируема тогда и только тогда, когда $\Lambda = \mathcal{Z}_\varphi$ для некоторой $\varphi \in \mathbf{P}_a$, порождающей в $\mathbf{P}_a$ слабо локализуемый главный подмодуль.*

Отметим, что, в силу двойственности между подмодулями в $\mathcal{P}_a$ и D-инвариантными подпространствами пространства $\mathcal{E}_a$ (предложения 1.2 и

1.3), вместе с каждым утверждением о слабой локализуемости главного подмодуля, порожденного функцией $\varphi \in \mathcal{P}_a$, возникает эквивалентное двойственное утверждение о допустимости слабого спектрального синтеза D-инвариантным подпространством

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \quad S(D^k f) = 0, \ k = 0, 1, 2, \dots\},$$

где S — (Ω-ультра)распределение, преобразование Фурье-Лапласа которого есть φ.

2.2 Алгебраическая (не)порожденность главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ и подмодуля $\mathcal{J}(\varphi)$

2.2.1 Пример подмодуля вида $\mathcal{J}(\varphi)$, порожденного функцией $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, не являющейся делителем алгебры Шварца

Пусть $a > \pi$. Положим

$$\varphi(z) = \frac{s(z)}{s_1(z)} + \frac{\pi z s(z)}{s_0(z)},$$

где

$$s(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}, \quad s_1(z) = s(\sqrt{z}) = \frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}}, \quad s_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{2^{2k}}\right). \tag{2.2.1}$$

Напомним уже использовавшиеся в главе 1 оценки для функций s и s_1:

$$|s(z)| \leq \frac{c_0 e^{\pi |\operatorname{Im} z|}}{\pi(1 + |z|)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.2.2}$$

$$|s(z)| \geq \frac{m_d e^{\pi |\operatorname{Im} z|}}{\pi |z|}, \quad |z - k| \geq d, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.3}$$

где c_0 – абсолютная постоянная, $d \in (0; 1/2)$ – произвольное число, m_d – положительное число, зависящее от d. Из (2.2.2) следует, что целая функция s_1 допускает оценку сверху:

$$|s_1(z)| \leq \frac{c_0 e^{\pi \sqrt{|z|} |\sin(\theta/2)|}}{\pi(1 + \sqrt{|z|})}, \quad z = re^{i\theta}, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad r > 0. \tag{2.2.4}$$

В доказательстве теоремы 2.1 мы также используем леммы 1.2 и 1.3 из главы 1.

Теорема 2.1. *Функция φ содержится в $\mathbf{P}_a$ и не является делителем алгебры $\mathbf{P}_a$. Подмодули $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi_1 = s/s_1$. Для этой функция на вещественной оси справедливы следующие оценки

$$|\varphi_1(x)| \leq \frac{c_0}{\pi c_{d_0} e^{\pi\sqrt{|x|}}}, \quad x \leq 0, \tag{2.2.5}$$

$$|\varphi_1(x)| \leq \frac{c_0 e^{3d_0\pi}}{\pi c_{d_0}}, \quad x > 0. \tag{2.2.6}$$

Первая из этих оценок является прямым следствием оценок (2.2.2) и (1.2.28) (лемма 1.2), а вторая, (2.2.6), выводится из них же стандартными приемами с использованием принципа максимума для аналитических функций. Из оценок (2.2.5) и (2.2.6), в свою очередь, следует, что функция φ_1 ограничена на вещественной оси. Учитывая, что она имеет тип π при порядке 1, заключаем, что

$$\varphi_1 \in \mathbf{P}_a. \tag{2.2.7}$$

Покажем, что функция $\varphi_2 = (\pi z s)/s_0$ тоже содержится в $\mathbf{P}_a$. Эта функция, как и функция φ_1, имеет тип π при порядке 1.

Из рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 1.3, следует, что для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ найдется $\delta > 0$, такое, что вне объединения колец

$$A_j = \{(1-\varepsilon)4^j \leq |z| \leq (1+\varepsilon)4^j\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

выполняется неравенство

$$\ln|s_0(z)| \geq \delta \left(\ln\left(|z|+1\right)\right)^2. \tag{2.2.8}$$

Поэтому для всех вещественных

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} (-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j)$$

будет выполняться неравенство

$$\ln|s_0(x)| \geq \delta\left(\ln\left(|x|+1\right)\right)^2. \tag{2.2.9}$$

Для оценки функции φ_2 в интервалах

$$(-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.2.10}$$

заметим, что в силу (2.2.8) на границе кольца A_j имеет место неравенство

$$\ln|\varphi_2(z)| \leq \ln\left|\frac{\sin \pi z}{1-z^2/4^{2j}}\right| + 2\ln\left(2+\varepsilon\right) - \delta\left(\ln\left((1-\varepsilon)4^j+1\right)\right)^2$$

Так как правой частью последнего неравенства является функция, гармоническая в кольце A_j, это неравенство остается справедливым для всех $z \in A_j$. Следовательно, найдутся положительные числа $\tilde{\delta} > \delta$ и $\tilde{c} > 1$, зависящие от δ и ε и не зависящие от j, такие, что в интервалах (2.2.10) верна оценка

$$|\varphi_2(x)| \leq \frac{\tilde{c}}{e^{\tilde{\delta}(\ln(|x|+1))^2}}, \quad x \in (-(1+\varepsilon)4^j; -(1-\varepsilon)4^j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда с учетом (2.2.9), получаем, что на всей вещественной оси справедливо неравенство

$$|\varphi_2(x)| \leq \frac{\tilde{c}}{e^{\tilde{\delta}(\ln(|x|+1))^2}}. \tag{2.2.11}$$

Применяя теорему Пэли-Винера-Шварца [58, теорема 7.3.1], заключаем, что

$$\varphi_2 \in \mathcal{F}(C_0^\infty(-a;a)) \subset \mathcal{P}(-a;a). \tag{2.2.12}$$

Из включений (2.2.7) и (2.2.12) следует, что функция φ принадлежит пространству $\mathbf{P}_a$.

Для доказательства того, что φ не является делителем алгебры $\mathbf{P}_\infty$, нам понадобится аналитический критерий Л.Эренпрайса (цитированный нами впервые в теореме E, см. п.1.3.3)

функция $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ есть делитель этой алгебры тогда и только тогда, когда существует положительное число a со свойством: для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется $y \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|x-y| \leq a\ln\left(2+|x|\right), \quad \varphi(y) \geq (a+|y|)^{-a}.$$

В силу (2.2.5) и (2.2.11) найдется положительное число c_1, такое, что функция φ на всем луче $(-\infty; 0)$ удовлетворяет оценке

$$\ln|\varphi(x)| \leq -\tilde{\delta}\left(\ln\left(|x|+2\right)\right)^2 + c_1.$$

Сопоставляя эту оценку и критерий Л.Эренпрайса, заключаем, что функция φ не является делителем алгебры $\mathbf{P}_\infty$.

Докажем последнее из сформулированных для функции φ утверждений – равенство

$$\mathcal{J}(\varphi) = \{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{2.2.13}$$

Из оценок (1.2.26), (1.2.28) и соотношения (1.2.32) (см. леммы 1.2 и 1.3 в главе 1) следует, что для любого положительного θ_0 найдется постоянная $a_0 = a_0(\theta_0)$, такая, что вне углов

$$\{z : \ |\arg z| < \theta_0\}, \quad \{z : \ |\pi - \arg z| < \theta_0\}$$

функция φ допускает оценку снизу:

$$|\varphi(z)| \geq |s(z)| \left(\frac{\pi|z|}{|s_0(z)|} - \frac{1}{|s_1(z)|} \right) \geq \frac{a_0 e^{\pi|\operatorname{Im} z|}}{\exp\left((\ln(|z|+1))^2 / \ln 8 \right)}. \tag{2.2.14}$$

Пусть Φ – произвольная функция из подмодуля $\mathcal{J}(\varphi)$. При некоторых $C_0 > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\Phi(z)| \leq C_0(1+|z|)^k e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.2.15}$$

Из этого соотношения и оценки (2.2.14), используя принцип Фрагмена-Линделефа, нетрудно вывести, что для функции $f = \Phi/\varphi$ во всей комплексной плоскости верна оценка

$$|f(z)| \leq C e^{k \ln(|z|+1) + (\ln(|z|+1))^2}, \tag{2.2.16}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. В частности, эта оценка означает, что f — целая функция нулевого порядка.

Оценим функцию f на луче $(3d_0; +\infty)$. Для этого заметим, что, в силу (1.2.26), (1.2.27), (1.2.32) (см. леммы 1.2 и 1.3 в главе 1), всюду в полуполосе $\{z = x + iy : \ x > 3d_0, \ |y| \leq d_0\}$, но вне кружков $|z - k| < 3d_0$, $k \in \mathbb{N}$, для некоторой постоянной $b_0 > 0$ будет выполняться оценка

$$|\varphi(z)| \geq |s(z)| \left(\frac{1}{|s_1(z)|} - \frac{\pi|z|}{|s_0(z)|} \right) \geq \frac{b_0}{1+|z|}. \tag{2.2.17}$$

Учитывая оценку (2.2.15) для функции Φ, из (2.2.17) получим, что при всех положительных x справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq (C_0/b_0)(1+x)^{k+1}. \tag{2.2.18}$$

Из оценок (2.2.16) и (2.2.18) и принципа Фрагмена-Линделефа следует, что f — многочлен. Так как данный факт имеет место для любой целой функции f вида Φ/φ, $\Phi \in \mathcal{J}(\varphi)$, заключаем, что выполняется требуемое соотношение для подмодулей (2.2.13).

$\square$

2.2.2 Критерий того, что главный подмодуль не является алгебраически порожденным

Напомним, что $\mathbf{P}_{a,0} = \mathcal{F}(C_0^\infty(-a;a))$ — образ пространства финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(-a;a) \subset (C^\infty(-a;a))'$ при преобразовании Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$. Очевидно, что $\mathbf{P}_{a,0} \subset \mathbf{P}_a$. (Функции из пространства $C_0^\infty(-a;a)$ рассматриваются как регулярные функционалы, действующие в пространстве $C^\infty(-a;a)$.)

Следующая теорема дает ответ на вопрос: для каких функций $\varphi \in \mathbf{P}_a$ подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$, содержит элементы вида

$$\Phi = \omega\varphi, \quad \omega - \text{целая функция, отличная от многочлена?} \tag{2.2.19}$$

Теорема 2.2. *Главный подмодуль* $\mathcal{J}_\varphi$ *содержит функции* Φ *вида* (2.2.19) *тогда и только тогда, когда* $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$.

Доказательство.

1) Необходимость.

Докажем эквивалентную импликацию: условие

$$\varphi \notin \mathbf{P}_{a,0} \tag{2.2.20}$$

влечет равенство

$$\mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{2.2.21}$$

Согласно теореме Пэли-Винера-Шварца [58, теорема 7.3.1] из (2.2.20) следует существование натурального числа k_0 и вещественной последовательности

$$x_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad |x_n| \to \infty,$$

для которых

$$|\varphi(x_n)| \geq |x_n|^{-k_0}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.2.22}$$

С другой стороны, включение $\varphi \in \mathbf{P}_a$ означает, что для некоторых $C > 0$ и $m_0 \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ всюду в $\mathbb{C}$ имеет место оценка

$$|\varphi(z)| \leq C(1 + |z|)^{m_0} e^{c_{m_0}|\operatorname{Im} z|}, \tag{2.2.23}$$

где $z = x + \mathrm{i}y$, $0 < c_{m_0} < a$. Из оценок (2.2.22) и (2.2.23) следует, что для каждого натурального j замыкание множества (возможно, пустого)

$$P_j \bigcap \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\} \tag{2.2.24}$$

в банаховом пространстве

$$P_j = \left\{\varphi \in \ H(\mathbb{C}) : \|\varphi\|_j := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp\left(c_j|\operatorname{Im} z| + j\ln\left(2+|z|\right)\right)}\right\}, \quad 0 < c_j \nearrow a, \tag{2.2.25}$$

содержится в множестве (возможно, пустом)

$$P_j \bigcap \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z], \ \deg p \le j + k_0 - m_0\},$$

которое есть, в свою очередь, подмножество множества (2.2.24). Следовательно, множество (2.2.24) замкнуто для каждого $j \in \mathbb{N}$. Согласно критерию замкнутости в пространстве типа (LN^*) [45, теорема 1] множество $\{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}$ замкнуто в $\mathbf{P}_a$, и значит, выполняется (2.2.21).

2) Достаточность.

Пусть $\varphi = \mathcal{F}(s)$, $s \in C_0^\infty(-a;a)$, $[a_0;b_0]$ – замыкание выпуклой оболочки носителя функции s, $[a_0;b_0] \Subset (-a;a)$, и пусть $\varphi \in P_{k_1}$.

В силу теоремы Пэли-Винера-Шварца существуют положительные постоянные C_n, $n = 1, 2, \dots$, такие, что верны оценки

$$|\varphi(z)| \le \frac{C_n}{(1+|z|)^n} e^{b_0 y^+ - a_0 y^-}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.26}$$

Положим

$$\nu(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (n\ln\left(1+r\right) - \ln C_n),$$

и рассмотрим субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию $v(z) = \nu(|z|)$. Согласно теореме 5 из работы [64] существует целая функция f, такая, что вне множества кружков с конечной суммой радиусов для некоторого натурального числа m_0 верно неравенство

$$|\ln|f(z)| - v(z)| \le m_0 \ln(1+|z|),$$

в частности, $f \notin \mathbb{C}[z]$. Следовательно, $\Phi = f\varphi$ – целая функция вида (2.2.19), принадлежащая подмодулю $\mathcal{J}(\varphi)$.

Покажем, что $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$, иными словами, что функцию Φ можно аппроксимировать в топологии пространства $\mathbf{P}_a$ функциями вида $p\varphi$, где p – многочлен.

Возможность такой аппроксимации вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Существует последовательность многочленов p_j, сходящаяся к функции f на вещественой оси в весовой норме $\|\cdot\|_V$ определяемой по формуле*

$$\|f\|_V = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{V(x)}, \tag{2.2.27}$$

где $V(x) = C_1(1+|x|)^{m_0+3}e^{v(x)}$, *постоянная* C_1 – *из неравенств* (2.2.26)
.

Доказательство леммы 2.1.

Используем схему из доказательства предложения 1.4, основанную на теоремах K и L из монографии [103].

В качестве веса W возьмем функцию $W(x) := C_1(1+|x|)^{m_0+1}e^{v(x)}$. По построению функции f имеем

$$\frac{|f(x)|}{W(x)} \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

Далее, рассуждая так же, как и в доказательстве преедложения 1.4, выводим, что функция f может быть приближена многочленами на вещественной оси в норме $\|\cdot\|_V$, где $V = (1+|x|)^2 W$.

Лемма доказана.

$\square$

Из определения функции V следует, что найдется постоянная $C_0 > 0$, такая, что на всей вещественной оси

$$|p_j(x)\varphi(x)| \le C_0(1+|x|)^{m_0+3}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Используя принцип Фрагмена-Линделефа, отсюда выводим, что во всей комплексной плоскости

$$|p_j(z)\varphi(z)| \le \tilde{C}_0(1+|z|)^{m_0+3}e^{b_0y^+ - a_0y^-}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Из этих оценок, учитывая, что пространство $\mathbf{P}_a$ относится к классу локально-выпуклых пространств типа (LN^*) и используя свойства таких пространств, установленные в работе [45], выводим, что найдется подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся в $\mathbf{P}_a$ к функции Φ.

$\square$

Замечание 2.1. Функция $\varphi_1 = (\sin \pi z)/(\sqrt{z}\sin \pi\sqrt{z})$ не принадлежит классу $\mathbf{P}_{a,0}$, а множество

$$\mathcal{J}(\varphi_1) \setminus \{p\varphi : \ \mathbb{C}[z]\}$$

содержит функцию $\frac{\sin \pi\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ и, следовательно, не пусто. Так что, в отличие от главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ может содержать функции $f\varphi$, $f \notin \mathbb{C}[z]$, и в том случае, когда порождающая функция φ не принадлежит классу $\mathbf{P}_{a,0}$. Тем не менее, из доказанной теоремы следует, что главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ с образующей $\varphi \notin \mathbf{P}_{a,0}$ может быть слабо локализуемым только в случае, если выполнены соотношения (2.1.2).

2.3 Примеры слабо локализуемых главных подмодулей

1. Положим

$$\psi(z) = \frac{s(z)}{s_1(z)s_1(-z)},$$

где функции s, s_1 определены в (2.2.1).

Пусть $a > \pi$, тогда s, $\psi \in \mathbf{P}_a$.

Докажем, что главный подмодуль $\mathcal{J}_\psi \subset \mathbf{P}_a$ слабо локализуем.

В силу оценок (2.2.2), (2.2.3) для функции s имеем

$$\mathcal{J}_s = \mathcal{J}(s) = \{ps : \ p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Поэтому, с учетом теоремы 1.3 из главы 1, для слабой локализуемости подмодуля $\mathcal{J}_\psi$ достаточно показать, что

$$s \in \mathcal{J}_\psi. \tag{2.3.1}$$

Это включение, в свою очередь, будет следовать из возможности аппроксимации в $\mathbf{P}_a$ функции s функциями вида $p\psi$, где p – многочлен.

Положим $f(z) = s_1(z)s_1(-z)$. Из оценки (2.2.2) следует, что на вещественной оси выполняются неравенства

$$|f(x)| \le \frac{c_0^2 e^{\pi\sqrt{|x|}}}{\pi^2(1+\sqrt{|x|})^2} \le c_1 e^{\pi\sqrt{|x|}}, \tag{2.3.2}$$

где $c_1 = \frac{c_0^2}{\pi^2}$.

Для того чтобы оценить функцию ψ, воспользуемся леммой 1.2 из главы 1. Из оценок (2.2.2), (1.2.28) и принципа максимума модуля нетрудно вывести, что на всей вещественной оси справедливо неравенство

$$|\psi(x)| \le C_1(1+|x|)e^{-\pi\sqrt{|x|}}, \tag{2.3.3}$$

где постоянная C_1 зависит только от $d_0 \in (0; 1/12)$.

Определим весовую функцию $W(x) = (1+|x|)e^{\pi\sqrt{|x|}}$. Принимая во внимание оценку (2.3.2), воспользуемся двумя теоремами из [103, VI.H] (см. теоремы K и L в доказательстве предложения 1.4, выше, в главе 1). Согласно этим теоремам, существует последовательность многочленов $\{p_m\}$, для которой

$$\|p_m - f\|_W = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|p_m(x) - f(x)|}{W(x)} \to 0, \quad m \to +\infty.$$

С учетом (2.3.3) получаем неравенства

$$|p_m(x)\psi(x)| \le C(1+|x|)^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Используем принцип Фрагмена-Линделефа и принимаем во внимание топологические свойства пространства $\mathbf{P}_a$ (критерий ограниченности множества в локально-выпуклом пространстве типа (LN^*), относительную компактность каждого ограниченного множества в $\mathbf{P}_a$ и полноту этого пространства). Заключаем, что последовательность функций $\{p_m\psi\}$ ограничена в $\mathbf{P}_a$ и найдется подпоследовательность $\{p_{m_j}\psi\}$ этой последовательности, сходящаяся в топологии $\mathbf{P}_a$ к функции s .

2. Пусть функция $\Phi \in \mathbf{P}_a$ такова, что

$$\mathcal{J}(\Phi) = \mathcal{J}_\Phi = \{p\Phi, \quad p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{2.3.4}$$

Тогда $\mathcal{J}_\Phi$ – слабо локализуемый подмодуль и, согласно теореме 2.2 , $\Phi \notin \mathcal{P}_0(a;b)$.

Отметим, что каждый слабо локализуемый подмодуль содержит функции Φ с таким свойством, обоснование этого утверждения проводится ниже, в начале доказательства теоремы 2.4.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{\mu_j\} \subset \mathcal{Z}_\Phi \setminus \{0\}$, для которой

$$\varliminf_{j\to\infty} \frac{|\mu_{j+1}|}{|\mu_j|} = \alpha_0 > 1. \tag{2.3.5}$$

Определим функции

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right), \qquad \varphi = \frac{\Phi}{f}.$$

Для $z \in \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{C}$ символом $\operatorname{dist}(z, M)$ обозначаем расстояние от точки z до множества M.

Теорема 2.3. *Функция $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$ и порождает слабо локализуемый главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три леммы.

Лемма 2.2. 1) *Для каждого натурального числа n существует представление функции f в виде произведения двух целых функций $f_{1,n}$ и $f_{2,n}$, таких, что при всех z, $\operatorname{dist}(z, \mathcal{Z}_f) \ge \delta > 0-$, справедливо неравенство*

$$\big|\ln|f_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|f(z)|\big| \le A\ln(e+|z|), \tag{2.3.6}$$

где A – положительная постоянная, зависящая только от функции f и величиины δ.

2) *Имеется подпоследовательность $\{f_{2,n_k}\varphi\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся в топологии пространства $\mathbf{P}_a$ к функции $\widetilde{\Phi}$, причем $\left(\Phi/\widetilde{\Phi}\right)$ — многочлен.*

Доказательство. 1) Положим

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \{\mu_j \in \mathcal{Z}_f : \ |\operatorname{Im}\mu_j| < 1\}, \quad \widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{Z}_f \setminus \widetilde{\mathcal{M}},$$
$$\tilde{f}(z) = \prod_{\mu_j \in \widetilde{\mathcal{M}}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right), \qquad \hat{f}(z) = \prod_{\mu_j \in \widehat{\mathcal{M}}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right).$$

Ясно, что $f = \tilde{f}\hat{f}$.

Для получения представления $\tilde{f} = \tilde{f}_{1,n}\tilde{f}_{2,n}$ воспользуемся следующей теоремой.

Теорема M [67, теорема 2]. *Пусть $\{z_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ – нули целой функции v, пронумерованные в порядке возрастания $\operatorname{Re} z_k$, причем*

$$\operatorname{Re} z_0 = \min_k \{\operatorname{Re} z_k, \ \operatorname{Re} z_k \geq 0\}.$$

Если все точки z_k лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1$, причем $|\operatorname{Re} z_k| > 1$, и в каждом квадрате

$$\Pi_j = \{z : \quad |\operatorname{Im} z| < 1, \ 2j - 1 \leq \operatorname{Re} z < 2j + 1\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

находится не более одной точки z_k, то функция v представима в виде произведения целых функций v_1, v_2 так, что

$$|\ln|v_1(z)| - \ln|v_2(z)|| \leq C_1 \ln^+|z| + C_2 \ln^+ \frac{1}{d(z)} + C_3,$$

где $d(z)$ – расстояние от точки z до множества нулей функции v, а $C_i > 0$ – абсолютные постоянные (не зависящие от функции v).

Отбрасывая, если необходимо, конечное число нулей функции $\tilde{f}$, а затем перенумеровав оставшиеся нули в порядке возрастания их вещественных частей, видим, что последовательность $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{\mu}_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет условиям теоремы M. Согласно этой теореме, при всех

$$z, \quad \operatorname{dist}(z, \widetilde{\mathcal{M}}) \geq \delta > 0,$$

функция

$$\tilde{f}_{1,n}(z) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(1 - \frac{z}{\tilde{\mu}_{2^{n+1}k}}\right) \left(1 - \frac{z}{\tilde{\mu}_{2^{n+1}k+1}}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3.7}$$

удовлетворяет соотношению

$$\Big|\ln|\tilde{f}_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|\tilde{f}(z)|\Big| \le \tilde{A}\ln(e+|z|), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.3.8}$$

где постоянная $\tilde{A} > 0$ зависит только от δ; а выбор индексов $2^{n+1}k$, $(2^{n+1}k+1)$ в формуле (2.3.7) произведен согласно рассуждениям, проводимым при доказательстве теоремы M [67, теорема 2].

Аналогичное утверждение для функции $\hat{f}$ получим, используя еще один результат работы [67]. Для этого напомним необходимые обозначения. Пусть

$$P_k = \{z:\ 1\le \operatorname{Im} z\le 2^k+1,\ 0\le \operatorname{Re} z\le 2^k\}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Тогда разность $P_k\setminus P_{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, состоит из трех квадратов, конгруэнтных P_{k-1}. Символами P_k^m, $m=1,2,\ldots,12$, обозначены эти три квадрата, а также симметричные им относительно обеих осей и начала координат. Принадлежность граничных отрезков и вершин определяется таким образом, чтобы квадраты P_k^m попарно не пересекались и покрывали все множество $\{z:\ |\operatorname{Im} z|\ge 1\}$.

Теорема N [67, теорема 3]. *Пусть $\{z_k\}$, $k\in\mathbb{Z}$ – нули целой функции v, пронумерованные в порядке возрастания $|z_k|$. Предположим, что $|\operatorname{Im} z|\ge 1$ и в каждом квадрате P_k^m лежит не более одного нуля функции v. Тогда функция v представляется в виде произведения целых функций v_1, v_2 так, что*

$$|\ln|v_1(z)| - \ln|v_2(z)|| \le C_1\ln^+|z| + C_2\ln^+\frac{1}{d(z)} + C_3,$$

где $d(z)$ – расстояние от точки z до множества нулей функции v, а C_i – абсолютные постоянные (не зависящие от функции v).

Фиксируем число $\alpha\in(1;\alpha_0)$. Отбрасывая, если необходимо, конечное число нулей $\hat{\mu}_k$ функции $\hat{f}$, а затем перенумеровав оставшиеся нули в порядке возрастания $|\hat{\mu}_k|$, с учетом условия (2.3.5), будем иметь

$$|\hat{\mu}_{k+1}| > \alpha|\hat{\mu}_k|, \quad k=1,2,\ldots$$

Положим

$$m = \left[\log_\alpha\sqrt{5}\right]+1.$$

Нетрудно проверить, что все функции

$$\hat{f}_j(z) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\hat{\mu}_{mk+j}}\right), \quad j=1,\ldots,m,$$

удовлетворяют условиям теоремы N. Применив к каждой функции

$$\hat{f}_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

эту теорему n раз, получим представление

$$\hat{f}_j = \hat{f}_{j,1,n}\hat{f}_{j,2,n},$$

причем

$$\left|\ln|\hat{f}_{j,1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|\hat{f}_j(z)|\right| \le \widehat{A}\ln(e + |z|), \quad \operatorname{dist}(z, \widehat{\mathcal{M}}) \ge \delta, \tag{2.3.9}$$

где постоянная $\widehat{A} > 0$ зависит только от δ и f. Полагая

$$\hat{f}_{1,n} = \hat{f}_{1,1,n} \ldots \hat{f}_{m,1,n}, \quad \hat{f}_{2,n} = \frac{\hat{f}}{\hat{f}_{1,n}},$$

получим нужную факторизацию

$$\hat{f} = \hat{f}_{1,n}\hat{f}_{2,n}.$$

Из оценок (2.3.8), (2.3.9) видим, что для функций

$$f_{1,n} = \tilde{f}_{1,n}\hat{f}_{1,n}, \quad f_{2,n} = \frac{f}{f_{1,n}}$$

справедливо первое утверждение леммы.

2) Из соотношений $f = f_{1,n}f_{2,n}$ и (2.3.6) следует, что для всех натуральных n и всех $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{dist}(z, \mathcal{Z}_f) \ge \delta$, верны оценки

$$|f_{2,n}(z)\varphi(z)| \le (e + |z|)^{[A]+1}|\Phi(z)|.$$

Последовательность $\{f_{2,n}\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна в пространстве $\mathbf{P}_a$. И значит, существует подпоследовательность $\{f_{2,n_k}\varphi\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся в топологии $\mathbf{P}_a$ к некоторой функции $\widetilde{\Phi}$, причем индикатор этой функции совпадает с равными между собой индикаторами функций Φ и φ. Соответствующая подпоследовательность целых функций минимального типа при порядке 1

$$f_{1,n_k} = \frac{\Phi}{f_{2,n_k}\varphi}$$

сходится к целой функции $(\Phi/\widetilde{\Phi})$, которая имеет минимальный тип при порядке 1. Из оценок (2.3.6) предельным переходом получаем полиномиальную оценку сверху для $|\Phi/\widetilde{\Phi}|$ на вещественной прямой. Применяя следствие из теоремы Фрагмена-Линделефа [105, §6.1], заключаем, что $(\Phi/\widetilde{\Phi})$ – многочлен.

$\square$

Пусть $n(r) = \sum\limits_{|\mu_j|<r} 1$ – считающая функция последовательности $\mathcal{Z}_f$,

$$N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau,$$

$$M(r) = \max_{|z|=r} |\omega(z)|, \quad m(r) = \min_{|z|=r} |\omega(z)|.$$

Из условия (2.3.5) на последовательность $\mathcal{Z}_f$, следует, что

$$n(r) \leq C_0 \ln(1+r), \quad r \geq 0, \tag{2.3.10}$$

где C_0 – положительная постоянная. Из леммы 3.5.8 монографии [79], с учетом (2.3.10) и формулы Йенсена (см., например, [79, §1.2]) получаем двойное неравенство

$$N(r) \leq M(r) \leq N(r) + C_0 \ln(1+r). \tag{2.3.11}$$

Лемма 2.3. 1) *При всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место оценка сверху*

$$\ln|f(z)| \leq N(|z|) + C_0 \ln(1+|z|). \tag{2.3.12}$$

2) *Для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и всех $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{dist}(z, \mathcal{Z}_f) \geq \delta$, верна оценка снизу*

$$\ln|f(z)| \geq (1-\varepsilon)N(|z|) - C_1 \ln(1+|z|) - C_{2,\varepsilon}, \tag{2.3.13}$$

где постоянная $C_{2,\varepsilon} > 0$ зависит от $\mathcal{Z}_f$, δ и ε, а постоянная $C_1 > 0$ – только от $\mathcal{Z}_f$.

Доказательство. 1) Нужная оценка (2.3.12) следует из правого неравенства в (2.3.11).
2) Известно, что для целой функции, нулевое множество которой удовлетворяет условию (2.3.10), соотношение $\ln m(r) \sim \ln M(r)$ выполняется, когда $r \to \infty$ по множеству единичной относительной меры [79, теорема 3.6.1]. Исключительное множество значений r может быть покрыто счетным множеством непересекающихся, в силу (2.3.5), интервалов, центрированных с множеством $\{|\mu_j|\}$ (то есть каждый интервал содержит ровно одну точку $|\mu_j|$). Это множество интервалов имеет нулевую относительную длину. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что существует убывающая последовательность положительных чисел δ_j, j=1,2,..., такая что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\ln m(r) \geq (1-\varepsilon)\ln M(r), \quad r > r_\varepsilon, \quad r \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} \left((1-\delta_j)|\mu_j|; (1+\delta_j)|\mu_j|\right).$$

Из (2.3.5) и (2.3.10) нетрудно вывести, что

$$N(r) \le N((1-\delta_j)r) + (C_0 \ln 2 + 1)\ln(1+r) + \tilde{C}_{2,\varepsilon}, \quad r > 0,$$

где постоянная $\tilde{C}_{2,\varepsilon} > 0$ зависит только от $\mathcal{Z}_f$, δ и ε.

Требуемая оценка снизу (2.3.13) получается стандартными методами из последних двух оценок и левого неравенства в (2.3.11). $\square$

Лемма 2.4. *Для каждого натурального n функция $f_{2,n}\varphi$ содержится в подмодуле $\mathcal{J}_\varphi$.*

Доказательство. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ имеем, в силу (2.3.6),

$$\ln|f_{2,n}(z)| \le (1-2^{-n})\ln|f(z)| + A\ln(e+|z|), \quad \operatorname{dist}(z, \mathcal{Z}_f) \ge \delta. \quad (2.3.14)$$

С учетом (2.3.5) и (2.3.12), отсюда получаем оценку

$$\ln|f_{2,n}(z)| \le (1-2^{-n})N(|z|) + \tilde{A}\ln(e+|z|), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.3.15)$$

Рассмотрим весовую функцию

$$\widetilde{V}(x) = (e+|x|)^{\tilde{A}+1}\exp\big((1-2^{-n})N(|x|)\big) \ge 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Эта функция четная, выпуклая по $\ln|x|$, для любого $k = 0, 1, \dots$ верно соотношение

$$|x|^k = o(\widetilde{V}(x)), \quad |x| \to +\infty.$$

Для функции $f_{2,n}$ из оценки (2.3.15) следует, что

$$\frac{|f_{2,n}(x)|}{\widetilde{V}(x)} \to 0, \quad |x| \to +\infty.$$

Рассуждая точно также, как при доказательстве леммы 2.1, выводим, что существует последовательность многочленов $\{p_j\}$, сходящаяся к функции $f_{2,n}$ в весовой норме $\|\cdot\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\cdot|}{V(x)}$, где $V(x) = (1+|x|)^2\widetilde{V}(x)$.

Положим $v(x) = \ln V(x)$,

$$P_v(z) = \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau)}{(\tau-x)^2+y^2}\mathrm{d}\,\tau$$

– интеграл Пуассона от функции v, $z = x + \mathrm{i}y$. Из условия (2.3.5) нетрудно вывести, что функция v принадлежит классу *медленно меняющихся канонических весов*, введенных в монографии [1, §1.3]. Поэтому (см. [1, §1.4]) функция P_v гармонична в верхней и нижней полуплоскостях, непрерывна и субгармонична во всей комплексной плоскости, удовлетворяет оценке

$$P_v(z) \ge v(|z|), \quad z \in \mathbb{R},$$

и соотношению

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{P_v(z)}{v(|z|)} = 1. \tag{2.3.16}$$

Так как $\mathbf{P}_a$ –локально-выпуклое пространство типа (LN^*), для того, чтобы последовательность $p_j\varphi$ была ограничена в нем, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена по норме из формулы (0.3.8) при некотором $k \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание оценку (2.3.13), определение веса V, соотношение (2.3.16) и свойства функции $N(r)$, вытекающие из условия (2.3.5), и используя теорему Фрагмена-Линделефа, устанавливаем, что

$$|p_j(z)\varphi(z)| \le (e + |z|)^{\mathrm{const}} \exp(d_\varphi y^+ - c_\varphi y^-),$$

где $c_\varphi = -h_\varphi(-\pi/2)$ $d_\varphi = h_\varphi(\pi/2)$. Последняя оценка эквивалентна ограниченности последовательности $\{p_j\varphi\}$ по норме из формулы 0.3.8) при некотором $k \in \mathbb{N}$. Из этого факта, опять используя свойства локально-выпуклых пространств типа (LN^*), выводим, что найдется подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся в $\mathbf{P}_a$ к функции $f_{2,n}\varphi$.

□

Доказательство теоремы 2.3.

Включение $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$ очевидно. Из п. 2) леммы 2.2 и леммы 2.4 следует, что

$$\Phi \in \mathcal{J}_\varphi. \tag{2.3.17}$$

В силу (2.3.4) имеем $\mathcal{J}(\Phi) \subset \mathcal{J}_\varphi$. Согласно теореме 1.3 из главы 1, это соотношение, эквивалентно слабой локализуемости подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$.

□

2.4 Достаточное условие слабой локализуемости главного подмодуля

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$. Не ограничивая общности, можем считать, что $0 \notin \mathcal{Z}_\varphi$. Положим

$$U_*(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

где $M_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^n\varphi(x)|$, $n = 0, 1, \ldots$, и пусть $u_*(x) = \ln U_*(x)$. Отметим, что, в силу включения $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, последовательность $\{M_n\}$ – неквазианалитическая, функция $U_*(x)$ – всюду конечная, четная, возрастающая при $x \geq 0$ ($x \leq 0$), а функция $u_*(e^t)$ выпукла при всех $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что

$$\ln|\varphi(x)| \leq -u_*(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.4. *Предположим, что существует постоянная $L_0 > 0$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется $x' \in \mathbb{R}$ со свойствами $|x - x'| \leq L_0 u_*(x)$ и $\ln|\varphi(x')| \geq -L_0 u_*(x')$.*

Тогда подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем.

Доказательство теоремы 2.4.

Положим $H(z) = h_\varphi(\arg z)|z|$ и обозначим через $V(z)$ наибольшую субгармоническую миноранту функции $(H(z) - \ln|\varphi(z)|)$. Согласно теореме 5 из работы [64] существует целая функция f, удовлетворяющая оценке

$$|V(z) - \ln|f(z)|| \leq C_1 \ln(e + |z|), \quad z \notin E, \tag{2.4.1}$$

где E – множество кружков с суммой радиусов, меньшей, чем $1/2$ (после отбрасываения конечного числа кружков), C_1 – положительная постоянная. Функция f отлична от многочлена и имеет минимальный тип при порядке 1, а функция $\Phi = f\varphi$ принадлежит подмодулю $\mathcal{J}(\varphi)$.

Покажем, что

$$\mathcal{J}(\Phi) = \mathcal{J}_\Phi = \{p\Phi, \quad p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{2.4.2}$$

Предположим противное: $\mathcal{J}_a(\Phi) \neq \emptyset$, то есть существует $\Psi = f_0\Phi \in \mathcal{J}(\Phi)$ такая, что f_0 – целая функция минимального экспоненциального типа, отличная от многочлена. Имеем

$$\ln|f_0(x)| + \ln|f(x)| + \ln|\varphi(x)| \leq C_2 \ln(e + |x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $C_2 > 0$ – некоторая постоянная. Поделив f_0 на многочлен q_0 степени $([C_2] + 1)$, множество корней которого является частью нулевого множества функции f_0, получим целую функцию $f_1 = f_0/q_0$, такую, что $\Psi_1 = f_1\Phi \in \mathcal{J}_a(\varphi)$ и

$$|f_1(x)f(x)\varphi(x)| \leq C_3, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $C_3 > 0$ – некоторая постоянная. Применяя теорему Фрагмена-Линделефа и учитывая, что $f_1 f$ – целая функция минимального экспоненциального типа, выводим оценку

$$|f_1(z)f(z)\varphi(z)| \leq C_3 e^{H(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому
$$\ln|f_1(z)| + \ln|f(z)| \le \widetilde{C}_3 + V(z), \quad z \in \mathbb{C}$$
Отсюда и из (2.4.1), получаем, что
$$\ln|f_1(x)| \le (\widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_3)\ln(e+|x|), x \in \mathbb{R}.$$
Так как f_1 – целая функция нулевого экспоненциального типа, используя следствие из теоремы Фрагмена-Линделефа (см. [105, §6.1, Problem 3]) , из последней оценки получаем, что f_1 – многочлен, что противоречит включению $\Psi_1 \in \mathcal{J}_a(\Phi)$.

Из соотношений (2.4.2) и основного критерия слабой локализуемости (теорема 1.3 в главе 1) следует, что для доказательства слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ достаточно убедиться в том, что $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$. При этом, не ограничивая общности, будем считать, что $\Phi(0) = 1$.

Заметим, что, так как функция $|\varphi(z)|$ ограничена в полосе
$$|\mathrm{Im}\, z| \le \frac{1}{2},$$
из определения функции V и соотношения (2.4.1) в этой полосе, но вне исключительного множества E, справедлива оценка снизу
$$\ln|f(z)| \ge C_4 - C_1\ln(e+|z|), \tag{2.4.3}$$
где $C_4 > 0$ – постоянная.

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.5. *В условиях теоремы* 2.4
$$u_*(x) - a\ln(e+|x|) \le V(x) \le Au_*(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4.4}$$
где постоянные $a \ge 0$, $A \ge 1$ *не зависят от* x.

Доказательство леммы 2.5.

Определим субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию $u(z) := u_*(|z|)$. Из определения u_* вытекает оценка
$$u(x) + \ln|\varphi(x)| \le 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4.5}$$
Функция φ, как и все элементы пространства $\mathbf{P}_a$, имеет вполне регулярный рост во всей плоскости, а функция u зависит только от $|z|$. Применяя теорему о сложении индикаторов при умножении на функцию вполне регулярного роста, из (2.4.5) выводим, что u имеет минимальный тип при порядке 1.

Согласно теореме 5 из работы [64] существует целая функция f_0, такая, что
$$|u(z) - \ln|f_0(z)|| \leq c_0 \ln(e + |z|), \quad z \notin \widetilde{E},$$
где $\widetilde{E}$ – множество кружков с конечной суммой радиусов, c_0 – положительная постоянная. Отсюда нетрудно вывести оценку

$$|f_0(x)\varphi(x)| \leq c_1(e + |x|)^{[c_0]+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

из которой, применяя принцип Фрагмена-Линделефа и учитывая определение функции V, получим

$$\ln|f_0(z)| \leq V(z) + c_2 \ln(e + |z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, верно левое неравенство в (2.4.4):

$$u_*(x) \leq V(x) + a \ln(e + |x|), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4.6}$$

где постоянная $a \geq c_0 + c_2$ не зависит от x.

Докажем правое неравенство в (2.4.4) — оценку сверху для функции V. Для произвольной точки $x_0 > 0$ найдем точку $x \in (0; x_0)$ со свойством

$$x + L_0 u_*(x) = x_0.$$

А для x – точку x', такую, что

$$|x - x'| \leq L_0 u_*(x), \quad \ln|\varphi(x')| \geq -L_0 u_*(x').$$

Применим теорему об оценке снизу модуля аналитической функции в круге (см. [29, гл. 1, §8]) к функции $g(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi(x')}$ в круге $|z - x'| \leq R$ с $R = 3L_0 u_*(x)$. Учитывая, что всюду в комплексной плоскости верна оценка
$$|\varphi(z)| \leq M_0 e^{c_0|\operatorname{Im} z|},$$
где $c_0 = \max(h_\varphi(-\pi/2), h_\varphi(\pi/2))$, h_φ – индикатор функции φ, получим, что на некоторой окружности $|z - x'| = R'$ радиуса $R' \in (2L_0 u_*(x); 3L_0 u_*(x))$ имеет место оценка снизу

$$\ln|\varphi(z)| \geq -C_1 u_*(x'),$$

где C_1 – положительная постоянная, не зависящая от x_0 и z. Следовательно, в круге $|z - x'| \leq R'$ будет

$$V(z) \leq \max_{|\xi - x'| = R'} (H(\xi) - \ln|\varphi(\xi)|) \leq c_0 R' + C_1 u_*(x') \leq A u_*(x_0),$$

где $A = 9c_0L_0 + C_1$, $H(z) = h_\varphi(\arg z)|z|$. Так как $|x_0 - x'| < R'$, отсюда получаем требуемую оценку

$$V(x_0) \le Au_*(x_0).$$

Для $x_0 < 0$ доказательство аналогичное.

$\square$

Лемма 2.6. *Предположим, что $\psi \in \mathcal{J}(\varphi)$ и функция $g = \psi/\varphi$ удовлетворяет оценке*

$$\ln|g(x)| \le u_*(x) + c_1 \ln(1 + |x|) + c_2, \quad x \in \mathbb{R},$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные. Тогда $\psi \in \mathcal{J}_\varphi$.

Доказательство леммы 2.6.

Положим $W(x) = e^{u_*(x) + c_1 \ln(1+|x|) + c_2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Будем рассуждать так же, как при доказательстве в леммы 2.1: используем результаты П. Кусиса и де Бранжа [103, VI.H] (теоремы K и L в доказательстве предложения 1.4 в главе 1). При помощи этих рассуждений убеждаемся в том, что существует последовательность многочленов p_j, сходящаяся к функции g в весовой норме

$$\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{(1 + |x|)^3 W(x)}.$$

Учитывая определения функции W, получим

$$\ln|p_j(x)\varphi(x)| \le C_0 \ln(e + |x|), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N},$$

где постоянная $C_0 > 0$ не зависит от x и j. Применяя следствие теоремы Фрагмена-Линделефа [105, §6.1, Problem 3], выводим оценки

$$\ln|p_j(z)\varphi(z)| \le H(z) + \widetilde{C}_0 \ln(e + |z|), \quad z \in \mathbb{C}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Из этих оценок и топологических свойств пространства $\mathbf{P}_a$, как локально-выпуклого пространства типа (LN^*), следует, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{p_j\varphi\}$ сходится в топологии пространства $\mathbf{P}_a$ к функции ψ. Поэтому верно требуемое включение $\psi \in \mathcal{J}_\varphi$.

$\square$

Лемма 2.7. 1) *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует представление функции f в виде произведения двух целых функций $f_{1,n}$ и $f_{2,n}$, таких, что* *при всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \le 1/2$, но вне исключительного множества E_0, для любого $p \in [1; |z|/2]$ справедливо неравенство*

$$\bigl|\ln|f_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|f(z)|\bigr| \le \frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + B\ln\left(e + |z|\right) + Me^p, \tag{2.4.7}$$

где $H(z) = h_\Phi(\theta)r$, $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, h_Φ – индикатор функции Φ, положительные постоянные A_0, B, M не зависят от z, p, n, множество E_0 можно покрыть кружками $K(\mu_j, |\mu_j|^{-2})$ с центрами в нулях μ_j функции f и радиуса $|\mu_j|^{-2}$.
2) Существует подпоследовательность $\{f_{2,n_k}\varphi\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся в топологии пространства $\mathbf{P}_a$ к функции $\widetilde{\Phi}$, которая отличается от функции Φ на полиномиальный множитель.

Замечание 2.2. Так как ряд $\sum\limits_{\mu_j \in \Lambda_\omega} \frac{1}{|\mu_j|^2}$ сходится, отбросив, если это необходимо, конечное число точек μ_j, всюду далее считаем, что объединение исключительных множеств E_0 и E (см. (2.4.1)) можно покрыть кружками с суммой радиусов меньшей, чем $\frac{1}{2}$.

Доказательство леммы 2.7.

1) Воспользуемся следующей теоремой о факторизации из работы [66, §1, основная теорема]:

Теорема R. *Пусть g, F – целые функции, причем F делится на g, $F(0) = 1$, и выполняется оценка*

$$\ln|F(z)| \le H(z),$$

где H – некоторая липшицева функция:

$$|H(z') - H(z'')| \le \sigma|z' - z''|, \quad z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Тогда g представляется в виде произведения двух целых функций, g_1 и g_2, так, что для всех z, $|\operatorname{Im} z| \le 1/2$, и p, $p \in [1; |z|/2]$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}|\ln|g_1(z)| - \ln|g_2(z)|| \le \frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|F(z)|\right) + \widetilde{B}\ln^+|z| + \\ + C\ln^+\frac{1}{d(z, \Lambda_f)} + D + Me^p.\end{aligned}$$

Здесь $d(z, \mathcal{Z}_g)$ – расстояние от точки z до множества нулей функции g, A_0, $\widetilde{B}$, C, D, M – положительные постоянные, не зависящие от z и p.

Положим $g = f$, $F = \Phi$, $H(z) = h_{\Phi}(\theta)r$, $z = re^{i\theta}$ — как в условии доказываемой леммы 2.7. Применяя теорему R и учитывая, что f — целая функция нулевого экспоненциального типа, получаем представление функции f в виде произведения двух целых функций, $f_{1,1}$ и $f_{2,1}$, причем для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \le 1/2$, но вне множества E_0, будет

$$|\ln|f_{1,1}(z)| - \ln|f_{2,1}(z)|| \le \frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + \\ + B\ln\left(e + |z|\right) + Me^p, \quad (2.4.8)$$

где $E_0 = \bigcup\limits_{\mu \in \mathcal{Z}_f} K(\mu, |\mu|^{-2})$, $\mathcal{Z}_f$ — множество нулей функции f, положительные постоянные A_0, B, M не зависят от z, p.

Из (2.4.8) и соотношения

$$\ln|f| = \ln|f_{1,1}| + \ln|f_{2,1}|,$$

для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \le 1/2$, но вне множества E_0, выводим оценку

$$\left|\ln|f_{1,1}(z)| - \frac{1}{2}\ln|f(z)|\right| \le \\ \le \frac{1}{2}\left(\frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + B\ln\left(e + |z|\right) + Me^p\right). \quad (2.4.9)$$

Применяя теперь теорему R к функции $g = f_{1,1}$ с теми же F, H, что и выше, получим представление

$$f_{1,1} = f_{1,2}\tilde{f}_{2,2},$$

в котором целая функция $f_{1,2}$ удовлетворяет оценке

$$\left|\ln|f_{1,2}(z)| - \frac{1}{2}\ln|f_{1,1}(z)|\right| \le \\ \le \frac{1}{2}\left(\frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + B\ln\left(e + |z|\right) + Me^p\right), \ |\operatorname{Im} z| \le 1/2, \ z \notin E_0.$$

Из этой оценки и (2.4.9) следует, что для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \le 1/2$, но вне множества E_0,

$$\left|\ln|f_{1,2}(z)| - \frac{1}{2^2}\ln|f(z)|\right| \le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \times \\ \times \left(\frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + B\ln\left(e + |z|\right) + Me^p\right). \quad (2.4.10)$$

Продолжая этот процесс, через n шагов получим представление функции f в виде произведения двух целых функций $f_{1,n}$ и $f_{2,n} = f_{2,1}\tilde{f}_{2,2}\dots\tilde{f}_{2,n}$, причем для всех z, лежащих в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$, но вне множества E_0, будет выполняться требуемое соотношение (2.4.7).

2) В силу (2.4.7) для функции $f_{2,n} = f/f_{1,n}$ верна оценка

$$\big|\ln|f_{2,n}(z)| - (1-2^{-n})\ln|f(z)|\big| \le \frac{A_0}{p}\,(H(z) - \ln|\Phi(z)|) + \\ + B\ln(e+|z|) + Me^p, \quad |\mathrm{Im}\, z| \le 1/2, \quad z \notin E_0.$$

При $p = A_0$ (ясно, что в теореме R можно считать $A_0 \ge 1$) получим

$$\ln|f_{2,n}(z)\varphi(z)| \le \big(H(z) - 2^{-n}\ln|f(z)|\big) + B\ln(e+|z|) + Me^{A_0},$$

если $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$, $z \notin E_0$.

Из этой оценки, оценки (2.4.3), учитывая определение функции H, выводим, что

$$\ln|f_{2,n}(z)\varphi(z)| \le B_1\ln(e+|z|), \quad |\mathrm{Im}\, z| \le 1/2, \quad z \notin E_0\bigcup E,$$

где $B_1 > 0$ – постоянная, не зависящая от n. В силу малости множеств E и E_0 (см. замечание 2.2) последняя оценка продолжается во всю полосу $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$ (с другой, но тоже не зависящей от n и z, постоянной B_2 вместо B_1). Откуда, с учетом следствия из теоремы Фрагмена-Линделефа [105, §6.1] и топологических свойств пространства $\mathbf{P}_a$ [45, теорема 2 и ее следствия], заключаем, что множество $\{f_{2,n}\varphi\}$ относительно компактно в этом пространстве. И значит, существует подпоследовательность $f_{2,n_k}\varphi$, сходящаяся в топологии $\mathbf{P}_a$ к некоторой функции $\widetilde{\Phi}$, причем индикатор этой функции совпадает с равными между собой индикаторами функций Φ и φ. Соответствующая подпоследовательность целых функций минимального экспоненциального типа $\omega_{1,n_k} = \Phi/(f_{2,n_k}\varphi)$ сходится к целой функции $\Phi/\widetilde{\Phi}$, которая имеет минимальный тип при порядке 1. Из оценок (2.4.7) предельным переходом получаем полиномиальную оценку сверху для $|\Phi/\widetilde{\Phi}|$ в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$. Опять применяя следствие из теоремы Фрагмена-Линделефа [105, §6.1], заключаем, что $\Phi/\widetilde{\Phi}$ – многочлен.

□

Замечание 2.3. Из рассуждений, приведенных в начале доказательства теоремы (перед леммой 2.5) и второго утверждения леммы 2.7 следует, что для слабой локализуемости подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ достаточно, чтобы имели место включения $f_{2,n}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.8. *Если* $n_0 \in \mathbb{N}$ *– фиксированное число, удовлетворяющее условию* $2^{-n_0} < A^{-1}$, *где постоянная* A *– из леммы* 2.5, то $\varphi_1 = f_{1,n_0}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$.

Доказательство леммы 2.8.

Из (2.4.1), (2.4.3), (2.4.7) выводим оценку для f_{1,n_0} :

$$\ln|f_{1,n_0}(z)| \le \left(2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)(H(z) - \ln|\varphi(z)|) + B_0 \ln(e + |z|) + Me^p,$$
$$|\operatorname{Im} z| \le 1/2, \quad z \notin E \bigcup E_0,$$

где положительные постоянные A_0, B_0, M не зависят от $z, n_0, p \in [1; |z|/2]$. Учитывая, что $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, из этих оценок получаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется положительная постоянная B_ε (не зависящая от n_0 и z) такая, что

$$\ln|f_{1,n_0}(z)| \le \left(2^{-n_0} + \varepsilon\right)(H(z) - \ln|\varphi(z)|) + B_\varepsilon, \quad |\operatorname{Im} z| \le 1/2, \quad z \notin E \bigcup E_0.$$

Отсюда, используя принцип Фрагмена-Линделефа для субгармонических функций [105, §7.3], получим, что

$$\ln|f_{1,n_0}(z)| \le \left(2^{-n_0} + \varepsilon\right) V(z) + \widetilde{B}_\varepsilon, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этой оценки, условия на n_0 и леммы 2.5 следует, что к функции f_{1,n_0} применима лемма 2.6, и значит, $f_{1,n_0}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$.

□

Продолжим **доказательство теоремы** 2.4. Применив лемму 2.7 к функции $\nu = \Phi/\varphi_1$ вместо f, получим для каждого $n \in \mathbb{N}$ представление $\nu = \nu_{1,n}\nu_{2,n}$.

Покажем, что функция $\varphi_2 = \nu_{1,n_0}\varphi_1$ принадлежит подмодулю $\mathcal{J}_\varphi$, если число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое же, как в лемме 2.8. Обозначим символом V_1 наибольшую субгармоническую миноранту функции $(H - \ln|\varphi_1|)$. В полосе $|\operatorname{Im} z| \le 1/2$, но вне множества $E \bigcup E_0$, в силу (2.4.1), (2.4.3), (2.4.7), для всех $p \in [1; |z|/2]$ выполняется оценка

$$V_1(z) \le \left(1 - 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)(H(z) - \ln|\varphi(z)|) + B_2 \ln(e + |z|) + Me^p,$$

где положительные постоянные A_0, B_2, M не зависят от p и z. Из этой оценки, используя принцип Фрагмена-Линделефа для субгармонических функций [105, §7.3], нетрудно вывести, что

$$V_1(z) \le \left(1 - 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right) V(z) + B_3 \ln(e+|z|) + Me^p, \quad z \in \mathbb{C}, \quad p \in [1; |z|/2], \tag{2.4.11}$$

где постоянные A_0, B_3, M по-прежнему не зависят от p и z.

Для того чтобы оценить V_1 снизу через V, заметим, что

$$\ln |f_{2,n_0}(z)| \le H(z) - \ln |\varphi_1(z)| + \mathrm{const} \tag{2.4.12}$$

(без ограничения общности считаем, что $|\Phi(z)| \le \mathrm{const}\, e^{H(z)}$). Используя (2.4.1), (2.4.3) и лемму 2.7, из (2.4.12) получим соотношение

$$\frac{p}{A_0}\big((1-2^{-n_0})V(z) + \ln |\varphi_1(z)|\big) + \ln |\varphi(z)| - \frac{Mpe^p}{A_0} \le B_4 \ln(e+|z|),$$
$$|\mathrm{Im}\, z| \le \frac{1}{2}, \quad z \notin E_0 \bigcup E,$$

где $p \in [1; |z|/2]$ – произвольное, а положительные постоянные A_0, M (те же, что и выше), B_4 не зависят от p, z. Учитывая, что V имеет минимальный тип при порядке 1, а обе функции, $\ln |\varphi_1|$ и $\ln |\varphi|$, всюду в $\mathbb{C}$ мажорируются функцией $(H + \mathrm{const})$, и также малый размер исключительных множеств E_0 и E, из последней оценки и принципа Фрагмена-Линделефа выводим, что

$$\left(1 - 2^{-n_0} - \frac{A_0}{p}\right) V(z) \le V_1(z) + B_5 \ln(e+|z|) + Me^p, \quad z \in \mathbb{C}, \quad p \in [1; |z|/2], \tag{2.4.13}$$

где, как и выше, A_0, M, B_5 не зависят от z и p.

Выбирая в оценках (2.4.11) и (2.4.13) достаточно большое значение p и принимая во внимание лемму 2.5 для функции V, убеждаемся в том, что

$$\tilde{u}(|x|) - \tilde{a}\ln(e+|x|) \le V_1(x) \le \tilde{A}\tilde{u}(x) + \tilde{a}\ln(e+|x|), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4.14}$$

где $\tilde{u}(e^t)$ – наибольшая выпуклая миноранта функции $\min(V_1(e^t), V_1(-e^t))$, постоянные $\tilde{a} \ge 0$, $\tilde{A} \ge A$ не зависят от x, но зависят от выбранного p. При этом p выбираем по фиксированному $n_0 \in \mathbb{N}$ из леммы 2.8 столь большим, что $2^{-n_0} < \tilde{A}^{-1}$.

Далее, в силу леммы 2.7 для всех z, лежащих в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$, но вне множества E_0, будет

$$\big|\ln |\nu_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln |\nu(z)|\big| \le \frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln |\Phi(z)|\right) + B\ln(e+|z|) + Me^p, \tag{2.4.15}$$

где $p \in [1; |z|/2]$ и положительные постоянные A_0, B, M такие же, как и в лемме 2.7.

Из (2.4.15), с учетом (2.4.1), (2.4.3), (2.4.11), получим оценку

$$\ln|\nu_{1,n_0}(z)| \le \left(\left(1 - 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right) 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)(H(z) - \ln|\varphi(z)|) + \\ + B_6 \ln(e + |z|) + 2Me^p,$$

если $\operatorname{Im}|z| \le 1/2$, $z \notin E_0 \bigcup E$.

Из этой оценки, принципа Фрагмена-Линделефа для субгармонических функций, с учетом оценки (2.4.13), выводим, что

$$\ln|\nu_{1,n_0}(z)| \le \left(\left(1 - 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right) 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)\left(1 - 2^{-n_0} - \frac{A_0}{p}\right)^{-1} V_1(z) + \\ + B_7 \ln(e + |z|) + 3Me^p, \quad z \in \mathbb{C},$$

где положительные постоянные A_0, M (те же, что и выше) и B_7 не зависят от z и $p \in [1; |z|/2]$. Выбирая p таким, что

$$\left(\left(1 - 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right) 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)\left(1 - 2^{-n_0} - \frac{A_0}{p}\right)^{-1} < \tilde{A}^{-1},$$

и принимая во внимание правое неравенстов в (2.4.14), получим оценку

$$\ln|\nu_{1,n_0}(x)| \le \tilde{u}(|x|) + B_7 \ln(e + |z|) + 3Me^p, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теперь, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2.6, и учитывая левую оценку в (2.4.14), заключаем, что $\varphi_2 = \nu_{1,n_0}\varphi_1 \in \mathcal{J}_{\varphi_1} \subset \mathcal{J}_\varphi$.

Данный процесс можно продолжить: применяя лемму 2.7 для функции $\chi = \Phi/\varphi_2$, получить представления $\chi = \chi_{1,n}\chi_{2,n}$, $n \in \mathbb{N}$, и соответствующие оценки, затем, рассуждая так же, как и выше, убедиться в том, что $\varphi_3 = \chi_{1,n_0}\varphi_2 \in \mathcal{J}_\varphi$. И так далее.

Введем обозначения:

$$\varphi_0 = \varphi, \quad f^{(1)} = f_{1,n_0}, \quad \varphi_1 = f^{(1)}\varphi_0, \quad g_k = f^{(1)} \dots f^{(k)},$$

где $f^{(j)}$, $j = 2, 3, \dots,$ – первый множитель расщепления функции Φ/φ_{j-1}, проведенного при помощи леммы 2.7 для $n = n_0$ на j-м шаге, $\varphi_k = g_k\varphi$.

Результатом описанного процесса являются включения

$$\varphi_k \in \mathcal{J}_\varphi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Согласно замечанию 2.3, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что $f_{2,n}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Из оценки (2.3.14) следует, что в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$, но вне множества E_0, будет

$$\ln|f_{2,n}(z)| \le (1-2^{-n})\ln|f(z)| + \frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + B\ln(e+|z|) + Me^p. \tag{2.4.16}$$

Оценим функцию $\ln|g_k(z)|$ снизу в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$, но вне множества $E_0 \bigcup E$. Нетрудно вывести, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдется постоянная $\widetilde{D}_j > 0$ такая, что

$$\ln|f^{(j)}(z)| \ge 2^{-n_0}(1-2^{-n_0})^{j-1}\ln|f(z)| - \\ - \widetilde{D}_j\left[\frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right]$$

при $|\mathrm{Im}\, z| \le \frac{1}{2}$, $z \notin E_0 \bigcup E$, где постоянные A_0, B и M те же, что и в лемме 2.7. Поэтому для всех z, лежащих в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$, но вне множества $E_0 \bigcup E$, будет

$$\ln|g_k(z)| \ge \left(1-(1-2^{-n_0})^k\right)\ln|f(z)| - \\ - D_k\left[\frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right], \tag{2.4.17}$$

где $D_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \widetilde{D}_j$.

Выберем и фиксируем $k_n \in \mathbb{N}$, для которого

$$1-(1-2^{-n_0})^{k_n} > 1-2^{-n}.$$

Из (2.4.16) и (2.4.17), с учетом (2.4.3), получаем оценку

$$\ln|f_{2,n}(z)| - \ln|g_{k_n}(z)| \le C_0\ln(e+|z|) + \\ + (D_{k_n}+1)\left[\frac{A_0}{p}\left(H(z) - \ln|\Phi(z)|\right) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right] \tag{2.4.18}$$

для всех z, лежащих в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \le 1/2$, но вне множества $E_0 \bigcup E$, положительная постоянная C_0 зависит от n и не зависит от z и $p \in [1;|z|/2]$.

В силу результатов работы [19, §3, замечание 2] (цитированных выше, в п. 1.3.1, теорема C) включение $f_{2,n}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$ будет следовать из b-*насыщенности* подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ по отношению к функции $f_{2,n}\varphi$. Напомним, что подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathbf{P}_a$ b-*насыщен относительно функции* $\Psi \in \mathbf{P}_a$, если существует ограниченное множество $\mathcal{B} \subset \mathbf{P}_a$, для которого выполнена импликация: если целая функция F во всей комплексной плоскости удовлетворяет неравенству

$$|F(z)\psi(z)| \leq |\psi(z)| + |\Psi(z)|$$

для любого элемента $\psi \in \mathcal{B} \bigcap \mathcal{J}$, то $F = const$.

Рассмотрим одноэлементное (и потому ограниченное в $\mathbf{P}_a$) множество $\mathcal{B} = \{z^{m_0} g_{k_n} \varphi\}$, где $m_0 \in \mathbb{N}$ – фиксированное число, зависящее от k_n, правило выбора которого будет определено ниже. Пусть F – произвольная целая функция, удовлетворяющая условию импликации b-насыщенности:

$$|F(z) z^{m_0} g_{k_n} \varphi(z)| \leq |z^{m_0} g_{k_n} \varphi(z)| + |f_{2,n}(z)\varphi(z)|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этого неравенства следует, что F имеет нулевой экспоненциальный тип, а также, с учетом (2.4.18) при $p = (D_{k_n} + 1)A_0$, что

$$|F(z)| \leq 1 + |z|^{-m_0} \times$$
$$\times \exp\left((H(z) - \ln|\Phi(z)|) + ((D_{k_n} + 1)B + C_0) \ln(e + |z|) + Me^{(D_{k_n}+1)A_0} \right)$$

при $|\mathrm{Im}\, z| \leq \frac{1}{2}, \quad z \notin E_0 \bigcup E$.

Отсюда, выбирая m_0 достаточно большим, получаем, что в полосе $|\mathrm{Im}\, z| \leq \frac{1}{2}$ верна оценка

$$|F(z)\Phi(z)| \leq \mathrm{const}. \tag{2.4.19}$$

Из этой оценки, рассуждая так же, как и при обосновании соотношения (2.4.2), выводим, что F – многочлен. В силу (2.4.2) и теоремы 2.2, $\Phi \notin \mathbf{P}_{a,0}$. Поэтому найдутся постоянная $c_0 > 0$, натуральное число j_0 и последовательность точек $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$ такие, что

$$|x_i| \to \infty, \quad |\Phi(x_i)| \geq c_0 |x_i|^{-j_0}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Рассматривая изначально вместо функции Φ функцию $(z+1)^{j_0}\Phi$, можно считать, что $|\Phi(x_i)| \geq c_0$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда из (2.4.19) следует, что $\{F(x_i)\}$ – ограниченная последовательность. Следовательно, $F = \mathrm{const}$, и подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ b-насыщен относительно функции $f_{2,n}\varphi$. Согласно упоминавшемуся выше критерию из работы [19], $f_{2,n}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая замечание 2.3, заключаем, что $\mathcal{J}_\varphi$ – слабо локализуемый подмодуль.

□

2.5 Примеры применения теоремы 2.4

2.5.1 Порождающая функция с нулевым множеством, отличающимся от нулевого множества делителя алгебры $\mathbf{P}_\infty$ на R-множество

Пусть

$$\Phi(z) = e^{\mathrm{i}cz} \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_n|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$$

— делитель алгебры Шварца, и существует правильно распределенная при некотором порядке $\rho_0 \in (0;1]$ подпоследовательность $\mathcal{M} = \{\mu_k\}$ последовательности $\Lambda_\Phi = \{\lambda_n\}$, лежащая в некоторой горизонтальной полосе

$$\Pi_\tau = \{z : \ |\operatorname{Im} z| < \tau\}$$

и являющаяся R-*множеством*, то есть

$$|\mu_{k+1}| - |\mu_k| \geq d|\mu_k|^{1-\rho_0}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

при некотором $d > 0$ (понятие R-множества введено в [29]).

Замечание 2.4. Перечисленным выше условиям удовлетворяет, например, любая функция $\Phi = e^{\mathrm{i}cz}\Psi \in \mathbf{P}_\infty$, где Ψ – функция типа синуса. Действительно, одно из требований в определении функции типа синуса – это оценка снизу на горизонтальной прямой

$$|\Psi(x + \mathrm{i}y_0)| \geq c_0 > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

из которой следует, что Ψ — делитель алгебры $\mathbf{P}_\infty$, а значит, и Φ — делитель этой алгебры. Далее, множество нулей $\Lambda_\Phi = \{\lambda_n\}$ функции Φ, как совпадающее с множеством нулей функции типа синуса, обладает свойствами: $\Lambda_\Phi \subset \Pi_\tau$ для некоторого $\tau > 0$ и число точек λ_n в любом прямоугольнике

$$P_{t,C,h} = \{z = x + \mathrm{i}y, \ \ t \leq x \leq t + C, \ |y| \leq \tau\}$$

не превосходит некоторой постоянной ν_C, зависящей только от Ψ и величины $C > 0$ (см. [30, §1]). Отсюда нетрудно вывести существование правильно распределенной при порядке $\rho_0 = 1$ подпоследовательности $\mathcal{M} \subset \Lambda_\Phi$, являющейся также R-множеством.

Положим
$$\Delta_0 = \lim_{r\to\infty} \frac{n_{\mathcal{M}}(r)}{r^{\rho_0}}.$$
Пусть $\rho \in (0; 1/2)$, $\Delta > 0$ таковы, что
$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\Delta_0}{\Delta} r^{\rho_0-\rho} > 1.$$
Из теоремы 1.2.3 монографии [34] и условия $\mathcal{M} \subset \Pi_\tau$ следует, что существуют подпоследовательность $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{\mu}_j\}$ последовательности $\mathcal{M}$ и положительное число $\tilde{d}$, для которых
$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_{\widetilde{\mathcal{M}}}(r)}{r^\rho} = \Delta, \quad |\tilde{\mu}_{j+1}| - |\tilde{\mu}_j| \geq \tilde{d}|\tilde{\mu}_j|^{1-\rho}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что функция
$$\tilde{\varphi} = \frac{\Phi}{\tilde{f}},$$
где
$$\tilde{f}(z) = \prod_{\tilde{\mu}_j \in \widetilde{\mathcal{M}}} \left(1 - \frac{z}{\tilde{\mu}_j}\right),$$
удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Действительно, функция $\tilde{\omega}$ имеет во всей комплексной плоскости вполне регулярный рост при порядке $\rho \in (0; 1/2)$. Из известного асмиптотического соотношения для функций вполне регулярного роста (см. [29, глава II, теорема 1]) следует, что ее индикатор $h_{\tilde{f}}$ всюду положителен, то есть
$$0 < h_0 \leq h_{\tilde{f}}(\theta) \leq h_1 < +\infty, \quad \theta \in [0; 2\pi].$$
Так как множество нулей функции $\tilde{f}$ есть R-множество, из теоремы 1.2.6 и замечания после этой теоремы в монографии [34] выводим, что существуют положительные постоянные C_1, C_2, для которых
$$\frac{h_0}{2}|z|^\rho - C_1 \leq \ln|\tilde{f}(z)| \leq 2h_1|z|^\rho + C_2, \tag{2.5.1}$$
при этом правое неравенство имеет место для всех $z \in \mathbb{C}$, а левое — для $z \in \mathbb{C}$, таких, что $|z - \tilde{\mu}_j| \geq \delta > 0$, $j = 1, 2, \ldots$

Без ограничения общности можем считать, что
$$|\Phi(x)| \leq \text{const}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Оценка функции Φ снизу дается аналитическим критерием Л.Эренпрайса (цитированным в теореме E, в п. 1.3.3 выше). А именно,

функция $\Phi \in \mathbf{P}_\infty$ *— делитель алгебры* $\mathbf{P}_\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\exists A > 0: \ \forall x \in \mathbb{R} \ \exists x' \in \mathbb{R}: \ |x - x'| \le A \ln(2 + |x|), \quad \Phi(x') \ge (A + |x'|)^{-A}.$$

Из оценок (2.5.1) и оценок для функции Φ нетрудно вывести, что для функции $\tilde{\varphi}$ выполнены условия теоремы 2.4, при этом $u_*(x) \asymp |x|^\rho$ (то есть

$$m|x|^\rho \le u_*(x) \le M|x|^\rho, \quad x \in \mathbb{R},$$

где m, M – положительные постоянные). Здесь $u_*(x) = \ln U_*(x)$,

$$U_*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

$M_n = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |x^n \tilde{\varphi}(x)|$, $n = 0, 1, \ldots$.

Заметим, что если порядок ρ_0 функции

$$f(z) = \prod_{\mu_j \in \mathcal{M}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right)$$

меньше, чем $1/2$, то функция $\varphi = \Phi/f$ тоже удовлетворяет условиям теоремы 2.4.

2.5.2 Порождающая функция с нулевым множеством, образованным подпоследовательностью сдвигов целочисленных точек

Пусть функция $l: [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию:
для некоторых $t_l > 0$ и $C_l > 0$

$$|l(t) - l(s)| \le C_l |\ln^2 t - \ln^2 s|, \quad C_l > 0, \quad t, s > t_l.$$

Положим

$$\lambda(t) = t + l(|t|), \quad t \in \mathbb{R},$$

Тогда, согласно теореме 3.1, которая будет доказана в главе 3, последовательность

$$\lambda_k = \lambda(k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

представляет собой нулевое множество делителя φ алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$, определяемого формулой

$$\varphi(z) = \lim_{R \to \infty} \prod_{|\lambda_k| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{2.5.2}$$

Поэтому главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем и совпадает с множеством $\{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}$.

Считающей функцией будем называть возрастающую кусочно постоянную непрерывную справа функцию $n : [0; +\infty) \to \mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Считающая функция комплексной последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ обозначается n_Λ; она равна числу всех точек λ_k с $|\lambda_k| \le t$.

Для считающей функции $n(t)$, равной 0 на $[0; 1]$, положим

$$N(t) = \int_0^t \frac{n(\tau)}{\tau}, \ t > 0, \quad \Omega(s) = N(e^{|s|}), \ s \in \mathbb{R}.$$

Функция Ω четная и выпуклая; она принадлежит к классу N-функций, определенных в [27, гл. I].

Нам понадобятся следующие условия для $n(t)$.

N1) Найдется положительная постоянная C_Ω такая, что

$$\Omega(2s) \le C_\Omega \Omega(s), \quad |s| \ge s_0,$$

$$\lim_{\delta \nearrow 1} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{n(\delta t)}{n(t)} > 1 - \frac{1}{C_\Omega}.$$

N2) Для некоторого $m_0 \in \mathbb{N}$

$$\int_t^{t+m_0} \mathrm{d}n(\tau) < m_0, \quad t \ge t_0. \tag{2.5.3}$$

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2.9. *Пусть $\mathcal{A} = \{\alpha_i\}$, $1 < |\alpha_1| \le |\alpha_2| \le \dots,$ — вещественная последовательность, и ее считающая функция $n_{\mathcal{A}}$ удовлетворяет условию $N1$).*

Тогда

$$f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_i}\right) \tag{2.5.4}$$

— целая функция нулевого порядка, и для любого фиксированного $\delta_0 > 0$ имеет место соотношение

$$\ln|f(z)| \asymp N(|z|) + \mathrm{const}, \quad z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{dist}\,(z, \mathcal{A}) \ge \delta_0. \tag{2.5.5}$$

(Напомним, что соотношение $f(t) \asymp g(t)$, $t \in T$ означает существование положительных постоянных c_1 и c_2, таких, что $c_1 f(t) \le g(t) \le c_2 f(t)$, $t \in T$.)

Доказательство. Положим

$$N_{\mathcal{A}}(t)=\int_0^t \frac{n_{\mathcal{A}}(\tau)}{\tau},\ t>0,\quad \Omega_{\mathcal{A}}(s)=N_{\mathcal{A}}(e^{|s|}),\ s\in\mathbb{R}.$$

Первое из требований в N1) носит название Δ_2-*условия.* Известно, что из него следует оценка

$$\Omega_{\mathcal{A}}(s)=O(|s|^{n_0}),\quad |s|\to\infty,$$

где $n_0\in\mathbb{N}$ (см. [27, гл. I, §4]). Отсюда для функции $n_{\mathcal{A}}$ получаем соотношение

$$n_{\mathcal{A}}(t)=O((\ln t)^{n_0}),\quad t\to\infty.$$

И значит, формула (2.5.4) корректно определяет целую функцию нулевого порядка.

Δ_2-условие для функции $\Omega_{\mathcal{A}}$ в терминах функции $N_{\mathcal{A}}$ примет вид

$$N_{\mathcal{A}}(t^2)\le C_{\Omega_{\mathcal{A}}}N(t),\ \ t\ge t_0. \tag{2.5.6}$$

Положим

$$Q(r)=r\int\limits_r^\infty \frac{n_{\mathcal{A}}(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Используя неравенство (2.5.6), покажем, что

$$Q(r)=O(N_{\mathcal{A}}(r)),\ \ r\to\infty. \tag{2.5.7}$$

Действительно,

$$Q(r)=r\left(0-\frac{N_{\mathcal{A}}(r)}{r}+\int\limits_r^\infty \frac{N_{\mathcal{A}}(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\le r\sum_{j=0}^\infty \int\limits_{r^{2^j}}^{r^{2^{j+1}}} \frac{N_{\mathcal{A}}(t)}{t^2}\mathrm{d}t\le$$
$$r\sum_{j=0}^\infty 2^j C_\Omega^{j+1}N_{\mathcal{A}}(r)\int\limits_r^{r^2}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2^{j+1}}}=O(N_{\mathcal{A}}(r)).$$

Далее, согласно теореме 4.1 из [27], Δ_2-условие для $\Omega_{\mathcal{A}}$ эквивалентно тому, что

$$n_{\mathcal{A}}(t)\ln t\le C_{\Omega_{\mathcal{A}}}N_{\mathcal{A}}(t),\ \ t\ge t_0, \tag{2.5.8}$$

в частности,

$$n_{\mathcal{A}}(t)=o(N_{\mathcal{A}}(t)),\ \ t\to\infty. \tag{2.5.9}$$

Воспользуемся теперь следующей оценкой снизу для целых функций рода 0 из классической монографии Р. Боаса ([79, Лемма 3.5.10]):

$$\ln|f(z)| \geq n_{\mathcal{A}}(\sigma R)\left(\frac{r}{\sigma R} + \ln\frac{H}{\sigma R}\right) + N_{\mathcal{A}}(\sigma R) - \frac{r}{R(\sigma-1)}Q(\sigma R). \quad (2.5.10)$$

Эта оценка справедлива для всех z с $r = |z| < R$, лежащих вне исключительных кружков с суммой радиусов $2eH$; здесь σ — произвольное фиксированное число, большее 1.

С учетом (2.5.7) и (2.5.9), из оценки (2.5.10) нетрудно вывести, что при фиксированном $\sigma > 1$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_\varepsilon \in (0; 1)$ и $R_\varepsilon > 0$ такие, что при $R \geq R_\varepsilon$ будет

$$\ln|f(z)| \geq (1-\varepsilon)N(\sigma R) \quad (2.5.11)$$

для всех z с $|z| \leq \delta_\varepsilon R$, лежащих вне исключительного множества $E_{\varepsilon,R}$, диаметр которого не превосходит $\delta_\varepsilon \varepsilon R$.

В силу второго из соотношенией в условии N1), для достаточно малого $\theta > 0$ найдутся $\varepsilon_\theta > 0$ и $R_\theta > 0$ такие, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_\theta$ и $R \geq R_\theta$ число точек λ_i, попавших в любую связную компоненту исключительного множества $E_{\varepsilon,R}$, не превосходит величины $\frac{1-\theta}{C_\Omega} n_{\mathcal{A}}(\sigma R)$. Принимая во внимание этот факт и неравенство (2.5.8), при помощи стандартных приемов оценки целых функций из (2.5.11) выводим, что для произвольного фиксированного $\delta_0 > 0$

$$\ln|f(z)| \geq \frac{\theta}{2} N_{\mathcal{A}}(|z|), \quad |z| \geq r_{\theta,\delta_0}, \quad \mathrm{dist}\,(z, \Lambda) \geq \delta_0. \quad (2.5.12)$$

Так как f — целая функция рода 0, полагая $M(r) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, имеем

$$N_{\mathcal{A}}(r) \leq \ln M(r) \leq N_{\mathcal{A}}(r) + Q(r)$$

(см. [79, Лемма 3.5.1]). Отсюда, учитывая (2.5.7), заключаем, что

$$\ln|f(z)| \leq \mathrm{const}\, N_{\mathcal{A}}(|z|).$$

Асимптотическое соотношение (2.5.5) вытекает из последнего неравенства и оценки (2.5.12). □

По заданной считающей функцией $n(t)$, удовлетворяющей условиям N1)–N2), определим подпоследовательность $\mathcal{M} \subset \Lambda$ следующим образом. Положим

$$n_j = \int_{m_0 j}^{m_0(j+1)} \mathrm{d}n(\tau), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

В силу (2.5.3), n_j может принимать одно из значений: $0, 1, \ldots, m_0 - 1$, а в силу свойств функции l, каждый промежуток вида

$$[m_0 j; m_0(j+1)), \quad j \in \mathbb{Z},$$

при достаточно большом $|j|$, содержит не менее $(m_0 - 1)$ точек λ_k. Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ из последовательности Λ исключим n_j точек

$$\lambda_k \in [m_0 j; m_0(j+1));$$

оставшиеся точки перенумеруем в порядке возрастания их модулей. Полученную последовательность обозначим $\mathcal{M} = \{\mu_i\}$.

Теорема 2.5. *Функция, определенная формулой*

$$\psi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\mu_i|<R} \left(1 - \frac{z}{\mu_i}\right),$$

порождает в алгебре $\mathbf{P}_\infty$ *слабо локализуемый главный подмодуль* $\mathcal{J}_\psi$, *причем*

$$Pol_\psi \subsetneq J_\psi,$$

где $Pol_\psi := \{p\psi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}$.

Доказательство. Пусть $\{a_i\}$ — последовательность, полученная упорядочением точек множества $(\Lambda \setminus \mathcal{M})$ по возрастанию их модулей, а $\nu(t)$ — считающая функция этой последовательности. Нетрудно видеть, что $n(t)$ и $\nu(t)$ связаны соотношением

$$n(t) - \nu(t) = O(1), \quad t \to \infty,$$

а функции $N(t)$ и $\widetilde{N}(t) = \int\limits_0^t \frac{\nu(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau$ — соотношением

$$\widetilde{N}(t) = (1 + o(1))N(t), \quad t \to \infty.$$

Отсюда следует, что для последовательности $\{a_i\}$ и ее считающей функции ν выполнены условия леммы 2.9, вообще говоря, с другими постоянными вместо C_Ω и s_0. И значит,

$$\ln|g(z)| \asymp \widetilde{N}(|z|) + \mathrm{const}, \quad z = x + \mathrm{i}\delta_0, \tag{2.5.13}$$

где

$$g(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right).$$

Для функции $\varphi(z)$ имеет место соотношение

$$\ln|\varphi(z)| \asymp \ln(|z|+2), \quad z = x + \mathrm{i}\delta_0 \qquad (2.5.14)$$

(см. теорему 3.1 в главе 3).

Положим $\psi = \frac{\varphi}{g}$. Из соотношения (2.5.14), с учетом теоремы 2.2, следует, что $Pol_\psi \subsetneq \mathcal{J}_\psi$; а из (2.5.13) и (2.5.14) — что функция ψ удовлетворяет условиям теоремы 2.4. При этом $u_*(x) \asymp \widetilde{N}(|x|) + \mathrm{const}$, где $u_*(x) = \ln U_*(x)$,

$$U_*(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

$M_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^n\psi(x)|$, $n = 0, 1, \ldots$.

Применяя теорему 2.4, заключаем, что $\mathcal{J}_\psi$ — слабо локализуемый главный подмодуль.

$\square$

2.6 Топологическая структура главного подмодуля в модуле $\mathbf{P}_a$. Применения

2.6.1 Топологическая структура главного подмодуля

Напомним еще раз, что пространство $\mathbf{P}_a$ неметризуемо [45, следствие 2 из теоремы 1]. Поэтому замыкание произвольного множества $A \subset \mathbf{P}_a$, вообще говоря, нельзя получить, присоединяя к нему только пределы сходящихся *счетных* последовательностей $\{\varphi_n\} \subset A$. Однако для подмножеств A пространства $\mathbf{P}_a$, имеющих специальный вид, возможно совпадение их *секвенциальных* замыканий (то есть совокупности пределов всех сходящихся в топологии пространства $\mathbf{P}_a$ *счетных* последовательностей из A) с обычными.

Для произвольной функции $\varphi \in \mathbf{P}_a$ положим

$$\mathrm{Pol}_\varphi = \{p\varphi : \quad p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Секвенциальное замыкание множества Pol_φ, будем обозначать символом $\mathcal{J}_{\varphi,seq}$.

Теорема 2.6. *Равенство*

$$J_{\varphi,seq} = J_\varphi. \qquad (2.6.1)$$

имеет место для всех $\varphi \in \mathbf{P}_a$.

Для доказательства теоремы 2.6 понадобится некоторая подготовка.

Для целой функции ψ и отрезка $[c;d] \subset \mathbb{R}$ определим норму

$$\|\psi\|_0 = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\psi(z)|}{\exp(dy^+ - cy^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y. \qquad (2.6.2)$$

Символом $PW(c;d)$ обозначаем пространство Пэли-Винера $\mathcal{F}(L^2(c;d))$.

Лемма 2.10. *Если* $\psi \in PW(c;d)$, *то*

$$\|\psi\|_0 \leq C_0 \|\psi\|_{PW(c;d)}, \qquad (2.6.3)$$

где положительная постоянная C_0 *зависит только от* c *и* d.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $c = -d$; тогда

$$\psi(z) = \int_{-d}^{d} e^{-\mathrm{i}zt} f(t)\mathrm{d}t, \quad f \in L^2(-d;d),$$

$$\|\psi\|_0 = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\psi(z)|}{\exp(d|y|)}, \quad z = x + \mathrm{i}y.$$

Согласно теореме Планшереля, при фиксированном $y \in \mathbb{R}$ будет

$$\|\psi(x+\mathrm{i}y)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi \|e^{yt} f(t)\|^2_{L^2(-d;d)}.$$

Используя этот факт и субгармоничность функции $|\psi|^2$, получаем для всех $x \in \mathbb{R}$ оценки

$$|\psi(x)|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{|w-x|\leq 1} |\psi(w)|^2 |\mathrm{d}w| \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s+\mathrm{i}\tau)|^2 \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\tau \leq$$
$$\leq C_1 e^{2d} \|\psi\|^2_{PW(-d;d)},$$

где C_1 — абсолютная постоянная.

Неравенство (2.6.3) следует из этих оценок и принципа Фрагмена-Линделефа. □

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, $c_\varphi = h_\varphi(-\pi/2)$, $d_\varphi = h_\varphi(\pi/2)$, где h_φ — индикатор функции φ, $PW = PW(c_\varphi; d_\varphi)$.

Рассмотрим следующие замкнутые подпространства в PW: подпространство $PW(\varphi) = J(\varphi) \bigcap PW$ и подпространство PW_{pol}, определяемое как замыкание в PW множества Pol_φ.

Далее, символом $\mathcal{H}(\varphi)$ обозначим гильбертово пространство, состоящее из всех целых функций f минимального типа при порядке 1, таких, что
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty,$$
со скалярным произведением
$$(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\overline{f_2(x)}|\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\varphi), \tag{2.6.4}$$
H_{pol} — замыкание множества полиномов в $\mathcal{H}(\varphi)$.

Соответствие
$$f \mapsto f\varphi, \quad f \in \mathcal{H}(\varphi), \tag{2.6.5}$$
устанавливает изометрию гильбертовых пространств $\mathcal{H}(\varphi)$ и $PW(\varphi)$. Подпространство H_{pol}, определяемое как замыкание множества полиномов в $\mathcal{H}(\varphi)$, есть прообраз подпространства PW_{pol} при этой изометрии.

Нам понадобятся некоторые определения и факты из общей теории пространств де Бранжа [84], а также из работы [72], в которой эта теория успешно была использована для исследования D-инвариантных подпространств в пространстве Шварца.

Первоначально *пространство де Бранжа* определяется как пространство, ассоциированное с целой функцией E из класса Эрмита-Билера, и представляет собой совокупность всех целых функций F, таких, что
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2 \mathrm{d}t < +\infty,$$
и подчиненных еще некоторым ограничениям (см. [84, § 19–21], [72, §2]).

Здесь мы ограничимся точной формулировкой эквивалентного определения пространства де Бранжа, носящего характер аксиоматического описания (см. [84, Теорема 23]):

нетривиальное гильбертово пространство целых функций $\mathcal{H}$ является пространством де Бранжа тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы:

($H1$) если $F \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — нуль функции F, то $F_1 = F(z)\frac{z-\bar{\lambda}}{z-\lambda} \in \mathcal{H}$ и нормы функций F и F_1 равны;

($H2$) для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ соответствующий (линейный) δ_λ-функционал, действующий по формуле $\delta_\lambda(F) = F(\lambda)$, $F \in \mathcal{H}$, непрерывен в $\mathcal{H}$;

($H3$) для любой функции $F \in \mathcal{H}$ функция $F^*(z) = \overline{F(\bar{z})}$ принадлежит $\mathcal{H}$ и имеет ту же норму, что и F.

С использованием этого аксиоматического описания в [73], [72, §2, теорема 2.7] устанавливается, что $\mathcal{H}(\varphi)$ является пространством де Бранжа. Нетрудно также проверить, что аксиомы $(H1)$ – $(H3)$ выполнены и для подпространства H_{pol}, рассматриваемого как самостоятельное гильбертово пространство со скалярным произведением (2.6.4), то есть H_{pol} — пространство де Бранжа.

Сформулируем еще два результата о пространствах де Бранжа (см. [84, § 35], [72, Теорема 2.1] и [84, § 29], соответственно).

Теорема S *Пусть H_1 и H_2 — замкнутые подпрострaства одного и того же пространства де Бранжа $\mathcal{H}$, которые сами являются пространствами де Бранжа со скалярным произведением, индуцированным из $\mathcal{H}$. Тогда имеет место одно из включений: либо $H_1 \subset H_2$, либо $H_2 \subset H_1$.*

Теорема T *Пусть $\mathcal{H}$ — пространство де Бранжа, H_k — замыкание в $\mathcal{H}$ линейного множества $\{f \in \mathcal{H} : \ z^j f \in \mathcal{H}, \ j = 1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда* $\dim\ (\mathcal{H} \ominus H_k) < +\infty$.

Используя теоремы S и T, нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2.11. *Предположим, что в пространстве H_{pol} имеется функция f_0 со свойством: для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$*

$$z^{k_0-1} f_0 \in \mathcal{H}(\varphi), \quad z^{k_0} f_0 \notin \mathcal{H}(\varphi).$$

Тогда

$$\dim\ (\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) \le 1.$$

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим символом $\mathcal{H}_k$ замыкание в $\mathcal{H}(\varphi)$ множества

$$\{f \in \mathcal{H}(\varphi) : \ z^k f \in \mathcal{H}(\varphi)\}.$$

Так как $\mathcal{H}(\varphi)$ — прообраз множества $PW \bigcap \mathcal{J}(\varphi)$ при изометрии (2.6.5), а $\mathcal{J}(\varphi)$ — устойчивый подмодуль, то $\mathcal{H}_k$ совпадает с подпространством H_k из теоремы T. Ясно также, что $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\varphi)$, $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$

Каждое $\mathcal{H}_k$, со скалярным произведением, индуцированным из $\mathcal{H}(\varphi)$ — пространство де Бранжа, как и подпространство H_{pol}. Поэтому, в силу теоремы S, либо $\mathcal{H}_{k_0} \subset H_{pol}$, либо $H_{pol} \subset \mathcal{H}_{k_0}$. Но наличие в H_{pol} функции ω_0 исключает возможность $H_{pol} \subset \mathcal{H}_{k_0}$; следовательно,

$$\mathcal{H}_{k_0} \subset H_{pol}.$$

С учетом теоремы T имеем

$$\dim\ (\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) \le \dim\ (\mathcal{H}(\varphi) \ominus \mathcal{H}_{k_0}) < +\infty.$$

С другой стороны, известно, что коразмерность H_{pol} в $\mathcal{H}(\varphi)$ может принимать только три значения: 0, 1, $+\infty$ [72, теоремы 2.1, 2.2, 2.9]. Откуда получаем нужное утверждение. □

Доказательство теоремы 2.6

Включение $\varphi \in \mathbf{P}_a \setminus \mathbf{P}_{a,0}$, в силу теоремы 2.2, равносильно соотношению $\mathcal{J}_\varphi = \mathrm{Pol}_\varphi$. Следовательно, для таких функций φ нужное утверждение тривиально.

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$. Тогда, как уже было сказано в конце доказательства леммы 2.11, величина $\dim\ (\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol})$ может принимать только одно из трех значений: 0, 1, $+\infty$.

Если $\dim\ (\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) = 0$, то

$$J_{\varphi,seq} = J_\varphi = J(\varphi). \tag{2.6.6}$$

В случае, когда $\dim\ (\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) = 1$, справедливость равенств (2.6.6) получаем из леммы 2.10. Действительно, пусть $\Phi \in \mathcal{J}(\varphi)$, то есть $\Phi = f\varphi$, где f — целая функция минимального типа, и найдется многочлен q_Φ, такой, что $\frac{f}{q_\Phi} \in \mathcal{H}(\varphi)$. Тогда либо $\frac{f}{q_\Phi} \in H_{pol}$, либо для произвольной фиксированной точки $\lambda_0 \in \mathcal{Z}_f \setminus \mathcal{Z}_\varphi$ найдутся числа α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{z - \lambda_0}\right) \cdot \frac{f}{q_\Phi} \in H_{pol}.$$

В обоих случаях, из леммы 2.10, с учетом определения пространства $\mathbf{P}_a$ и секвенциальной сходимости в нем ([45, следствие 1 из теоремы 2]), заключаем, что $\Phi \in \mathcal{J}_{\varphi,seq}$.

Рассмотрим последнюю возможность:

$$\dim\ (\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) = +\infty. \tag{2.6.7}$$

Обозначим символом H_φ прообраз замкнутого подпространства

$$PW_\varphi = PW \bigcap \mathcal{J}_\varphi$$

пространства PW при изометрии (2.6.5) и положим

$$H_1 = H_\varphi \ominus H_{pol}.$$

Для завершения доказательства теоремы мы должны убедиться в том, что

$$H_1 = \{\bar{0}\}.$$

Прежде всего, заметим, что подпространство H_1 не может содержать ненулевую функцию f, для которой $\Phi = f\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$. Действительно, в противном случае

$$\Phi = \mathcal{F}(s), \quad s \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

И если S_φ — функционал (регулярный, принадлежащий $C_0^\infty(-a;a)$), для которого $\varphi = \mathcal{F}(S_\varphi)$, то

$$\int_a^b S_\varphi^{(k)}(t)\overline{s(t)}\mathrm{d}t = 0, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Следовательно, $\bar{s} \in W_{S_\varphi}$.

С другой стороны, $\Phi \in J_\varphi$, так как $f \in H_1 \subset H_\varphi$. Поэтому $s \in W^0_{S_\varphi}$ и

$$0 = s(\bar{s}) = \int_a^b s(t)\overline{s(t)}\mathrm{d}t,$$

то есть $s = 0$.

Таким образом, если $f \in H_1 \setminus \{\bar{0}\}$, то найдется число $n_f \in \mathbb{N}$ со свойством

$$z^j f \in \mathcal{H}(\varphi), \quad j = 0, \ldots, n_f - 1, \quad z^{n_f} f \notin \mathcal{H}(\varphi). \tag{2.6.8}$$

Предположим, что нам удалось установить следующий факт.

(F): *в подпространстве H_{pol} имеются функции со свойством (2.6.8).*

Тогда, применяя лемму 2.11, заключаем, что $\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) < +\infty$, а это противоречит соотношению (2.6.7). Таким образом, установлено, что в случае (2.6.7)

$$H_1 = \{\bar{0}\}, \qquad J_{\varphi,seq} = J_\varphi \neq J(\varphi),$$

то есть главный подмодуль J_φ секвенциально порожден, но не слабо локализуем.

Для завершения доказательства теоремы осталось обосновать утверждение **(F).**

Пусть $\{\mu_j\}$ — «редкая» подпоследовательность нулей фиксированной ненулевой функции $f \in H_1$, такая, что, скажем, $\mu_1 > 1$, $\mu_j > 8\mu_{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots$ Положим

$$q_m(z) = \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right), \qquad \tilde{f}_m = \frac{\omega}{q_m}.$$

Ясно, что $\tilde{f}_m$ удовлетворяет условию (2.6.8) и, в силу устойчивости подмодуля J_φ, $\tilde{f}_m \in H_\varphi$.

Пусть $\mathrm{Pr}_{pol} : H_\varphi \to H_{pol}$ и $\mathrm{Pr}_1 : H_\varphi \to H_1$ — операторы проектирования на соответствующие подпространства. Если $\mathrm{Pr}_1(\tilde{f}_m) = 0$ для какого-нибудь значения индекса m, то утверждение **(F)** доказано. Иначе, $\mathrm{Pr}_1(\tilde{f}_m) \neq 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots$

Используя стандартные приемы оценок целых функций и описание ограниченных множеств в локально-выпуклых пространствах типа (LN^*) [45, теорема 2], к которым относится $\mathbf{P}_a$, нетрудно убедиться в том, что последовательность $\{\tilde{f}_m\varphi\}$ ограничена по некоторой норме $\|\cdot\|_{k_0}$ (см. (2.2.25)). И значит, подпоследовательность этой последовательности сходится в $\mathbf{P}_a$, более точно,

$$\left\|\tilde{f}_{m_j}\varphi - \tilde{f}_0\varphi\right\|_{k_0+1} \to 0,$$

где

$$\tilde{f}_0(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\mu_i}\right)}.$$

Пусть q — какой-нибудь многочлен степени (k_0+2) с корнями, принадлежащими множеству $\mathcal{Z}_f \setminus \{\mu_j\}$. Как и в случае с $\tilde{f}_m$, если $\mathrm{Pr}_1(\tilde{f}_m q^{-1}) = 0$ для некоторого значения индекса m, то $\tilde{f}_m q^{-1} \in H_{pol}$ и удовлетворяет (2.6.8), то есть утверждение **(F)** справедливо.

В противном случае воспользуемся тем, что последовательность

$$\{\tilde{f}_{m_j} q^{-1}\}$$

сходится к функции $f_0 = \tilde{f}_0 q^{-1}$ в пространстве $\mathcal{H}(\varphi)$ и $f_0\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$. В силу сделанного выше замечания о том, что для всякой функции из H_1 выполнено (2.6.8), имеем $\mathrm{Pr}_{pol}(f_0) \neq 0$. Если при этом $\mathrm{Pr}_1(f_0) \neq 0$, то функция $\mathrm{Pr}_{pol}(f_0)$ — искомая, и **(F)** доказано.

Осталось разобрать случай, когда $f_0 \in H_{pol}$.

Заметим, что умножение функции f_0 на любую рациональную функцию Q, такую, что Qf_0 — целая функция, приводит к функции, принадлежащей H_φ и не удовлетворяющей условию (2.6.8). Поэтому если для некоторой рациональной функции Q_0 будет $Pr_1(Q_0 f_0) \neq 0$, то функция $Pr_{pol}(Q_0 f_0)$ удовлетворяет предложению **(F)**.

Пусть, наконец, $Qf_0 \in H_{pol}$ для любой рациональной функции Q, такой, что Qf_0 — целая функция. Для главного подмодуля, порожденного функцией

$$\Phi = f q^{-1}\varphi,$$

выполнены соотношения

$$\mathcal{J}(\Phi) = \mathcal{J}_\Phi = \mathrm{Pol}_\Phi,$$

так как функция fq^{-1} удовлетворяет (2.6.8). В силу требований, которым был подчинен выбор точек $\{\mu_j\}$, мы находимся в тех же условиях, что и перед теоремой 2.3. Воспользовавшись тремя леммами, предваряющими доказательство этой теоремы, найдем последовательность многочленов $\{p_j\}$ со свойством:

$$\lim_{j\to\infty} p_j f_0 \varphi = \Phi$$

в пространстве $\mathbf{P}_a$. С учетом описания секвенциальной сходимости в $\mathbf{P}_a$, заключаем, что существует многочлен p со свойством: последовательность $\{p_j f_0 p^{-1}\}$ сходится к целой функции $\nu = fq^{-1}p^{-1}$ в норме пространства $\mathcal{H}(\varphi)$, при этом функция ν удовлетворяет (2.6.8). Так как $\mathrm{Pr}_1(p_j f_0 p^{-1}) = 0$, для всех значений индекса j, то $\nu \in H_{pol}$, что и завершает доказательство.

□

2.6.2 Весовой критерий слабой локализуемости главного подмодуля

Из теоремы 2.6 следует, что слабую локализуемость главного подмодуля в модуле $\mathbf{P}_a$, порожденного функцией $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, можно изучать, исследуя только возможность аппроксимации функций $\Phi \in J(\varphi)$ *счетными* последовательностями функций из множества Pol_φ.

Для того чтобы сформулировать соответствующий критерий, введем обозначения:
$u(z)$ — наибольшая субгармоническая миноранта функции

$$\left(h_\varphi(\arg z)|z| - \ln|\varphi(z)|\right),$$

где h_φ — индикатор функции φ,

$$H_u = \{f \in H(\mathbb{C}) : \quad \|f(z)\|_u = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-u(z)} < +\infty\}.$$

Теорема 2.7. *Главный подмодуль J_φ, порожденный функцией $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$, слабо локализуем тогда и только тогда, когда каждая функция $f \in H_u$ аппроксимируется многочленами в норме*

$$\|f\|' = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp\left(-u(z) - 2\ln(2+|z|)\right).$$

Доказательство. Ясно, что в доказательстве нуждается только *необходимость.*

Пусть $f \in H_u$ и μ_0 — какой-нибудь нуль этой функции, тогда

$$\frac{f}{z-\mu_0} \in \mathcal{H}(\varphi).$$

Как уже отмечалось в конце доказательства леммы 2.11, коразмерность H_{pol} в $\mathcal{H}(\varphi)$ может принимать только три значения: 0, 1, $+\infty$ [72, теоремы 2.1, 2.2, 2.9]. При этом в доказательстве теоремы 2.6 устновлено, что если

$$\dim\left(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}\right) = +\infty,$$

то главный подмодуль J_φ не слабо локализуем. Таким образом, либо $\mathcal{H}(\varphi) = H_{pol}$, либо

$$\dim\left(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}\right) = 1. \tag{2.6.9}$$

В первом случае для некоторой последовательности многочленов $\{q_j\}$ будет выполнено соотношение

$$\frac{f}{z-\mu_0} = \lim_{j\to\infty} q_j$$

в пространстве $\mathcal{H}(\varphi)$. Далее, в силу леммы 2.10,

$$\left\| q_j\varphi - \frac{f}{z-\mu_0}\varphi \right\|_0 \to 0,$$

где $\|\cdot\|_0$ определяется формулой (2.6.2) с $c = c_\varphi$, $d = d_\varphi$. Отсюда легко вывести сходимость последовательности многочленов $\{(z-\mu_0)q_j\}$ к функции f в норме $\|\cdot\|'$.

Если имеет место (2.6.9), то при некоторых $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ будет

$$\left(\alpha_0 \frac{f}{z-\mu_0} + \alpha_1 \frac{f}{z-\mu_1}\right) \in H_{pol},$$

где $\mu_1 \neq \mu_0$ — еще один нуль функции f. В силу леммы 2.10, некоторая последовательность многочленов $\{p_j\}$ будет сходиться к функции

$$\left((\alpha_0+\alpha_1)z - (\alpha_1\mu_0 + \alpha_0\mu_1)\right) f$$

в норме $\|\cdot\|'$.

Если $\alpha_0 + \alpha_1 = 0$, то все доказано. В противном случае, полагая

$$\beta = \frac{\alpha_1\mu_0 + \alpha_0\mu_1}{\alpha_0+\alpha_1}$$

и принимая во внимание принцип Фрагмена-Линделефа и определение функции u, видим, что последовательность многочленов

$$\tilde{p}_j(z) = \frac{p_j(z) - p_j(\beta)}{(\alpha_0+\alpha_1)z - (\alpha_1\mu_0 + \alpha_0\mu_1)}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

сходится к функции f в норме $\|\cdot\|'$.

$\square$

2.6.3 Уточнение критерия А.Баранова и Ю.Белова синтезируемости последовательности

В качестве еще одного применения теоремы 2.6 уточним результат из работы [72] о *синтезируемых последовательностях.*

Пусть $W \subset C^\infty(-a;a)$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком $I_W = [-c;c]$.

Напомним, что согласно теореме 1.8, если $\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) < c$, то W допускает слабый спектральный синтез. И значит, при каждом фиксированном $c > \pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W)$ существует лишь одно D-инвариантное подпространство с заданными дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком $[-c;c]$. Напротив, если $\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma) = c$, то W может и не допускать слабого спектрального синтеза (теорема 1.12). Следовательно, D-инвариантное подпространство с дискретным спектром σ_W и резидуальным промежутком $[-c;c]$ критической длины $2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma)$, вообще говоря, не единственно.

В связи с этим замечанием авторами работы [72] было предложено следующее определение. Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $D_{BM}(\Lambda) < \infty$, называется *синтезируемой*, если существует единственное (и потому допускающее слабый спектральный синтез) D-инвариантное подпространство W со спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком

$$[-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)].$$

А.Баранов и Ю.Белов в [72, предложение 3.2 и теорема 1.3] получили характеризацию синтезируемых последовательностей:

Теорема U. *Пусть* $\Lambda \subset \mathbb{C}[z]$, $c = D_{BM}(\Lambda) < \infty$.
1) *Если экспоненциальная система* Exp_Λ *имеет конечный недостаток или полна в пространстве* $L^2(-c;c)$, *то* Λ *— синтезируемая последовательность.*

2) *Если экспоненциальная система* Exp_Λ *имеет бесконечный недостаток в пространстве* $L^2(-c;c)$, *то последовательность* Λ *синтезируема тогда и только тогда, когда* $\Lambda = \mathcal{Z}_\varphi$ *для какой-нибудь функции* $\varphi \in \mathbf{P}_{a,0}$ *и*

$$\dim\,(\mathcal{H}(\varphi) \ominus H_{pol}) \leq 1.$$

С учетом специального принципа двойственности (предложение 1.2) из теоремы U получаем, что синтезируемость последовательности Λ равносильна тому, что D-инвариантное подпространство W со спектром $\sigma_W = -\mathrm{i}\Lambda$ и резидуальным промежутком $[-\pi D_{BM}(\Lambda); \pi D_{BM}(\Lambda)]$ имеет вид

$$W = W_S = \{f \in C^\infty(-a;a):\ S(D^k f) = 0,\ k = 0,1,2\ldots\},$$

где $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, $\varphi \in \mathbf{P}_a$ такая, что $\mathcal{Z}_\varphi = \Lambda$ и $\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_{\varphi,seq}$.

Применение теоремы 2.6 вместе с вышесказанным приводит к следующему утверждению.

Предложение 2.1. *Последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *синтезируема тогда и только тогда, когда* $\Lambda = \mathcal{Z}_\varphi$ *для некоторой* $\varphi \in \mathbf{P}_a$, *порождающей в* $\mathbf{P}_a$ *слабо локализуемый главный подмодуль.*

Глава 3

Нулевые множества делителей алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$ и пространств $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$

3.1 Введение

В этой главе мы изучаем структуру нулевых множеств и некоторые другие свойства делителей алгебры Шварца и пространств $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где

$$\Omega = \{n\omega\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{или} \quad \Omega = \{r_n\omega\}, \ \ 0 < r_n \nearrow 1, \ n \to \infty, \tag{3.1.1}$$

ω — канонический вес.

Мотивацией к исследованию является прежде всего то, что нулевые множества делителей φ указанных пространств, с точностью до множителя $(-\mathrm{i})$, являются спектрами D-инвариантных подпространств $W \subset \mathcal{E}_a$ из класса D-инвариантных подпространств с критическим соотношением характеристик:

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = 2r(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|.$$

А именно, если $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество делителя, $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, то, согласно предложениям 1.3 и 1.11 из главы 1,

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}_a : \quad S(D^k f) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

— D-инвариантное подпространство, допускающее слабый спектральный синтез, причем

$$\sigma_{W_S} = -\mathrm{i}\mathcal{Z}_\varphi, \quad I_{W_S} = [-h_\varphi(-\pi/2); h_\varphi(\pi/2)],$$

и значит,
$$|I_{W_S}| = 2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_{W_S}).$$

Кроме того, известно, что если φ — делитель $\mathbf{P}_\infty$ или $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$ для Ω, определенной в (3.1.1), $S = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$, то оператор свертки T_S, порожденный (Ω-ультра)распределением в соответствующем пространстве бесконечно дифференцируемых функций на прямой сюръективен (см. [90] — для пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, [107] — для пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, если $\Omega = \{n\omega\}$, [3] — для пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, если $\Omega = \{r_n\omega\}$). Ядро оператора T_S есть D-инвариантное подпространство соответствующего пространства $\mathcal{E}_\infty$, допускающее спектральный синтез, причем функции $\ker T_S$ не только аппроксимируются экспоненциальными полиномами в топологии пространства $\mathcal{E}_\infty$, но и представляются в виде ряда (со скобками) из экспоненциальных мономов, также сходящегося в $\mathcal{E}_\infty$ (см. работы [90], [107], [3]).

Важно отметить также, что, как будет показано в главе 4, делители алгебры Шварца и их нулевые (под)множества играют ключевую роль в исследовании вопроса о представлении D-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(-a;a)$ в виде прямой суммы (алгебраической и топологической) его резидуального W_{I_W} и экспоненциального $\overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$ подпространств и справедливости для W фундаментального принципа в слабом смысле.

Напомним, что функции $\varphi \in \mathcal{P}_\infty$ являющиеся делителями в $\mathcal{P}_a$ называют еще *медленно убывающими* в $\mathcal{P}_\infty$, то есть удовлетворяющими аналитическим критериям из работ [90], [107, Теорема 2.6], [3, теорема 2] и [5, теорема 1], приведенным в главе 1 в теоремах E, F и G перед предложением 1.11. Условия этих критериев, имеющие форму оценок снизу для функции $\ln|\varphi|$, называются *условиями медленного убывания в пространстве* $\mathcal{P}_\infty$. В дальнейшем мы в равной мере будем использовать оба эквивалентных термина: "делитель"и "медленно убывающая функция".

В параграфе 3.2 мы изучаем условия на возмущающую функцию l, при которых функция с нулевым множеством, определяемым формулами
$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3.1.2}$$
где $l(t)$ — неограниченная функция аргумента $t \geq 0$, будет делителем алгебры $\mathbf{P}_\infty$. При этом мы предъявляем более слабые, чем в работе [69], априорные требования к регулярности поведения функции l. В доказательствах нами развивается и используется техника оценивания, основанная на следующем интегральном представлении для $\ln|\varphi|$, полученном С.Ю. Фаворовым в [54, лемма 1]:

Теорема F. ([54, лемма 1]) *Пусть последовательность*

$$A = \{a_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

удовлетворяет условиям

$$\exists \lim_{R\to\infty} \sum_{|a_j|<R} a_j^{-1},$$

$$n_A(0,t) = O(t), \quad t \to \infty,$$
$$n_A(0,t+1) - n_A(0,t) = o(t), \quad t \to \infty,$$

где $n_A(z,t)$ – *число точек* a_j *в круге* $|w-z| \le t$. *Тогда формула*

$$g(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$$

корректно определяет целую функцию экспоненциального типа и для всех $z \in \mathbb{C}$ *имеет место представление*

$$\ln|g(z)| = \int_0^\infty \frac{n_A(0,t) - n_A(z,t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Основные результаты параграфа 3.2 — это теоремы 3.1 и 3.2

Параграф 3.3 посвящен изучению условий на функцию l, при которых последовательность

$$\{\lambda_k\}, \quad \lambda_k = k + l(|k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

представляет собой нулевое множество делителя пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$, где Ω определена в (3.1.1).

В параграфе 3.4 исследуются необходимые и достаточные (как по отдельности, так и вместе) условия медленного убывания функций φ в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$, формулируемые в терминах ограничений на считающие функции и другие геометрические характеристики нулевых множеств $\mathcal{Z}_\varphi$.

Теорема 3.8 содержит удобное для проверки необходимое условие, которое нельзя усилить на классе всех делителей алгебры Шварца с вещественными нулями (это мы тоже обосновываем).

Теоремы 3.9 и 3.10 представляют собой критерии того, что целая функция экспоненциального типа φ с вещественными нулями есть делитель алгебры Шварца.

В параграфе 3.5 речь пойдет о делителях алгебры Шварца, нулевые множества которых содержатся в горизонтальной криволинейной полосе:

$$Z_\varphi \subset \{z: \quad |\mathrm{Im}\, z| < \alpha(|\mathrm{Re}\, z|)\}, \tag{3.1.3}$$

где $\alpha: \mathbb{R} \to [1; +\infty)$ — четная функция, удовлетворяющая некоторым условиям роста и регулярности поведения. В частности, для таких функций будут исследованы аналоги оценок вида

$$C_1 e^{\pi|\mathrm{Im}\, z|} \le |\varphi(z)| \le C_2 e^{\pi|\mathrm{Im}\, z|}, \quad |\mathrm{Im}\, z| \ge h_\varphi > 0, \quad C_1,\ C_2 > 0. \tag{3.1.4}$$

Прежде всего сформулируем одно естественное обобщение требования вида (3.1.4) для функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, индикаторная диаграмма которой есть симметричный относительно начала координат отрезок мнимой оси длины 2σ:

для точек z, лежащих вне криволинейной полосы

$$\{z: \quad |\mathrm{Im}\, z| < \mathrm{const} \ln(|\mathrm{Re}\, z| + e)\}, \tag{3.1.5}$$

имеет место оценка

$$\ln|\varphi(z)| \ge \sigma|\mathrm{Im}\, z| - \mathrm{const} \ln(|\mathrm{Re}\, z| + e). \tag{3.1.6}$$

В этом случае все нули функции φ лежат в криволинейной полосе (3.1.5), и, в силу теоремы о минимуме модуля (об оценке снизу модуля аналитической функции в круге) [29, Ch. 1, Sec. 8, Th. 11] и аналитического критерия Л.Эренпрайса (теорема E), φ — делитель алгебры $\mathbf{P}_\infty$.

Из доказываемого ниже более общего факта, теоремы 3..11, будет следовать, справедливость обратного к только что сформулированному обобщению (3.1.4):

для любой медленно убывающей функции, все нули которой содержатся в полосе (3.1.5), *верна оценка* (3.1.6).

3.2 Сдвиги целочисленной последовательности, порождающие делители алгебры $\mathbf{P}_\infty$

3.2.1 Достаточные условия и критерий

1. Пусть функция $l: [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ такова, что для некоторых $\alpha \in (0; 1)$, $t_l > 0$ и $C_l > 0$ справедливо неравенство

$$|l(t) - l(s)| \le C_l |t^\alpha - s^\alpha| \tag{3.2.1}$$

при всех $t, s \geq t_l$. Положим

$$\lambda(t) = t + l(|t|), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_k = \lambda(k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3.2.2}$$

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \tag{3.2.3}$$

сходимость последнего произведения будет следовать из теоремы F (см. параграф 3.1) и леммы 3.5.

Теорема 3.1. *Предположим, что функция l удовлетворяет условию* (3.2.1)*, а функция φ определена формулой* (3.2.3)*. Если для всех достаточно больших t и s*

$$|l(t) - l(s)| \leq C_l |\ln^2 t - \ln^2 s|, \quad C_l > 0, \tag{3.2.4}$$

то функция φ принадлежит алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ и является ее делителем.

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$, определенной формулой (3.2.2), введем обозначения: $n(z, t)$ — число точек λ_k в круге $|w - z| \leq t$, $n^+(0, t)$, $n^-(0, t)$ — число точек λ_k в промежутках $[0; t]$ и $[-t; 0]$, соответственно; здесь $z \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$.

В нижеследующей лемме собраны нужные нам в дальнейшем свойства функции λ, последовательности (3.2.2) и считающих функций $n^+(0, t)$, $n^-(0, t)$, $n(0, t)$ этой последовательности.

Лемма 3.1. *Пусть функция $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию* (3.2.1)*. Тогда*

1) *найдется $t_0 > 0$ такое, что функция $\lambda(t) = t + l(|t|)$ строго возрастает при $t \geq t_0$ и при $t \leq -t_0$, и, следовательно, при всех t, $|t| \geq t_0$ определена обратная функция $\lambda^{-1}(t)$, причем*

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|t|) + O(|t|^{\alpha-1} l(|t|)), \quad |t| \to +\infty; \tag{3.2.5}$$

2) *точки последовательности Λ разделены: существует число $d_0 > 0$ такое, что*

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geq d_0, \ m, n \in \mathbb{Z}', \ m \neq n,$$

где, как обычно, $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

3) *существует конечный предел*

$$\lim_{R\to+\infty} \sum_{|\lambda_k|<R} \frac{1}{\lambda_k};$$

4) *при всех* $t > t_0$ *будет*

$$n^+(0,t) = [\lambda^{-1}(t)], \quad n^-(0,t) = -[\lambda^{-1}(-t)],$$

где $[a]$ *обозначает целую часть числа* $a \in \mathbb{R}$;

5) $n(0,t) = O(t)$, $t \to +\infty$;

6) $n(0,t+1) - n(0,t) = o(t)$, $t \to +\infty$.

Доказательство. 1) Пусть $t_l < t < s$. Тогда, в силу (3.2.1),

$$\lambda(s) - \lambda(t) = s - t + (l(s) - l(t)) \geq (s-t)\left(1 - C_0\alpha t^{\alpha-1}\right).$$

Откуда следует, что для достаточно большого $t_0 > t_l$ будет

$$\lambda(s) - \lambda(t) > (s-t)/2 > 0, \quad s > t \geq t_0.$$

Таким образом, при $t \geq t_0$ обратная функция $\lambda^{-1}(t)$ определена.

Положим $s = \lambda(t) = t + l(t), \quad t > t_0$. Из условия (3.2.1) следует, что

$$t = (1 + o(1))s, \quad t \to \infty. \tag{3.2.6}$$

Далее,

$$s - t = l(t) = l(s) + \frac{l(t) - l(s)}{t - s}(t - s),$$

$$t = s - l(s) + \frac{L(s,t)l(s)}{1 + L(s,t)},$$

где $L(s,t) = \frac{l(t)-l(s)}{t-s}$. С учетом (3.2.1) и (3.2.6) получим

$$t = s - l(s) + O(s^{\alpha-1}l(s)), \quad s \to +\infty,$$

Случай $s < t < -t_l$ рассматривается аналогично.

2) Свойство разделенности последовательности Λ следует из оценки

$$|\lambda(s) - \lambda(t)| > \frac{|s-t|}{2},$$

справедливой при $|s|$, $|t| \geq t_0$.

3) Для $R > 0$ положим

$$n_R = \max\{n \in \mathbb{N} : \ \lambda_n < R \ \text{ и } \ \lambda_{-n} > -R\}.$$

Ясно, что

$$n_R < R, \quad n_R + 1 - |l(n_R + 1)| < R, \quad n_R + 1 + |l(n_R + 1)| \geq R.$$

Отсюда заключаем, что

$$n_R = (1 + o(1))R, \quad R \to \infty, \tag{3.2.7}$$

так как, в силу (3.2.1),

$$l(t) = O(t^\alpha), \quad t \to +\infty.$$

Напишем представление

$$\sum_{|\lambda_k|<R} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{j=1}^{n_R} \left(\frac{1}{\lambda_{-j}} + \frac{1}{\lambda_j} \right) + \sum_{\substack{|\lambda_k|<R, \\ |k|>n_R}} \frac{1}{\lambda_k} = S_{1,R} + S_{2,R}.$$

Учитывая (3.2.7), выводим, что

$$|S_{1,R}| \le \sum_{j=1}^{n_R} \left| \frac{1}{\lambda_{-j}} + \frac{1}{\lambda_j} \right| \le \sum_{j=1}^{n_R} \frac{2|l(j)|}{|j^2 - l^2(j)|} = O\left(\sum_{j=1}^{n_R} \frac{1}{j^{2-\alpha}} \right). \tag{3.2.8}$$

Далее, пусть K – множество значений индекса k в сумме $S_{2,R}$. Для каждого $k \in K$ верны неравенства

$$k + |l(k)| \ge R, \quad k - |l(k)| < R.$$

Следовательно, число слагаемых в сумме $S_{2,R}$ есть $O(R^\alpha)$, а каждое слагаемое удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{|\lambda_k|} = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Поэтому

$$|S_{2,R}| = O(R^{\alpha-1}) \quad R \to +\infty.$$

Отсюда и из (3.2.8) вытекает утверждение пункта 3).

Утверждения пунктов 4)–6) являются следствиями уже установленных свойств последовательности $\{\lambda_k\}$. □

Замечание 3.1. Ясно, что изменение конечного числа точек $\{\lambda_k\}$ не влияет на асимптотику функции $\ln|\varphi|$, связанную с вопросами включения $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ и обратимости φ по Эренпрайсу. Учитывая это замечание, изменим функцию l на отрезке $[0; t_0]$ так, чтобы функция λ стала непрерывной и строго возрастающей на всей вещественной оси, $\lambda(0) = 0$ и измененная функция l являлась бы функцией ограниченной вариации на отрезке $[0; t_0]$:

$$\bigvee_0^{t_0}(l) := \sup \sum_{j=0}^{n} |l(\tau_{j+1}) - l(\tau_j)| < +\infty, \qquad (3.2.9)$$

где супремум берется по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[0; t_0]$:

$$\tau_0 := 0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < t_0 =: \tau_{n+1}.$$

В силу леммы 3.5 и теоремы F (см. параграф 3.1), формулой (3.2.3) определяется целая функция экспоненциального типа, и для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место представление

$$\ln |\varphi(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t} \mathrm{d}t. \qquad (3.2.10)$$

Положим

$$d_1 = \min\{\lambda_1, -\lambda_{-1}, d_0/2\}.$$

Докажем, что для наших целей считающие функции

$$n(0,t) = [\lambda^{-1}(t)] - [\lambda^{-1}(-t)], \quad n(x,t) = [\lambda^{-1}(x+t)] - [\lambda^{-1}(x-t)]$$

в представлении (3.2.10) можно заменить на выражения

$$(\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)), \quad (\lambda^{-1}(x+t) - \lambda^{-1}(x-t)),$$

соответственно.

Лемма 3.2. *Пусть функция l удовлетворяет условию* (3.2.1). *Тогда для произвольного фиксированного $\delta_0 \in (0; d_1)$ справедливо асимптотическое соотношение*

$$\int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t - \int_{\delta_0}^\infty \frac{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)}{t} \mathrm{d}t + \\ + \int_{\delta_0}^\infty \frac{\lambda^{-1}(x+t) - \lambda^{-1}(x-t)}{t} \mathrm{d}t = O(\ln |x|) \qquad (3.2.11)$$

при $|x| \to +\infty$, и $|x - \lambda_k| \geq \delta_0$, $k \in \mathbb{Z}'$.

Доказательство. Для $|x-\lambda_k|>\delta_0$, $k\in\mathbb{Z}'$, очевидно, будет
$$\int_0^\infty \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\delta_0}^\infty \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t.$$
Учитывая (1.11), для произвольного $\sigma>0$ получаем оценку
$$\Big|\int_{\delta_0}^{|x|^\sigma} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\delta_0}^{|x|^\sigma} \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t+$$
$$\int_{\delta_0}^{|x|^\sigma} \frac{\lambda^{-1}(x+t)-\lambda^{-1}(x-t)}{t}\mathrm{d}t\Big|\le 4\max(\sigma,\,1)\ln\left(\delta_0^{-1}|x|\right). \quad (3.2.12)$$
Зафиксируем $\sigma>1$ и положим $\zeta(t)=\frac{1}{2}-\{\lambda^{-1}(t)\}$, $t\in\mathbb{R}$, где $\{a\}$ — дробная часть числа $a\in\mathbb{R}$. Имеем
$$\int_{|x|^\sigma}^\infty \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{|x|^\sigma}^\infty \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t+$$
$$+\int_{|x|^\sigma}^\infty \frac{\lambda^{-1}(x+t)-\lambda^{-1}(x-t)}{t}\mathrm{d}t=$$
$$=\int_{|x|^\sigma}^\infty \frac{\zeta(t)-\zeta(-t)+\zeta(x+t)-\zeta(x-t)}{t}\mathrm{d}t. \quad (3.2.13)$$

Покажем, что для первообразной $Z(t)=\int_0^t\zeta(\tau)\mathrm{d}\tau$ справедлива оценка
$$|Z(t)|=O(|t|^\alpha),\quad |t|\to+\infty. \quad (3.2.14)$$
Действительно, используя известную оценку для интеграла Стилтьеса и принимая во внимание условие (3.2.1) и соотношения (3.2.6), (3.2.9) получим
$$|Z(t)|=\left|\int_0^t\left(\frac{1}{2}-\{\lambda^{-1}(\tau)\}\right)\mathrm{d}\tau\right|=\left|\int_0^{\lambda^{-1}(t)}\left(\frac{1}{2}-\{y\}\right)\mathrm{d}\left(y+l(|y|)\right)\right|\le$$
$$\le\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\bigvee_0^{|\lambda^{-1}(t)|}(l)=O(|\lambda^{-1}(t)|^\alpha)=O(|t|^\alpha),$$
при $|t|\to+\infty$. Из оценки (3.2.14), представления (3.2.13), интегрируя по частям, выводим, что
$$\int_{|x|^\sigma}^\infty \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{|x|^\sigma}^\infty \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t+$$
$$+\int_{|x|^\sigma}^\infty \frac{\lambda^{-1}(x+t)-\lambda^{-1}(x-t)}{t}\mathrm{d}t=O(1), \quad (3.2.15)$$

при $|x| \to +\infty$. Утверждение леммы следует из оценок (3.2.12) и (3.2.15). $\square$

Замечание 3.2. Пусть точка $z = x + \mathrm{i}y$ такова, что $|z - \lambda_k| = \delta_0$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}'$, число δ_0 такое же, как в лемме 3.2. Тогда, очевидно,

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{\delta_0}^\infty \frac{n(0,t) - n(x,t^*)}{t}\mathrm{d}t,$$

где $t^* = \sqrt{t^2 - y^2}$, $y \in [0;\delta_0]$.

Рассуждая точно так же, как и при доказательстве леммы 3.2, получаем, что

$$\int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{\delta_0}^\infty \frac{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t + \\ + \int_{\delta_0}^\infty \frac{\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)}{t}\mathrm{d}t = O(\ln|z|), \quad (3.2.16)$$

когда $z \to \infty$ по множеству $\{z: \ |z - \lambda_k| = \delta_0, \ k \in \mathbb{Z}'\}$.

Доказательство теоремы 3.1. Принимая во внимание определение алгебры $\mathbf{P}_\infty$ и аналитический критерий Л.Эренпрайса (теорема E, приведенная нами в п.3 параграфа 1.3), видим, что требуемое утверждение будет следовать из асимптотического соотношения

$$\ln|\varphi(z)| = O(\ln|z|), \quad (3.2.17)$$

при $|z| \to \infty$, по множеству $|z - \lambda_k| = \delta_0$, $k \in \mathbb{Z}'$, а $\delta_0 > 0$ такое же, как в лемме 3.2.

В силу (3.2.16), соотношение (3.2.17) эквивалентно тому, что оценка

$$\int_{\delta_0}^\infty \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t}\mathrm{d}t = O(\ln|x|) \quad (3.2.18)$$

при $|k| \to \infty$ имеет место для всех $y \in [0;\delta_0]$ и x таких, что $(x - \lambda_k)^2 + y^2 = \delta_0^2$, $k \in \mathbb{Z}'$; здесь обозначено $t^* = \sqrt{t^2 - y^2}$.

Представим интеграл из левой части (3.2.18) в виде суммы:

$$\int_{\delta_0}^\infty \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t}\mathrm{d}t = I_1 + I_2 + I_3 = \\ = \left(\int_{\delta_0}^{\frac{|x|}{2}} + \int_{\frac{|x|}{2}}^{2|x|} + \int_{2|x|}^\infty\right) \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t}\mathrm{d}t$$

Оценки для слагаемых I_1, I_2, I_3 проведем при $x > 0$, случай $x < 0$ рассматривается аналогично. Принимая во внимание соотношения (3.2.4), (3.2.5), для слагаемого I_1 при $x \to +\infty$ получим

$$I_1 = \int_{\delta_0}^{\frac{x}{2}} \frac{2(t^* - t) - (l(x + t^*) - l(x - t^*))}{t} \mathrm{d}t + O(1) = O(\ln x). \quad (3.2.19)$$

Оценим слагаемое I_3. Для этого фиксируем $\sigma > 1$ и разобьем I_3 на сумму двух интегралов:

$$I_3 = I_{31} + I_{32} =$$
$$= \left(\int_{2x}^{x^\sigma} + \int_{x^\sigma}^{\infty}\right) \frac{(\lambda^{-1}(x + t^*) - \lambda^{-1}(x - t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t.$$

В силу (3.2.4) и (3.2.5), при $x \to +\infty$ будет

$$I_{31} = \int_{2x}^{x^\sigma} \frac{2(t^* - t) - (l(t^* + x) - l(t^* - x))}{t} \mathrm{d}t + O(1).$$

Используя условие (3.2.4), получаем оценку

$$|I_{31}| \leq \mathrm{const} \int_{\sqrt{4x^2 - y^2}}^{\sqrt{x^{2\sigma} - y^2}} \frac{x \ln x}{t^*(t^* - x)} \mathrm{d}t^* + O(1) = O(\ln x).$$

Аналогично, для интеграла I_{32} выводим оценку

$$I_{32} = O(1).$$

Таким образом,

$$I_3 = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \quad (3.2.20)$$

Слагаемое I_2 представим в виде

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} =$$
$$\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x-1} + \int_{x-1}^{x+1} + \int_{x+1}^{2x}\right) \frac{(\lambda^{-1}(x + t^*) - \lambda^{-1}(x - t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t.$$

Нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$I_{22} = O(1), \quad x \to +\infty. \quad (3.2.21)$$

Для интеграла I_{21}, учитывая (3.2.4) и (3.2.5), получим

$$I_{21} = \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{2(t^* - t) - (l(x+t^*) - l(x-t^*))}{t} \mathrm{d}t + O(1) =$$

$$= -\int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x+t^*) - l(x)}{t} \mathrm{d}t - \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t + O(1) =$$

$$= -\int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Далее,

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t = \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t)}{t} \mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x-t) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{x}} \frac{l(x) - l((1-\tau)x)}{\tau} \mathrm{d}\tau + O(1),$$

когда $x \to +\infty$. Полагая $x = e^s$, $\delta = 1 - \tau$ и используя условие (3.2.4), последний интеграл оценим следующим образом:

$$\left| \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{x}} \frac{l(x) - l((1-\tau)x)}{\tau} \mathrm{d}\tau \right| = \left| \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{l(e^s) - l((e^{s+\ln\delta})}{1-\delta} \mathrm{d}\delta \right| \leq$$

$$\leq \mathrm{const} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(e^{s^*}) \cdot e^{s^*} \cdot (-\ln\delta)}{e^{s^*}(1-\delta)} \mathrm{d}\delta = O(\ln x),$$

здесь $s^* \in [s + \ln\delta; s]$. Окончательно получаем

$$I_{21} = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{3.2.22}$$

Аналогично доказывается оценка

$$I_{23} = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{3.2.23}$$

Из оценок (3.2.21), (3.2.22), (3.2.23) следует, что

$$I_2 = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{3.2.24}$$

В свою очередь, из соотношений (3.2.19), (3.2.20), (3.2.24) вытекает оценка (3.2.18), а значит, и оценка (3.2.17).

□

2. Рассмотрим класс возмущающих функций l, для которого условие, эквивалентное соотношению (3.2.4), будет критерием того, что соответствующая функция φ будет делителем в алгебре Шварца.

Пусть $l : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ — положительная вогнутая функция, $l(0) = 0$. Тогда l – абсолютно непрерывна, и значит, почти всюду на $(0;+\infty)$ дифференцируема. Обозначим через E — множество тех значений аргумента $t \in (0;+\infty)$, для которых существует производная $l'(t)$, и положим

$$p(t) = \begin{cases} l'(t), & t \in E, \\ \inf\{l'(s),\ s:\ s \in E,\ s < t\}, & t \in (0;+\infty) \setminus E. \end{cases}$$

Функция p убывает на положительной полуоси и

$$l(t) = \int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.2.25}$$

Теорема 3.2. *Пусть l — положительная вогнутая функция на $[0;+\infty)$, $l(0) = 0$, и*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln|l(t)|}{\ln t} \in [0;1/2), \tag{3.2.26}$$

а функция φ определена формулой (1.3).

Для того, чтобы φ принадлежала алгебре $\mathbf{P}_\infty$ и была ее делителем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{p(t)t}{\ln t} = O(1), \quad t \to +\infty. \tag{3.2.27}$$

Доказательство. Достаточность. Из представления (3.2.25) и условия (3.2.27) следует, что функция l удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1, согласно которой функция $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ и является делителем этой алгебры.

Необходимость. Предположим, что условие (3.2.27) не выполнено: найдется последовательность

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots \to +\infty,$$

для которой

$$p(x_n) \geq \frac{n \ln x_n}{x_n}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.2.28}$$

При этом, так как p — убывающая функция, можно считать, что

$$\left|\frac{x_n}{2} - \lambda_k\right| \geq \delta_0, \quad k,\ n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $x > 0$. Из представления (3.2.10) и асимптотического равенства (3.2.11) следует, что

$$\ln|\varphi(x)| = \int_{\delta_0}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)}{t} \mathrm{d}t - \int_{\delta_0}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(x+t) - \lambda^{-1}(x-t)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x)$$

при $x \to +\infty$ и $|x - \lambda_k| \geq \delta_0$, $k = 1, 2, \ldots$ Отсюда, учитывая соотношение (3.2.5) и условие (3.2.26), при указанных x можем написать

$$\ln|\varphi(x)| = \int_{\delta_0}^{\infty} \frac{l(x+t) - l(|x-t|)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x).$$

Далее, l — возрастающая функция, поэтому из последнего равенства выводим, что

$$\ln\left|\varphi\left(\frac{x_n}{2}\right)\right| \geq \int_{\frac{x_n}{8}}^{\frac{x_n}{4}} \frac{l\left(\frac{x_n}{2} + t\right) - l\left(\frac{x_n}{2} - t\right)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x_n) \geq$$

$$\geq \int_{\frac{x_n}{8}}^{\frac{x_n}{4}} \frac{2p(3x_n/4)t}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x_n),$$

при $n \to \infty$. Откуда, с учетом (3.2.28) и того, что p — убывающая функция, следует оценка

$$\ln\left|\varphi\left(\frac{x_n}{2}\right)\right| \geq \frac{n \ln(x_n/2)}{4} + O(\ln|x_n|), \quad n \to \infty,$$

то есть функция φ имеет вдоль вещественной оси рост выше полиномиального, и следовательно, $\varphi \notin \mathbf{P}_\infty$.

$\square$

3.2.2 Медленно убывающая функция, не являющаяся очень медленно убывающей.

Выберем и зафиксируем какую-нибудь подпоследовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{N}$, удовлетворяющую условиям

$$x_1 > 2, \quad \ln x_n > 2x_{n-1}, \; n = 2, 3, \ldots \tag{3.2.29}$$

Положительную последовательность $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, определим следующим образом: она получается из натуральной последовательности заменой всех чисел

$$m \in \mathbb{N} \bigcap (x_n - [\ln x_n]; x_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

на числа

$$x_n - 1 + (1/[\ln x_n]),\ x_n - 1 + (2/[\ln x_n]), \dots, x_n - 1 + ([\ln x_n] - 1)/[\ln x_n]),$$

при каждом $n = 1, 2, \dots$ Теперь положим $\lambda_{-k} = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots,$ и

$$\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}'}.$$

Последовательность Λ имеет плотность 2 и удовлетворяет условиям теоремы F. Поэтому формула

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right) \tag{3.2.30}$$

определяет целую функцию экспоненциального типа π, и

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^{\infty} \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t}\mathrm{d}t,$$

где символом $n(z,t)$ обозначено число точек $\lambda_k \in \Lambda$ в круге $|w - z| \le t$.

Теорема 3.3. *Функция φ содержится в алгебре $\mathbf{P}_\infty$ и является ее делителем (то есть медленно убывающей функцией), но не является очень медленно убывающей.*

Докажем сначала одну лемму.

Лемма 3.3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}'}$ — вещественная четная последовательность, удовлетворяющая условию*

$$n(0,t) - 2t = O(\ln t), \quad t \to +\infty. \tag{3.2.31}$$

Тогда для произвольного $\delta > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\delta|x|} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t}\mathrm{d}t + O_\delta(\ln|x|), \quad |x| \to +\infty, \tag{3.2.32}$$

при этом постоянная в оценке $O_\delta(\ln|x|)$ зависит от δ.

Доказательство. Нетрудно видеть, что для последовательности Λ выполнены условия теоремы F, поэтому интеграл в левой части соотношения (3.2.32) корректно определен.

Пусть $\delta > 0$, $x > 0$, $M > \max\{2, \delta\}$. Имеем

$$\int_{\delta x}^{\infty} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t = I_1 + I_2 =$$
$$= \int_{\delta x}^{Mx} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t + \int_{Mx}^{\infty} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t. \quad (3.2.33)$$

В силу условия (3.2.31) будет

$$I_1 = O_{\delta,M}(\ln x), \quad x \to +\infty. \quad (3.2.34)$$

Напомним, что для $t > 0$ символом $n^+(t,x)$ мы обозначаем число точек λ_k в промежутке $(t; t+x]$. Так как Λ — четная последовательность, можем написать

$$\int_{Mx}^{\infty} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t = -x \int_{Mx}^{\infty} \frac{n^+(t,x) - x}{t(t+x)} \mathrm{d}t + \int_{(M-1)x}^{Mx} \frac{n^+(t,x) - x}{t+x} \mathrm{d}t -$$
$$- x \int_{Mx}^{\infty} \frac{x}{t(t+x)} \mathrm{d}t + \int_{(M-1)x}^{Mx} \frac{x}{t+x} \mathrm{d}t = O_M(\ln x), \quad x \to +\infty. \quad (3.2.35)$$

Из (3.2.33)–(3.2.35) следует утверждение леммы.

□

Доказательство теоремы 3.3. Фиксируем $\delta \in (0; 1/2)$. Используя теорему F и лемму 3.3, для функции φ, определенной формулой (3.2.30), и $x > 0$ получим

$$\ln|\varphi(x)| = \int_0^{\delta x} \frac{n(0,t) - 2t}{t} \mathrm{d}t - \int_0^{\delta x} \frac{n(x,t) - 2t}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x) \quad (3.2.36)$$

Откуда выводим, что

$$\ln|\varphi(x)| \le \int_0^{\delta x} \frac{2t - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x), \quad x \to +\infty. \quad (3.2.37)$$

Если значение $t \in [0; \delta x]$ таково, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ хотя бы одно из множеств

$$[x - t; x + t] \bigcap [x_n - [\ln x_n]; x_n], \quad [x_n - [\ln x_n]; x_n] \setminus [x - t; x + t] \quad (3.2.38)$$

пусто, то, в силу определения множества Λ, будет

$$(2t - n(x,t)) \le 1.$$

Если для $t \in [0;\delta x]$ существует значение $n \in \mathbb{N}$ (самое большее, одно!) такое, что оба множества (3.2.38) не пусты, то будем использовать оценку

$$(2t - n(x,t)) \leq 2t,$$

замечая при этом, что мера множества таких значений $t \in [0;\delta x]$ есть величина $O(\ln x)$ когда $x \to +\infty$.

Из вышесказанного для первого слагаемого в правой части (3.2.36) получим

$$\int_0^{\delta x} \frac{2t - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t \leq O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

И следовательно, $\varphi \in \mathcal{P}$.

Пусть $M_0 > 0$. Из определений x_n и λ_k следует, что для всех достаточно больших значений $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in [x_n - M_0; x_n + M_0]$ будет

$$\int_0^{\delta x} \frac{2t - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t \leq \int_{M_0+1}^{[\ln x_n]-M_0} \frac{2t - [\ln x_n]}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x) =$$
$$= -[\ln x_n] \ln \frac{[\ln x_n] - M_0}{M_0 + 1} + O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Отсюда и из оценки (3.2.37) выводим, что функция φ не является очень медленно убывающей.

Пусть $x > 0$ таково, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполнены неравенства

$$|x - x_n| > [\ln x_n], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2.39}$$

$$x - \lambda_k \geq \varepsilon_0, \quad k \in \mathbb{Z}'. \tag{3.2.40}$$

Если $x \to +\infty$ по множеству, определяемому соотношениями (3.2.39), (3.2.40), то

$$\int_0^{\delta x} \frac{2t - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t \geq -\int_{\ln(1-\delta)x}^{2\ln x} \frac{\ln x}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x) = O(\ln x),$$

Из этой оценки и соотношения (3.2.36), учитывая (3.2.29), получаем

$$\ln|\varphi(x)| \geq \int_0^{\delta x} \frac{n(0,t) - 2t}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x) \geq -\sum_{x_j \leq \delta x} 2\ln x_j \int_{x_j - [\ln x_j]}^{x_j + 1} \frac{\mathrm{d}t}{t} +$$
$$+ O(\ln x) \geq \sum_{x_j \leq \delta x} \frac{-8\ln^2 x_j}{x_j} + O(\ln x) = O(\ln x),$$

когда $x \to +\infty$ по множеству (3.2.39)–(3.2.40). Таким образом, для φ выполнено определение медленно убывающей функции.

Теорема 3.3 доказана.

$\square$

Замечание 3.3. Если в приведенном выше построении отталкиваться не от последовательности $\mathbb{N}$, а от последовательности положительных нулей очень медленно убывающей функции из теоремы 3.1, утверждение теоремы 3.3 останется справедливым. Таким образом, мы получаем целый класс медленно убывающих функций, не являющихся очень медленно убывающими.

Отметим также, что на основе конструкции из теоремы 3.3 можно построить следующий пример:

$$\varphi(z) = \sin \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right)^k \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{2^k + j}\right)^{-1},$$

для которого нетрудно прямо, без использования представления С.Ю. Фаворова (теорема F), получить все нужные оценки.

3.3 Сдвиги целочисленной последовательности — нулевые множества делителей пространства $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$

3.3.1 Вспомогательные сведения

1. Пусть функция $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln |l(t)|}{\ln t} = \alpha < 1, \tag{3.3.1}$$

$$l(t') - l(t'') = o(t' - t''), \quad t', t'' \to \infty. \tag{3.3.2}$$

Положим

$$\lambda(t) = t + l(|t|), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3.3}$$

$$\lambda_k = \lambda(k), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.3.4}$$

Для $z \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$ и последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$, обозначим, как обычно, символом $n(z,t)$ число точек λ_k в круге $|w - z| \leq t$, символами $n^+(0,t)$, $n^-(0,t)$ — число точек λ_k в промежутках $[0;t]$ и $[-t;0]$, соответственно.

Нам понадобится ряд свойств функции λ, последовательности (3.3.4) и считающих функций $n^+(0,t)$, $n^-(0,t)$, $n(0,t)$.

Лемма 3.4. *Пусть функция* $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* (3.3.1)–(3.3.2). *Тогда*

1) *найдется* $t_0 > 0$ *такое, что функция* $\lambda(t) = t + l(|t|)$ *строго возрастает при* $t \geq t_0$ *и при* $t \leq -t_0$, *и, следовательно, при всех* t, $|t| \geq t_0$ *определена обратная функция* $\lambda^{-1}(t)$, *причем*

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|t|) + o(l(|t|)), \quad |t| \to \infty; \tag{3.3.5}$$

если же вместо (3.3.1)–(3.3.2) *выполнено условие*

$$l(t) - l(s) = O(t^\alpha - s^\alpha), \quad t, s \to \infty, \quad \text{при некотором} \quad \alpha \in (0; 1), \tag{3.3.6}$$

то справедливо следующее уточнение соотношения (3.3.5)*:*

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|t|) + O(|t|^{\alpha-1} l(|t|)), \quad |t| \to \infty; \tag{3.3.7}$$

2) *точки последовательности* Λ *разделены: существует число* $d_0 > 0$ *такое, что*

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geq d_0, \ m, n \in \mathbb{Z}', \ m \neq n,$$

где, как обычно, $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*;*
3) *существует конечный предел*

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<R} \frac{1}{\lambda_k};$$

4) *при всех* $t > t_0$ *будет* $n^+(0,t) = [\lambda^{-1}(t)]$, $\quad n^-(0,t) = -[\lambda^{-1}(-t)]$, *где* $[a]$ — *целая часть числа* $a \in \mathbb{R}$*;*
5) $n(0,t) = O(t)$, $t \to \infty$*;*
6) $n(0,t+1) - n(0,t) = o(t)$, $t \to \infty$.

Доказательство. Для функции l, удовлетворяющей вместо системы условий (3.3.1)–(3.3.2) более сильному условию (3.3.6) утверждения 1) – 6) леммы 3.4 были доказаны выше в лемме 3.1. Анализируя ее доказательство, легко убедиться в том, что при замене требования (3.3.6) системой условий (3.3.1)–(3.3.2), остается справедливым соотношение (3.3.5). В свою очередь, доказательство утверждений 2)–6) леммы 3.1 опирается только на условие (3.3.1) и соотношение (3.3.5). $\square$

Замечание 3.4. Если функция l удовлетворяет (3.3.1)–(3.3.2), а функция λ определяется по ней формулой (3.3.3), то, как видно из доказательства леммы 3.1, имеет место следующее соотношение для обратной функции

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|t|) + \frac{L(t,s)l(t)}{1 + L(t,s)}, \quad |t| \geq t_0, \tag{3.3.8}$$

где $s = \lambda^{-1}(t)$, $L(t,s) = \frac{l(s)-l(t)}{s-t}$.

Пусть функция l удовлетворяет (3.3.1)–(3.3.2), а функция λ и последовательность $\{\lambda_k\}$ определены формулами (3.3.3), (3.3.4), соответственно. Тогда, в силу леммы 3.5 и теоремы F (параграф 3.1), формула

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \tag{3.3.9}$$

корректно определяет целую функцию экспоненциального типа, и для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место представление

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t} \mathrm{d}t. \tag{3.3.10}$$

Замечание 3.5. Как и в замечании 3.1, изменим функцию l на конечном отрезке $[0; t_0]$ так, чтобы функция λ стала непрерывной и строго возрастающей на всей вещественной оси, $\lambda(0) = 0$, и измененная функция l являлась бы функцией ограниченной вариации на $[0; t_0]$ (а значит, в силу (3.3.2), на любом конечном отрезке $[a; b] \subset [0; +\infty)$). Такое изменение l приведет к изменению не более, чем конечного числа точек последовательности $\{\lambda_k\}$. И следовательно, к изменению асимптотики функции $\ln|\varphi|$ на величину порядка $O(\ln|z|)$ при $|z| \to \infty$.

Положим

$$d_1 = \min\{\lambda_1, -\lambda_{-1}, d_0/2\}.$$

В лемме 3.2 было устанавлено, что считающие функции

$$n(0,t) = [\lambda^{-1}(t)] - [\lambda^{-1}(-t)], \quad n(x,t) = [\lambda^{-1}(x+t)] - [\lambda^{-1}(x-t)]$$

в представлении (3.3.10) можно заменить (асимптотически) на выражения

$$(\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)), \quad (\lambda^{-1}(x+t) - \lambda^{-1}(x-t)),$$

соответственно.

В дальнейшем нам понадобится аналог замечания 3.2:

Замечание 3.6. Пусть точка $z = x + \mathrm{i}y$ лежит на окружности $|z - \lambda_k| = \delta_0$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}'$, число δ_0 такое же, как в лемме 3.2. Тогда, очевидно,

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t} \mathrm{d}t = \int_{\delta_0}^\infty \frac{n(0,t) - n(x,t^*)}{t} \mathrm{d}t,$$

где $t^* = \sqrt{t^2 - y^2}$, $y \in [0; \delta_0]$.

Аналогично тому, как было доказано соотношение (3.2.11), выводится, что

$$\int_0^\infty \frac{n(0,t)-n(z,t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{\delta_0}^\infty \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}\mathrm{d}t + \\ + \int_{\delta_0}^\infty \frac{\lambda^{-1}(x+t^*)-\lambda^{-1}(x-t^*)}{t}\mathrm{d}t = O(\ln|z|), \quad (3.3.11)$$

когда $z\to\infty$, $z\in E$, где

$$E = \{z:\ |z-\lambda_k| = \delta_0,\ k\in\mathbb{Z}'\}\bigcup\{z=x\in\mathbb{R}:\ |x-\lambda_k|\ge\delta_0,\ \forall k\in\mathbb{Z}'\}. \quad (3.3.12)$$

2. Теоремы об асимптотике $\ln|\varphi(z)|$.

Пусть $\nu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — канонический вес. Напомним, что канонический вес ν называется *строгим*, если для некоторого $K>1$

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\nu(Kt)}{\nu(t)} < K. \quad (3.3.13)$$

Всюду далее функции $l:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, λ и последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}'}$ те же, что и в п.3.3.1; в частности, l удовлетворяет (3.3.6).

Теорема 3.4. *Предположим, что существуют дифференцируемая функция* $\mu:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ *и строгий вес* ν, *со свойствами*

$$\mu'(t) = O\left(\frac{\mu(t)}{t}\right), \quad t\to\infty, \quad (3.3.14)$$

$$\int^\infty \frac{\nu(t)l(t)}{t^2}\mathrm{d}t < \infty. \quad (3.3.15)$$

При этом

$$l(t)-l(s) = O(\mu(t)-\mu(s)), \quad t,s\to\infty, \quad (3.3.16)$$

$$\mu(t) = O(\nu(t)), \quad t\to\infty, \quad (3.3.17)$$

Тогда для функции φ, *определенной формулой* (3.3.9), *верно соотношение*

$$\ln|\varphi(z)| = O(\nu(|z|)), \quad (3.3.18)$$

когда $|z|\to\infty$, $z\in E$, *множество* E *определяется формулой* (3.3.12).

Доказательство. С учетом того, что ν — канонический вес, из леммы 3.2 и замечания 3.6 следует, что соотношение (3.3.18) эквивалентно оценке

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t = O(\nu(|x|)) \tag{3.3.19}$$

при $|z| \to \infty$, $z = x + \mathrm{i}y \in E$, где, как и выше, $t^* = \sqrt{t^2 - y^2}$, $y \in [0; \delta_0]$.

Представим интеграл из левой части (3.3.19) в виде суммы:

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t = I_1 + I_2 + I_3 =$$
$$= \left(\int_{\delta_0}^{\frac{|x|}{2}} + \int_{\frac{|x|}{2}}^{2|x|} + \int_{2|x|}^{\infty} \right) \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t. \tag{3.3.20}$$

Оценки для слагаемых I_1, I_2, I_3 проведем при $x > 0$ (случай $x < 0$ рассматривается аналогично). Принимая во внимание соотношения (3.3.7), (3.3.14), (3.3.16)–(3.3.17), для слагаемого I_1 при $x \to \infty$ получим

$$I_1 = \int_{\delta_0}^{\frac{x}{2}} \frac{2(t^* - t) - (l(x+t^*) - l(x-t^*))}{t} \mathrm{d}t + O(1) = O(\nu(x)). \tag{3.3.21}$$

Оценим слагаемое I_3. Для этого разобьем его на сумму двух интегралов:

$$I_3 = I_{31} + I_{32},$$

где

$$I_{31} = \int_{2x}^{\infty} \frac{2(t^* - t) - (l(t^*+x) - l(t^*-x))}{t} \mathrm{d}t, \qquad I_{32} = I_3 - I_{31}.$$

Из соотношения (3.3.8) и условий (3.3.14)–(3.3.17) выводится оценка

$$I_{32} = O(1), \quad x \to \infty. \tag{3.3.22}$$

Используя (3.3.14), (3.3.16), (3.3.17) и принимая во внимание определение t^*, получаем

$$I_{31} = O\left(\int_{2x}^{\infty} \frac{\nu(t)x}{t^2} \mathrm{d}t \right) + O(1) =$$
$$= O\left(\int_{2}^{\infty} \frac{\nu(\tau x)}{\tau^2} \mathrm{d}\tau \right) + O(1) = O(\nu(x)), \quad x \to \infty. \tag{3.3.23}$$

Последнее равенство в (3.3.23) следует из условия строгости веса ν (см. [1, 1.3.5(2)]).

Из (3.3.22), (3.3.23) выводим оценку

$$I_3 = O(\nu(x)), \quad x \to \infty. \tag{3.3.24}$$

Для интеграла I_2 напишем представление

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} =$$
$$\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x-1} + \int_{x-1}^{x+1} + \int_{x+1}^{2x}\right) \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$I_{22} = O(\nu(x)), \quad x \to \infty. \tag{3.3.25}$$

Для I_{21}, учитывая (3.3.7), а затем (3.3.14) и (3.3.16)–(3.3.17), получим

$$I_{21} = \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{(\lambda^{-1}(x+t^*) - \lambda^{-1}(x-t^*)) - (\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t))}{t} \mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{2(t^* - t) - (l(x+t^*) - l(x-t^*))}{t} \mathrm{d}t + O(\nu(x)) =$$
$$= -\int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x+t^*) - l(x)}{t} \mathrm{d}t - \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t + O(\nu(x)) =$$
$$= -\int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t + O(\nu(x)), \quad x \to \infty.$$

Далее,

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t = \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x) - l(x-t)}{t} \mathrm{d}t +$$
$$+ \int_{\frac{x}{2}}^{x-1} \frac{l(x-t) - l(x-t^*)}{t} \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{x}} \frac{l(x) - l((1-\tau)x)}{\tau} \mathrm{d}\tau + O(1),$$

когда $x \to \infty$. Полагая $x = e^s$, $\delta = 1 - \tau$ и используя условия (3.3.14), (3.3.16), (3.3.17), последний интеграл оценим следующим образом:

$$\left| \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{x}} \frac{l(x) - l((1-\tau)x)}{\tau} \mathrm{d}\tau \right| = \left| \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{l(e^s) - l((e^{s+\ln\delta})}{1-\delta} \mathrm{d}\delta \right| \le$$
$$\le \mathrm{const} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mu(e^{s^*}) e^{s^*} \cdot (-\ln\delta)}{e^{s^*}(1-\delta)} \mathrm{d}\delta = O(\nu(x)),$$

здесь $s^* \in [s + \ln\delta; s]$. Окончательно получаем

$$I_{21} = O(\nu(x)), \quad x \to \infty. \tag{3.3.26}$$

Аналогично доказывается, что

$$I_{23} = O(\nu(x)), \quad x \to \infty. \tag{3.3.27}$$

Из оценок (3.3.25)–(3.3.27) следует, что

$$I_2 = O(\nu(x)), \quad x \to \infty. \tag{3.3.28}$$

В свою очередь, из соотношений (3.3.21), (3.3.24), (3.3.28) вытекает оценка (3.3.19), а значит, и оценка (3.3.18).

□

Замечание 3.7. Отметим, что функция μ, фигурирующая в формулировке теоремы 3.4, не обязательно является строгим весом, и наоборот, строгий вес ν не обязательно удовлетворяет соотношению (3.3.14). Это обосновывает наличие в условии теоремы 3.4 промежуточного веса μ.

Замечание 3.8. Для справедливости (3.3.15) (при условии, что выполнены соотношения (3.3.16), (3.3.17)), достаточно, например, чтобы порядок функции ν был меньше 1/2, то есть

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\nu(x)}{\ln x} < 1/2$$

С другой стороны, теорема 3.4 справедлива при замене условия (3.3.15) следующим более слабым требованием

$$\int_{x^{1/\beta}}^{\infty} \frac{\nu(t)l(t)}{t^2} = O(\omega(x)), \quad x \to \infty, \tag{3.3.29}$$

где

$$\beta = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln|\nu(t)|}{\ln t};$$

здесь $\beta < 1$, так как ν — строгий вес. Действительно, в силу (3.3.8), (3.3.14), (3.3.16), (3.3.17), будет

$$I_{32} = O\left(\int_{2x}^{\infty} \frac{\nu(t)l(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right) = \left(\int_{2x}^{x^{1/\beta}} + \int_{x^{1/\beta}}^{\infty}\right) \frac{\nu(t)l(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

При этом, из (3.3.16), (3.3.17) следует, что

$$\int_{2x}^{x^{1/\beta}} \frac{\nu(t)l(t)}{t^2}\mathrm{d}t = O\left(\int_{2x}^{x^{1/\beta}} \frac{\nu^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right), \quad x \to \infty.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся тем, что строгость веса ν эквивалентна соотношению

$$\lim_{\tau\to\infty}\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\nu(\tau x)}{\tau\nu(x)}=0$$

(см. [1, п.1.3.5(2)]) Имеем

$$\int_{2x}^{x^{1/\beta}}\frac{\nu^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t=O\left(\frac{\nu(x)}{x}\int_{2}^{x^{1/\beta-1}}\frac{\tau^\beta x^\beta}{\tau}\mathrm{d}\tau\right)=O(\nu(x)),\quad x\to\infty.$$

Из этой оценки и (3.3.29) следует (3.3.22).

Напомним, что выпуклая функция $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ такая, что

$$\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\infty, \tag{3.3.30}$$

удовлетворяет Δ_2*-условию*, если для любого $c>1$ найдутся $\xi_0>0$ и $C>0$ такие, что $f(c\xi)\le Cf(\xi)$ при всех $\xi\ge\xi_0$ (см. [27, гл. I, § 4]).

Следствие 3.1. *Предположим, что функция* $l:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$*, будучи измененной на конечном отрезке* $[0;l_0]$*(если это необходимо), удовлетворяет условию:* $f(\xi):=l(e^\xi)$ *— выпуклая функция и для нее выполнены* (3.3.30) *и* Δ_2*-условие.*

Тогда для функции φ*, определенной формулой* (3.3.9)*, верно соотношение*

$$\ln|\varphi(z)|=O(l(|z|)), \tag{3.3.31}$$

когда $|z|\to\infty$*,* $z\in E$*, множество* E *определяется формулой* (3.3.12).

Доказательство. Согласно теореме 4.1 из [27], выполнение Δ_2-условия для функции f равносильно тому, что

$$\varlimsup_{\xi\to\infty}\frac{f'(\xi)\xi}{f(\xi)}<\infty. \tag{3.3.32}$$

Из (3.3.30) и (3.3.32) нетрудно вывести, что

$$f(\xi+1)=O(f(\xi)),\quad\xi\to\infty, \tag{3.3.33}$$

$$\xi=o(f(\xi)),\quad\xi\to\infty, \tag{3.3.34}$$

$$\varlimsup_{\xi\to\infty}\frac{\ln f(\xi)}{\ln\xi}<\infty, \tag{3.3.35}$$

тем более $\int\limits_0^\infty\frac{f(\xi)}{e^\xi}\mathrm{d}\xi<\infty$.

Следовательно, l — канонический вес с асимптотикой $O(\ln^p|x|)$, $|x| \to \infty$, при некотором $p > 1$ (см. [1, 1.3.3(2)]). К тому же, этот вес строгий, так как для $K > 1$, в силу Δ_2-условия для $f(\xi) = l(e^\xi)$ и (3.3.32) будет

$$l(Kx) = f(\xi + \ln K) = f(\xi) + f'(\tilde{\xi})\ln K \leq f(\xi)\left(1 + \frac{\mathrm{const}\ln K}{\xi}\right) =$$
$$l(x)\left(1 + \frac{\mathrm{const}\ln K}{\ln x}\right) \leq (K - \delta)l(x), \quad \tilde{\xi} \in [\xi; \xi + \ln K],$$

для всех $x \geq x_\delta$ при достаточно малом $\delta > 0$. Замечая еще, что l удовлетворяет (3.3.14), (3.3.15) и применяя теорему 3.4 с $\nu = \mu = l$, получим требуемое утверждение. □

Замечание 3.9. Доказанное следствие, в том числе, предоставляет примеры функций l, для которых выполнены условия теоремы 3.4. В силу (3.3.35), функция l должна иметь рост $O(\ln^p|x|)$ для некоторого $p > 1$ и быть строгим весом. Нетрудно проверить, что условиям следствия 3.1 удовлетворяет функция $\ln^p(|x| + 1)$ при $p > 1$.

Отметим также, что имеются функции l, растущие быстрее любой степени $\ln|x|$, для которых справедливо утверждение теоремы 3.4. Например, это функции

$$l(x) = x^\rho, \quad l(x) = x^\rho \ln^{-p}(1 + |x|),$$

где $\rho \in (0; 1/2)$, $p > 0$.

В следующем утверждении мы показываем, что, вообще говоря, условие строгости веса ν в теореме 3.4 существенно для весов, растущих быстрее любой степени $\ln|x|$.

Теорема 3.5. *Пусть $l : [0; \infty) \to \mathbb{R}$ — канонический вес и вогнутая функция, удовлетворяющая условиям*

$$\int^\infty \frac{l^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t < \infty, \tag{3.3.36}$$

$$\varliminf_{M\to\infty} \varliminf_{t\to\infty} \frac{l(Mt)}{l(t)} > 1. \tag{3.3.37}$$

Для функции φ, определенной формулой (3.3.9)*, соотношение*

$$\ln|\varphi(z)| = O(l(|z|)), \quad |z| \to \infty, \quad z \in E, \tag{3.3.38}$$

имеет место тогда и только тогда, когда вес l строгий.

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 3.4.

Докажем *необходимость.*

Как и в теореме 3.4, соотношение (3.3.38) эквивалентно соотношению (3.3.19) с $\nu = l$. Рассмотрим слагаемые представления (3.3.20) при $x > 0$. Видим, что в силу условий на вес l (канонический вес, вогнутая функция, соотношение (3.3.36)), остаются справедливыми оценки (3.3.21), (3.3.22) и (3.3.28) с $\nu = l$. Поэтому для $z \in E \bigcap (0;\infty)$ будет

$$\ln|\varphi(x)| = -I_{31} + O(l(x)), \quad x \to \infty, \tag{3.3.39}$$

где

$$I_{31} = -\int_{2x}^{\infty} \frac{l(t+x) - l(t-x)}{t} \mathrm{d}t.$$

Учитывая вогнутость функции l и соотношение (3.3.37), имеем для достаточно малого $\delta > 0$ и достаточно большого $M > 1$, что

$$-I_{31} \geq \int_{2x}^{\infty} \frac{2xl'(t+x)}{t} \mathrm{d}t \geq \int_{2x}^{\infty} \frac{2x(l(M(t+x) - l(t+x))}{M(t+x)t} \mathrm{d}t >$$
$$> \frac{2\delta}{M} \int_{2}^{\infty} \frac{l((A+1)x)}{A^2} \mathrm{d}A.$$

Если вес l не является строгим, то в силу критерия из [1, 1.3.5(1)] будет

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{l(x)} \int_{2}^{\infty} \frac{l((A+1)x)}{A^2} \mathrm{d}A = \infty.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{-I_{31}}{l(x)} = \infty,$$

и, следовательно, оценка (3.3.18) не выполняется на множестве $E \bigcap (0;\infty)$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

3.3.2 Теоремы о делителях пространств $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$

Теорема 3.6. *Предположим, что функция $l : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (3.3.6) , а также, что существуют дифференцируемая функция $\mu : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ и строгий вес ν, со свойствами*

$$\mu'(t) = O\left(\frac{\mu(t)}{t}\right), \quad t \to \infty,$$
$$\int^{\infty} \frac{\nu(t)l(t)}{t^2} \mathrm{d}t < \infty;$$

при этом

$$l(t) - l(s) = O(\mu(t) - \mu(s)), \quad t, s \to \infty,$$
$$\mu(t) = O(\nu(t)), \quad t \to \infty,$$

Пусть φ *— функция, определенная формулой* (3.3.9) *по последовательности*

$$\lambda_k = k + l(|k|), \ k = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.3.40}$$

Тогда для любого канонического веса ω, *такого, что*

$$\nu(x) = O(\omega(x)) \quad \big(\textit{или} \quad \nu(x) = o(\omega(x))\big), \quad x \to \infty,$$

функция φ *— делитель пространства* $\mathcal{P}_{\Omega,\infty}$ *с* $\Omega = \{n\omega\}$ *(соответственно, с* $\{r_n\omega\}$.*)*

Теорема 3.6 есть результат применения теорем G, H (см. п.1.3.3) и теоремы 3.4. Частным случаем теоремы 3.6 является следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Предположим, что функция* $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, *будучи измененной на конечном отрезке* $[0; l_0]$ *(если это необходимо), удовлетворяет условию:* $f(\xi) := l(e^\xi)$ *— выпуклая функция, для которой выполнены* (3.3.30) *и* Δ_2*-условие.*

Тогда функция φ, *определенная формулой* (3.3.9) *по последовательности* (3.3.40) *есть делитель пространства* $P_{(\omega)}$ $(P_{(\omega),1})$ *для любого канонического веса* ω, *такого, что* $l(x) = O(\omega(x))$ *(соответственно,* $l(x) = o(\omega(x))$*) при* $x \to \infty$.

Из теоремы 3.5 вытекает

Теорема 3.7. *Пусть* $l : [0; \infty) \to \mathbb{R}$ *— вогнутый канонический вес, для которого*

$$\int^{\infty} \frac{l^2(t)}{t^2} \mathrm{d}t < \infty,$$
$$\lim_{M\to\infty} \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{l(Mt)}{l(t)} > 1.$$

Для того, чтобы функция φ, *определенная формулой* (3.3.9) *по последовательности* (3.3.40) *была делителем пространства* $P_{\Omega,\infty}$, $\Omega = \{n\omega\}$, *для любого канонического веса* ω, *удовлетворяющего условию*

$$l(x) = O(\omega(x)) \quad x \to \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы вес l *был строгим.*

3.4 Условия медленно убывания функции в алгебре Шварца в терминах считающих функций нулевого множества

3.4.1 Необходимые условия

Пусть комплексная последовательность

$$\mathcal{M} = \{\mu_j\}, \quad \mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j,$$

$$0 < |\mu_1| \le |\mu_2| \le \dots,$$

такова, что

$$\beta_j = O(\ln|\mu_j|) \quad \text{при} \quad j \to \infty,$$

и формула

$$\psi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\mu_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right) \tag{3.4.1}$$

корректно определяет целую функцию экспоненциального типа.

Лемма 3.5. *Для того, чтобы функция ψ принадлежала алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ и была ее делителем, необходимо и достаточно, чтобы этими же свойствами обладала функция*

$$\psi_1(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\alpha_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right). \tag{3.4.2}$$

Доказательство. Заметим, что существование конечной плотности при порядке 1 и сходимость в смысле главного значения ряда из обратных величин имеют место (или не имеют места) одновременно для обеих последовательностей $\{\mu_j\}$ и $\{\alpha_j\}$. И значит, формулы (3.4.1) и (3.4.2) одновременно определяют (или нет) целые функции (одного и того же!) экспоненциального типа.

Для отдельного множителя из правой части (3.4.2) при $z = x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left|1 - \frac{x}{\alpha_j}\right| \le \left|1 - \frac{x}{\mu_j}\right| \left(1 + \frac{\beta_j^2}{\alpha_j^2}\right)^{1/2},$$

и следовательно, если ψ — целая функция, то

$$\ln|\psi_1(x)| \le \ln|\psi(x)| + O(1), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.4.3}$$

Из этой оценки вытекают импликации

$$\psi \in \mathbf{P}_\infty \Longrightarrow \psi_1 \in \mathbf{P}_\infty, \tag{3.4.4}$$

$$\psi_1 \text{ — делитель в } \mathbf{P}_\infty \Longrightarrow \psi \text{ — делитель в } \mathbf{P}_\infty, \tag{3.4.5}$$

причем последняя импликация верна при дополнительном условии $\psi \in \mathbf{P}_\infty$. Далее, положим

$$\mathcal{M}^+ = \{\mu_j: \ \beta_j \geq 0\}, \quad \mathcal{M}^- = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^+,$$

$$\psi^+(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{\substack{|\mu_j|\leq R \\ \mu_j \in \mathcal{M}^-}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right) \prod_{\substack{|\mu_j|\leq R \\ \mu_j \in \mathcal{M}^+}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right).$$

Без ограничения общности можем считать, что $|\alpha_j| > 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть M_0 — столь большое положительное число, что

$$|\beta_j| \leq M_0 \ln|\alpha_j|, \ j = 1, 2, \dots$$

Для любого $z = x + 2\mathrm{i}M_0 \ln|x|$ с $|x| > 2$ имеем

$$\left|1 - \frac{z}{\mu_j}\right| \leq \left|1 - \frac{z}{\alpha_j}\right|,$$

если $\mu_j \in \mathcal{M}^+$ и $|\alpha_j| \leq x^4$,
а также

$$\left|1 - \frac{z}{\mu_j}\right| \leq \left|1 - \frac{z}{\alpha_j}\right| \cdot \left(1 + \frac{4M_0^2 \ln^2|\alpha_j|}{|\alpha_j|^2}\right)^{1/2},$$

если $\mu_j \in \mathcal{M}^+$ и $|\alpha_j| > x^4$.

Из последних двух оценок следует, что для $z = x + 2\mathrm{i}M_0 \ln|x|$, $|x| > 2$, будет

$$\ln|\psi(z)| \leq \ln|\psi^+(z)| + O(1), \ |x| \to \infty. \tag{3.4.6}$$

Аналогично доказывается, что для $z = x - 2\mathrm{i}M_0 \ln|x|$, $|x| > 2$, выполняется оценка

$$\ln|\psi^+(z)| \leq \ln|\psi_1(z)| + O(1), \ |x| \to \infty. \tag{3.4.7}$$

Из импликаций (3.4.4), (3.4.5) и оценок (3.4.6) и (3.4.7), применяя принцип Фрагмена-Линделефа и учитывая, что типы при порядке 1 всех трех функций ψ, ψ_1, ψ^+ равны, получаем, что

$$\psi_1 \in \mathbf{P}_\infty \Longrightarrow \psi^+ \in \mathbf{P}_\infty \Longrightarrow \psi \in \mathbf{P}_\infty \tag{3.4.8}$$

$$\psi \in \mathbf{P}_\infty \quad \text{и является делителем} \implies \tag{3.4.9}$$
$$\implies \psi^+ \in \mathcal{P} \quad \text{и является делителем} \implies \tag{3.4.10}$$
$$\implies \psi_1 \in \mathbf{P}_\infty \quad \text{и является делителем.} \tag{3.4.11}$$

Так как оценки снизу для функций ψ^+ и ψ_1 имеют место не для вещественных значений аргумента, а при $z = x + 2\mathrm{i}M_0 \ln|x|$, $z = x - 2\mathrm{i}M_0 \ln|x|$, соответственно, то при выводе импликаций (3.4.11) нам пришлось также воспользоваться вариантом определения медленно убывающей функции, в котором для каждого $x \in \mathbb{R}$ требуется существование $z' \in \mathbb{C}$:

$$|z' - x| \leq A \ln(e + |x|) \quad \text{и} \quad \ln|\varphi(z')| \geq -A \ln(e + |z'|).$$

Совокупность импликаций (3.4.4), (3.4.5), (3.4.8), (3.4.11) дает требуемое утверждение.

□

Пусть $\{(a_j; m_j)\}$ — нулевое множество функции $\psi \in \mathbf{P}_\infty$, m_j – кратность нуля $a_j \in \mathbb{C}$. В работе [90, предложение 6.1] Л. Эренпрайс показал, что условие

$$\varliminf_{j\to\infty} \frac{m_j}{|\mathrm{Im}\, a_j| + \ln|\mathrm{Re}\, a_j|} < \infty \tag{3.4.12}$$

является необходимым для того, чтобы функция ψ была медленно убывающей.

Для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_k\} \subset \mathbb{C}$ обозначим через $m(z,t)$ число точек μ_k в круге $|w - z| \leq t$.

Следующая лемма представляет собой усиление цитированного необходимого условия Л. Эренпрайса для случая, когда *все нули рассматриваемой функции вещественны.*

Лемма 3.6. *Если $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ — медленно убывающая функция и*

$$\mathcal{M} = \{\mu_k\} \subset \mathbb{R}$$

— ее нулевое множество, то

$$\varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{m(x,1)}{\ln|x|} < \infty. \tag{3.4.13}$$

Доказательство. Без потери общности можем считать, что функция ψ ограничена на вещественной оси и имеет тип 1 при порядке 1.

Предположим, что (3.4.13) не выполнено, то есть найдется последовательность x_j, $|x_j| \to \infty$, удовлетворяющая соотношению

$$\lim_{j\to\infty} \frac{m(x_j, 1)}{\ln |x_j|} = \infty. \tag{3.4.14}$$

Для определенности будем считать $x_j > 0$. Положим $m_j = m(x_j, 1)$,

$$\psi_j(z) = \psi(z)(z - x_j)^{m_j} \cdot \prod_{k:|\mu_k - x_j|\le 1} (z - \mu_k)^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что ψ_j – целые функции экспоненциального типа 1, удовлетворяющие оценке

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_j(x)| \le C_0 2^{m_j}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где $C_0 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t)|$. Согласно теореме Бернштейна (см., например, [79, гл. 11]), имеем также оценки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_j^{(n)}(x)| \le C_0 2^{m_j}, \quad n,\, j \in \mathbb{N}. \tag{3.4.15}$$

Дальнейшее изложение представляет собой модификацию рассуждений Л.Эренпрайса, примененных им при доказательстве предложения 6.1 в работе [90].

Из разложения функции ψ_j в ряд Тэйлора в окрестности точки x_j и оценок (3.4.15), выводим, что

$$|\psi_j(z)| \le C_0 2^{m_j} (m_j!)^{-1} |z - x_j|^{m_j} e^{|z - x_j|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, для всех $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\ln C_0 + m_j + |x - x_j| + m_j \ln |x - x_j| - \ln (m_j!) \le -l \ln x_j - m_j \ln 2, \tag{3.4.16}$$

будет выполняться неравенство

$$|\psi_j(x)| \le x_j^{-l} \cdot 2^{-m_j}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{3.4.17}$$

В силу формулы Стирлинга, соотношение (3.4.16) будет следовать из неравенства

$$|x - x_j| + m_j \ln |x - x_j| - m_j \ln m_j \le -l \ln |x_j| - C_1 m_j,$$

где C_1 – абсолютная постоянная.

Согласно (3.4.14), для каждого натурального l найдется номер j_l такой, что

$$-l\ln x_j \geq -m_j, \quad j = j_l, j_l+1, \dots \tag{3.4.18}$$

Выберем и фиксируем $b \in (0;1)$, удовлетворяющее условию $b < e^{-C_1-2}$. Видим, что оценки (3.4.17) будут иметь место при $j \geq j_l$ для всех $x \in \mathbb{R}$ таких, что $|x - x_j| \leq bm_j$. Из этого факта, неравенств (3.4.18) и легко проверяемых соотношений

$$|\psi(z)| \leq 2^{m_j}|\psi_j(z)|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

выводим, что

$$|\psi(x)| \leq |x_j|^{-l}, \quad \text{если} \quad |x - x_j| \leq bl\ln x_j, \quad j \geq j_l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, функция ψ не является медленно убывающей.

□

Замечание 3.10. Заметим, что доказанные леммы 3.5 и 3.6 верны и в следующей, более общей форме.

Пусть

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' \bigcup \mathcal{M}'' \subset \mathbb{C}$$

— нулевое множество функции ψ, определенной формулой (3.4.1),

$$\mathcal{M}'' = \{\mu_j''\}, \quad \mathcal{M}' = \{\mu_j'\}, \quad \mu_j' = x_j' + \mathrm{i}y_j',$$

причем

$$|y_j'| \leq A_0 \ln|\mu_j'|$$

для некоторого $A_0 > 0$ и всех $j \geq j_0$.

Тогда функция ψ и функция

$$\tilde{\psi}(z) = \lim_{R\to\infty}\left(\prod_{|x_j'|\leq R}\left(1 - \frac{z}{x_j'}\right)\prod_{|\mu_j''|\leq R}\left(1 - \frac{z}{mu_j''}\right)\right)$$

одновременно (не) являются медленно убывающими функциями в алгебре Шварца.

Это утверждение обобщает лемму 3.5.

Обобщение леммы 3.6:
если формула (3.4.1) *определяет медленно убывающую функцию в алгебре Шварца, то*

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\frac{\tilde{m}(x,1)}{\ln|x|} < \infty,$$

где $\tilde{m}(z,t)$ — число точек последовательности $\{x_j'\}$ в круге $|w - z| \leq t$.

Пусть φ — функция из алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$ с множеством нулей

$$\mathcal{Z}_\varphi = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Обозначим $n(z,t)$ — число точек λ_j в круге $|w-z| \le t$, $\nu(t)$ — число точек λ_j в промежутке $(0;t]$ при $t > 0$ и $(-\nu(t))$ — число точек λ_j в промежутке $[t;0)$ при $t < 0$;

$$2\Delta = \lim_{j\to\infty} \frac{j}{|\lambda_j|}.$$

Теорема 3.8. *Если $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель этой алгебры, $\mathcal{Z}_\varphi \subset \mathbb{R}$, то*

$$\nu(t) - \Delta t = O(\ln^2 |t|), \quad |t| \to \infty. \tag{3.4.19}$$

Доказательство. Начнем с перечня вспомогательных фактов.

F1). Утверждение о том, что функция $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель этой алгебры, с учетом того, что все ее нули вещественны, эквивалентна существованию констант $M_0 > 0$ и $r_0 > 1$, таких, что

$$\ln|\varphi(z)| \ge -M_0 \ln|x|, \quad z = x + \mathrm{i}y, \quad |x| \ge r_0, \quad |y| \ge M_0 \ln|x|. \tag{3.4.20}$$

F2) [74, параграф 3]. Если $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$ с вещественными нулями, то множество

$$\{z: \ \ln|\varphi(z)| < -M_0 \ln|z|, \ |x| \ge r_0, \quad |y| \le M_0 \ln|x|\} \tag{3.4.21}$$

состоит из относительно компактных связных компонент G диаметра $d_G \le M \ln|z|$, $\forall z \in G$.

F3) В силу леммы 3.6 и оценки для d_G, число точек λ_j в каждой связной компоненте G множества (3.4.21) есть $O(\ln^2|z|)$, $\forall z \in G$.

F4) Используя F3) и стандартные приемы оценки из теории целых функций, нетрудно вывести, что если $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель $\mathbf{P}_\infty$ с вещественными нулями, то

$$\ln|\varphi(z)| \ge -C\ln^2|z| \ln\ln|z|, \quad z = x + \mathrm{i}y, \quad |x| \ge r_0, \quad |y| \ge r_0, \tag{3.4.22}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от $\mathcal{Z}_\varphi$ (точнее, от величины ее плотности 2Δ,) M_0, r_0.

F5) Для функции φ, в силу теоремы III.G.1 из монографии [103], имеют место представления

$$\ln|\varphi(z)| = \pi\Delta \mathrm{Im}\, z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\, z \frac{\ln|\varphi(t)|}{|z-t|^2} \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Im}\, z > 0, \tag{3.4.23}$$

$$\ln|\varphi(z)| = -\pi\Delta \mathrm{Im}\, z - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\, z \frac{\ln|\varphi(t)|}{|z-t|^2}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Im}\, z < 0. \tag{3.4.24}$$

Оценим разность $(\nu(x_0) - \Delta x_0)$ для произвольного $x_0 > r_0$, $x_0 \notin \mathcal{Z}_\varphi$. Согласно хорошо известной формуле, имеем

$$\nu(x_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma^+} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\mathrm{d}z, \tag{3.4.25}$$

где Γ^+ положительно ориентированная граница прямоугольника

$$\{z = x + \mathrm{i}y : \ 0 \le x \le x_0, \ |y| \le 3M_0 \ln x_0\}.$$

Переходя в формуле (3.4.25) к равенству реальных частей и учитывая при этом свойства функции φ, нетрудно вывести, что

$$\nu(x_0) = \frac{1}{2\pi}\big(\arg\varphi(x_0 - 3\mathrm{i}M_0\ln x_0) - \arg\varphi(-3\mathrm{i}M_0\ln x_0) + \\ + \arg\varphi(3\mathrm{i}M_0\ln x_0) - \arg\varphi(x_0 + 3\mathrm{i}M_0\ln x_0)\big),$$

где символ $\arg\varphi$ обозначает мнимую часть какой-нибудь, не обязательно главной, ветви аналитической в каждой из полуплоскостей $\mathrm{Im}\, z < 0$ и $\mathrm{Im}\, z > 0$ функции $\ln\varphi$, выделенной также отдельно в каждой из этих полуплоскостей (в нижней для первого и второго слагаемых, в верхней — для третьего и четвертого).

Из формул (3.4.23) и (3.4.24) видим, что

$$\ln|\varphi(z)| = \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\pi\Delta z + \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\varphi(t)|\mathrm{d}t\right), \quad \mathrm{Im}\, z > 0,$$

$$\ln|\varphi(z)| = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\pi\Delta z - \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\varphi(t)|\mathrm{d}t\right), \quad \mathrm{Im}\, z < 0;$$

и следовательно (см. [103, III.H.2]),

$$\arg\varphi(z) = \mathrm{Im}\left(-\mathrm{i}\pi\Delta z + \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\varphi(t)|\mathrm{d}t\right) + \mathrm{const},$$

когда $\mathrm{Im}\, z > 0$;

$$\arg\varphi(z) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\pi\Delta z - \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\varphi(t)|\mathrm{d}t\right) + \mathrm{const},$$

когда $\mathrm{Im}\, z < 0$.

В правых частях двух последних формул постоянные, вообще говоря, различны.

Из вышесказанного, учитывая, что $\overline{\varphi(\bar{z})} = \varphi(z)$, получаем

$$\nu(x_0) = -\frac{1}{\pi}\left(\arg\varphi(x_0 + 3\mathrm{i}M_0\ln x_0) - \arg\varphi(3\mathrm{i}M_0\ln x_0)\right) + \mathrm{const} =$$
$$= \Delta x_0 - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x_0 - t}{(x_0-t)^2 + 9M_0^2\ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\varphi(t)|\mathrm{d}t +$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-t}{t^2 + 9M_0^2\ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\varphi(t)|\mathrm{d}t. \quad (3.4.26)$$

Полученная формула не очень удобна для оценивания величины

$$(\nu(x_0) - \Delta x_0),$$

так как мы не располагаем оценками снизу функции $\ln|\varphi(t)|$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Для того чтобы обойти эту проблему, поступим следующим образом. Полагая $\tilde{z} = z - 2\mathrm{i}M_0\ln x_0$, $\psi(\tilde{z}) = \varphi(z)$ и учитывая, что эта функция аналитична и не обращается в нуль в замкнутой верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\tilde{z} \geq 0$, напишем для $\ln|\psi(\tilde{z})|$ представление, аналогичное (3.4.23):

$$\ln|\psi(\tilde{z})| = \pi\Delta\mathrm{Im}\,\tilde{z} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,\tilde{z}\ln|\psi(t)|}{|\tilde{z}-t|^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\pi\Delta\tilde{z} + \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\tilde{z}-t} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\psi(t)|\mathrm{d}t\right), \qquad \mathrm{Im}\,\tilde{z} > 0.$$

Это представление в терминах функции φ и переменной z примет вид:

$$\ln|\varphi(z)| = \mathrm{Re}\Bigg(-\mathrm{i}\pi\Delta(z - 2\mathrm{i}M_0\ln x_0) +$$
$$+ \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{z - 2\mathrm{i}M_0\ln x_0 - t} + \frac{t}{t^2+1}\Big)\ln|\varphi(t + 2\mathrm{i}M_0\ln x_0)|\mathrm{d}t\Bigg),$$

если $\mathrm{Im}\,z > 2M_0\ln x_0$.

Отсюда следует, что

$$\nu(x_0) = \Delta x_0 - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x_0-t}{(x_0-t)^2 + M_0^2\ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\varphi(t + 2\mathrm{i}M_0\ln x_0)|\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-t}{t^2 + M_0^2\ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2+1}\right)\ln|\varphi(2\mathrm{i}M_0\ln x_0)|\mathrm{d}t. \quad (3.4.27)$$

Поэтому
$$|\nu_0(x_0) - \Delta x_0| \le |I_1| + |I_2|, \tag{3.4.28}$$
где
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_0 - t}{(x_0 - t)^2 + M_0^2 \ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2+1} \right) \ln|\varphi(t + 2\mathrm{i}M_0 \ln x_0)| \mathrm{d}t,$$
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-t}{t^2 + M_0^2 \ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2+1} \right) \ln|\varphi(2\mathrm{i}M_0 \ln x_0)| \mathrm{d}t.$$
Без ограничения общности считаем, что
$$\ln|\varphi(z)| \le \pi\Delta |\mathrm{Im}\, z|, \quad z \in \mathbb{C}.$$
Тогда, с учетом (3.4.20), для всех $z = t + 2\mathrm{i}M_0 \ln x_0$ имеем
$$|\ln|\varphi(z)|| \le C_1 \ln x_0, \tag{3.4.29}$$
где положительная постоянная C_1 зависит только от r_0, M_0, Δ.

Далее, используя (3.4.22), выводим, что
$$|\ln|\varphi(z)|| \le C_2 \ln^2|t| \ln\ln|t|, \tag{3.4.30}$$
если $z = t + 2\mathrm{i}M_0 \ln x_0$ и $|t| \ge x_0^2$, при этом постоянная $C_2 > 0$ зависит только от r_0, M_0, Δ.

При помощи (3.4.29) и (3.4.30) оценим $|I_1|$.

Имеем
$$|I_1| \le \left| \int_{|t|\le x_0^2} \left(\frac{x_0 - t}{(x_0 - t)^2 + M_0^2 \ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2+1} \right) \ln|\varphi(t + 2\mathrm{i}M_0 \ln x_0)| \mathrm{d}t \right| +$$
$$+ \left| \int_{|t|\ge x_0^2} \left(\frac{x_0 - t}{(x_0 - t)^2 + M_0^2 \ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2+1} \right) \ln|\varphi(t + 2\mathrm{i}M_0 \ln x_0)| \mathrm{d}t \right| =$$
$$= |I_{11}| + |I_{12}|. \tag{3.4.31}$$

Принимая во внимание (3.4.29), получаем
$$|I_{11}| \le C_1 \ln x_0 \left(\int_{-x_0^2}^{x_0^2} \frac{|x_0 - t|}{(x_0 - t)^2 + M_0^2 \ln^2 x_0} \mathrm{d}t + \int_{-x_0^2}^{x_0^2} \frac{|t|}{t^2+1} \mathrm{d}t \right) \le$$
$$\le \widetilde{C}_1 \ln^2 x_0,$$
где $\widetilde{C}_1 > 0$ зависит только от r_0, M_0, Δ.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\left|\frac{x_0 - t}{(x_0 - t)^2 + M_0^2 \ln^2 x_0} + \frac{t}{t^2 + 1}\right| \le \frac{C_3}{|t|^{3/2}}, \quad |t| \ge x_0^2,$$

где положительная постоянная C_3 зависит только от r_0, M_0, Δ. Заметим еще, что, в силу (3.4.30), второй множитель в подынтегральном выражении для I_{12} имеет оценку

$$|\ln|\varphi(t + 2\mathrm{i}M_0 \ln x_0)|| \le C_2 \ln^2 |t| \ln\ln |t|.$$

Из вышесказанного следует, что

$$|I_{12}| \le C_4,$$

где $C_4 > 0$ зависит только от r_0, M_0, Δ.

Из (3.4.31) и оценок для I_{11} и I_{12} получаем оценку

$$I_1 = O(\ln^2 x_0^2), \quad x_0 \to +\infty.$$

Таким же способом оцениваем второе слагаемое в правой части (3.4.28):

$$I_2 = O(\ln^2 x_0^2), \quad x_0 \to +\infty.$$

Из (3.4.28) и последних двух оценок выводим нужное соотношение:

$$\nu(x) - \Delta x = O(\ln^2 x), \quad x \to +\infty, \quad x \notin \mathcal{Z}_\varphi. \tag{3.4.32}$$

Аналогично рассматривается случай $x < 0$.

Для $x \in \mathcal{Z}_\varphi$ асимптотическое равенство (3.4.19) следует из (3.4.32) и леммы 3.6. □

Замечание 3.11. Согласно теореме 3.1, формула

$$\varphi(z) = \lim_{R \to +\infty} \prod_{|\lambda_j| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right),$$

где $\lambda_j = j + l(|j|)$, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $l(t) = \ln(1 + t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, определяет делитель в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$. При этом

$$\nu(x) = [x - \ln(1 + x^2) + o(1)], \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, необходимое условие (3.4.19) нельзя усилить.

Замечание 3.12. С другой стороны, доказанное необходимое условие обратимости по Эренпрайсу не является, вообще говоря, достаточным. Это показывает следующий пример. Положим

$$\varphi_0(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z s_0(z)},$$

где $s_0(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{4^k}\right)$. Используя хорошо известные оценки для функций $\sin \pi z$ и s_0 (см. [79, гл. 3]), нетрудно убедиться в том, что $\varphi_0 \in \mathbf{P}_\infty$, но

$$\ln |\varphi_0(x)| \leq -C \ln^2 (2 + |x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

где C — положительная постоянная. Следовательно, функция φ_0 не является медленно убывающей в алгебре Шварца. В то же время, видим, что соответствующая функция ν удовлетворяет даже более сильному, чем (3.4.19), условию

$$\nu(x) - x = O(\ln |x|), \quad |x| \to \infty.$$

3.4.2 Критерии медленного убывания

1. Случай четной последовательности нулей.

Пусть последовательность $\Lambda^+ = \{\lambda_j\}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, такова, что

$$\exists \lim_{j \to \infty} \frac{j}{\lambda_j} = \Delta.$$

Тогда четная вещественная последовательность $\Lambda = \Lambda^+ \bigcup (-\Lambda^+)$ удовлетворяет условиям теоремы F (см. п. 3.1.1). В частности,

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right) \tag{3.4.33}$$

— целая функция экспоненциального типа $\pi\Delta$.

Используя теорему 3.8, мы получим необходимые и достаточные условия, при которых $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ и является делителем этой алгебры. Для этого введем некоторые обозначения и докажем вспомогательные утверждения.

Для $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ символами $n^+(x;t)$ и $n^-(x;t)$ обозначаем число точек последовательности Λ, принадлежащих промежуткам $(x; x+t]$ и $(x-t; x]$, соответственно.

Лемма 3.7. *Если*

$$n^+(0;x) - \Delta x = O(\ln^2 x), \quad x \to +\infty,$$

то

$$\int_{x\ln x}^{+\infty} \frac{n^+(t;x) - n^-(t;x)}{t} \mathrm{d}t = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{3.4.34}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\sigma > 2$ и разобьем оцениваемый интеграл на два слагаемых:

$$\int_{x\ln x}^{+\infty} \frac{n^+(t;x) - n^-(t;x)}{t} \mathrm{d}t = \int_{x\ln x}^{x^\sigma} \frac{n^+(t;x) - n^-(t;x)}{t} \mathrm{d}t + \\ + \int_{x^\sigma}^{+\infty} \frac{n^+(t;x) - n^-(t;x)}{t} \mathrm{d}t = J_1 + J_2. \tag{3.4.35}$$

Принимая во внимание четность последовательности Λ и теорему 3.8, получим

$$J_2 = \int_{x^\sigma}^{+\infty} \frac{xn^+(t;x)}{t(t+x)} \mathrm{d}t - \int_{x^\sigma - x}^{x^\sigma} \frac{n^+(t;x)}{t+x} \mathrm{d}t = \\ = \int_{x^\sigma}^{+\infty} \frac{O(x^2) + xO(\ln^2 t)}{t(t+x)} \mathrm{d}t + O\left(x\ln\left(1 + \frac{x}{x^\sigma - x}\right)\right) = \\ = O(1), \quad x \to +\infty.$$

Воспользовавшись еще раз четностью Λ и теоремой 3.8, оценим интеграл J_1 :

$$\int_{x\ln x}^{x^\sigma} \frac{n^+(t;x) - n^-(t;x)}{t} \mathrm{d}t = -\int_{x\ln x - x}^{x\ln x} \frac{n^+(t;x) \pm \Delta x}{t+x} \mathrm{d}t + \\ \int_{x\ln x}^{x^\sigma - x} n^+(t;x) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t + \int_{x^\sigma - x}^{x^\sigma} \frac{n^+(t;x)}{t} \mathrm{d}t = \\ = O(\ln x) - \Delta x\ln\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) + \int_{x\ln x}^{x^\sigma - x} (O(\ln^2 t) + \Delta x) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t + \\ + \int_{x^\sigma - x}^{x^\sigma} (O(\ln^2 t) + \Delta x) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = \\ = O(\ln x) - \Delta x\ln\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) + O(\ln x) + \Delta x\ln\frac{x^\sigma - x}{x} - \\ - \Delta x\ln\left(1 - \frac{1}{\ln x + 1}\right) + O(1) + \Delta x\ln\frac{x^\sigma}{x^\sigma - x} = O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Из представления (3.4.35) и оценок для J_1, J_2 получаем нужную оценку (3.4.34).

□

Лемма 3.8. *Пусть* $\Lambda = \Lambda^+ \bigcup \Lambda^-$, *где* $\Lambda^+ = \{\lambda_j\}$ *— положительная последовательность с плотностью* Δ.

Тогда для произвольного фиксированного $A > 0$ *справедливо соотношение*

$$I := \int_{|x|\ln|x|}^{\infty} \frac{n(x,t) - n(x + \mathrm{i}A\ln|x|;t)}{t}\mathrm{d}t = O(A^2), \quad |x| \to \infty, \qquad (3.4.36)$$

где $n(z,t)$ *— число точек последовательности* Λ *в круге* $|w - z| \le t$.

Доказательство. Рассмотрим случай $x > 0$ (для $x < 0$ все рассуждения аналогичны). Имеем

$$0 \le I = \int_{|x|\ln|x|}^{\infty} \frac{n^+(t + x - r_t; r_t)}{t}\mathrm{d}t + \int_{|x|\ln|x|}^{\infty} \frac{n^+(-t + x; r_t)}{t}\mathrm{d}t = I_1 + I_2,$$

где $r_t = \sqrt{t^2 - A^2\ln^2 x}$.

Оценим интеграл I_1 :

$$0 \le I_1 = \sum_{\lambda_j \ge x + x\ln x} \int_{\lambda_j - x}^{\sqrt{\lambda_j^2 + A^2\ln^2 x} - x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \le$$

$$\le \mathrm{const} \sum_{\lambda_j \ge x + x\ln x} \frac{A^2\ln^2 x}{(\lambda_j - x)^2} \le C_0 A^2, \quad x \ge x_0 > 0,$$

где постоянная $C_0 > 0$ зависит только от последовательности $\{\lambda_j\}$.

Интеграл I_2 оценивается аналогично. Следовательно, для интеграла $I = I_1 + I_2$ имеет место требуемая оценка (3.4.36).

□

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат.

Теорема 3.9. *Пусть* $\Lambda = \{\pm\lambda_j\}$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, *и существует*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{j}{\lambda_j} = \Delta.$$

Для того чтобы целая функция экспоненциального типа

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right) \qquad (3.4.37)$$

принадлежала алгебре Шварца и была ее делителем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия

$$n^{+}(0;x) - \Delta x = O(\ln^2 x), \quad x \to \infty, \tag{3.4.38}$$

$$\overline{\lim_{A\to\infty}}\,\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{1}{A\ln x}\left|\int_{A\ln x}^{x\ln x}\frac{n(0,t)-n(x+\mathrm{i}A\ln x,t)}{t}\mathrm{d}t\right| < +\infty. \tag{3.4.39}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция φ, определяемая формулой (3.4.37), представляет собой делитель алгебры Шварца. Тогда, согласно утверждению теоремы 3.8, справедливо соотношение (3.4.38).

Без ограничения общности можем считать, что $|\varphi(x)| \le 1$ и, следовательно,

$$\ln|\varphi(z)| \le \pi\Delta|\mathrm{Im}\, z|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда, с учетом теоремы F, выводим, что для всех $A > 0$ и $x \ge x_0 > 0$ будет

$$\int_0^{\infty}\frac{n(0,t)-n(x+\mathrm{i}A\ln x,t)}{t}\mathrm{d}t \le \pi\Delta A\ln x.$$

Для $x \ge x_0$ получим

$$\begin{aligned}\int_{A\ln x}^{x\ln x}&\frac{n(0,t)-n(x+\mathrm{i}A\ln x,t)}{t}\mathrm{d}t \le\\ &\le \pi\Delta A\ln x + \int_{x\ln x}^{\infty}\frac{n(x+\mathrm{i}A\ln x,t)-n(0,t)}{t}\mathrm{d}t \le\\ &\le \pi\Delta A\ln x + \int_{x\ln x}^{\infty}\frac{n(x,t)-n(0,t)}{t}\mathrm{d}t \le \pi\Delta A\ln x + \mathrm{const}\ln x;\end{aligned}$$

последнее неравенство в этой цепочке справедливо в силу леммы 3.7.

Таким образом,

$$\overline{\lim_{A\to\infty}}\,\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{1}{A\ln x}\int_{A\ln x}^{x\ln x}\frac{n(0,t)-n(x+\mathrm{i}A\ln x,t)}{t}\mathrm{d}t \le \pi\Delta. \tag{3.4.40}$$

Далее, φ — делитель в алгебре Шварца, поэтому найдутся $A_0 > 0$, $x_0 > 0$, такие, что

$$\ln|\varphi(x+\mathrm{i}A_0\ln x)| \ge -A_0\ln x, \quad x \ge x_0.$$

Так как все нули функции φ вещественны, эта оценка справедлива и в точках, лежащих выше графика функции $y = A_0\ln x$:

$$\ln|\varphi(x+\mathrm{i}A\ln x)| \ge -A_0\ln x, \quad A \ge A_0, \quad x \ge x_0.$$

Отсюда и из лемм 3.7 и 3.8 и теоремы F получаем

$$\int_{A\ln x}^{x\ln x} \frac{n(x+\mathrm{i}A\ln x,t)-n(0,t)}{t}\mathrm{d}t \le A_0\ln x + \mathrm{const}\, A\ln x +$$
$$+\int_{x\ln x}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(x+\mathrm{i}A\ln x,t)}{t}\mathrm{d}t \le \mathrm{const}\ln x + \mathrm{const}\, A\ln x + \mathrm{const}\, A^2.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{A\to\infty}\varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{A\ln x}\int_{A\ln x}^{x\ln x} \frac{n(x+\mathrm{i}A\ln x,t)-n(0,t)}{t}\mathrm{d}t \le \pi\Delta. \qquad (3.4.41)$$

Из неравенств (3.4.40) и (3.4.41) следует требуемое соотношение (3.4.39).

Достаточность. Если выполнено условие (3.4.38), то целая функция φ, определяемая формулой (3.4.37), принадлежит классу Картрайт.

Из условия (3.4.39), теоремы F и леммы 3.7 выводим, что для некоторых $A_0 > 0$, $x_0 > 1$ верна оценка

$$\ln|\varphi(x)| = \int_0^{A_0\ln x} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t +$$
$$+\int_{A_0\ln x}^{x\ln x} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t + \int_{x\ln x}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t \le$$
$$\le \mathrm{const}\ln x + \int_{A_0\ln x}^{x\ln x} \frac{n(0,t)-n(x+\mathrm{i}A_0\ln x,t)}{t}\mathrm{d}t \le \mathrm{const}\ln x$$

при всех $x \ge x_0$. И значит, $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$.

Для доказательства медленного убывания φ снова применим представление из теоремы F, лемму 3.7 и соотношение (3.4.39). Получим при некоторых $A_0 > 0$, $x_0 > 1$ следующую оценку:

$$\ln|\varphi(x+\mathrm{i}A_0\ln x)| \ge \int_{A_0\ln x}^{x\ln x} \frac{n(0,t)-n(x+\mathrm{i}A_0\ln x,t)}{t}\mathrm{d}t +$$
$$+\int_{x\ln x}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(x+\mathrm{i}A_0\ln x,t)}{t}\mathrm{d}t \ge \mathrm{const}\ln x, \qquad x \ge x_0.$$

Следовательно, функция φ — делитель алгебры Шварца.

$\square$

2. Критерий медленного убывания произвольной функции из $\mathbf{P}_\infty$ с вещественными нулями.

Для функции $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ с нулевым множеством $\mathcal{Z}_\varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, плотность которого равна 2Δ положим

$$L(t) = \nu(t) - \Delta t, \quad L^*(t) = L(t) - L(-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где, как и выше, $\nu(t)$ есть число точек $\lambda_j \in \mathcal{Z}_\varphi$ в промежутке $(0;t]$ при $t > 0$, и $(-\nu(t))$ есть число точек $\lambda_j \in \mathcal{Z}_\varphi$ в промежутке $[-t;0)$ при $t < 0$.

Теорема 3.10. *Для того чтобы функция $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ с нулевым множеством $\mathcal{Z}_\varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ плотности 2Δ была медленно убывающей в $\mathbf{P}_\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия*

$$L(x) = O(\ln^2 |x|), \quad |x| \to \infty, \tag{3.4.42}$$

$$\overline{\lim_{A\to\infty}}\ \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{A\ln x} \left| \int_{A\ln x}^{x\ln x} \frac{2L^*(t) - L^*(x + r_{t,A}) + L^*(x - r_{t,A})}{t} \mathrm{d}t \right| < +\infty, \tag{3.4.43}$$

где $r_{t,A} = \sqrt{t^2 - A^2 \ln^2 x}$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в силу теоремы 2.2 из работы [90], функция $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ и *четная* функция $\varphi(z) = \psi(z)\psi(-z)$ одновременно (не) являются делителями алгебры Шварца.

Далее, нетрудно убедиться в том, что справедливость соотношения (3.4.42) эквивалентна выполнению условия (3.4.38) для обеих функций, ψ и φ; а также в том, что выполнение условия (3.4.43) для ψ равносильно справедливости соотношения (3.4.39) для *четной* функции φ.

Таким образом, из условий (3.4.42) и (3.4.43) следует, что $\varphi(z) = \psi(z)\psi(-z)$ — медленно убывающая функция в $\mathbf{P}_\infty$, а значит, этим свойством обладает и функция ψ.

Обратно, если $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ — медленно убывающая в этой алгебре функция, то функция $\varphi(z) = \psi(z)\psi(-z)$ медленно убывающая в $\mathbf{P}_\infty$. Соотношение (3.4.42) имеет место в силу теоремы 3.8. Применяя к функции φ теорему 3.9, видим, что для нее выполнено соотношение (3.4.39), а значит, и эквивалентное ему соотношение (3.4.43).

$\square$

Замечание 3.13. Хорошо известно, что если нулевое множество

$$\mathcal{M} = \{\mu_k\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

целой функции φ является ограниченным возмущением целочисленной последовательности, то есть для некоторого $L > 0$ и всех k выполнено

$$|\mu_k - k| \leq L, \tag{3.4.44}$$

то φ — медленно убывающая функция ([109, теорема XXXIII], а также [55, теорема 1.1 и следствие]).

Доказанные теоремы 3.9 и 3.10 дают удобные для проверки условия медленного убывания в случаях, когда не выполнено (3.4.44) и неприменима теорема 3.1. Приведем соответствующий пример:
определим последовательность

$$\Lambda_0 = \{\lambda_j\}, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

следующим образом:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2, \dots, \lambda_{10} = 10,$$

$$\lambda_{11} = \dots = \lambda_{10+[\ln 10]} = 10,$$

$$\lambda_k = k, \quad k = 10 + [\ln 10] + 1, \dots, 10^2,$$

$$\lambda_k = 10^2,\ k = 10^2 + 1, \dots, 10^2 + [2\ln 10],$$

$$\lambda_k = k, \quad k = 10^2 + [2\ln 10] + 1, \dots, 10^3,$$

$$\lambda_k = 10^3,\ k = 10^3 + 1, \dots, 10^3 + [3\ln 10],$$

и т.д.

Нетрудно проверить, что для нулевого множества четной функции, определяемой формулой (3.4.37) по последовательности Λ_0, выполнены условия (3.4.38) и (3.4.39) теоремы 3.9. Следовательно, $(\Lambda_0 \bigcup (-\Lambda_0))$ — нулевое множество медленно убывающей функции в алгебре Шварца.

3.5 Свойства делителей алгебры Шварца с нулями в криволинейной полосе

3.5.1 Нулевые множества

Пусть $l : [0; +\infty) \to [1; +\infty)$ — возрастающая функция, такая, что

$$\ln t = O(l(t)), \quad t \to \infty, \tag{3.5.1}$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln l(t)}{\ln t} < \frac{1}{2} \tag{3.5.2}$$

и для некоторого $K > 1$ справедливо соотношение

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{l(Kt)}{l(t)} < +\infty. \tag{3.5.3}$$

Обобщение приведенного в замечании 3.10 усиления леммы 3.6 содержится в следующем предложении.

Предложение 3.1. *Пусть $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ — делитель алгебры Шварца,*

$$\mathcal{M} = \{\mu_k\} \subset \mathbb{C}$$

— нулевое множество функции ψ, M_0 — фиксированное положительное число и $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, причем

$$\mu_k \in \mathcal{M}' \Longleftrightarrow |\operatorname{Im}\mu_k| \le M_0 l\left(|\operatorname{Re}\mu_k|\right).$$

Тогда

$$\varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{m_{\mathrm{Re}}(x,1)}{l(|x|)} < \infty, \tag{3.5.4}$$

где $m_{\mathrm{Re}}(x,1)$ обозначает число точек последовательности

$$\operatorname{Re}\mathcal{M}' = \{\mathrm{Re}\mu_k : \ \mu_k \in \mathcal{M}'\},$$

принадлежащих отрезку $[x-1; x+1]$.

Сначала докажем одну вспомогательную лемму, обобщающую усиление из замечания 3.10 леммы 3.5.

Лемма 3.9. *Пусть функция ψ, множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ такие же, как в предложении 3.1, $\mathcal{M}'' = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}'$.*

Тогда функция

$$\psi_1(z) = \lim_{R\to\infty} \left(\prod_{\substack{|\mu_j|\le R\\ \mu_j\in\mathcal{M}'}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) \prod_{\substack{|\mu_j|\le R\\ \mu_j\in\mathcal{M}''}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right) \right), \tag{3.5.5}$$

где $\alpha_j = \operatorname{Re}\mu_j$, принадлежит алгебре $\mathbf{P}_\infty$, и существует положительная постоянная M_1, такая, что

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 2, \ \exists z' \in \mathbb{C} : \ |z' - x| \le M_1 l(|x|) \quad \text{и} \quad \ln|\psi_1(z')| \ge -M_1 l(|z'|). \tag{3.5.6}$$

Доказательство. Доказательство включения $\psi_1 \in \mathbf{P}_\infty$ начнем с оценки отдельного множителя $\left(1 - \frac{x}{\alpha_j}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha_j = \operatorname{Re}\mu_j$, где $\mu_j \in \mathcal{M}'$. Имеем

$$\left|1 - \frac{x}{\alpha_j}\right| \le \left|1 - \frac{x}{\mu_j}\right| \left(1 + \frac{M_0^2 l^2(\alpha_j)}{\alpha_j^2}\right)^{1/2} \le$$
$$\le \left|1 - \frac{x}{\mu_j}\right| \left(1 + O\left(\frac{l^2(\alpha_j)}{\alpha_j^2}\right)\right). \tag{3.5.7}$$

С учетом условия (3.5.2), из (3.5.7) выводим, что

$$\ln|\psi_1(x)| \le \operatorname{const} \ln|\psi(x)|, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.5.8}$$

И значит, $\psi_1 \in \mathbf{P}_\infty$.

Выведем оценки снизу для функции ψ_1. Для этого введем вспомогательную функцию

$$\psi^+(z) = \lim_{R\to\infty} \left(\prod_{\substack{|\mu_j|\le R \\ \mu_j \in \mathcal{M}'_- \bigcup \mathcal{M}''}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right) \prod_{\substack{|\mu_j|\le R \\ \mu_j \in \mathcal{M}'_+}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) \right),$$

где

$$\mathcal{M}'_+ = \{\mu_j \in \mathcal{M}' : \ \beta_j \ge 0\}, \quad \mathcal{M}'_- = \mathcal{M}' \setminus \mathcal{M}'_+.$$

В силу условия (3.5.3) найдется положительное число C_0 такое, что

$$l(Kt) \le C_0 l(t), \quad t \ge 0. \tag{3.5.9}$$

Замечаем, что

$$\left|1 - \frac{z}{\mu_j}\right| \le \frac{|\mu_j - z|}{|\alpha_j|} = \frac{((\alpha_j - x)^2 + (\beta_j - y)^2)^{1/2}}{|\alpha_j|},$$

где $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j \in \mathcal{M}'_+$, $z = x + \mathrm{i}y$. Откуда, с учетом (3.5.9), можем написать

$$\left|1 - \frac{z}{\mu_j}\right| \le \left|1 - \frac{z}{\alpha_j}\right| \tag{3.5.10}$$

для $z = x + 2\mathrm{i}C_0M_0 l(|x|)$ и всех $\mu_j \in \mathcal{M}'_+$ с $|\alpha_j| \le 4K|x|$.

Если же $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j \in \mathcal{M}'_+$ и $|\alpha_j| > 4K|x|$, то

$$\left|1 - \frac{z}{\mu_j}\right| \le \left|1 - \frac{z}{\alpha_j}\right| \cdot \left(1 + \frac{C_1 l^2(\alpha_j)}{\alpha_j^2}\right)^{1/2}, \tag{3.5.11}$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит только от M_0 и функции l.

Из соотношений (3.5.2), (3.5.10), (3.5.11) заключаем, что для $z = x + 2\mathrm{i}C_0M_0 l(|x|)$ имеет место оценка

$$\ln|\psi(z)| \le \operatorname{const} \ln|\psi^+(z)| + O(1), \quad |x| \to \infty. \tag{3.5.12}$$

При помощи аналогичных рассуждений доказывается справедливость при $z = x - 2\mathrm{i}C_0M_0 l(|x|)$ оценки

$$\ln|\psi^+(z)| \le \operatorname{const} \ln|\psi_1(z)| + O(1), \quad |x| \to \infty. \tag{3.5.13}$$

Применяя аналитический критерий Эренпрайса (теорема E, цитированная в п. 1.3.3) и теорему о минимуме модуля [29, Ch. 1, Sec. 8, Th. 11] к функции ψ, нетрудно вывести, что существует постоянная $C_2 > 0$ со свойством: для всех $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 2$,

$$\ln|\psi(z)| \geq -C_2 \ln|x|, \quad \text{если} \quad |z - x| = C_2 \ln|x|.$$

Фиксируем $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 2$, положим $z_x = x + \mathrm{i}C_2 \ln|x|$ и применим теорему о минимуме модуля [29, Ch. 1, Sec. 8, Th. 11] к функции $\frac{\psi}{\psi(z_x)}$ в круге $|z - z_x| \leq 4C_0M_0l(|x|)$. Согласно этой теореме, с учетом условий (3.5.1), (3.5.3) и оценок сверху на ψ, как на элемент алгебры $\mathbf{P}_\infty$, найдем постоянные $M_2 > 0$ и $\theta \in (2; 4)$, такие, что

$$\ln|\psi(z)| \geq -M_2 l(|x|), \quad \text{если} \quad z: \ |z - z_x| = \theta C_0 M_0 l(|x|). \tag{3.5.14}$$

Отсюда, принимая во внимание (3.5.12) и свойства функции l ((3.5.2)–(3.5.3)), выводим, что найдется постоянная $M_3 > 0$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 2$, существует $w_x \in \mathbb{C}$, для которой $|w_x - x| \leq M_3 l(|x|)$ и

$$\ln|\psi^+(w_x)| \geq -M_3 l(|w_x|).$$

Используя еще раз рассуждение с применением теоремы о минимуме модуля для функции $\frac{\psi^+}{\psi^+(w_x)}$ и круга

$$|z - w_x| \leq R, \quad R = \max\{2M_3 l(|x|),\ 4C_0 M_0 l(|x|)\},$$

получим сначала оценки для $\ln|\psi^+(z)|$, аналогичные (3.5.14). Затем, из них, (3.5.13) и свойств функции l (3.5.2), (3.5.3) выводим существование положительной постоянной M_1, о которой сказано в условии предложения.

$\square$

Замечание 3.14. Нетрудно видеть, что еще одно применение теоремы о минимуме модуля, к функции $\frac{\psi_1}{\psi(z')}$, позволяет заменить в формулировке леммы 3.9 $z' \in \mathbb{C}$ на $x' \in \mathbb{R}$, то есть вместо (3.5.6) будет справедливо следующее утверждение: существует положительная постоянная M_1, такая, что
$\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 2,\ \exists x' \in \mathbb{R}:$

$$|x' - x| \leq M_1 l(|x|) \text{ и } \ln|\psi_1(x')| \geq -M_1 l(|x'|). \tag{3.5.15}$$

Доказательство предложения 3.1.

Без ограничения общности можем считать, что функция ψ ограничена на вещественной оси и ее тип при порядке 1 равен единице. В силу (3.5.8), аналогичные предположения можем сделать относитедьно функции ψ_1, определенной формулой (3.5.5). Напомним, что для $\lambda_k \in \mathcal{M}'$ обозначено $\alpha_k = \operatorname{Re}\lambda_k$, В дальнейших рассуждениях переобозначим символом ψ функцию ψ_1, определенную в (3.5.5) и будем придерживаться схемы, примененной в доказательстве леммы 3.6.

Предположим, что соотношение (3.5.4) неверно, то есть

$$\lim_{j\to\infty} \frac{m(x_j,1)}{l(|x_j|)} = \infty \tag{3.5.16}$$

для некоторых x_j, $|x_j| \to \infty$.

Можем считать, что $x_j > 0$; положим

$$\psi_j(z) = \psi(z)(z-x_j)^{m_j} \cdot \prod_{k:|\alpha_k - x_j|\le 1} (z-\alpha_k)^{-1},$$

где $m_j = m(x_j,1)$, $j = 1,2,\ldots$ Легко видеть, что ψ_j — целые функции типа 1 при порядке 1 и верны оценки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_j(x)| \le C_0 2^{m_j}, \quad j = 1,2,\ldots,$$

где $C_0 = \max\{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t)|, 1\}$. Применяя теорему Бернштейна (см. [79, Chapter 11]), получаем справдливость следующих оценок

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_j^{(n)}(x)| \le C_0 2^{m_j} \tag{3.5.17}$$

для всех n, $j \in \mathbb{N}$.

Используя разложение функции ψ_j в ряд Тейлора с центром в точке x_j и оценки (3.5.17), выводим, что

$$|\psi_j(z)| \le C_0 2^{m_j} (m_j!)^{-1} |z-x_j|^{m_j} e^{|z-x_j|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, для всех $x \in \mathbb{R}$, таких, что

$$\ln C_0 + |x-x_j| + m_j \ln|x-x_j| - \ln(m_j!) \le -n\, l(x_j) - m_j \ln 2 \tag{3.5.18}$$

будет

$$|\psi_j(x)| \le x_j^{-n} \cdot 2^{-m_j}, \tag{3.5.19}$$

$n \in \mathbb{N}$.

Согласно формуле Стирлинга, соотношение (3.5.18) будет следовать из неравенства

$$|x-x_j| + m_j \ln|x-x_j| - m_j \ln m_j \le -nl(x_j) - C_1 m_j,$$

где C_1 — абсолютная потоянная.

Принимая во внимание предположение (3.5.16), для каждого $n \in \mathbb{N}$ можем найти j_n, для которого

$$-nl(x_j) \ge -m_j, \quad j = j_n, j_n+1, \dots \tag{3.5.20}$$

Пусть $b \in (0; e^{-C_1-2})$. Оценки (3.5.19) выполнены для $j \ge j_n$ и всех $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_j| \le bm_j$. Отсюда, с учетом неравенств (3.5.20) и соотношения

$$|\psi(z)| \le 2^{m_j}|\psi_j(z)|, \quad z \in \mathbb{C}, \ \ j = 1, 2, \dots,$$

выводим, что

$$|\psi(x)| \le e^{-nl(x_j)}, \quad \text{если} \quad |x-x_j| \le bnl(x_j), \ \ j \ge j_n, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

И значит, функция ψ не удовлетворяет условиям (3.5.15). Полученное противоречие завершает доказательство.

□

3.5.2 Оценки снизу функции $\ln|\varphi|$

Так как алгебра Шварца $\mathbf{P}_\infty$ является частью класса C (класса Картрайт) целых функций, любой элемент $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ — целая функция вполне регулярного роста, индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси $\mathrm{i}[-h_\varphi(-\pi/2); h_\varphi(\pi/2)]$, h_φ — индикатор φ.

Рассмотрим делитель $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ этой алгебры с нулевым множеством $\mathcal{Z}_\varphi = \{\lambda_j\}$. Без ограничения общности можем считать, что $\varphi(0) = 1$, $h_\varphi(-\pi/2) = h_\varphi(\pi/2) = a_\varphi$ — тип φ.

Пусть $\alpha : \mathbb{R} \to [1; +\infty)$ — четная функция, возрастающая на $[0; +\infty)$ и удовлетворяющая условиям

$$\alpha(e^s) \quad \text{— выпуклая функция на} \quad \mathbb{R}, \tag{3.5.21}$$

$$\exists K > 1 : \ \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\alpha(Kx)}{K\alpha(x)} < 1. \tag{3.5.22}$$

Теорема 3.11. *Предположим, что φ — делитель алгебры $\mathbf{P}_\infty$ и для всех $\lambda_j \in \mathcal{Z}_\varphi$, за исключением, быть может, конечного числа точек, справедливо неравенство*

$$|\operatorname{Im}\lambda_j| \le \alpha(|\operatorname{Re}\lambda_j|). \tag{3.5.23}$$

Тогда существует постоянная $C_1 > 0$, такая, что

$$\ln|\varphi(z)| \geq a_\varphi|\mathrm{Im}\, z| - C_1\alpha(|z|), \quad \textit{для всех} \quad z: \ |\mathrm{Im}\, z| \geq M_1\alpha(|\mathrm{Re}\, z|) \tag{3.5.24}$$

Доказательство. Рассуждения в настоящем доказательстве опираются на цитированную выше теорему о минимуме модуля аналитической функции в круге [29, Ch. 1, Sec. 8, Th. 11] и на следующие два утверждения типа Фрагмена-Линделефа для субгармонических функций.

Лемма FL1. *Пусть функция u субгармонична в области $G \subset \mathbb{C}$, и существуют гармоническая в G функция v_0 и постоянная A_0, такие, что*

$$\varlimsup_{\substack{z\to\zeta \\ z\in G}} (u(z) + \delta v_0(z)) \leq A_0, \quad \zeta \in \partial G,$$

для всех достаточно малых $\delta > 0$.

Тогда

$$u(z) \leq A_0, \quad z \in G.$$

Лемма FL1 представляет собой аналог теоремы 19 из [29] и доказывается с применением принципа максимума для субгармонических функций.

Лемма FL2. *Пусть функция u субгармонична и ограничена в области G, граница которой содержит бесконечно удаленную точку. Если*

$$\varlimsup_{\substack{z\to\zeta \\ z\in G}} u(z) \leq A_0, \quad \zeta \in \partial G \bigcap \mathbb{C},$$

то

$$u(z) \leq A_0, \quad z \in G.$$

Лемма FL2 обобщает теорему 20 из [29] и может быть доказана по той же схеме, но с применением леммы FL1 вместо теоремы 19 из [29].

В силу (3.5.21), имеем

$$\ln x = O(\alpha(x)), \quad x \to \infty.$$

Из этой оценки, (3.5.22) и (3.5.23), применяя теорему о минимуме модуля, выводим, что

$$\ln|\varphi(z)| \geq -C_0\alpha(|\mathrm{Re}\, z|), \tag{3.5.25}$$

если $|\mathrm{Im}\, z| \geq C_0\alpha(|\mathrm{Re}\, z|)$, где C_0 — положительная постоянная.

Рассмотрим функцию

$$P_\alpha(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\alpha(x+ty)}{1+t^2}\mathrm{d}t,\quad z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}.$$

В силу (3.5.21), (3.5.22), функция P_α непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$, гармонична в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z>0$ и $\operatorname{Im} z<0$ и удовлетворяет в них соотношениям

$$P_\alpha(z)\geq\alpha(|z|)\tag{3.5.26}$$

$$\varlimsup_{z\to\infty}\frac{P_\alpha(z)}{\omega(|z|)}<\infty\tag{3.5.27}$$

(см., например, [1]).

Положим

$$G=\{z:\quad \operatorname{Im} z>C_0\alpha(|\operatorname{Re} z|)\}.$$

Из (3.5.25) и свойств функции P_α, на границе области G для любого $\varepsilon\in[0;a_\varphi)$ имеет место неравенство

$$\ln|e^{-\mathrm{i}(a_\varphi-\varepsilon)z}|-\ln|\varphi(z)|-(a_\varphi+1)C_0P_\alpha(z)\leq 0.\tag{3.5.28}$$

Полная регулярность роста функции φ, условие (3.5.23), неравенства (3.5.27) и $\alpha(x)\geq 1$ для всех $x\in\mathbb{R}$ влекут оценку

$$\ln e^{(a_\varphi-\varepsilon)y}-\ln|\varphi(\mathrm{i}y)|-(a_\varphi+1)C_0P_\alpha(\mathrm{i}y)\leq C(\varepsilon),\quad y\geq 1,\tag{3.5.29}$$

где $C(\varepsilon)$ — положительная постоянная, зависящая только от $\varepsilon\in(0;a_\varphi)$ и функций φ и α.

Фиксируем произвольное $\sigma\in(0;1/2]$ и положим

$$v^\pm(z)=-|z|^{1+\sigma}\cos\left((\arg z\mp\pi/4)(1+\sigma)\right),\quad z\in G^\pm,$$

где $G^\pm=G\bigcap\{z:\ \operatorname{Re} z\gtrless 0\}$. Применив лемму FL1 в области $\widetilde{G}=G^\pm$ для $v_0=v^\pm$ и

$$u(z)=\ln|e^{-\mathrm{i}(a_\varphi-\varepsilon)z}|-\ln|\varphi(z)|-(a_\varphi+1)C_0P_\omega(z),$$

выводим, что функция u ограничена в области G. Откуда, учитывая (3.5.28) и лемму FL2, заключаем, что для всех достаточно малых значений $\varepsilon>0$ и всех $z\in G$ выполняется неравенство

$$\ln|e^{-\mathrm{i}(a_\varphi-\varepsilon)z}|-\ln|\varphi(z)|-(a_\varphi+1)C_0P_\alpha(z)\leq 0.$$

Следовательно,

$$\ln|\varphi(z)| \geq a_\varphi \mathrm{Im}\, z - (a_\varphi + 1)C_0 P_\alpha(z), \qquad z \in G. \tag{3.5.30}$$

Из этой оценки, принимая во внимание соотношение (3.5.27) и условие (3.5.23), выводим существование постоянной $C_1 > 0$, для которой

$$\ln|\varphi(z)| \geq a_\varphi \mathrm{Im}\, z - C_1\alpha(|z|), \quad \text{если} \quad \mathrm{Im}\, z \geq C_1\alpha(|\mathrm{Re}\, z|).$$

Точно так же получаем оценку в нижней полуплоскости для точек z, удовлетворяющих условию $\mathrm{Im}\, z \leq -C_1\alpha(|\mathrm{Re}\, z|)$.

$\square$

Замечание 3.15. Условие (3.5.22) влечет соотношение

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\ln\alpha(x)}{\ln|x|} < 1 \tag{3.5.31}$$

Поэтому в (3.5.23) можно использовать $\alpha(|\lambda_j|)$ вместо $\alpha(|\mathrm{Re}\,\lambda_j|)$.

Замечание 3.16. Если $\alpha(x) = \mathrm{const}\ln(|x| + e)$, то условие (3.5.23) и оценка (3.5.24) совпадают с (3.1.5) и (3.1.6), соответственно.

Глава 4

Представление D-инвариантного подпространства в пространстве Шварца в виде прямой суммы его резидуальной и экспоненциальной компонент

4.1 Введение

4.1.1 Постановка проблемы

В этой главе мы рассматриваем D-инвариантные подпространства в пространстве Шварца $C^\infty(-a;a)$.

Задача спектрального синтеза в слабом смысле для оператора дифференцирования в пространстве Шварца $\mathcal{E}_a = C^\infty(-a;a)$, сформулированная в [71, § 6] и рассмотренная нами в главе 1, изучает вопрос о справедливости представления

$$W = \overline{\operatorname{span}\operatorname{Exp} W + W_{I_W}}, \tag{4.1.1}$$

где $\operatorname{span} X$ — линейная оболочка множества $X \subset \mathcal{E}_a$. Такое представление D-инвариантного подпространства W выступает в роли обобщения равенства

$$W = \overline{\operatorname{span}\operatorname{Exp} W}; \tag{4.1.2}$$

а последнее означает, что подпространство W допускает *спектральный синтез в классическом смысле.*

Кроме возможной версии слабого спектрального синтеза (4.1.1) в работе [71, § 6] был также сформулирован вопрос о справедливости представления в виде прямой (алгебраической и топологической) суммы:

$$W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W} \oplus W_{I_W} \tag{4.1.3}$$

для D-инвариантного подпространства W с бесконечным дискретным спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W. Однако, авторы работы [71] указали, что не знают ответа на этот вопрос.

Нам удается выяснить, что условия справедливости (4.1.3) для нетривиального D-инвариантного подпространства с бесконечным дискретным спектром аналогичны по форме условиям допустимости слабого спектрального синтеза (4.1.1), приведенным в главе 1 (теорема 1.8). При этом вместо плотности Берлинга-Мальявена $D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W)$ будет использоваться другая, более тонкая, характеристика последовательности $\Lambda := \mathrm{i}\sigma_W$. Определение этой новой характеристики $D_{sd}(\Lambda)$ (Λ — произвольная комплексная последовательность) дается в следующем пункте. Там же мы формулируем основные результаты о представлении (4.1.3). Затем, в параграфе 4.2, приводятся полные доказательства и сопутствующие замечания. В параграфе 4.3 обсуждаются пограничные ситуации и примеры, иллюстрирующие их, а также дальнйшие свойства D-инвариантных подпространств, представимых в виде прямой суммы (4.1.3).

4.1.2 Формулировка основных результатов

Напомним, что для комплексной последовательности Λ из теоремы Берлинга-Мальявена о радиусе полноты, утверждающей, что

$$\rho(\Lambda) = \pi D_{BM}(\Lambda),$$

и теоремы Пэли-Винера-Шварца следует, что $D_{BM}(\Lambda) = +\infty$, если Λ не является нулевым подмножеством никакой функции φ из алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$; в противном случае, плотность $D_{BM}(\Lambda)$ есть инфимум множества всех положительных чисел c, таких, что в алгебре $\mathbf{P}_\infty$ имеется функция φ экспоненциального типа πc, обращающаяся в нуль на Λ.

Для определения новой характеристики последовательности нам понадобятся медленно убывающие функции в алгебре Шварца. Эти функции суть в точности делители алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$. Пусть последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ такова, что $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$.

Введем еще одну характеристику, которую обозначим $D_{sd}(\Lambda)$:
если Λ не является нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$, то полагаем $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$;

в противном случае, $D_{sd}(\Lambda)$ определяем как инфимум множества всех положительных чисел c, таких, что в алгебре $\mathbf{P}_\infty$ имеется медленно убывающая функция экспоненциального типа πc, равная нулю на Λ.

Как уже было сказано в предыдущем пункте, для разрешимости задачи о представлении D-инвариантного подпространства с бесконечным дискретным спектром в виде прямой суммы (4.1.3) величина $\pi D_{sd}(\Lambda)$ играет роль, аналогичную роли радиуса полноты $\rho(\Lambda)$ в теореме 1.8.

Напомним, что для промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ символом $|I|$ обозначается его длина (конечная или равная $+\infty$). Сформулируем теперь основные результаты, полученные по вопросу о представлении D-инвариантного подпространства W в виде (4.1.3).

Теорема 4.1. I. *Пусть W — D-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_a$ с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W, причем $|I_W| < +\infty$*

1) *Если $|I_W| > 2\pi D_{sd}(\Lambda)$ и выполнены оба соотношения*

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j|} < +\infty, \qquad \varliminf_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{|\lambda_j|} > -\infty, \tag{4.1.4}$$

то W имеет вид (4.1.3).

2) *Обратно, пусть W имеет вид* (4.1.3).

Тогда $|I_W| \geq 2\pi D_{sd}(\Lambda)$.

При этом, если $I_W \Subset (a;b)$, то справедливы оба неравенства (4.1.4). *Если же включение $I_W \subset (a;b)$ не компактно и точка a (или точка b) — граничная для I_W, то справедливо первое (соответственно, второе) из соотношений* (4.1.4).

II. *Среди D-инвариантных подпространств W с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W длины $2\pi D_{sd}(\Lambda)$ имеются как подпространства, допускающие представление* (4.1.3), *так и не допускающие его.*

Для D-инвариантных подпространств с дискретным спектром и резидуальным промежутком бесконечной длины имеет место следующий критерий.

Теорема 4.2. *Пусть W — D-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_\infty$ с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и неограниченным резидуальным промежутком $I_W = (-\infty; d]$ (либо $I_W = [c; +\infty)$).*

Представление (4.1.3) *для подпространства W верно тогда и только тогда, когда $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ и выполнено первое (соответственно, второе) из соотношений* (4.1.4).

Из теорем 4.1, 4.2 вытекает такое утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть W — D-инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_a$ с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W.*

Если $D_{sd}(\Lambda) = +\infty$, то представление (4.1.3) *не будет иметь места.*

Для представления функций из D-инвариантных подпространств вида (4.1.3), при определенных дополнительных условиях имеется следующее уточнение.

Теорема 4.3. *Пусть D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ имеет вид* (4.1.3)*, и выполнено хотя бы одно из условий: $|I_W| = +\infty$ или* (4.1.4)*.*

Тогда существует разбиение последовательности Λ на попарно не пересекающиеся конечные подмножества:

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k, \quad \Lambda_k \bigcap \Lambda_m \neq \emptyset,\ k \neq m,$$

такое, что любая функция $f \in W$ единственным образом представляется в виде суммы $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1 \in W_{I_W}, \quad f_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_j \in \Lambda_k} p_j(t) e^{-\mathrm{i}\lambda_j t} \right), \tag{4.1.5}$$

p_j — многочлены, причем внешняя сумма (по k) для f_2 сходится в топологии пространства $\mathcal{E}_\infty = C^\infty(\mathbb{R})$.

4.2 Доказательство теорем 4.1, 4.2 и 4.3

4.2.1 Вспомогательные сведения

Для произвольного промежутка $I \subset \mathbb{R}$ введем пространство $\mathbf{P}(I)$, *ассоциированное с I*. Это пространство определяется как индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\widetilde{P}_k$. В свою очередь, пространство $\widetilde{P}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, состоит из всех целых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{I,k} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(dy^+ - cy^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y,$$

в случае, когда $I = [c;d]$. Если же, скажем, $I = [c;b)$, то $\widetilde{P}_k$ — пространство целых функций, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{I,k} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(d_k y^+ - c y^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y,$$

где $c < d_1 < \cdots < d_k \nearrow b$, $k \to \infty$. Для промежутков I другого вида все определения даются с очевидными изменениями.

Вложения $\widetilde{P}_k \subset \widetilde{P}_{k+1}$ вполне непрерывны, поэтому $\mathbf{P}(I)$ — локально-выпуклое пространство типа (LN^*). Кроме того, $\mathbf{P}(I)$ — топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Алгебра Шварца $\mathbf{P}_\infty$ есть $\mathbf{P}(I)$ при $I = \mathbb{R}$, модуль $\mathbf{P}_a$ равен $\mathbf{P}(I)$ при $I = (-a;a)$.

Для произвольного промежутка $I \subset \mathbb{R}$ обозначим символом $\mathcal{E}(I)$ пространство всех бесконечно дифференцируемых на I функций, снабженное метризуемой топологией проективного предела банаховых пространств, аналогично тому, как это было сделано выше для случая $I = (-a;a)$. Например, если $I = [c;d]$, то $\mathcal{E}(I)$ — проективный предел банаховых пространств $C^k[c;d]$; если $I = [c;d)$, $d < +\infty$ то $\mathcal{E}(I)$ — проективный предел банаховых пространств $C^k[c;d_k]$, где $c < d_k \nearrow d$, при $k \to \infty$.

Пространство $\mathcal{E}(I)$ и всякое его замкнутое подпространство W, снабженное индуцированной из $\mathcal{E}(I)$ топологией, являются рефлексивными пространствами Фреше.

Сильное сопряженное к $\mathcal{E}(I)$ пространство $\mathcal{E}'(I)$ состоит из всех распределений $S \in \mathcal{E}'$, носители которых лежат в I. При этом, согласно теореме Пэли-Винера-Шварца,

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}'(I)) = \mathbf{P}(I).$$

Пусть $W \subset \mathcal{E}(I)$ — D-инвариантное подпространство. Его *аннуляторный подмодуль* $\mathcal{J}$ в $\mathbf{P}(I)$ определяется формулой $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$, где

$$W^0 = \{S \in \mathcal{E}'(I) : \ S(f) = 0 \ \forall f \in W\}.$$

Пусть последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, такова, что система эскопненциальных одночленов Exp_Λ, построенная по последовательности Λ, не полна в $\mathcal{E}(I)$. Положим

$$E(\Lambda, I) = \overline{\operatorname{span} \mathrm{Exp}(\Lambda)} \tag{4.2.1}$$

(замыкание берется в пространстве $\mathcal{E}(I)$). Ясно, что $E(\Lambda, I)$ — нетривиальное D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}(I)$, допускающее спектральный синтез.

Символом $\mathcal{J}(\Lambda, I)$ обозначим совокупность *всех* функций $\varphi \in \mathcal{P}(I)$, обращающихся в нуль на Λ. Легко видеть, что $\mathcal{J}(\Lambda, I)$ — *локализуемый* подмодуль в $\mathbf{P}(I)$, то есть он содержит все функции из $\mathbf{P}(I)$, равные нулю на Λ. Из двойственной схемы, подробно изложенной в главе 1, следует, что $\mathcal{J}(\Lambda, I)$ — аннуляторный подмодуль подпространства $E(\Lambda, I)$.

Сильное сопряженное к пространству Фреше $E(\Lambda, I)$ есть фактор-пространство $\mathcal{E}'(I)/(E(\Lambda, I))^0$, где

$$(E(\Lambda, I))^0 = \{S \in \mathcal{E}'(I): \ S(f) = 0 \ \forall f \in E(\Lambda, I)\}.$$

Преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ позволяет реализовать его как фактор-пространство целых функций $\mathcal{P}(I)/\mathcal{J}(\Lambda, I)$.

4.2.2 Двойственная интеполяционная задача

Напомним, что функция $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ называется *медленно убывающей («slowly decreasing function»)*, если существует $A > 0$, такое, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists x' \in \mathbb{R}: \ |x - x'| \le A \ln(2 + |x|), \ |\varphi(x')| \ge (2 + |x'|)^{-A}. \quad (4.2.2)$$

Для дальнейших рассмотрений заметим, что условие (4.2.2) может быть заменено на следующее, эквивалентное ему, но более общее по форме:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists z' \in \mathbb{C}: \ |x - z'| \le A \ln(2 + |x|), \ |\psi(z')| \ge (2 + |z'|)^{-A} \quad (4.2.3)$$

(см. [90, § 3]).

Приведем еще одно эквивалентное определение из работы [74]: функция $\varphi \in \mathbf{P}_\infty$ медленно убывающая, если существует постоянная $a_0 > 0$ такая, что выполнены оба следующих условия

(SD1) каждая связная компонента L_α множества

$$L(\varphi, a_0) = \{z: \ \ln|\varphi(z)| < -a_0(|\operatorname{Im} z| + \ln(2 + |z|))\} \quad (4.2.4)$$

относительно компактна;

(SD2) для любой связной компоненты L_α множества $L(\varphi, a_0)$ верно неравенство

$$|\operatorname{Im}\zeta| + \ln(2 + |\zeta|) \le a_0(|\operatorname{Im} z| + \ln(2 + |z|)), \quad \zeta, z \in L_\alpha.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{E}_a$ нетривиальное D-инвариантное подпространство W с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W. Пусть

$$U: E(\Lambda, (-a; a)) \to E(\Lambda, I_W)$$

— оператор сужения, ставящий в соответствие каждой функции f из подпространства $E(\Lambda, (-a; a))$ ее сужение на промежуток I_W; здесь подпространство $E(\Lambda, I_W)$ определяется формулой (4.2.1) по последовательности $\Lambda = \mathrm{i}\sigma_W$ и промежутку I_W.

Предложение 4.1. *Для того чтобы D-инвариантное подпространство W, допускающее слабый спектральный синтез* (4.1.1), *представлялось в виде прямой суммы* (4.1.3), *необходимо и достаточно, чтобы оператор сужения*

$$U : E(\Lambda, (-a; a)) \to E(\Lambda, I_W) \tag{4.2.5}$$

был линейным топологическим изоморфизмом.

Доказательство. Заметим, что в силу хорошо известного результата о единственности периодического в среднем продолжения функции (см. [46, § 1], [32, § 9]), подпространство $W_{I_W} \bigcap E(\Lambda, (-a; a))$ тривиально. Следовательно, алгебраическая сумма подпространств W_{I_W} и $E(\Lambda, (-a; a))$ — прямая. Если эта сумма совпадает с подпространством W, то она необходимо будет и топологической. Действительно, в этом случае соответствие $(f_1, f_2) \to f_1 + f_2$ определяет непрерывное отображение пространства Фреше $W_{I_W} \times E(\Lambda, (-a; a))$ на пространство Фреше W, и поэтому представляет собой изоморфизм (алгебраический и топологический) этих пространств.

Перейдем к доказательству *достаточности.* Функция $f \in \mathcal{E}_a$ принадлежит подпространству W в том и только в том случае, когда ее сужение $f|_{I_W}$ на промежуток I_W есть элемент подпространства $E(\Lambda, I_W)$ (см. [71, предложение 6.2]). Поэтому, учитывая сюръективность оператора сужения U, для любой $f \in W$ можем найти функцию $f_1 \in E(\Lambda, (-a; a))$, удовлетворяющую соотношению $f|_{I_W} = f_1|_{I_W}$. Ясно, что тогда

$$f_2 = f - f_1 \in W_{I_W}, \quad f = f_1 + f_2 \in E(\Lambda, (-a; a)) \oplus W_{I_W}.$$

Необходимость. В силу цитированных в начале доказательства результатов о единственности периодического в среднем продолжения, оператор сужения (4.2.5) — алгебраический и топологический мономорфизм. Для любой функции $f_0 \in E(\Lambda, I_W)$ ее произвольное гладкое продолжение f на интервал $(-a; a)$ принадлежит W, согласно [71, предложение 6.2]. Поэтому $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in E(\Lambda, (-a; a))$, $f_2 \in W_{I_W}$. Откуда выводим, что $f_0 = U(f_1)$. Таким образом, U есть линейное непрерывное отображение пространства Фреше $E(\Lambda, (-a; a))$ на пространство Фреше $E(\Lambda, I_W)$. Следовательно, это отображение — линейный топологический изоморфизм.

□

Рассмотрим два промежутка $I,\ \widetilde{I} \subset \mathbb{R}$, $I \subset \widetilde{I}$, и оператор

$$U^* : \mathcal{E}'(I)/(E(\Lambda, I))^0 \to \mathcal{E}'(\widetilde{I})/(E(\Lambda, \widetilde{I}))^0,$$

сопряженный к оператору сужения $U: E(\Lambda, \widetilde{I}) \to E(\Lambda, I)$. Преобразование Фурье-Лапласа естественным образом определяет поднятие сопряженного оператора

$$\widehat{U}: \mathbf{P}(I)/\mathcal{J}(\Lambda, I) \to \mathbf{P}(\widetilde{I})/\mathcal{J}(\Lambda, \widetilde{I}),$$

действующее по правилу: каждому классу смежности

$$[\psi] \in \mathbf{P}(I)/\mathcal{J}(\Lambda, I), \quad \psi \in \mathbf{P}(I),$$

ставится в соответствие класс смежности

$$\widehat{U}([\psi]) \in \mathbf{P}(\widetilde{I})/\mathcal{J}(\Lambda, \widetilde{I}), \quad \widehat{U}([\psi]) = \{\Psi = \psi + \Phi: \ \Phi \in \mathcal{J}(\Lambda, \widetilde{I})\}.$$

Согласно результату работы [13] (следствие из теоремы 7), оператор сужения $U: E(\Lambda, \widetilde{I}) \to E(\Lambda, I)$ является линейным топологическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$\widehat{U}\left(\mathbf{P}(I)/\mathcal{J}(\Lambda, I)\right) = \mathbf{P}(\widetilde{I})/\mathcal{J}(\Lambda, \widetilde{I}). \tag{4.2.6}$$

В этом случае и оператор $\widehat{U}$ — линейный топологический изоморфизм. Равенство (4.2.6) эквивалентно тому, что для любой функции $\Psi \in \mathbf{P}(\widetilde{I})$ найдется $\psi \in \mathbf{P}(I)$ со свойством: $(\Psi - \psi) \in \mathcal{J}(\Lambda, \widetilde{I})$, то есть $\Psi(\Lambda) = \psi(\Lambda)$.

Сформулируем результат проведенного рассуждения в виде предложения.

Предложение 4.2. *Оператор сужения U, действующий из $E(\Lambda, \widetilde{I})$ в $E(\Lambda, I)$, является линейным топологическим изморфизмом тогда и только тогда, когда разрешима следующая интерполяционная задача: для любой функции $\Psi \in \mathbf{P}(\widetilde{I})$ существует функция $\psi \in \mathbf{P}(I)$ такая, что разность $(\Psi - \psi)$ обращается в нуль на Λ.*

В дальнейшем изложении мы будем называть интерполяционную задачу из предложения 4.2 *интерполяционной задачей на Λ для пары пространств $\mathbf{P}(\widetilde{I})$ и $\mathbf{P}(I)$.*

Предложение 4.3. *Для того чтобы D-инвариантное подпространство W, определенное соотношением* (4.1.1)*, представлялось в виде прямой суммы* (4.1.3)*, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}_a$ и $\mathbf{P}(I_W)$.*

Это утверждение есть следствие предложений 4.1 и 4.2.

4.2.3 Решение интерполяционной задачи для пары пространств $\mathbf{P}(\widetilde{I})$ и $\mathbf{P}(I)$

Всюду далее $I = \langle c; d\rangle$ — конечный или бесконечный промежуток, где "$\langle$" может быть как круглой "(", так и квадратной "[" скобкой , аналогичный смысл имеет "$\rangle$".

Теорема 4.4. *Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ и промежуток $I = \langle c; d\rangle$ таковы, что экспоненциальная система Exp_Λ не полна в $\mathcal{E}(I)$.*

I. 1) *Если $2\pi D_{sd}(\Lambda) < |I|$ и выполнены оба соотношения* (4.1.4), *то интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}_\infty$ и $\mathbf{P}(I)$ разрешима.*

2) *Предположим, что $|I| = +\infty$, $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$, и выполнено первое или второе из соотношений* (4.1.4), *в зависимости от вида промежутка: $I = (-\infty; d\rangle$ или $I = \langle c; +\infty)$, соответственно.*

Тогда интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}_\infty$ и $\mathbf{P}(I)$ разрешима.

II. *Предположим, что существует промежуток $\widetilde{I} \supset I$ со свойством: разрешима интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}(\widetilde{I})$ и $\mathbf{P}(I)$.*

Тогда $D_{sd}(\Lambda) < +\infty$ и $2\pi D_{sd}(\Lambda) \le |I|$. Если же дополнительно

$$d \in (\widetilde{I} \setminus I)\bigcup(I \setminus \partial\widetilde{I}) \quad (\textit{или} \quad c \in (\widetilde{I} \setminus I)\bigcup(I \setminus \partial\widetilde{I}))$$

то выполнено первое (соответствено, второе) из соотношений (4.1.4).

Доказательство. **I.** 1) Согласно условию, существуют медленно убывающая функция $\varphi \in \mathbf{P}(I)$, обращающаяся в нуль на Λ, и постоянная $M_0 > 0$ такая, что множество Λ содержится в криволинейной полосе

$$S = \{z = x + \mathrm{i}y : \ |y| \le M_0 \ln(2 + |x|), \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Отсюда, учитывая (4.2.2), нетрудно вывести, что найдется $A_1 > 0$ со свойством:

$$\forall \lambda_j \in \Lambda \ \exists x_j \in \mathbb{R} : \ |\lambda_j - x_j| \le A_1 \ln(2 + |x_j|) \quad \text{и} \quad |\varphi(x_j)| \ge (2 + |x_j|)^{-A_1}.$$

Применяя теорему об оценке снизу модуля аналитической функции в круге к функции $f_j = \frac{\varphi}{\varphi(x_j)}$ и кругу $|z - x_j| \le 2A_1 \ln(2 + |x_j|)$, находим окружность C_j с центром в точке x_j и радиуса

$$r_j \in (A_1 \ln(2 + |x_j|); 2A_1 \ln(2 + |x_j|)),$$

такую, что
$$|\varphi(z)| \ge (2+|z|)^{-A_0}, \quad z \in C_j,$$
причем постоянная $A_0 \ge 0$ не зависит от j (а точка λ_j, очевидно, лежит внутри C_j).

Пусть K_j — открытый круг с границей C_j,
$$\mathcal{K} = \bigcup_j K_j, \quad \mathcal{C} = \bigcup_j C_j, \quad \widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{K} \setminus \mathcal{C}.$$

Множество $\widetilde{\mathcal{U}}$ состоит из счетного числа относительно компактных связных компонент U_k. При этом, вообще говоря, не все $U_k \subset \widetilde{\mathcal{U}}$ имеют с Λ непустое пересечение. Определим множество
$$\mathcal{U} = \bigcup_{U_k \bigcap \Lambda \neq \emptyset} U_k;$$
и для произвольного $A > A_0$ положим
$$S_A = \{z \in \mathbb{C} : \ |\varphi(z)| < (2+|z|)^{-A}\}.$$
Ясно, что $S_A \subset \mathcal{U}$.

Из включений
$$\varphi, \quad \varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} \in \mathbf{P}(I)$$
(последнее вытекает из теоремы Бернстейна [79, Глава 11]), следует существование постоянной $M_1 > 0$ такой, что
$$|\varphi(z)| \le (2+|z|)^{M_1}, \quad |\varphi'(z)| \le (2+|z|)^{M_1} \quad \forall z \in \overline{\mathcal{U}}. \tag{4.2.7}$$

Учитывая, оценку (4.2.7) для $|\varphi'|$ и то, что диаметр каждой связной компоненты $U_k \subset \mathcal{U}$ есть величина $O(\ln|z|)$ для всех $z \in U_k$ при $k \to \infty$, нетрудно вывести существование постоянной $A' > A_0$ со свойством: для всех U_k расстояние от множества $U_k \bigcap S_{A'}$ до границы множества U_k не меньше, чем $\sup\limits_{z \in U_k}(2+|z|)^{-A'}$.

Построим функцию η, бесконечно дифференцируемую во всей комплексной плоскости, равную нулю вне множества $\mathcal{U}$ и единице — на множестве $\mathcal{U} \bigcap S_{A'}$, такую, что
$$\left|\frac{\partial \eta(z)}{\partial \bar{z}}\right| \le (2+|z|)^{M_2}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.2.8}$$
где постоянная $M_2 > 0$ не зависит от z (см. [7, гл. I, § 1]).

Рассмотрим произвольную функцию $\Psi \in \mathbf{P}_\infty$. Положим $v = -\Psi\varphi^{-1}\frac{\partial\eta}{\partial\bar{z}}$. Принимая во внимание внутреннее описание алгебры $\mathbf{P}_\infty$, свойства функций φ, η (в том числе, оценку (4.2.8)), выводим, что $v \in C^\infty(\mathbb{C})$ и

$$|v(z)| \le (2 + |z|)^{M_3}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где M_3 — положительная постоянная. Согласно хорошо известному результату Л. Хермандера [57, теорема 4.4.2], существует бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{C}$ функция u, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}} = v,$$

причем

$$|u(z)| \le (2 + |z|)^{M_4}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.2.9}$$

где M_4 — положительная постоянная.

Функция $\psi = \varphi u + \Psi\eta$ есть искомое решение интерполяционной задачи. Действительно, $\Psi(\Lambda) = \psi(\Lambda)$, так как $\varphi(\Lambda) = 0$. Далее,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = \varphi\frac{\partial u}{\partial\bar{z}} + \Psi\frac{\partial\eta}{\partial\bar{z}} = 0,$$

и значит, ψ — целая функция.

Заметим, что $\mathcal{U} \subset \widetilde{S}$, где

$$\widetilde{S} = \{z = x + \mathrm{i}y: \ |y| \le \widetilde{M_0}\ln(2 + |x|)\},$$

$\widetilde{M_0}$ — положительная постоянная. Далее,

$$\eta(z) = 0, \quad z \notin \mathcal{U},$$

а функция Ψ имеет в криволинейной полосе $\widetilde{S}$ степенной рост. Отсюда, учитывая (4.2.9), выводим, что $\psi \in \mathbf{P}(I)$.

2) Для определенности будем считать, что $I = (-\infty; d\rangle$.

Пусть $\varphi \in \mathbf{P}(I)$ — медленно убывающая функция, обращающаяся в нуль на Λ, где последовательность Λ удовлетворяет первому из соотношений (4.1.4) и

Нам понадобится специальное разбиение комплексной плоскости на две неограниченные области, G_+ и G_-, первая из которых содержит открытую верхнюю полуплоскость, а вторая, соответственно, содержится в открытой нижней полуплоскости. Для построения этого разбиения воспользуемся определением (4.2.2) медленно убывающей функции, замечая, что в нем можно без потери общности заменить неравенство

$|x-x'|\le a\ln(2+|x|)$ на неравенство $|x-x'|\le a\ln(2+|x'|)$. Для каждой точки $x\in\mathbb{R}$ найдем точку $x'\in\mathbb{R}$ как в (4.2.2) и применим теорему об оценке снизу модуля аналитической функции к функции $f_x=\frac{\varphi}{\varphi(x')}$ в круге $|z-x'|\le 2a\ln(2+|x'|)$. Получим оценку

$$|\varphi(z)|\ge(2+|z|)^{-a'},\quad z\in C_x, \tag{4.2.10}$$

где постоянная a' не зависит от x, C_x — окружность с центром в точке x' и радиуса

$$r_x\in(a\ln(2+|x'|);2a\ln(2+|x'|)).$$

Пусть K_x — открытый круг с границей C_x, $I_x=K_x\bigcap\mathbb{R}$. Выделим из покрытия $\{I_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ вещественной прямой счетное локально конечное подпокрытие $\{I_{x_j}\}:\bigcup\limits_j I_{x_j}=\mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что из отрезков дуг окружностей C_{x_j}, принадлежащих нижней полуплоскости, можно составить непрерывную кривую Γ, которая разделяет комплексную плоскость на две неограниченные области G_+ и G_-.

Воспользуемся версией определения медленно убывающей функции, состоящей в совокупности требований (SD1), (SD2) (см. п.4.2.2). Без ограничения общности можем считать, что фигурирующая в (SD1) и (SD2) положительная постоянная a_0 удовлетворяет неравенству $a_0\ge a'$, где a' — постоянная из оценки (4.2.10).

Ясно, что множество $L(\varphi,a_0)$, определенное формулой (4.2.4), *центрировано с* последовательностью нулей функции φ: оно содержит все нули функции φ и каждая связная компонента L_α этого множества содержит хотя бы один нуль функции φ.

Положим $\Lambda_+=\Lambda\bigcap G_+$, $\Lambda_-=\Lambda\setminus\Lambda_+$. Обозначим символом $\mathcal{L}_+$ объединение множества тех связных компонент $L_\alpha\subset L(\varphi,a_0)$, для которых

$$L_\alpha\bigcap\Lambda_+\ne\emptyset,$$

а символом $\mathcal{L}_-$ — объединение тех $L_\alpha\subset L(\varphi,a_0)$, для которых

$$L_\alpha\bigcap\Lambda_-\ne\emptyset.$$

Оценка (4.2.10) выполнена всюду на Γ — общей границе областей G_+ и G_-. Поэтому

$$\mathcal{L}_+\subset G_+,\quad \mathcal{L}_-\subset G_-.$$

Учитывая сказанное выше и то, что для Λ выполнено первое из соотношений (4.1.4), будем рассуждать аналогично тому, как это было сделано в п.1 настоящего доказательства при построении функции η. При этом связные компоненты U_k множества $\mathcal{U}$ заменяем на связные компоненты L_α множества $\mathcal{L}_+$. В результате проведенных рассуждений найдем постоянную $a_1 > a_0$ и бесконечно дифференцируемую во всей комплексной плоскости функцию η_+, равную нулю вне множества $\mathcal{L}_+$ и единице — на множестве $\mathcal{L}_+ \bigcap L(\varphi, a_1)$, и удовлетворяющую оценке

$$\left|\frac{\partial \eta_+(z)}{\partial \bar{z}}\right| \leq (2+|z|)^{b_1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где b_1 — положительная постоянная, не зависящая от z.

Далее, принимая во внимание условие (SD2), так как $\varphi' \in \mathbf{P}(I)$, выводим существование постоянной $a_2 > a_0$ со свойством: для каждой компоненты $L_\alpha \subset \mathcal{L}_-$ расстояние от множества $L_\alpha \bigcap L(\varphi, a_2)$ до границы множества L_α не меньше, чем

$$\sup_{z \in L_\alpha} \exp(-a_2(|\mathrm{Im}\, z| + \ln(2+|z|))),$$

где a_2 — положительная постоянная, не зависящая от z. Отсюда следует, что существует функция η_-, бесконечно дифференцируемая во всей комплексной плоскости, равная нулю вне множества $\mathcal{L}_-$ и единице — на множестве $\mathcal{L}_- \bigcap L(\varphi, a_2)$, и такая, что

$$\left|\frac{\partial \eta_-(z)}{\partial \bar{z}}\right| \leq \exp(b_2(|\mathrm{Im}\, z| + \ln(2+|z|))) \quad z \in \mathbb{C},$$

где b_2 — положительная постоянная, не зависящая от z.

Пусть $\Psi \in \mathbf{P}_\infty$ — произвольная функция. Верны оценки

$$|\Psi(z)| \leq (2+|z|)^M, \quad z \in \mathcal{L}_+,$$

$$|\Psi(z)| \leq (2+|z|)^M e^{M|\mathrm{Im}\, z|}, \quad z \in \mathcal{L}_-,$$

где $M > 0$ — не зависящая от z постоянная. Положим

$$\eta = \eta_+ + \eta_-, \qquad v = -\Psi \varphi^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}}.$$

Из всего вышесказанного вытекает, что функция v бесконечно дифференцируема в $\mathbb{C}$, и найдется постоянная $C_0 > 0$ со свойством:

$$v e^{-p} \in L^2(\mathbb{C}),$$

где p — субгармоническая функция, определенная формулой

$$p(z) := \begin{cases} C_0 \ln(2+|z|), & \mathrm{Im}\, z \geq 0, \\ -C_0 \mathrm{Im}\, z + C_0 \ln(2+|z|), & \mathrm{Im}\, z < 0. \end{cases}$$

Согласно теореме Хермандера [57, теорема 4.4.2], существует бесконечно дифференцируемое в $\mathbb{C}$ решение u уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v,$$

удовлетворяющее оценке

$$|u(z)| \le \mathrm{const}\, e^{p(z)+\mathrm{const}\ln(2+|z|)}.$$

Как и в п.1 настоящего доказательства, рассмотрим функцию

$$\psi = \varphi u + \Psi\eta$$

и убедимся в том, что $\Psi(\Lambda) = \psi(\Lambda)$ и $\psi \in \mathbf{P}(I)$.

II. Пусть $\varepsilon_0 = \mathrm{dist}(I, \partial\widetilde{I})$. Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, для которого существует точка $a_\varepsilon \in \widetilde{I} \setminus I$, такая, что $\mathrm{dist}\,(a_\varepsilon, I) < \varepsilon$. Предположим для определенности, что $a_\varepsilon \ge d$. Это соответствует случаю $d \in (\widetilde{I} \setminus I)\bigcup(I \setminus \partial\widetilde{I})$. Согласно условию, для функции $\Psi(z) = e^{-\mathrm{i}a_\varepsilon z}$ найдется функция $\psi \in \mathbf{P}(I)$ такая, что функция $\Phi := \Psi - \psi$ обращается в нуль на множестве Λ.

Для ψ имеем оценку

$$\ln|\psi(z)| \le d_1 y + M_\psi \ln(2+|x|), \quad z = x + \mathrm{i}y, \quad \text{при} \quad y > 0,$$

где $m_\psi > 0$ и либо $d_1 < d$, либо можно выбрать $a_\varepsilon > d$, то есть в любом случае $a_\varepsilon - d_1 > 0$. Поэтому найдутся постоянные: $M_0 > 0$, $r_0 > 0$, зависящая только от M_0, $y_0 > 0$, зависящая только от M_0 и r_0 — такие, что

$$\ln|\Phi(z)| \ge 1/2,$$

для всех

$$z \in \{z = x + \mathrm{i}y :\ |x| \ge r_0,\ y \ge M_0 \ln|x|\} \bigcup \{z = x + \mathrm{i}y :\ |x| \le r_0,\ y \ge y_0\}.$$

Отсюда следует, что Φ — медленно убывающая функция. Более того, все нули этой функции, за исключением, быть может, конечного их числа, принадлежат множеству

$$\{z = x + \mathrm{i}y :\ y \le \max(y_0,\ M_0 \ln(|x|+2)),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Следовательно, выполнено первое из соотношений(4.1.4). Домножая Φ на подходящий экспоненциальный множитель $e^{-\mathrm{i}c_0 z}$, получим медленно убывающую функцию экспоненциального типа, не превосходящего $(|I|+\varepsilon)/2$. Учитывая произвольность ε, заключаем, что

$$D_{sd}(\Lambda) < +\infty, \qquad 2\pi D_{sd}(\Lambda) \leq |I|.$$

Если имеет место включение $c \in (\widetilde{I} \setminus I) \bigcup (I \setminus \partial\widetilde{I})$, то проводя аналогичные рассуждения с $a_\varepsilon \leq c$, можно показать, что выполнено второе из соотношений (4.1.4).

$\square$

Замечание 4.1. Из доказательства пункта II теоремы 4.4 видим, что если для последовательности Λ выполнены соотношения (4.1.4) и величина $D_{sd}(\Lambda)$ конечна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется медленно убывающая функция экспоненциального типа, не превосходящего $\pi(D_{sd}(\Lambda)+\varepsilon)$, такая, что соотношения вида (4.1.4) справедливы для всего ее нулевого множества $\Lambda' \supset \Lambda$.

Замечание 4.2. Из доказательства теоремы 4.4 также видно, что интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}_\infty$ и $\mathbf{P}(I)$ будет разрешима в случае, когда последовательность Λ, удовлетворяет (4.1.4) и более слабому требованию, чем условие $2\pi D_{sd}(\Lambda) < |I|$, а именно, такому: подмодуль $\mathcal{J}(\Lambda, I)$ содержит медленно убывающую функцию.

Простейшая ситуация, реализующая последнее замечание, возникает, если Λ совпадает с нулевым множеством какой-либо медленно убывающей функции экспоненциального типа σ и I — отрезок длины $2\pi\sigma$. Действительно, в этом случае $2\pi D_{BM}(\Lambda) = 2\pi D_{sd}(\Lambda) = |I|$.

Ниже, в п.4.4.1 , мы проиллюстрируем замечание 4.2 более интересным примером, в котором $2\pi D_{BM}(\Lambda) < |I|$, $2\pi D_{sd}(\Lambda) = |I|$, и в подмодуле $\mathcal{J}(\Lambda, I)$ имеется медленно убывающая функция. А в п.4.4.2 будет приведен пример, показывающий, что из неравенства $2\pi D_{sd}(\Lambda) \leq |I|$ не всегда следует существование медленно убывающей функции в *нетривиальном* подмодуле $J(\Lambda, I)$.

Комбинируя пункты I и II теоремы 4.4, получаем такое утверждение.

Следствие 4.2. *Предположим, что для заданного промежутка I найдется промежуток $\widetilde{I} \supset I$ такой, что разрешима интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}(\widetilde{I})$ и $\mathbf{P}(I)$, и, дополнительно, выполнены оба соотношения* (4.1.4) *в случае, если $|I| < \infty$.*

Тогда разрешима интерполяционная задача на Λ для пары $\mathbf{P}_\infty$ и $\mathbf{P}(I)$.

Из утверждения II теоремы 4.4 следует, что дополнительное требование о соотношениях (4.1.4) в следствии 4.2 выполняется автоматически в случае, когда I компактно принадлежит $\widetilde{I}$. Если же вложение $I \subset \widetilde{I}$ не компактно, то, без предположения о справедливости (4.1.4), верно следующее, более слабое, утверждение.

Предложение 4.4. *Предположим, что вложение $I \subset \widetilde{I}$ не компактно и $|\widetilde{I}| < \infty$.*

Если разрешима интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}(\widetilde{I})$ и $\mathbf{P}(I)$, то разрешима интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}(\widetilde{I}_\infty)$ и $\mathbf{P}(I)$, где $\tilde{I}_\infty$ — луч, содержащий промежуток $\widetilde{I}$ и имеющий с I общую граничную точку.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что

$$I = [c; b), \quad \widetilde{I} = (a; b).$$

Тогда $\widetilde{I}_\infty = (-\infty; b)$.

Положим $\sigma_0 = c - a$ и покажем, что для любого $\sigma \in (0; \sigma_0)$ разрешима интерполяционная задача на Λ для пространств $\mathbf{P}(a'; b)$ и $\mathbf{P}(I)$, где $a' = a - \sigma$.

Пусть $c' = c - \sigma$, $b' = b - \sigma$ и $\Phi \in \mathbf{P}(a'; b)$ — произвольная функция. Напишем представление

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad \Phi_1 \in \mathbf{P}(a'; b'), \quad \Phi_2 \in \mathbf{P}(a; b). \tag{4.2.11}$$

Обоснование возможности представления (4.2.11) будет дано ниже.

По условию, для функций $\Phi_1 e^{-\mathrm{i}\sigma z}$ и Φ_2, принадлежащих $\mathbf{P}(a; b)$, в пространстве $\mathbf{P}(I)$ найдутся функции $\tilde{\varphi}_1$ и φ_2, совпадающие с ними на множестве Λ. Далее, для функции $\psi_1 = \tilde{\varphi}_1 e^{\mathrm{i}\sigma z} \in \mathbf{P}(a; b)$ существует функция $\varphi_1 \in \mathbf{P}(I)$, такая, что

$$\varphi_1(\Lambda) = \psi_1(\Lambda) = \Phi_1(\Lambda).$$

Положим $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Видим, что $\varphi \in \mathbf{P}(I)$ и $\varphi(\Lambda) = \Phi(\Lambda)$. Таким образом, интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}(a'; b)$ и $\mathbf{P}(I)$ разрешима.

Аналогично доказывается, что разрешима интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}(a''; b)$ и $\mathbf{P}(I)$, где $a'' = a' - \sigma'$, и σ' — произвольное положительное число, меньшее $(c - a')$. Продолжая эти рассуждения, приходим к разрешимости интерполяционной задачи на Λ для пары пространств $\mathbf{P}(\tilde{a}; b)$ и $\mathbf{P}(I)$ при любом конечном $\tilde{a}$, а значит, и для пары пространств $\mathbf{P}(-\infty; b)$ и $\mathbf{P}(I)$.

Для завершения доказательства осталось обосновать возможность представления (4.2.11) для $\Phi \in \mathbf{P}(a';b)$. Согласно теореме Пэли-Винера-Шварца, $\Phi = \mathcal{F}(S)$ для некоторого $S \in \mathcal{E}'(a';b)$. Обозначим замыкание выпуклой оболочки носителя распределения S символом $\operatorname{ch}\operatorname{supp} S$. Имеем

$$\operatorname{ch}\operatorname{supp} S = [t_1;t_2] \subset (a';b).$$

Если $(a;b')\bigcap(t_1;t_2) = \emptyset$, то одно из слагаемых в правой части представления (4.2.11) полагаем равным нулю. Менее тривиален случай, когда

$$(a;b')\bigcap(t_1;t_2) \neq \emptyset.$$

В этом случае, поделив, если нужно, Φ на подходящий многочлен p, получим функцию $\Psi = \Phi p^{-1} \in \mathbf{P}(a';b)$ со свойством:

$$T = \mathcal{F}^{-1}(\Psi) \in (C[t_1;t_2])'.$$

Хорошо известно, что действие T на элементы пространства $C[t_1;t_2]$ и, в частности, на функции $f \in \mathcal{E}(a';b)$ реализуется интегралом Стилтьеса:

$$T(f) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}v(t),$$

где v — функция ограниченной вариации на отрезке $[t_1;t_2]$, зависящая от T и определяемая с точностью до постоянного слагаемого.

Выберем и зафиксируем точку $t_0 \in (a;b')\bigcap(t_1;t_2)$, в которой функция v непрерывна, и положим

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t), & t \in [t_1;t_0], \\ v(t_0), & t \in (t_0;t_2], \end{cases}$$
$$v_2 = v - v_1.$$

Имеем

$$T = T_1 + T_2, \quad T_j(f) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}v_j(t), \quad j = 1,2,$$

причем $\operatorname{ch}\operatorname{supp} T_1 \subset [t_1;t_0] \subset (a';b')$, $\operatorname{ch}\operatorname{supp} T_2 \subset [t_0;t_2] \subset (a;b)$. Следовательно,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad \Psi_1 = \mathcal{F}(T_1) \in \mathbf{P}(a';b'), \Psi_2 = \mathcal{F}(T_2) \in \mathbf{P}(a;b).$$

Полагая $\Phi_j = \Psi_j p$, $j = 1,2$, получаем искомое представление (4.2.11) для функции Φ.

□

Отметим, что утверждениям пункта II теоремы 4.4 можно придать такую форму.

Следствие 4.3. 1) *Если в условиях теоремы* 4.4

$$2\pi D_{sd}(\Lambda) > |I| \quad \textit{или} \quad D_{sd}(\Lambda) = +\infty,$$

то ни при каком $\widetilde{I} \supset I$ *интерполяционная задача на* Λ *для пары пространств* $\mathbf{P}(\widetilde{I})$ *и* $\mathbf{P}(I)$ *не разрешима.*

2) *Пусть* Λ *и* $I = \langle c; d\rangle$ *такие же, как в теореме* 4.4. *Если для промежутка* $\widetilde{I} \supset I$ *выполнено*

$$d \notin \partial\widetilde{I} \quad \textit{и} \quad \varlimsup_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{\ln|\lambda_j|} = +\infty$$

или

$$c \notin \partial\widetilde{I} \quad \textit{и} \quad \varliminf_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{\ln|\lambda_j|} = -\infty,$$

то интерполяционная задача на Λ *для пары пространств* $\mathbf{P}(\widetilde{I})$ *и* $\mathbf{P}(I)$ *не разрешима.*

Из утверждений I.2) и II теоремы 4.4 получаем критерий разрешимости интерполяционной задачи на Λ для пары пространств $\mathbf{P}_\infty$ и $\mathbf{P}(I)$ в случае бесконечного промежутка I.

Следствие 4.4. *Пусть* $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $D_{BM}(\Lambda) < +\infty$, $I = (-\infty; d\rangle$ (*или* $I = \langle c; +\infty)$).

Для того чтобы была разрешима интерполяционная задача на Λ *для пары пространств* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{P}(I)$, *необходимо и достаточно, чтобы величина* $D_{sd}(\Lambda)$ *была конечной и выполнялось первое* (*соответственно, второе*) *из соотношений* (4.1.4).

4.2.4 Завершение доказательства теорем 4.1 и 4.2

Прежде всего заметим, что в условиях утверждения I.1 теоремы 4.1 и в условиях теоремы 4.2, D-инвариантное подпространство W с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным интервалом I_W имеет вид (4.1.1). Это следует из очевидного соотношения $D_{BM}(\Lambda) \le D_{sd}(\Lambda)$ и приведенной во введении теоремы A. Поэтому справедливость I.1 в теореме 4.1 вытекает из предложения 4.3 и утверждения I.1 теоремы 4.4. А справедливость теоремы 4.2 — из предложения 4.3 и следствия 4.4.

Далее, применяя предложение 4.3 и пункт II теоремы 4.4 с $\widetilde{I} = (a; b)$, $I = I_W$, выводим справедливость утверждений пункта I.2 теоремы 4.1.

Для обоснования положительной части утверждения II теоремы 4.1 рассмотрим распределение $S \in \mathcal{E}'(-a;a)$, преобразование Фурье-Лапласа которого есть целая функция $\varphi = e^{\mathrm{i}\gamma z}s$, где $s(z) = \tilde{s}(t_0 z)$ при некотором $t_0 > 0$, а $\tilde{s}$ — функция типа синуса. Определим D-инвариантное подпространство

$$W_S = \{f \in \mathcal{E}(-a;a):\ S(f^{(k)}) = 0,\ k = 0,1,\dots\}. \tag{4.2.12}$$

Из специального принципа двойственности (предложение 1.2), предложения 1.3, замечания 1.3.10 вытекают следующие факты о подпространстве W_S :
1) это подпространство имеет дискретный спектр $(-\mathrm{i}\Lambda)$, где Λ — нулевое множество функции φ;
2) резидуальный промежуток подпространства W_S представляет собой отрезок $[c;d] \subset (-a;a)$ длины $2\pi D_{BM}(\Lambda)$;
3) W_S допускает слабый спектральный синтез (4.1.1).

В силу предложения 4.3, возможность представления W_S в виде (4.1.3) равносильна разрешимости интерполяционной задачи на Λ для пары пространств $\mathbf{P}_a$ и $\mathbf{P}([c;d])$.

Заметим, что $\mathcal{J}(\Lambda,[c;d])$ — главный подмодуль, порожденный медленно убывающей функцией φ в модуле $\mathbf{P}([c;d])$. Последовательность Λ совпадает, с точностью до положительного множителя, с последовательностью нулей функции типа синуса. Поэтому

$$\operatorname{Im}\lambda_j = O(1), \quad j \to \infty, \quad \lambda_j \in \Lambda.$$

Согласно замечанию 4.2, интерполяционная задача на Λ для пары пространств $\mathbf{P}_a$ и $\mathbf{P}([c;d])$ разрешима.

Приведем теперь пример D-инвариантного подпространства с дискретным спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W, длина которого равна $2\pi D_{sd}(\Lambda)$, не допускающего представления (4.1.3).

Пусть $T \in \mathcal{E}'_\pi$ — распределение, преобразование Фурье-Лапласа которого есть

$$\varphi(z) = \frac{\sin \pi z}{s_0(z)\omega(z)}, \quad \text{где} \quad s_0(z) = \frac{\sin(\pi\sqrt{z})}{\pi\sqrt{z}}, \quad \omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{2^{2n}+1}\right).$$

Подпространство $W_T \subset \mathcal{E}_\pi$, определенное формулой (4.2.12), с заменой S на T, имеет дискретный спектр $\sigma_{W_T} = (-\mathrm{i}\Lambda)$, где Λ — нулевое множество функции φ. Ясно, что $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ и $D_{sd}(\Lambda) = D_{BM}(\Lambda) = 1$. С другой стороны, известно, что W_T не допускает слабого спектрального синтеза (4.1.1) (см. [71, теорема 1.2]), подробно об этом примере, в том числе в двойственных терминах, мы говорили в пп. 1.2.2, 1.4.2. Тем более, для W_T не может иметь места представление (4.1.3).

4.2.5 Доказательство теоремы 4.3

Теорема 4.3 доказывается с использованием результатов работ [90] и [74], замечания 4.2 и следствия 4.2, а также предложения 4.3.

По условию каждая функция $f \in W$ допускает единственное представление

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in W_{I_W}, \quad f_2 \in E(\Lambda, (a; b)). \tag{4.2.13}$$

Используя п.I.2 теоремы 4.1, теорему 4.2, п.I.2 теоремы 4.4 и предложение 4.3, выводим, что, во-первых, функция f_2 из (4.2.13) единственным образом продолжается до функции $F_2 \in E(\Lambda, \mathbb{R})$, во-вторых, существует медленно убывающая функция $\psi \in \mathbf{P}(a; b)$, равная нулю на множестве Λ. Здесь мы также принимаем во внимание выполнение хотя бы одного из условий: $|I_W| = +\infty$ или (4.1.4).

Из факта существования в $\mathbf{P}(a; b)$ медленно убывающей функции, обращающейся в нуль на Λ, согласно теореме 3.1 из [90] (см. также [74, Теорема 9]), следует, что функция F_2 представляется в виде ряда (4.1.5), сходящегося в $\mathcal{E}_\infty$.

$\square$

Замечание 4.3. Если в условиях теоремы 4.3 промежуток I_W и интервал $(-a; a)$ имеют общую конечную граничную точку, например, $I_W = [c; a)$, то подпространство W состоит из сужений на $(-a; a)$ функций из D-инвариантного подпространства $\widetilde{W} \subset \mathcal{E}(-a; +\infty)$, причем

$$\widetilde{W} = W_{[c;+\infty)} \oplus E(\Lambda, \mathbb{R}),$$

и для $\widetilde{W}$ справедлива теорема 4.3.

Замечание 4.4. Если D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_a$ имеет вид (4.1.3), а вложение $I_W \subset (-a; a)$ не компактно и $|I_W| < +\infty$, то, как показывает пример из п.4.3.2, вообще говоря, одно из соотношений (4.1.4) может не выполняться. Пусть, например, $I_W = [c; a)$. В этом случае, согласно предложениям 4.3 и 4.4, гарантировано лишь продолжение функции f_2 из (4.2.13) до периодической в среднем функции на луче $(-\infty; a)$, то есть до элемента пространства $E(\Lambda, (-\infty; a))$. И значит, не применима теорема 3.1 из [90] о представлении функций, периодических в среднем на всей прямой, в виде ряда из экспоненциальных полиномов. Однако, анализируя доказательство в [90, теорема 3.1], можно усмотреть, что в условиях настоящего замечания периодическое в среднем продолжение на луч $(-\infty; a)$ функции f_2 раскладывается в ряд из экспоненциальных полиномов, сходящийся со скобками в пространстве $\mathcal{E}(-\infty; a-d)$, при достаточно большом $d > 0$. С другой стороны, анализ того же доказательства из работы [90] показывает, что в некоторых случаях d может оказаться равным 0. В частности, это справедливо для функций из D-инвариантного подпространства, рассмотренного в п. 4.3.1.

4.3 Примеры классов D-инвариантных подпространств, представимых в виде прямой суммы

4.3.1 D-инвариантные подпространства, спектры которых — сдвиги целочисленной (под)последовательности

Из теоремы 3.1 в главе 3 и теоремы 4.1 получаем следующее утверждение.

Предложение 4.5. *Пусть функция $l : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ такова, что для всех достаточно больших t и s*

$$|l(t) - l(s)| \leq C_l |\ln^2 t - \ln^2 s|, \quad C_l > 0;$$

положим $\Lambda = \{\lambda_k\}$, где

$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Тогда D-инвариантное подпространство W со спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным промежутком I_W длины $|I_W| \geq 2\pi$ имеет вид

$$W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W} \oplus W_{I_W}$$

Замечание 4.5. Точно так же, из теорем 3.9, 3.10 главы 3 и теоремы 4.1 выводится утверждение о представимости в виде прямой суммы D-инвариантного подпространства W с чисто мнимым спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$, таким, что соответствующая последовательность Λ удовлетворяет условиям одной из теорем, 3.9 или 3.10, а резидуальный промежуток I_W имеет длину $|I_W| \geq 2\pi\Delta$, где 2Δ — плотность Λ.

Докажем еще одно утверждение о достаточных условиях, при которых заданная последовательность является спектром D-инвариантного подпространства, равного прямой сумме своих резидуальной и экспоненциальной компонент.

Для этого нам понадобятся некоторые обозначения.

Упорядоченное по возрастанию объединение двух непересекающихся натуральных подпоследовательностей $\mathcal{N} = \{n_k\}$ и $\mathcal{M} = \{m_j\}$ будем обозначать $\{N_i\}$. Задание на множествах $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ вещественнозначных функций

$$\beta : \mathcal{N} \to \mathbb{R}, \quad \gamma : \mathcal{M} \to \mathbb{R},$$

естественным образом определяет функцию α на последовательности $\{N_i\}$ так, что ее сужение на множество $\mathcal{N}$ ($\mathcal{M}$) совпадает с β (соответственно, с γ). Далее, для вещественной последовательности Λ, $0 \notin \Lambda$, символами $\Lambda^+ = \{\lambda_k^+\}$ и $\Lambda^- = \{\lambda_j^-\}$ обозначаем подпоследовательности $\Lambda \bigcap (0; +\infty)$ и $\Lambda \bigcap (-\infty; 0)$.

Теорема 4.5. *Пусть вещественная последовательность Λ такова, что для нее существуют $c_0 > 0$ и натуральные подпоследовательности*

$$\mathcal{N} = \{n_k\}, \quad \mathcal{M} = \{m_j\}, \quad \mathcal{N} \bigcap \mathcal{M} = \emptyset,$$

со свойством: определенные формулами

$$\beta(n_k) = \lambda_k^+ - \frac{n_k}{c_0}, \quad \gamma(m_j) = \lambda_j^- + \frac{m_j}{c_0},$$

функции

$$\beta : \mathcal{N} \to \mathbb{R}, \quad \gamma : \mathcal{M} \to \mathbb{R},$$

неотрицательны, а функция $\alpha : \{N_i\} \to \mathbb{R}$, определенная на их объединении $\{N_i\}$ указанным выше способом, удовлетворяет условию

$$|\alpha_j - \alpha_i| \le a_0(\ln^2 N_j - \ln^2 N_i), \quad j > i, \tag{4.3.1}$$

где a_0 — положительная постоянная и обозначено $\alpha_i = \alpha(N_i)$.

Тогда для любого $d_0 > c_0$ существует единственное D-инвариантное подпространство W с дискретным спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным интервалом $I_W = [-\pi d_0; \pi d_0]$, причем

$$W = W_{I_W} \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}.$$

Доказательство. Построим продолжение функции α на все $\mathbb{N}$ с сохранением свойства (4.3.1).

Изменив, если необходимо, конечное число членов последовательности Λ, можем считать, что $N_1 = 1$. Тогда из (4.3.1) следует, что

$$\alpha_i \le a_0 \ln^2 N_i, \quad i = 2, 3, \dots$$

Обозначим $\nu_i = a_0 \ln^2 N_i - \alpha_i \ge 0$. и рассмотрим натуральные числа n, лежащие между соседними N_i и N_{i+1}.
А) Предположим сначала, что $\alpha_{i+1} - \alpha_i \ge 0$. Тогда из (4.3.1) следует, что $\nu_i \le \nu_{i+1}$. Если $\nu_i = \nu_{i+1}$, то положим

$$\alpha(n) = a_0 \ln^2 n - \nu_i, \quad n = N_i + 1, \dots, N_{i+1} - 1.$$

В противном случае, $\nu_{i+1} > 0$ и $\sigma := \frac{\alpha(N_{i+1})}{a_0 \ln^2 N_{i+1}} \in (0; 1)$. Пусть n_0 — наименьшее натуральное число в интервале $(N_i; N_{i+1})$ со свойством

$$a_0(1 - \sigma) \ln^2 n_0 \ge \nu_i.$$

Определяем функцию α для натуральных $n \in (N_i; N_{i+1})$ следующим образом:

$$\alpha(n) = a_0 \ln^2 n - \nu_i, \quad n = N_i + 1, \dots, n_0 - 1,$$
$$\alpha(n) = \sigma a_0 \ln^2 n, \quad n = n_0, \dots, N_{i+1} - 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$|\alpha(j) - \alpha(i)| \le a_0(\ln^2 j - \ln^2 i), \quad j \ge i, \quad i, j \in [N_i; N_{i+1}] \bigcap \mathbb{N}. \tag{4.3.2}$$

Б) Пусть теперь $\alpha_{i+1} - \alpha_i < 0$. Рассмотрим функцию

$$y(t) = \alpha_i - a_0(\ln^2 t - \ln^2 N_i).$$

Если $y(n) \ge \alpha_{i+1}$ для всех $n = N_i + 1, \dots, N_{i+1} - 1$, то полагаем

$$\alpha(n) = y(n), \quad n = N_i + 1, \dots, N_{i+1} - 1.$$

Иначе, обозначим n_0 наименьшее натуральное число в интервале $(N_i; N_{i+1})$ со свойством $y(n_0) < \alpha_{i+1}$ и определим

$$\alpha(n) = y(n), \quad n = N_i + 1, \dots, n_0 - 1,$$

$$\alpha(n) = \alpha_{i+1}, \quad n = n_0, \dots, N_{i+1} - 1.$$

Как и в случае А), легко видеть, что построенное продолжение функции α удовлетворяет условию (4.3.2).

Доопределяя α по линейности на каждом интервале

$$(n; n+1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

получим функцию на луче $[1; \infty)$, удовлетворяющую оценке

$$|\alpha(t'') - \alpha(t')| \leq b_0(\ln^2 t'' - \ln^2 t'), \quad 1 \leq t' \leq t'' < \infty, \tag{4.3.3}$$

где b_0 — положительная постоянная, вообще говоря, отличная от a_0.

Рассмотрим вещественную последовательность $\mathcal{Z} = \{\zeta_n\}$, где

$$\zeta_n = \frac{n}{c_0} + \alpha(|n|), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ясно, что $\Lambda \subset \mathcal{Z}$. Из свойства (4.3.3) функции α и теоремы 3.1 главы 3 выводим, что формула

$$\varphi(z) = \lim_{R \to \infty} \prod_{|\zeta_n| < R} \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right),$$

определяет целую функцию экспоненциального типа πc_0, которая является делителем алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$, обращающимся в нуль на Λ. В частности, отсюда следует, что радиус полноты $\rho_\Lambda \leq \pi c_0$; и значит, согласно теореме 1.8 из главы 1 любого $d_0 > c_0$ существует единственное D-инвариантное подпространство W с дискретным спектром $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальным интервалом $I_W = [-\pi d_0; \pi d_0]$, допускающее слабый спектральный синтез.

Далее, так как функция φ — делитель алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty$, то $D_{sd}(\Lambda) \leq c_0$. Из этого факта, применяя теорему 4.1, получаем требуемое утверждение о представлении подпространства W в виде прямой суммы.

$\square$

4.3.2 Пример D-инвариантного подпространства вида (4.1.3) с конечным некомпактным резидуальным промежутком, спектр которого не удовлетворяет одному из соотношений (4.1.4)

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{s(-\mathrm{i}z)\sin \pi z}{s(z)}, \quad \text{где} \quad s(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right).$$

Нулевое множество функции φ

$$\mathcal{M} = \left(\mathbb{Z} \setminus \{2^k\}_{k=1}^{\infty}\right) \bigcup \{2^k\mathrm{i}\}_{k=1}^{\infty}$$

не удовлетворяет первому из соотношений (4.1.4) и удовлетворяет второму. Считающая функция ν последовательности $\mathcal{M}$ имеет асимптотику

$$\nu(t) = (\log_2 t + O(1)), \quad t \to \infty.$$

Используя известную технику из теории целых функций (см., например, [79, III.3.5]), нетрудно проверить, что оценки

$$A\ln^2(2+|z|) - B_\delta \ln(2+|z|) \le \ln|s(z)| \le A\ln^2(2+|z|) + B_\delta \ln(2+|z|), \quad (4.3.4)$$

справедливы для любого достаточно малого $\delta > 0$ вне кружков

$$|z - 2^k| < \delta, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь $A = (\ln 2)^{-1}$, а положительная постоянная B_δ зависит только от δ.

Хорошо известно, что при любом достаточно малом $\delta > 0$ будет

$$\ln|\sin \pi z| = \pi|\mathrm{Im}\, z| + O(1), \quad |z| \to \infty, \quad |z - k| \ge \delta, \; k \in \mathbb{Z}. \quad (4.3.5)$$

Из (4.3.4) и (4.3.5) следует, что

$$\pi|\mathrm{Im}\, z| - C_\delta \ln(2+|z|) \le \ln|\varphi(z)| \le \pi|\mathrm{Im}\, z| + C_\delta \ln(2+|z|) \quad (4.3.6)$$

для всех z, удовлетворяющих неравенствам

$$|z - \mu_j| \ge \delta, \quad \mu_j \in \mathcal{M},$$

где $\delta > 0$ достаточно мало. Следовательно, $D_{sd}(\Lambda) = 1$.

Положим $I = [-\pi; \pi + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\mathcal{M}$ не удовлетворяет первому из соотношений (4.1.4), интерполяционная задача на $\mathcal{M}$ не разрешима для пары пространств $\mathbf{P}(\widetilde{I})$ и $\mathbf{P}(I)$, где $\widetilde{I}$ — любой промежуток, содержащий отрезок $\bar{I} = [-\pi; \pi + \varepsilon]$. Тем не менее, интерполяционная задача на $\mathcal{M}$ для пары пространств $\mathbf{P}(-\infty; \pi + \varepsilon)$ и $\mathbf{P}(I)$ разрешима. Докажем это. Будем рассуждать по схеме доказательства п.I.2 теоремы 4.4. В силу оценок (4.3.6) и оценки сверху для $\ln|\varphi'(z)|$, вытекающей из теоремы Бернстейна, можем построить бесконечно дифференцируемую в $\mathbb{C}$ функцию η со следующими свойствами:

$$\eta(z) = 0, \quad z \notin \bigcup_j K(\mu_j, 2\delta),$$

$$\eta(z) = 1, \quad z \in \bigcup_j K(\mu_j, \delta),$$

$$\left|\frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}}\right| \le a_0, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $a_0 > 0$ не зависит от z и $K(\mu, r) = \{z : \ |z - \mu| \leq r\}$.

Пусть $\Psi \in \mathbf{P}(-\infty; \pi + \varepsilon)$. Положим

$$v = -\Psi\varphi^{-1}\frac{\partial\eta}{\partial\bar{z}}, \quad p(z) = C_0 \ln(2 + |z|),$$

где C_0 — положительная постоянная. Из сказанного выше следует, что

$$v \in C^\infty(\mathbb{C}), \quad ve^{-p} \in L^2(\mathbb{C})$$

при достаточно большом значении $C_0 > 0$. По теореме Хермандера [57, теорема 4.4.2], существует решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}} = v,$$

бесконечно дифференцируемое в $\mathbb{C}$ и удовлетворяющее оценке

$$|u(z)| \leq \mathrm{const}\, e^{p(z) + \mathrm{const}\ln(2+|z|)}.$$

Положим $\psi = \varphi u + \Psi\eta$. Легко видеть, что $\Psi(\Lambda) = \psi(\Lambda)$ и $\psi \in \mathbf{P}(I)$. С учетом произвольности выбора $\Psi \in \mathbf{P}(-\infty; \pi + \varepsilon)$, отсюда заключаем, что интерполяционная задача на $\mathcal{M}$ для пары пространств $\mathbf{P}(-\infty; \pi + \varepsilon)$ и $\mathbf{P}(I)$ разрешима.

4.4 О некоторых свойствах $D_{sd}(\Lambda)$

4.4.1 Возможные соотношения между плотностями $D_{BM}(\Lambda)$ и $D_{sd}(\Lambda)$

Начнем с примера

Определим последовательность Λ следующим образом: она состоит из точек j^2, каждая из которых взята с кратностью $[\ln^{\frac{3}{2}} j]$, $j = 2,\ 3, \ldots$ Нетрудно проверить, что для этой последовательности

$$D_{BM}(\Lambda) = 0, \quad D_{sd}(\Lambda) = \infty.$$

Теперь покажем, что для любого $\delta \in (0; 1)$ существует последовательность Λ, удовлетворяющая условиям:

$$0 < D_{BM}(\Lambda) < \delta, \quad D_{sd}(\Lambda) = 1.$$

Такая последовательность, в том числе, служит нетривиальной иллюстрацией к замечанию 4.2.

Фиксируем $M_0 \in \mathbb{N}$, $M_0 > \delta^{-1}$, и положим $\Lambda = \Lambda' \bigcup \Lambda''$, где

$$\Lambda' = \{\pm k M_0\}_{k=1}^{\infty}, \quad \Lambda'' = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Lambda''_j,$$

$$\Lambda''_0 = \{k_0 M_0 + 1,\ k_0 M_0 + 2, \ldots, k_0 M_0 + [\ln^3 (k_0 M_0)]\},$$

$$\Lambda''_j = \{k_j M_0 + 1,\ k_j M_0 + 2, \ldots, k_j M_0 + [\ln^3 (k_j M_0)]\},$$

$$k_j = \left[\frac{2^{k_{j-1} M_0}}{M_0}\right] + 1, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

при этом натуральное число k_0 выбирается столь большим, что

$$\Lambda' \bigcap \Lambda'' = \emptyset, \quad \Lambda'_j \bigcap \Lambda'_{j+1} = \emptyset, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Для вещественной последовательности Λ символом $n_\Lambda(t)$ будем обозначать число точек этой последовательности в промежутке $(0; t]$, $t > 0$, и $(-n_\Lambda(t))$ — число точек последовательности Λ в промежутке $[t; 0)$, $t < 0$.

Опираясь, например, на результаты работы [104, IX.D], нетрудно убедиться в том, что $D_{BM}(\Lambda) = \frac{1}{M_0}$. Действительно, очевидно, что

$$\Delta_\Lambda = \Delta_{\Lambda'} = \frac{2}{M_0},$$

где $\Delta_{(\cdot)}$ — плотность соответствующей последовательности $(\cdot)$. Согласно утверждениям из [104, IX.D] (теорема и следствие об эффективной плотности положительной и вещественной последовательностей), плотность Берлинга-Мальявена $D_{BM}(\Lambda)$ есть инфимум положительных чисел A, таких, что существует измеримая (имеющая плотность) вещественная последовательность $\widetilde{\Lambda} \supset \Lambda$, такая что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|n_{\widetilde{\Lambda}}(t) - At|}{1 + t^2} \mathrm{d}t < \infty,$$

Отсюда и из определения последовательности Λ выводим, что можно взять $\widetilde{\Lambda} = \Lambda$ и

$$D_{BM}(\Lambda) = \frac{\Delta_\Lambda}{2} = \frac{1}{M_0}.$$

Ясно, что $D_{sd}(\Lambda) \le 1$, так как Λ — подмножество нулей медленно убывающей функции $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$, принадлежащей $\mathbf{P}([-\pi; \pi])$. Покажем, что Λ не является нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции экспоненциального типа $\sigma < \pi$.

Предположим противное: пусть φ — медленно убывающая функция экспоненциального типа $\sigma < \pi$, такая, что $\varphi(\Lambda) = 0$. В силу замечания 4.1, сделанного в п.4.2.3, и леммы 3.4.2, можем считать, что нулевое множество $\mathcal{Z}_\varphi$ функции φ лежит на вещественной оси. Положим $\mathcal{M} = \mathcal{Z}_\varphi \setminus \Lambda$.

Согласно теореме 3.8, должно выполняться соотношение

$$n_{\mathcal{Z}_\varphi}(t) - \gamma t = O(\ln^2 |t|), \quad |t| \to \infty, \tag{4.4.1}$$

где $\gamma = \sigma/\pi \in (M_0^{-1}; 1)$, а символ $n_{\mathcal{Z}_\varphi}$ имеет тот же смысл для последовательности $\mathcal{Z}_\varphi$, что и n_Λ для Λ.

Полагая

$$\tilde{t}_j = k_j M_0, \quad t_j = k_j M_0 + [\ln^3(k_j M_0)], \quad j = 0, 1, \ldots,$$

можем написать

$$n_\Lambda(\tilde{t}_j) = \frac{1}{M_0}\tilde{t}_j + O(\ln^2 \tilde{t}_j), \quad j \to \infty, \tag{4.4.2}$$

$$n_\Lambda(t_j) = \frac{1}{M_0}\tilde{t}_j + [\ln^3(\tilde{t}_j)] + O(\ln^2 \tilde{t}_j), \quad j \to \infty. \tag{4.4.3}$$

Из (4.4.1) и (4.4.2) следует, что

$$n_{\mathcal{M}}(\tilde{t}_j) = \left(\gamma - \frac{1}{M_0}\right)\tilde{t}_j + O(\ln^2 \tilde{t}_j), \quad j \to \infty.$$

Отсюда и из (4.4.3) выводим, что

$$n_{\mathcal{Z}_\varphi}(t_j) \geq \gamma\tilde{t}_j + [\ln^3(\tilde{t}_j)] + O(\ln^2 \tilde{t}_j), \quad j \to \infty,$$

так как, очевидно, $n_{\mathcal{Z}_\varphi}(t_j) = n_\Lambda(t_j) + n_{\mathcal{M}}(t_j)$ и $n_{\mathcal{M}}(t_j) \geq n_{\mathcal{M}}(\tilde{t}_j)$.

Принимая во внимание определения $\tilde{t}_j$ и t_j, получаем неравенство

$$n_{\mathcal{Z}_\varphi}(t_j) \geq \gamma t_j + (1-\gamma)[\ln^3 t_j] + O(\ln^2 t_j), \quad j \to \infty,$$

которое противоречит оценке (4.4.1).

4.4.2 (Не)достижимость инфимума в определении хараетеристики $D_{sd}(\Lambda)$

В предыдущем пункте и в замечании 4.2 мы выяснили, что между достаточным и необходимым для разрешимости интерполяционной задачи условиями: $2\pi D_{sd}(\Lambda) < |I|$ и $2\pi D_{sd}(\Lambda) \leq |I|$ имеется "положительный зазор", включающий в себя следующее промежуточное условие: существует медленно убывающая функция φ, экспоненциальный тип которой не превосходит $|I|/2$, такая, что $\varphi(\Lambda) = 0$. Это условие является достаточным для разрешимости соответствующей интерполяционой задачи. Очевидно, что неравенство $2\pi D_{sd}(\Lambda) \le |I|$ также вытекает из этого условия.

В связи с вышесказанным возникает естественный вопрос: следует ли из неравенства $2\pi D_{sd}(\Lambda) \le |I|$ существование медленно убывающей функции, экспоненциальный тип которой не превосходит $|I|/2$, и которая равна нулю на Λ?

Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{z}\sin\pi z}{\sin\pi\sqrt{z}} + \frac{\sin\pi z}{s(z)}, \tag{4.4.4}$$

где $s(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{2^k}\right)$. Ясно, что $\Phi \in \mathbf{P}_\infty$ и ее экспоненциальный тип равен π, а множество нулей Λ этой функции удовлетворяет условию $D_{BM}(\Lambda) = 1$.

Наша цель — доказать, что $D_{sd}(\Lambda) = 1$, но при этом Λ не является нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции экспоненциального типа π.

Напомним хорошо известные факты об асимптотическом поведении функций $\sin\pi z$ и $\frac{\sin(\pi\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$. При любом достаточно малом фиксированном $\delta > 0$ имеем

$$\ln|\sin\pi z| = \pi|\mathrm{Im}\, z| + O(1), \quad |z| \to \infty, \quad |z-k| \ge \delta,\ k \in \mathbb{Z}, \tag{4.4.5}$$

$$\ln\left|\frac{\sin\pi\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| = O(1), \quad x \to +\infty, \quad |x-k^2| \ge \delta,\ k = 1, 2, \dots, \tag{4.4.6}$$

$$\ln\left|\frac{\sin\pi\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| = \pi\sqrt{|x|} + O(1), \quad x \to -\infty. \tag{4.4.7}$$

Принимая во внимание оценки (4.3.4) для функции $\ln|s|$ и соотношения (4.4.5)–(4.4.7), нетрудно вывести, что функция $|\Phi|$ ограничена сверху и снизу положительными постоянными на полуоси $[0;\infty)$, но она убывает быстрее любой функции $|x|^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$, при $x \to -\infty$. Поэтому Φ не является медленно убывающей функцией. Пусть для некоторой $\Psi \in \mathbf{P}_\infty$ частное Ψ/Φ есть целая функция минимального типа при порядке 1. Тогда, в силу (4.3.4), (4.4.5)–(4.4.7), порядок функции Ψ/Φ во всей плоскости равен 0. Учитывая, что на положительной полуоси эта функция имеет полиномиальный рост, заключаем, что Ψ/Φ — многочлен. Поэтому Λ не может быть нулевым подмножеством никакой медленно убывающей функции экспоненциального типа π.

С другой стороны, для произвольного $\varepsilon \in (0;1)$ положим

$$\omega_\varepsilon(z) = s(z)\Phi(-\varepsilon z).$$

Используя (4.3.4) и (4.4.4)–(4.4.7), нетрудно проверить, что $\Phi\omega_\varepsilon$ — медленно убывающая функция экспоненциального типа $\pi(1+\varepsilon)$. Учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, заключаем, что $D_{sd}(\Lambda) = 1$.

Глава 5

Сохранение классов целых функций, выделяемых ограничениями на рост вдоль вещественной оси, при возмущениях их нулей

5.1 Введение

Всюду в этой главе обозначаем символами $\mathcal{E}_a$ и $\mathcal{E}'_a$ пространство Шварца $C^\infty(-a;a)$ и сильное сопряженное к нему.

Пусть $Q \subset H(\mathbb{C})$ – класс целых функций, выделенный какими-либо ограничениями на рост. Одним из вопросов, важных в приложениях, является вопрос о сохранении принадлежности функции этому классу при возмущениях ее нулей.

Здесь мы изучаем сохранение класса Q целых функций при возмущениях их нулевых множеств для случая, когда Q есть одно из шести специальных подмножеств алгебры Шварца $\mathbf{P}_\infty = \mathcal{F}(\mathcal{E}'_\infty)$ — образа при преобразовании Фурье-Лапласа пространства всех распределений с компактными носителями на вещественной прямой. Как и в предыдущих главах, формула

$$\psi(z) = S(e^{-\mathrm{i}tz})$$

определяет преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}(S)$ (ультра)распределения S. Опишем подробнее эти подмножества, попутно упоминая об их роли в приложениях.

Хорошо известно, что каждую функцию $s \in \mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R})$ можно рассматривать как *регулярный* функционал, действующий в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$. Образ $\mathbf{P}_{\infty,0} = \mathcal{F}(\mathcal{D})$ совпадает с совокупностью всех целых функций экспоненциального типа, убывающих вдоль вещественной оси быстрее любой степени $|x|^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [58, теорема 7.3.1]).

Пусть $\psi \in \mathbf{P}_\infty$, $\mathcal{Z}_\psi = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ — ее нулевое множество, причем

$$|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \dots .$$

Класс P определим как совокупнсть всех функций $\psi \in \mathbf{P}_\infty$, нулевые множества которых удовлетворяют следующим двум условиям:
(Z1): $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \frac{|\operatorname{Im}\mu_j|}{\ln|\mu_j|} < +\infty$.
(Z2): число точек $\mu_j \in \mathcal{Z}_\psi$ таких, что $|\operatorname{Re}\mu_j - x| \leq 1$, есть величина $O(\ln|x|)$, $|x| \to \infty$.

Аналогичным образом определяем *класс P_0*:
$\psi \in P_0$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \mathbf{P}_{\infty,0}$ и ее нулевое множество удовлетворяет условиям *(Z1)* и *(Z2)*.

Третий из рассматриваемых нами классов целых функций — *класс P_{sd}* — образован медленно убывающими в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ функциями (делителями этой алгебры), нулевые множества которых удовлетворяют условию *(Z1)*. Как мы уже показали в главе 3, для нулевого множества медленно убывающей функции условие *(Z2)* является следствием условия *(Z1)* (см. лемму 3.6).

Напомним, что, согласно установленным в главе 4 фактам, функции из класса P_{sd} играют важную роль как в вопросе представления слабо синтезируемых D-инвариантных подпространств пространства $\mathcal{E}_a$ в виде прямой суммы их резидуальных и экспоненциальных составляющих, так и в задаче о разложении в ряды (со скобками) из экспоненциальных одночленов функций из таких подпространств.

Еще одно важное приложение медленно убывающих функций касается понятия *обратимости* распределения $S \in \mathcal{E}_a'$ в пространствах $\mathcal{E}_\infty$ и $\mathcal{D}' = (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$, то есть справедливости соотношений

$$S * \mathcal{E}_\infty = \mathcal{E}_\infty,$$

$$S * \mathcal{D}' = \mathcal{D}',$$

где $*$ — свертка. Оно состоит в том, что распределение $S \in \mathcal{E}_\infty'$ обратимо в пространствах $\mathcal{E}_\infty$ и $\mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда его преобразование Фурье-Лапласа $\psi = \mathcal{F}(S)$ есть медленно убывающая функция (см. теоремы I и 2.2, предложение 2.7 в [90]).

Класс P_{wsd}, по определению, состоит из тех функций $\varphi \in P$, для которых

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\},$$

а *класс* P_{nwsd} — из функций $\varphi \in P$, таких, что

$$\mathcal{J}(\varphi) \supsetneqq \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

И наконец, *класс* P_{syn} определим как совокупность функций $\psi \in P$, таких, что $\mathcal{J}_\psi$ — слабо локализуемый подмодуль в алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$.

Рассмотрение класса P_{syn} представляет интерес в связи с тем, что, как было доказано в главе 2, предложение 2.1, комплексная последовательность Λ есть нулевое множество функции из этого класса тогда и только тогда, когда эта последовательность *синтезируема* и удовлетворяет условиям *(Z1)*, *(Z2)*. Синтезируемые последовательности были введены недавно в работе [72], в связи с задачей спектрального синтеза для оператора дифференцирования в пространстве Шварца, точнее, в связи с изучением ситуации, когда для D-инвариантного подпространства $W \subset C^\infty(-a; a)$ имеет место равенство

$$2\pi D_{BM}(\mathrm{i}\sigma_W) = |I_W|, \tag{5.1.1}$$

где, как и выше, σ_W — спектр подпространства W, I_W — его резидуальный промежуток.

Из определений классов P_{wsd} и P_{nwsd} видим, что функции, содержащиеся в них, тоже представляют интерес с точки зрения "пограничного"случая задачи слабого спектрального синтеза, а именно: если $\varphi \in P_{wsd}$, то порождаемый этой функцией главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем, и значит, является аннуляторным подмодулем D-инвариантного подпространства W, допускающего спектральный синтез в слабом смысле, причем спектр и резидуальный промежуток этого подпространства удовлетворяют соотношению (5.1.1); если же ψ — функция из P_{nwsd}, то главный подмодуль $\mathcal{J}_\psi$ не является слабо локализуемым, что эквивалентно недопустимости спектрального синтеза в слабом смысле подпространством W, для которого $\mathcal{J}_\psi$ — аннуляторный подмодуль.

Между введенными классами функций имеют место следующие соотношения:

$$P = P_0 \bigcup P_{wsd} \bigcup P_{nwsd}, \tag{5.1.2}$$

при этом

$$P_{wsd} \bigcap P_{nwsd} = P_0 \bigcap P_{wsd} = P_0 \bigcap P_{nwsd} = \emptyset, \tag{5.1.3}$$

$$P_{sd} \subsetneqq P_{wsd} \subsetneqq \ P_{syn} \subsetneqq P,$$

$$P_{syn} \setminus P_{wsd} \subsetneqq P_0,$$

$$P_{syn} = P_{wsd} \bigcup \left(P_{syn} \bigcap P_0\right).$$

Справедливость этих соотношений следует из установленных в предыдущих главах фактов и определений классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd}, P_{syn}.

Отметим, что условие *(Z1)* означает принадлежность всех точек μ_j, $j \geq j_0$, криволинейной полосе $|y| \leq C_\psi \ln(|x|+2)$, а условие *(Z2)* представляет собой некоторое ограничение на степень сгущения точек μ_j. Эти условия выполнены, например, для последовательности $\{\mu_j\}$, целиком лежащей в какой-либо горизонтальной полосе и такой, что

$$n(z,1) = O(\ln|z|), \quad |z| \to \infty,$$

где $n(z,t)$ обозначает число точек μ_j в круге $|w-z| \leq t$.

Напомним, что функция $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ называется *медленно убывающей*, если существует $a > 0$, такое, что

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x' \in \mathbb{R}: \ |x - x'| \leq a \ln(2+|x|), \ |\psi(x')| \geq (a+|x'|)^{-a}. \quad (5.1.4)$$

Для дальнейших рассмотрений заметим, что условие (5.1.4) может быть заменено на следующее, более общее:

$$\exists z' \in \mathbb{C}: \ |x - z'| \leq a \ln(2+|x|), \ |\psi(z')| \geq (a+|z'|)^{-a} \quad (5.1.5)$$

(см. [90, § 3]).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$, $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ — нулевые множества целых функций φ и ψ, соответственно.

Следуя А.М. Седлецкому [47, глава 5], будем писать $\Lambda, \mathcal{M} \in (A)$, если эти последовательности связаны некоторым симметричным условием (A), то есть

$$\Lambda, \mathcal{M} \in (A) \Longleftrightarrow \mathcal{M}, \Lambda \in (A),$$

и будем говорить, что *условие* (A) *сохраняет класс целых функций* Q, если из $\Lambda, \mathcal{M} \in (A)$ следует, что

$$\varphi \in Q \Longleftrightarrow \psi \in Q.$$

В качестве условия (A) мы рассматриваем следующие соотношения, связывающие Λ и $\mathcal{M}$:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(1), \quad \mathrm{Im}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(\ln|\mu_j|), \quad j \to \infty;$$

при выполнении этих соотношений будем говорить, что последовательности Λ и $\mathcal{M}$ получаются друг из друга *p-возмущением.*

Пусть Q — один из введенных выше классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} или P_{syn}.

Основные результаты настоящей главы состоят в том, что
p-возмущение нулевого множества сохраняет класс Q (теорема 5.1);
а также в том, что этот результат неулучшаем в следующем смысле:
если $\{\alpha_j\} \subset \mathbb{R}$ *— гладкая вещественная последовательность, то выполнение соотношений*

$$\alpha_j = O(1), \quad \beta_j = O(\ln|\mu_j|), \quad j \to \infty,$$

является необходимым и достаточным условием для сохранения класса Q *при возмущении нулевых множеств функций из этого класса последовательностью* $\{(\alpha_j + \mathrm{i}\beta_j)\}$ (теорема 5.2).

Доказательству теорем 5.1 и 5.1 посвящены параграфы 5.2 и 5.3. Параграф 5.4 содержит применения основных результатов к вопросам представления D-инвариантных подпространств пространства Шварца, сохранения свойства синтезируемости последовательности, свойства полноты и (бес)конечности недостатка (избытка) экспоненциальных систем в пространствах $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$ и $C[-a;a]$ (соответствующие результаты приведены в теоремах 5.3–5.5).

5.2 Предварительные сведения и аналитическая подготовка

5.2.1 Чисто мнимые возмущения нулевого множества

Пусть $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$, $\Lambda = \{\lambda_j\}$ — комплексные последовательности. В этом пункте будет доказано, что совокупность условий

$$\mathrm{Re}\,(\mu_j - \lambda_j) = 0, \ j = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad |\mu_j - \lambda_j| = O(\ln|\mu_j|), \ j \to \infty, \tag{5.2.1}$$

сохраняет каждый из классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd}, P_{syn}.

Упорядочим элементы последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ по возрастанию их модулей:

$$0 < |\mu_1| \le |\mu_2| \le \dots,$$

и предположим, что $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$, $\beta_j = O(\ln|\mu_j|)$ при $j \to \infty$.

Основой для вывода нужного утверждения служит следующая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть* Q *— один из классов целых функций* P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} *или* P_{syn}.

Для того, чтобы формула

$$\psi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\mu_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right) \tag{5.2.2}$$

корректно определяла целую функцию из класса Q, необходимо и достаточно, чтобы формула

$$\psi_1(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\alpha_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) \tag{5.2.3}$$

корректно определяла целую функцию из того же класса.

Доказательство. Заметим, что существование конечной плотности при порядке 1 и сходимость в смысле главного значения ряда из обратных величин имеют место (или не имеют места) одновременно для обеих последовательностей $\{\mu_j\}$ и $\{\alpha_j\}$. И значит, формулы (5.2.2) и (5.2.3) одновременно определяют (или нет) целые функции (одного и того же!) экспоненциального типа.

Для отдельного множителя из правой части (5.2.3) при $z = x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left|1 - \frac{x}{\alpha_j}\right| \le \left|1 - \frac{x}{\mu_j}\right| \left(1 + \frac{\beta_j^2}{\alpha_j^2}\right)^{1/2},$$

и следовательно, если ψ — целая функция, то

$$\ln|\psi_1(x)| \le \ln|\psi(x)| + O(1), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.2.4}$$

Из этой оценки вытекают импликации

$$\psi \in P(P_0) \Longrightarrow \psi_1 \in P(P_0), \tag{5.2.5}$$

$$\psi_1 \in P_{sd} \Longrightarrow \psi \in P_{sd}, \tag{5.2.6}$$

$$\psi_1 \in P_{wsd} \Longrightarrow \psi \in P_{wsd}, \tag{5.2.7}$$

последние две — при условии, что $\psi \in P$. Далее, положим

$$\mathcal{M}^+ = \{\mu_j : \ \beta_j \ge 0\}, \quad \mathcal{M}^- = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^+,$$

$$\psi^+(z) = \lim_{R\to\infty} \left(\prod_{\substack{|\mu_j|\le R \\ \mu_j\in\mathcal{M}^-}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right) \prod_{\substack{|\mu_j|\le R \\ \mu_j\in\mathcal{M}^+}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) \right)$$

Без ограничения общности можем считать, что $|\alpha_j| > 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Пусть M_0 — столь большое положительное число, что

$$|\beta_j| \leq M_0 \ln |\alpha_j|, \ j = 1, 2, \ldots$$

Для любого $z = x + 2\mathrm{i}M_0 \ln |x|$ с $|x| > 2$ имеем

$$\left|1 - \frac{z}{\mu_j}\right| \leq \left|1 - \frac{z}{\alpha_j}\right|,$$

если $\mu_j \in \mathcal{M}^+$ и $|\alpha_j| \leq x^4$,
а также

$$\left|1 - \frac{z}{\mu_j}\right| \leq \left|1 - \frac{z}{\alpha_j}\right| \cdot \left(1 + \frac{4M_0^2 \ln^2 |\alpha_j|}{|\alpha_j|^2}\right)^{1/2},$$

если $\mu_j \in \mathcal{M}^+$ и $|\alpha_j| > x^4$.

Из последних двух оценок следует, что для $z = x + 2\mathrm{i}M_0 \ln |x|$, $|x| > 2$, будет

$$\ln |\psi(z)| \leq \ln |\psi^+(z)| + O(1), \ |x| \to \infty. \tag{5.2.8}$$

Аналогично доказывается, что для $z = x - 2\mathrm{i}M_0 \ln |x|$, $|x| > 2$, выполняется оценка

$$\ln |\psi^+(z)| \leq \ln |\psi_1(z)| + O(1), \ |x| \to \infty. \tag{5.2.9}$$

Из оценок (5.2.8) и (5.2.9), применяя принцип Фрагмена-Линделефа и учитывая, что типы при порядке 1 всех трех функций ψ, ψ_1, ψ^+ равны, получаем, что

$$\psi_1 \in P(P_0) \Longrightarrow \psi^+ \in P(P_0) \Longrightarrow \psi \in P(P_0) \tag{5.2.10}$$

$$\psi \in P_{sd} \Longrightarrow \psi^+ \in P_{sd} \Longrightarrow \psi_1 \in P_{sd}, \tag{5.2.11}$$

$$\psi \in P_{wsd} \Longrightarrow \psi^+ \in P_{wsd} \Longrightarrow \psi_1 \in P_{wsd}, \tag{5.2.12}$$

Так как оценки снизу для функций ψ^+ и ψ_1 имеют место не для вещественных значений аргумента, а при $z = x + 2\mathrm{i}M_0 \ln |x|$, $z = x - 2\mathrm{i}M_0 \ln |x|$, соответственно, то при выводе импликаций (5.2.11) нам пришлось также воспользоваться замечанием, сделанным во введении к настоящей главе сразу после определения медленно убывающей функции (условие (5.1.5) медленного убывания функции в алгебре Шварца).

Из совокупности импликаций (5.2.5), (5.2.6), (5.2.10), (5.2.11) (5.2.12) следует справедливость утверждения леммы для каждого из классов функций P, P_0, P_{sd} и P_{wsd}. Отсюда следует, что для завершения доказательства в случае класса P_{syn} осталось рассмотреть лишь случай функций $\psi \in P_{syn} \bigcap P_0$. Как было установдено в главе 2, в этом (и только в этом) случае главный подмодуль $\mathcal{J}_\psi$ не является алгебраически порожденным.

Из оценок (5.2.4), (5.2.8) и (5.2.9) нетрудно вывести, что для целой функции ω минимального экспоненциального типа все три включения

$$\omega\psi \in \mathcal{J}(\psi), \quad \omega\psi^+ \in \mathcal{J}(\psi^+), \quad \omega\psi_1 \in \mathcal{J}(\psi_1)$$

имеют место или не имеют места одновременно.

Из этих же трех оценок, (5.2.4), (5.2.8) и (5.2.9), следует, что *счетная последовательность* $\{p_k\psi\}$, $p_k \in \mathbb{C}[z]$, сходится к функции $\omega\psi$ в топологии пространства $\mathcal{P}_\infty$ одновременно со сходимостью в этой же топологии последовательности $\{p_k\psi^+\}$ к функции $\omega\psi^+$, а последовательности $\{p_k\psi_1\}$ к функции $\omega\psi_1$, соответственно.

Из всего вышесказанного, принимая во внимание теорему 2.6 из главы 2 о совпадении обычного и секвенциального замыканий множества $\{p\varphi\}$, $p \in \mathbb{C}[z]$, в пространстве $\mathbf{P}_\infty$, заключаем, что утверждение леммы справедливо для класса P_{syn}.

Для обоснования того, лемма справедлива в случае класса P_{nwsd} достаточно сослаться на уже рассмотренные случаи и соотношения (5.1.2), (5.1.3).

□

Следствие 5.1. *Пусть Q — один из классов целых функций P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} или P_{syn}.*

Чисто мнимые возмущения нулевого множества $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$, имеющие асимптотику $O(\ln|\mu_j|)$, $j \to \infty$, сохраняют класс Q.

Доказательство. Пусть целая функция ψ — принадлежит одному из указанных в условии классов функций, $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ — ее нулевое множество, упорядоченное по возрастанию модулей:

$$|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \dots$$

и пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$ — другая комплексная последовательность, такая, что выполнены условия (5.2.1).

Без ограничения общности можем считать, что $0 \notin \mathcal{M}$.

Из факта принадлежности функции ψ алгебре Шварца $\mathbf{P}_\infty$ следует, что она принадлежит также классу C целых функций (см. [105], [29]). Поэтому для нее имеет место представление

$$\psi(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right),$$

где $C_\psi = \psi(0)$, $c_\psi = (h_\psi(-\pi/2) + h_\psi(\pi/2))/2$, h_ψ — индикатор функции ψ.

Ясно, что вместе с функцией ψ соответствующему классу принадлежит и функция
$$\tilde{\psi}(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right).$$
Применив лемму 5.1 к функции $\tilde{\psi}$, получим утверждение следствия. □

5.2.2 Некоторые свойства нулевых множеств функций из класса P.

Для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_k\} \subset \mathbb{C}$ обозначим через $m(z,t)$ число точек μ_k в круге $|w - z| \le t$.

В главе 3 мы доказали такое утверждение (лемма 3.6).

Лемма 5.2. *Если $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ — медленно убывающая функция и $\mathcal{M} = \{\mu_k\} \subset \mathbb{R}$ — ее нулевое множество, то*
$$\varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{m(x,1)}{\ln|x|} < \infty. \tag{5.2.13}$$

Замечание 5.1. Из лемм 5.1 и 5.2 вытекает, что $P_{sd} \subsetneqq P$.

Замечание 5.2. Лемма 5.2 справедлива и в более общей формулировке: *если $\psi \in \mathbf{P}_\infty P$ — медленно убывающая функция с нулевым множеством $\mathcal{M} = \{\mu_k\}$, то для любого $q > 0$ существует постоянная C_q такая, что*
$$\frac{m(z,q)}{\ln(|x|+2)} \le C_q, \quad z = x + \mathrm{i}y. \tag{5.2.14}$$

Замечание 5.3. Пусть для множества нулей $\mathcal{M} = \{\mu_k\}$ целой функции ψ для некоторого (а значит, и для любого) $q > 0$ выполнено соотношение (5.2.14). Тогда, в силу принципа аргумента, *изменение функции* $\arg\psi$ *вдоль любого замкнутого контура γ_x, не содержащего точек μ_k и содержащегося в круге $|w - x| \le q$, есть величина $O(\ln|x|)$ при $|x| \to \infty$ при фиксированном $q > 0$,*

Для вывода следующего утверждения нам понадобится один факт, представляющий собой промежуточный шаг в доказательстве теоремы

Карлемана (см. [113] или [51]). Рассмотрим функцию g, голоморфную в замкнутой правой полуплоскости $\operatorname{Re} w \geq 0$, и не обращающуюся в нуль на мнимой оси. Предположим, что все нули $w_n = r_n e^{\mathrm{i}\theta_n}$ этой функции, лежащие в правой полуплоскости, удовлетворяют условию $r_n > \rho$, где ρ – некоторое положительное число. Пусть, далее, $R > \rho$ и $\ln g$ – *какая-нибудь* (не обязательно главная!) фиксированная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} g$, непрерывная на контуре, состоящем из двух полуокружностей

$$|w| = R,\ \operatorname{Re} w \geq 0, \quad |w| = \rho,\ \operatorname{Re} w \geq 0$$

и двух вертикальных отрезков

$$\operatorname{Re} w = 0, \quad \rho \leq |\operatorname{Im} w| \leq R.$$

При доказательстве теоремы Карлемана (см. [113, Chapter 12] или [51, глава III, п. 3.7]) была получена следующая формула, которую мы будем использовать:

$$\Sigma(R) = I(R) + J(R) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\substack{|w|=\rho,\\ \operatorname{Re} w \geq 0}} \ln g(w) \left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{R^2}\right) \mathrm{d}w\right). \quad (5.2.15)$$

Здесь

$$\Sigma(R) = \sum_{r_n \leq R} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{r_n}{R^2}\right) \cos\theta_n,$$

$$I(R) = \frac{1}{2\pi} \int_\rho^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2}\right) \ln|g(\mathrm{i}t)g(-\mathrm{i}t)| \mathrm{d}t,$$

$$J(R) = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln|g(Re^{\mathrm{i}\theta})| \cos\theta \mathrm{d}\theta.$$

Лемма 5.3. *Пусть $\psi \in P$, $\mathcal{M} = \{\mu_k\} \subset \mathbb{R}$ – ее нулевое множество. Для произвольных $\delta_0 > 0$, $q_0 > 0$ найдется положительная постоянная $C_{\delta_0,q_0} > 0$, зависящая только от δ_0 и q_0, такая, что*

$$\sum_{|\mu_k - z| \leq \delta|x|} \frac{1}{|\mu_k - z|} \leq C_{\delta_0,q_0} \ln \delta|x| \quad (5.2.16)$$

для всех $\delta \geq \delta_0$ и $z = x + \mathrm{i}y$ с $|x| \geq 2/\delta_0$, $|y| \geq 2q_0$.

Доказательство. Сразу отметим, что так как последовательность $\mathcal{M}$ вещественна и удовлетворяет условию *(Z2)*, то для нее выполнено соотношение (5.2.14), а для функции ψ — утверждение замечания 5.3.

Без ограничения общности можем считать, что

$$\ln|\psi(z)| \leq \pi|y|,\ y \in \mathbb{R},\ z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}. \tag{5.2.17}$$

Ясно, что достаточно доказать соотношение (5.2.16) для $z = x + 2\mathrm{i}q_0$, $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим сначала значения

$$x \geq 2/\delta_0, \quad \text{и} \quad x \neq \mu_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$f_z(w) = \psi(w + z).$$

Нулевое множество этой функции совпадает с последовательностью

$$\{\mu_k - z\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а сама функция f_z, в силу (5.2.17), удовлетворяет оценке

$$\ln|f_z(w)| \leq \pi(|\mathrm{Im}\, w| + 2q_0),\ w \in \mathbb{C}. \tag{5.2.18}$$

В формуле (5.2.15) положим $\rho = q_0$, $g = f_z$ и возьмем $R > q_0$ такое, что

$$f_z(Re^{\mathrm{i}\theta}) \neq 0, \quad \theta \in [0; 2\pi). \tag{5.2.19}$$

Получим:

$$\Sigma_z(R) = I_z(R) + J_z(R) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\substack{|w|=q_0 \\ \mathrm{Re} w \geq 0}} \mathrm{ln} f_z(w) \left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{R^2}\right) \mathrm{d}w\right), \tag{5.2.20}$$

где $\mathrm{ln} f_z$ – *какая-нибудь* фиксированная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln} f_z$, непрерывная на контуре, состоящем из двух полуокружностей

$$|w| = R,\ \mathrm{Re}\, w \geq 0, \quad |w| = q_0,\ \mathrm{Re}\, w \geq 0$$

и двух вертикальных отрезков

$$\mathrm{Re}\, w = 0, \quad q_0 \leq |\mathrm{Im}\, w| \leq R.$$

Также в формуле (5.2.20) обозначено

$$I_z(R) = \frac{1}{2\pi} \int_{q_0}^{R} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2}\right) \ln|f_z(\mathrm{i}t) f_z(-\mathrm{i}t)| \mathrm{d}t,$$

$$J_z(R) = \frac{1}{\pi R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln|f_z(Re^{\mathrm{i}\theta})|\cos\theta \mathrm{d}\theta,$$

$$\Sigma_z(R) = \sum_{\substack{|\mu_k - z|\le R\\ \mu_k - \mathrm{Re}\, z>0}} \left(\frac{1}{|\mu_k - z|} - \frac{|\mu_k - z|}{R^2}\right)\cos\theta_k, \tag{5.2.21}$$

где $\theta_k = \arg(\mu_k - z)$.

Положим $R = \delta x$, где $\delta \ge \delta_0$ – любое из тех значений, для которых (при данном x) выполняется (5.2.19).

Для последнего слагаемого в правой части (5.2.20) имеем:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\substack{|w|=q_0\\ \mathrm{Re} w\ge 0}} \ln f_z(w)\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{R^2}\right)\mathrm{d}w\right) = \frac{1}{2\pi q_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ln|f_z(q_0e^{\mathrm{i}\theta})|\cos\theta\mathrm{d}\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi q_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\arg f_z(q_0e^{\mathrm{i}\theta})\sin\theta\mathrm{d}\theta + \frac{q_0}{2\pi R^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ln|f_z(q_0e^{\mathrm{i}\theta})|\cos\theta\mathrm{d}\theta. \tag{5.2.22}$$

Принимая во внимание замечание 5.3 и неравенство (5.2.18), отсюда получаем, что при подходящем выборе однозначной ветви $\ln f_z$, будет

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\substack{|w|=q_0\\ \mathrm{Re} w\ge 0}} \ln f_z(w)\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{R^2}\right)\mathrm{d}w\right) \le C_1 \ln \delta x, \tag{5.2.23}$$

где постоянная C_1 зависит только от q_0 и δ_0.

Так как последовательность $\{\mu_k\}$ имеет конечную плотность, для суммы вторых слагаемых в определении величины $\Sigma_z(R)$ выводим, что

$$\left|\sum_{k:\substack{|\mu_k - z|\le R\\ \mu_k - \mathrm{Re}\, z>0}} -\frac{|\mu_k - z|\cos\theta_k}{R^2}\right| \le \sum_{k:\substack{|\mu_k - z|\le R\\ \mu_k - \mathrm{Re}\, z>0}} \frac{1}{R} \le C_2, \tag{5.2.24}$$

где постоянная C_2 зависит только от δ_0 и последовательности $\{\mu_k\}$.

Из неравенства (5.2.18) получаем оценки величин $I_z(R)$ (при $R = \delta x$) и $J_z(R)$:

$$I_z(R) \le \frac{1}{2\pi}\int_{q_0}^{R} 2\pi(t+2q_0)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2}\right)\mathrm{d}t \le C_3 \ln \delta x, \tag{5.2.25}$$

$$J_z(R) \le C_4, \tag{5.2.26}$$

где постоянные C_3, C_4 зависят только от q_0 и δ_0.

Из ограничения (5.2.19), формул (5.2.20), (5.2.21) и оценок (5.2.23)–(5.2.26) следует, что

$$\sum_{\substack{k:\ |\mu_k - z| \le \delta x \\ \mu_k - \operatorname{Re} z > 0}} \frac{1}{|\mu_k - z|} \le C_5 \ln \delta x, \tag{5.2.27}$$

причем постоянная C_5 зависит только от q_0, δ_0 и последовательности $\{\mu_k\}$.

Рассуждая аналогичным образом, выводи м оценку

$$\sum_{\substack{k:\ |\mu_k - z| \le \delta |x| \\ \mu_k - \operatorname{Re} z < 0}} \frac{1}{|\mu_k - z|} \le C_5 \ln \delta |x| \tag{5.2.28}$$

для всех $x \le -2/\delta_0$, $x \ne \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Еще две оценки

$$\sum_{\substack{k:\ |\mu_k - z| \le \delta |x| \\ \mu_k - \operatorname{Re} z < 0}} \frac{1}{|\mu_k - z|} \le C_5 \ln \delta |x| \tag{5.2.29}$$

при $x \ge 2/\delta_0$, $x \ne \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\sum_{\substack{k:\ |\mu_k - z| \le \delta |x| \\ \mu_k - \operatorname{Re} z > 0}} \frac{1}{|\mu_k - z|} \le C_5 \ln \delta |x| \tag{5.2.30}$$

при $x \le -2/\delta_0$, $x \ne \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$, получаются, если провести все изложенные выше рассуждения для функции $f_z(-w)$.

Из (5.2.27)–(5.2.30) следует требуемое соотношение (5.2.16) для $z = x + 2\mathrm{i}q_0$, $|x| \ge 2/\delta_0$, $x \notin \{\mu_k\}$, и всех $\delta \ge \delta_0$, для которых выполнено (5.2.19) при $R = \delta|x|$. Справедливость оценки (5.2.16) для произвольных x, $|x| \ge 2/\delta_0$, и $\delta \ge \delta_0$ вытекает теперь из того, что в ней $|\mu_k - z| \ge q_0$, $k \in \mathbb{N}$, и условия (5.2.14).

$\square$

5.2.3 Аналитическая подготовка.

Предложение 5.1. *Пусть* $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{R}$, $|\mu_1| \le |\mu_2| \le \ldots$ *и*

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right)$$

— функция из P.

Если последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$ такова, что

$$\lambda_j - \mu_j = O(1), \quad j \to \infty, \tag{5.2.31}$$

то формула

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right),$$

корректно определяет целую функцию экспоненциального типа, при этом для $z = x + 2\mathrm{i}q_0$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\big|\ln|\psi(z)| - \ln|\varphi(z)|\big| = O(\ln|x|), \quad |x| \to \infty, \tag{5.2.32}$$

где $q_0 > 0$ — произвольное фиксированное число.

Доказательство. Используем следующий результат С.Ю. Фаворова [54, лемма 1]

Теорема F. *Пусть последовательность $A = \{a_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ удовлетворяет условиям*

$$\exists \lim_{R\to\infty} \sum_{|a_j|<R} a_j^{-1}, \tag{5.2.33}$$

$$n_A(0,t) = O(t), \quad t \to \infty, \tag{5.2.34}$$

$$n_A(0,t+1) - n_A(0,t) = o(t), \quad t \to \infty, \tag{5.2.35}$$

где символом $n_A(z,t)$ обозначается число точек a_j в круге $|w-z| \le t$. Тогда формула

$$g(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_j|\le R} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \tag{5.2.36}$$

корректно определяет целую функцию экспоненциального типа, и для всех $z \in \mathbb{C}$ имеет место представление

$$\ln|g(z)| = \int_0^\infty \frac{n_A(0,t) - n_A(z,t)}{t} \mathrm{d}t. \tag{5.2.37}$$

Напомним, что символами $m(z,t)$ и $n(z,t)$ обозначают число точек μ_k и λ_k, соответственно, в круге $|w-z| \le t$.

Из включения $\psi \in \mathbf{P}_\infty$ следует, что функция ψ принадлежит и классу C (классу Картрайт), поэтому ее нулевое множество $\mathcal{M}$, удовлетворяет условиям (5.2.33)–(3.3.3) (см. [105], [29], [47]). Откуда, с учетом соотношения (5.2.31), видим, что условия (5.2.33)–(3.3.3) выполнены и для последовательности Λ. Согласно лемме F , для всех $z \in \mathbb{C}$ можем написать

$$\ln|\psi(z)| = \int_0^\infty \frac{m(0,t) - m(z,t)}{t} \mathrm{d}t, \tag{5.2.38}$$

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t} \mathrm{d}t. \tag{5.2.39}$$

Фиксируем произвольные числа $q_0 > 0$, $\delta_0 \in (0;1/2)$, $M_0 > 2$, $\sigma > 1$. Для всех $x \geq \max\{2/\delta_0, \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_k - \mu_k|\}$ и $z = x + 2\mathrm{i}q_0$ имеем

$$\begin{gathered}
\big|\ln|\psi(z)| - \ln|\varphi(z)|\big| = \left|\int_0^\infty \frac{m(0,t) - m(z,t) - n(0,t) + n(z,t)}{t}\mathrm{d}t\right| \leq \\
\leq \int_0^{\delta_0 x} \frac{|m(0,t) - n(0,t)| + |m(z,t) - n(z,t)|}{t}\mathrm{d}t + \\
+ \int_{\delta_0 x}^{M_0 x} \frac{|m(0,t) - n(0,t)| + |m(z,t) - n(z,t)|}{t}\mathrm{d}t + \\
+ \left|\int_{M_0 x}^{x^\sigma} \frac{n^+(t,x) - m^+(t,x)}{t}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{M_0 x}^{x^\sigma} \frac{n^-(t,x) - m^-(t,x)}{t}\mathrm{d}t\right| + \\
+ \left|\int_{x^\sigma}^{\infty} \frac{n^+(t,x) - m^+(t,x)}{t}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{x^\sigma}^{\infty} \frac{n^-(t,x) - m^-(t,x)}{t}\mathrm{d}t\right| + \\
+ \int_{M_0 x}^{\infty} \frac{|m(x,t) - m(z,t)|}{t}\mathrm{d}t + \int_{M_0 x}^{\infty} \frac{|n(x,t) - n(z,t)|}{t}\mathrm{d}t = \\
= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8. \qquad (5.2.40)
\end{gathered}$$

Здесь $m^+(t,x)$ — число точек μ_k в промежутке $(t; t{+}x]$, а $n^+(t,x)$ и $n^-(t,x)$ определяются аналогичным образом по последовательности $\{\lambda_k\}$.

Оценим отдельно каждое из слагаемых I_1–I_8.

Два последних интеграла, I_7 и I_8, имеют асимптотику $O(1)$ при $x \to +\infty$. Действительно, интеграл I_7 удовлетворяет оценке

$$I_7 \leq \sum_{|\mu_k| \geq (M_0-1)x} \frac{1}{2}\left|\ln\left|\frac{\mu_k - z}{\mu_k - x}\right|^2\right| = O\left(\sum_{|\mu_k| \geq (M_0-1)x} \frac{1}{|\mu_k|^2}\right) = O(1). \tag{5.2.41}$$

Аналогично, с учетом условия (5.2.31), оценивается интеграл I_8.

Для оценки слагаемых I_5, I_6 введем следующие множества индексов:

$$K_1 = \{k:\ \mu_k < x^\sigma + x,\ \lambda_k \ge x^\sigma + x\},\ \ K_2 = \{k:\ \mu_k \ge x^\sigma + x,\ \lambda_k < x^\sigma + x\},$$
$$K_3 = \{k:\ \mu_k \le x^\sigma,\ \lambda_k > x^\sigma\},\quad K_4 = \{k:\ \mu_k > x^\sigma,\ \lambda_k \le x^\sigma\},$$
$$K_5 = \{k:\ x^\sigma < \mu_k < x^\sigma + x,\ x^\sigma < \lambda_k < x^\sigma + x,\}.$$

Ясно, что в силу условий (5.2.31) множества K_j попарно не пересекаются при достаточно больших x. Пусть k_x – наименьший номер, такой, что $\mu_k \ge x^\sigma + x$, $\lambda_k \ge x^\sigma + x$, $k \ge k_x$. Имеем

$$I_5 = \left| \int_{x^\sigma}^{\infty} \frac{n^+(t, t+x) - m^+(t, t+x)}{t} \mathrm{d}t \right| \le \sum_{k \in K_1} \ln \frac{\lambda_k}{\lambda_k - x} + \sum_{k \in K_2} \ln \frac{\mu_k}{\mu_k - x} +$$
$$+ \sum_{k \in K_2 \bigcup K_3} \ln \frac{\lambda_k}{x^\sigma} + \sum_{k \in K_1 \bigcup K_4} \ln \frac{\mu_k}{x^\sigma} + \left| \sum_{k \in K_5} \ln \frac{\lambda_k}{\mu_k} \right| + \left| \sum_{k \ge k_x} \left(\ln \frac{\lambda_k}{\lambda_k - x} - \ln \frac{\mu_k}{\mu_k - x} \right) \right| =$$
$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6$$

Из условий $(Z2)$ и (5.2.31) следует, что число слагаемых в каждой из сумм Σ_1, Σ_2, Σ_3 и Σ_4 есть $O(\ln x)$, $x \to +\infty$. При этом каждое слагаемое в суммах Σ_1 и Σ_2 есть $O(x^{1-\sigma})$, а в суммах Σ_3 и Σ_4 представляет собой величину $O(x^{-\sigma})$. Поэтому

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = O(1), \quad x \to +\infty.$$

$$\Sigma_3 + \Sigma_4 = O(1), \quad x \to +\infty.$$

Далее,

$$\Sigma_5 = \left| \sum_{k \in K_5} \ln \frac{\lambda_k}{\mu_k} \right| = O(1), \quad x \to +\infty,$$

в силу условия (5.2.31) и того, что последовательность $\{\mu_k\}$ имеет конечную плотность.

Положим $\nu_k = \lambda_k - \mu_k$. Разлагая в ряд обе функции

$$-\ln \frac{\mu_k}{\mu_k - x} = \ln \left(1 - \frac{x}{\mu_k} \right), \quad -\ln \frac{\lambda_k}{\lambda_k - x} = \ln \left(1 - \frac{x}{\mu_k + \nu_k} \right)$$

и учитывая, что $\mu_k \ge x^\sigma + x$ при $k \ge k_x$, $\sigma > 1$, а также (5.2.31), для слагаемого Σ_6 получим

$$\Sigma_6 = \left| \sum_{k \ge k_x} \left(\ln \frac{\lambda_k}{\lambda_k - x} - \ln \frac{\mu_k}{\mu_k - x} \right) \right| \le$$

$$\le \text{const} \sum_{k \ge k_x} \frac{x}{\mu_k^2} + \sum_{k \ge k_x} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j} \cdot \frac{|\nu_k| \left((\mu_k + \nu_k)^{j-1} + (\mu_k + \nu_k)^{j-2} \mu_k + \dots + \mu_k^{j-1} \right)}{\mu_k^j (\mu_k + \nu_k)^j} =$$

$$= O(1) + O(1) \cdot \sum_{k \ge k_x} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{\mu_k^{j+1}} = O(1), \quad x \to +\infty.$$

Из оценок для Σ_1–Σ_6 следует, что

$$I_5 = O(1), \quad x \to +\infty. \tag{5.2.42}$$

Для слагаемого I_6, действуя аналогичным образом, получаем

$$I_6 = O(1), \quad x \to +\infty. \tag{5.2.43}$$

Оценим слагаемые I_3 и I_4. Подробные выкладки приведем для I_3. В вычислении значения этого слагаемого участвуют только точки μ_k и λ_k с номерами k, принадлежащими множеству индексов

$$J = \{ k \in \mathbb{N} : \ \max\{\mu_k, \lambda_k\} > M_0 x, \ \ \min\{\mu_k, \lambda_k\} \le x^\sigma + x \} .$$

Разобьем это множество на 11 подмножеств, которые, в силу (5.2.31), попарно не пересекаются при достаточно больших x:

$$J = J_1 \bigcup J_{21} \bigcup J_{22} \bigcup J_{23} \bigcup J_{24} \bigcup J_{25} \bigcup J_{31} \bigcup J_{32} \bigcup J_{33} \bigcup J_{34} \bigcup J_{35},$$

где

$$J_1 = \{ k \in \mathbb{N} : \ (M_0 + 1)x \le \mu_k \le x^\sigma, \ (M_0 + 1)x \le \lambda_k \le x^\sigma \},$$
$$J_{21} = \{ k \in \mathbb{N} : \ \mu_k > M_0 x, \ \lambda_k \le M_0 x \},$$
$$J_{22} = \{ k \in \mathbb{N} : \ \mu_k \le M_0 x, \ \lambda_k > M_0 x \},$$
$$J_{23} = \{ k \in \mathbb{N} : \ M_0 x < \mu_k < (M_0 + 1)x, \ M_0 x < \lambda_k < (M_0 + 1)x \},$$
$$J_{24} = \{ k \in \mathbb{N} : \ \mu_k \ge (M_0 + 1)x, \ \lambda_k < (M_0 + 1)x \},$$
$$J_{25} = \{ k \in \mathbb{N} : \ \mu_k < (M_0 + 1)x, \ \lambda_k \ge (M_0 + 1)x \},$$
$$J_{31} = \{ k \in \mathbb{N} : \ \mu_k > x^\sigma, \ \lambda_k \le x^\sigma \},$$
$$J_{32} = \{ k \in \mathbb{N} : \ \mu_k \le x^\sigma, \ \lambda_k > x^\sigma \},$$
$$J_{33} = \{ k \in \mathbb{N} : \ x^\sigma < \mu_k \le x^\sigma + x, \ x^\sigma < \lambda_k \le x^\sigma + x, \},$$
$$J_{34} = \{ k \in \mathbb{N} : \ \mu_k > x^\sigma + x, \ \lambda_k \le x^\sigma + x \},$$
$$J_{35} = \{ k \in \mathbb{N} : \ \mu_k \le x^\sigma + x, \ \lambda_k > x^\sigma + x \}.$$

Согласно этому разбиению, получим

$$I_3 = \sum_{k\in J_{21}\bigcup J_{25}} \ln\frac{\mu_k}{M_0 x} + \sum_{k\in J_{22}\bigcup J_{24}} \left|\ln\frac{\lambda_k}{M_0 x}\right| +$$

$$+ \sum_{k\in J_{24}} \ln\frac{\mu_k}{\mu_k - x} + \sum_{k\in J_{25}} \left|\ln\frac{\lambda_k}{\lambda_k - x}\right| + \sum_{k\in J_{31}} \left|\ln\frac{\lambda_k}{\lambda_k - x}\right| +$$

$$+ \sum_{k\in J_{31}\bigcup J_{35}} \ln\frac{\mu_k - x}{x^\sigma} + \sum_{k\in J_{32}} \ln\frac{\mu_k}{\mu_k - x} + \sum_{k\in J_{32}\bigcup J_{34}} \left|\ln\frac{\lambda_k - x}{x^\sigma}\right| +$$

$$+ \sum_{k\in J_{23}} \left|\ln\frac{\mu_k}{\lambda_k}\right| + \sum_{k\in J_{33}} \left|\ln\frac{\mu_k - x}{\lambda_k - x}\right| +$$

$$+ \left|\sum_{k\in J_1} \left(\ln\frac{\lambda_k}{\lambda_k - x} - \ln\frac{\mu_k}{\mu_k - x}\right)\right| = \sum_{j=1}^{11} P_j.$$

Принимая во внимание условия $(Z2)$ и (5.2.31), заключаем, что число слагаемых в каждой из сумм P_1 – P_8 есть величина $O(\ln x)$ при $x \to +\infty$. При этом каждое слагаемое в суммах P_1 и P_2 имеет асимптотику $o(1)$, в суммах P_3 и P_4 – асимптотику $O(1)$, а в суммах P_5–P_8 — асимптотику $O(x^{1-\sigma})$, когда $x \to +\infty$. Аналогично, в силу определения соответствующих множеств индексов суммирования, в суммах P_9 и P_{10}, каждое слагаемое имеет асимптотику $O(1/x)$ и $O(1/x^\sigma)$, соответственно. А число слагаемых равно $O(x)$ в сумме P_9 и $O(x^\sigma)$ — в сумме P_{10}, поскольку последовательности $\{\mu_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ имеют конечные плотности.

Для слагаемого P_{11} имеем (аналогично оценке Σ_6 выше):

$$P_{11} = \left|\ln\frac{\lambda_k}{\lambda_k - x} - \ln\frac{\mu_k}{\mu_k - x}\right| \le$$

$$\le \mathrm{const} \sum_{k\in J_1} \frac{x}{\mu_k^2} + \sum_{k\in J_1} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j} \cdot \frac{|\nu_k| \left(|\mu_k + \nu_k|^{j-1} + |\mu_k + \nu_k|^{j-2}\mu_k + \dots + \mu_k^{j-1}\right)}{\mu_k^j |\mu_k + \nu_k|^j}$$

Последняя двойная сумма есть $O(\ln x)$ при $x \to +\infty$, в силу определения множества индексов J_1 и следующей теоремы Рубеля-Мальявена, примененной к функции ψ.

Теорема RM [113, теорема 22.1] *Для того, чтобы существовала целая функция f, обращающаяся в нуль на положительной последовательности $\{a_j\}$, и такая, что*

$$f(\mathrm{i}y) \le \exp(\pi b|y|), \quad y \in \mathbb{R},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$l(x'') - l(x') \leq b \ln \frac{x''}{x'} + O(1), \quad 0 < x' \leq x'',$$

где $l(t) = \sum\limits_{a_j \leq t} (1/a_j)$.

Из вышесказанного получаем оценку

$$I_3 = O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Аналогично доказывается соотношение

$$I_4 = O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Оценим I_2. Заметим, что, в силу $(Z2)$ и (5.2.31), будет

$$|m(0,t) - n(0,t)| = O(\ln t),\ t \to +\infty,$$

и, равномерно по $t \in [\delta_0 x; M_0 x]$,

$$|m(z,t) - n(z,t)| = O(\ln x),\ x = \operatorname{Re} z \to +\infty.$$

Откуда выводим, что

$$I_2 = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{5.2.44}$$

Для того, чтобы оценить слагаемое I_1, представим его в виде

$$I_1 = \int_0^{\delta_0 x} \frac{|m(0,t) - n(0,t)|}{t} \mathrm{d}t + \int_0^{\delta_0 x} \frac{|m(z,t) - n(z,t)|}{t} \mathrm{d}t = I_{11} + I_{12}.$$

Имеем

$$I_{11} \leq \sum_{\substack{|\mu_k| \leq \delta_0 x, \\ |\lambda_k| \leq \delta_0 x}} \ln \left(1 + \frac{|\nu_k|}{|\mu_k|}\right) + \sum_{\substack{|\mu_k| \leq \delta_0 x, \\ |\lambda_k| > \delta_0 x}} \left| \ln \frac{\delta_0 x}{|\mu_k|} \right| + \sum_{\substack{|\mu_k| > \delta_0 x, \\ |\lambda_k| \leq \delta_0 x}} \left| \ln \frac{\delta_0 x}{|\lambda_k|} \right| =:$$
$$=: S_{11} + S_{12} + S_{13}.$$

В силу условия (5.2.31) каждое слагаемое сумм S_{12} и S_{13} есть величина $O\left(x^{-1}\right)$, $x \to +\infty$. Из леммы 5.2 и условия (5.2.31) следует, что число слагаемых в S_{12} и S_{13} имеет асимптотику $O(\ln x)$, $x \to +\infty$. Поэтому

$$S_{12} + S_{13} = o(1), \quad x \to +\infty.$$

Далее, принимая во внимание теорему Рубеля-Мальявена (теорема RM), $(Z2)$ и (5.2.31), получаем оценку

$$S_{11} = O\left(\sum_{|\mu_k| \le \delta_0 x} \frac{1}{|\mu_k|}\right) = O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Таким образом,

$$I_{11} = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{5.2.45}$$

Для интеграла I_{12} будет

$$I_{12} \le \sum_{\substack{|\mu_k - z| \le \delta_0 x, \\ |\lambda_k - z| \le \delta_0 x}} \ln\left(1 + \frac{|\alpha_k|}{|\mu_k - z|}\right) + \sum_{\substack{|\mu_k - z| \le \delta_0 x, \\ |\lambda_k - z| > \delta_0 x}} \left|\ln \frac{\delta_0 x}{|\mu_k - z|}\right| +$$
$$+ \sum_{\substack{|\mu_k - z| > \delta_0 x, \\ |\lambda_k - z| \le \delta_0 x}} \left|\ln \frac{\delta_0 x}{|\lambda_k - z|}\right| =: T_{11} + T_{12} + T_{13}.$$

Используя те же соображения, что были применены для оценки выражения $(S_{12} + S_{13})$, получаем, что

$$T_{12} + T_{13} = o(1), \quad x \to +\infty.$$

Для того, чтобы оценить T_{11}, воспользуемся леммой 5.3. Учитывая (5.2.31), получим

$$T_{11} = O\left(\sum_{|\mu_k - z| \le \delta_0 x} \frac{1}{|\mu_k - z|}\right) = O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Следовательно,

$$I_{12} = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{5.2.46}$$

Соотношения (5.2.45) и (5.2.46) влекут оценку для I_1 :

$$I_1 = O(\ln x), \quad x \to +\infty. \tag{5.2.47}$$

Из (5.2.40) и оценок слагаемых I_1–I_8 следует, что

$$\big|\ln|\psi(z)| - \ln|\varphi(z)|\big| = O(\ln|x|) \tag{5.2.48}$$

при $z = x + 2\mathrm{i}q_0$ и $\max\{2/\delta_0, \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_k - \mu_k|\} < x \to +\infty$.

Для $z = x + 2\mathrm{i}q_0$, где $x \le -\max\{2/\delta_0, \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_k - \mu_k|\}$, выражение

$$\big|\ln|\psi(z)| - \ln|\varphi(z)|\big|$$

можно оценить аналогичным образом.

Из всего вышесказанного заключаем, что соотношение (5.2.48) справедливо при $z = x + 2\mathrm{i}q_0$, $|x| \to \infty$. $\square$

5.3 Основные результаты

5.3.1 Сохранение классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd}, P_{syn} при p-возмущении нулевых множеств.

Докажем утверждение о том, что p-возмущение нулевого множества сохраняет каждый из введенных выше классов целых функций P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd}, P_{syn}.

Теорема 5.1. *1. Пусть для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ получена p-возмущением из $\mathcal{M}$.*

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ одновременно (не) являются нулевыми множествами функций, принадлежащих каждому из классов: P и P_0.

2. Пусть для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ получена p-возмущением из $\mathcal{M}$.

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ одновременно (не) являются нулевыми множествами функций из класса P_{syn}.

3. Пусть для последовательности $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ выполнено условие (Z1) и последовательность Λ получается из $\mathcal{M}$ посредством p-возмущения.

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ одновременно (не) являются нулевыми множествами функций из класса P_{sd}.

4. Пусть для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ получена p-возмущением из $\mathcal{M}$.

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ одновременно (не) являются нулевыми множествами функций, принадлежащих каждому из классов: P_{wsd} и P_{nwsd}.

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right),$$

принадлежащую классу P, и последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ такую, что

$$\mathrm{Im}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(\ln|\mu_j|), \quad \mathrm{Re}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(1), \; j \to \infty. \tag{5.3.1}$$

В силу леммы 5.1 и следствия 5.1, имеем

$$\tilde{\psi}(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) \in P,$$

здесь $\alpha_j = \operatorname{Re}\mu_j$. Далее, из предложения 5.1 и принципа Фрагмена-Линделефа следует, что функция

$$\tilde{\varphi}(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha'_j}\right),$$

где $\alpha'_j = \operatorname{Re}\lambda_j$, тоже принадлежит классу P. Снова применяя следствие 5.1, получаем включение $\varphi \in P$, где

$$\varphi(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right).$$

Так как каждая из последовательностей, $\mathcal{M}$ и Λ, есть p-возмущение другой, из приведенного рассуждения следует и утверждение в скобках: если $\mathcal{M}$ не является нулевым множеством никакой функции из P, то и Λ обладает этим же свойством.

Аналогично доказывается сохранение класса P_0 при p-возмущении нулевого множества.

2. Рассмотрим функцию $\psi \in P_{syn}$ с нулевым множеством $\mathcal{M}$. Согласно доказанному в предыдущем пункте, Λ есть нулевое множество некоторой функции $\varphi \in P$ такой, что $h_\varphi = h_\psi$.

Пусть $\Phi \in \mathbf{P}_\infty$ и

$$h_\Phi = h_\varphi \quad \mathcal{Z}_\Phi \supset \Lambda. \tag{5.3.2}$$

Для доказательства включения $\varphi \in P_{syn}$ надо проверить, что

$$\Phi = \lim_{k\to\infty} p_k \varphi, \quad p_k \in \mathbb{C}[z].$$

Положим $\omega = \Phi/\varphi$, это — целая функция минимального типа. Причем из предложения 5.1 и оценок в доказательстве леммы 5.1 следует, что

$$\Psi = \omega\psi \in \mathbf{P}_\infty, \quad h_\Psi = h_\psi = h_\varphi.$$

А из включения $\psi \in P_{syn}$ и теоремы 2.1 следует, что найдется последовательность многочленов $\{p_k\}$ такая, что

$$\Psi = \lim_{k\to\infty} p_k \psi.$$

Снова используя предложение 5.1 и оценки в доказательстве леммы 5.1, а также известное описание секвенциальной сходимости в $\mathbf{P}_\infty$, нетрудно показать, что

$$\lim_{k\to\infty} p_k\varphi = \Phi.$$

Так как это верно для любой функции Φ, удовлетворяющей (5.3.2), заключаем, что главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем, то есть $\varphi \in P_{syn}$.

3. Пусть теперь функция

$$\psi(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\mu_j}\right),$$

принадлежит классу P_{sd} и последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ удовлетворяет соотношениям (5.3.1). Согласно лемме 5.1 и следствию 5.1, достаточно рассмотреть случай, когда обе последовательности, $\mathcal{M}$ и Λ, вещественны.

В силу замечания 5.1 и рассуждений из п.1 настоящего доказательства, достаточно убедиться в наличии оценок снизу вида (5.1.5) для функции

$$\varphi(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_j}\right).$$

Так как ψ — медленно убывающая функция, согласно рассуждениям, приведенным перед леммой 3.1 в работе [90], существует число $C_0 > 0$, зависящее только от функции ψ, со следующим свойством:
для каждой точки $x \in \mathbb{R}$ найдутся $R > 0$ удовлетворяющее соотношению $R = O(\ln(|x|+2))$, и $x' \in \mathbb{R}$, $|x - x'| < R$, такие, что выполнена оценка

$$\ln|\psi(w)| \geq -C_0 \ln(|x|+2), \quad |w - x'| = R.$$

Пусть $q_0 > 0$ — фиксированное число. В силу предложения 5.1, в точках w_1 и w_2 пересечения окружности $|w-x'| = R$ с прямой $\operatorname{Im} z = 2q_0$ будут выполняться оценки

$$\ln|\varphi(w_j)| \geq -\widetilde{C}\ln(|x|+2), \quad j = 1, 2,$$

где постоянная $\widetilde{C} > 0$ зависит только от функций φ и ψ и числа q_0.

Учитывая все вышесказанное, заключаем, что $\varphi \in P_{sd}$.

4. Как и в предыдущем пункте доказательства в силу леммы 5.1 и следствия 5.1, достаточно рассмотреть случай вещественных последовательностей.

Пусть
$$\psi(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right),$$
— функция из класса P_{wsd}, $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{R}$, и пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношениям (5.3.1).

Из (5.1.2) следует, что $\psi \in P$, а из п.1 доказываемой теоремы — что функция
$$\varphi(z) = C_\psi e^{-\mathrm{i}c_\psi z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right)$$
тоже принадлежит классу P.

Используя предложение 5.1, нетрудно убедиться в том, что соотношения
$$\mathcal{J}(\psi) = \{p\psi,\ p \in \mathbb{C}[z]\} \quad \text{и} \quad \mathcal{J}(\varphi) = \{p\varphi,\ p \in \mathbb{C}[z]\}$$
выполнены или нет одновременно. Таким образом, для класса функций P_{wsd} утверждение теоремы доказано.

Отсюда, принимая во внимание п.1 настоящей теоремы и равенства (5.1.2) и (5.1.3), выводим требуемое утверждение и для класса P_{nwsd}.

$\square$

5.3.2 Неулучшаемость условия $\mathrm{Re}\,(\lambda_j - \mu_j) = O(1)$ для сохранения классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd}, P_{syn}.

Положим $\psi_0(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$. Нулевое множество этой функции $\Lambda_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Очевидно, что $\psi_0 \in P_{sd}$. В следующем предложении мы покажем, что даже для Λ_0 как угодно медленно растущие *неограниченные* возмущения могут привести к нулевому множеству функции, не принадлежащей алгебре $\mathbf{P}_\infty$.

Предложение 5.2. *Какова бы ни была положительная функция L, определенная на $[0; +\infty)$ и удовлетворяющая условию*
$$\lim_{t \to +\infty} L(t) = +\infty,$$
найдется неограниченная последовательность $\{l_k\} \subset \mathbb{R}$ такая, что
$$l_k = O(L(k)), \quad k \to \infty,$$
при этом функция
$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right), \quad \lambda_k = k - l_k,\ k = 1, 2, \dots,$$

не принадлежит алгебре $\mathbf{P}_\infty$.

Доказательство. Выберем и зафиксируем вогнутую положительную дифференцируемую функцию l, определенную на $[0;+\infty)$ и удовлетворяющую для всех $t \geq 0$ условиям:

$$l(t) \leq L(t), \quad l'(t) < 1, \quad l(t) \leq \mathrm{const} \cdot t^\gamma,$$

при некотором $\gamma \in (0;1/2)$, и соотношению

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\delta_0 l(t)}{l(\delta_0 t)} < 1 \tag{5.3.3}$$

при некотором $\delta_0 \in (0;1)$.

Положим

$$l_k = l(k), \quad \lambda_k = k - l_k, \quad \lambda_{-k} = -\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что для последовательности

$$\Lambda = \{\lambda_k\}, \quad k = \pm 1, \ \pm 2, \dots,$$

выполнены условия леммы С.Ю. Фаворова (теорема F в начале доказательства предложения 5.1). Поэтому

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$$

— целая функция экспоненциального типа 1 и

$$\ln|\varphi(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t} \mathrm{d}t, \tag{5.3.4}$$

где $n(z,t)$ — число точек λ_k в круге $|w - z| \leq t$.

Положим

$$\lambda(t) = t - l(t), \quad t \geq 0.$$

Пользуясь условиями на функцию l, нетрудно убедиться в том, что λ — строго возрастающая функция на положительной полуоси, и для обратной к ней функции λ^{-1} справедливо следующее соотношение

$$\lambda^{-1}(t) = t + l(t) + o(1), \quad t \to +\infty.$$

Как и в доказательстве предложения 5.1, обозначим через $n^+(t,x)$ — число точек λ_k в промежутке $(t; t+x]$, $n^-(t,x)$ — число точек λ_k в промежутке $[-t; -t+x)$. В силу четности последовательности

$$\{\lambda_k\}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$n^-(t,x)$ есть также число точек λ_k в промежутке $(t-x;t]$. Далее,

$$n(0,t) = 2[\lambda^{-1}(t)] = 2t + 2l(t) + O(1), \quad t \to +\infty, \tag{5.3.5}$$

и поэтому, при $t \to +\infty$ будет

$$n^+(t,x) = x + (l(t+x) - l(t)) + O(1), \tag{5.3.6}$$

$$n^-(t,x) = x + (l(t) - l(t-x)) + O(1) \tag{5.3.7}$$

для всех x: $0 < x \le t$.

Оценки для $|\varphi|$ достаточно провести при $x > 0$.

Из (5.3.4), учитывая четность последовательности Λ, можем написать

$$\ln|\varphi(x)| = \int_0^x \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} \frac{n^-(t,x)-n^+(t,x)}{t}\mathrm{d}t + \int_{x^2}^{\infty} \frac{n^-(t,x)-n^+(t,x)}{t}\mathrm{d}t = I_1 + I_2 + I_3. \tag{5.3.8}$$

Оценим интеграл I_3. Имеем

$$I_3 = \int_{x^2-x}^{x^2} \frac{n^+(t,x)}{t+x}\mathrm{d}t - \int_{x^2}^{\infty} \frac{xn^+(t,x)}{t(t+x)}\mathrm{d}t.$$

Учитывая (5.3.6), (5.3.7) и свойства функции l, для первого слагаемого получим такую оценку

$$\int_{x^2-x}^{x^2} \frac{n^+(t,x)}{t+x}\mathrm{d}t \le x\int_{x^2-x}^{x^2} \frac{|1+l'(t_x^*)|}{t+x}\mathrm{d}t + O(1)\int_{x^2-x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t+x} = O(1),$$

здесь $t_x^* \in [t;t+x]$, а для второго слагаемого — оценку:

$$\int_{x^2}^{\infty} \frac{xn^+(t,x)}{t(t+x)}\mathrm{d}t = O(x)\int_{x^2}^{\infty} \frac{x}{t(t+x)}\mathrm{d}t = O(1).$$

Таким образом,

$$I_3 = O(1), \quad x \to +\infty.$$

Для оценки интеграла I_2 заметим, что, в силу соотношений (5.3.6), (5.3.7) и свойств функции l, будет

$$n^-(t,x) - n^+(t,x) = (l(t) - l(t-x)) - (l(t+x) - l(t)) + O(1) = l'(t_x'')x - l'(t_x')x + O(1) \ge 0 + O(1),$$

где $t'_x \in [t; t+x]$, $t''_x \in [t-x; t]$. Поэтому

$$I_2 \geq O(\ln x), \quad x \to +\infty.$$

Далее,

$$n(0,t) - n(x,t) = 2l(t) - 2l'(\tilde{t})t + O(1),$$

где $\tilde{t} \in [x-t; x+t]$, когда $0 \leq t \leq x/2$; и

$$\begin{aligned} n(0,t) - n(x,t) = (l(t) - l(x-t)) - (l(x+t) - l(t)) + O(1) = \\ = (l'(t_2) - l'(t_1))x + O(1), \end{aligned}$$

где $t_1 \in [t; t+x]$, $t_2 \in [x-t; t]$, когда $x/2 \leq t \leq x$.

Производная l' монотонно убывает и справедливо неравенство

$$l'(t) \leq \frac{l(t)}{t}, \quad t > 0,$$

причем $\frac{l(t)}{t}$ — невозрастающая функция аргумента t. Поэтому для произвольного фиксированного $\delta \in (0; 1/2)$ будет

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^{x/2} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t + \int_{x/2}^{x} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t \geq \\ \geq \int_0^{\delta x} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Из оценок для интегралов I_1—I_3 и представления (5.3.8) следует, что для произвольного фиксированного $\delta \in (0; 1/2)$ верно соотношение

$$\ln |\varphi(x)| \geq \int_0^{\delta x} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t + O(\ln x), \quad x \to +\infty. \quad (5.3.10)$$

Условие (5.3.3) влечет существование чисел $\sigma \in (0; 1)$ и $t_0 > 0$ таких, что

$$\frac{l(t)}{t} \leq \sigma \frac{l(\delta_0 t)}{\delta_0 t} \quad t \geq t_0. \quad (5.3.11)$$

Отсюда, с учетом (5.3.5), (5.3.6), (5.3.7) и свойств функции l, выводим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta x} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} \mathrm{d}t \geq 2 \int_0^{\delta x} \left(\frac{l(t)}{t} - l'((1-\delta)x) \right) \mathrm{d}t \geq \\ \geq 2(1-\sigma) \int_0^{\delta x} \frac{l(t)}{t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

для всех $\delta < \frac{\delta_0}{1+\delta_0}$. Из этой оценки, (5.3.10) и неограниченности функции l следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|\varphi(x)|}{\ln x} = +\infty.$$

И знчит, функция φ не принадлежит алгебре $\mathbf{P}_\infty$. $\square$

Замечание 5.4. Пусть

$$\tilde{\varphi}(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right), \quad \lambda_k = k + l_k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

здесь возмущающая последовательность $\{l_k\}$ та же, что и в предложении 5.2. Используя схему рассуждений из доказательства предложения 5.2, получаем, что $\tilde{\varphi} \in P \setminus P_{sd}$.

Замечание 5.5. Фиксируем $\beta \in (0; 1)$ и рассмотрим функцию

$$l_1(t) = \beta(1-\sigma)l(t), \quad t \geq 0,$$

где σ то же, что и в (5.3.11) Положим $k_j = [l_1^{-1}(j)]$, $j = 1, 2, \ldots,$

$$\omega(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k_j^2}\right),$$

$$\varphi_0 = \psi_0/\omega.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\varphi_0 \in P_0$

Пусть φ — четная целая функция, полученная из φ_0 сдвигом ее нулей $\lambda = n > (<)0$ на $l_n = l(n)$ влево (соответственно, вправо).

Из представления С.Ю. Фаворова (теорема F) для функций ω и ψ_0, а также свойств функции l, используя технику оценивания из доказательства предложения 5.2, убеждаемся в том, что $\varphi \notin P$ (тем более, $\varphi \notin P_0$).

Приведем теперь утверждение о неулучшамемости достаточного условия из теоремы 5.1.

Для последовательности нулей $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ произвольной функции ψ из класса Q (где Q — один из классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} или P_{syn}) рассмотрим возмущенную последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ такую, что

$$\lambda_j - \mu_j = l_j + \mathrm{i}\beta_j, \tag{5.3.12}$$

где $l_j = l(j)$, l — вогнутая положительная дифференцируемая функция, определенная на $[0; +\infty)$ и удовлетворяющая условиям

$$l'(t) < 1, \quad l(t) \leq \mathrm{const}\cdot t^\gamma, t \in [0; +\infty),$$

при некотором $\gamma \in (0; 1/2)$ и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\delta_0 l(t)}{l(\delta_0 t)} < 1$$

при некотором $\delta_0 \in (0; 1)$.

Принимая во внимание соотношения

$$P = P_0 \bigcup P_{wsd} \bigcup P_{nwsd},$$

$$P_0 \bigcap P_{wsd} = P_0 \bigcap P_{nwsd} = P_{wsd} \bigcap P_{nwsd} = \emptyset,$$

и цепочку включений

$$P_{sd} \subset P_{wsd} \subset P_{syn} \subset P,$$

из теоремы 5.1, предложения 5.2 и замечаний 5.4, 5.5 получаем следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы соотношение (5.3.12) между невозмущенным $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ и возмущенным $\Lambda = \{\lambda_j\}$ нулевыми множествами сохраняло каждый из классов P, P_0, P_{sd}, P_{wsd}, P_{nwsd} или P_{syn}, необходимо и достаточно, чтобы*

$$l_j = O(1), \qquad \beta_j = O(\ln|\mu_j|), \qquad j \to \infty.$$

5.4 Применения полученных результатов

5.4.1 Сохранение допустимости спектрального синтеза для D-инвариантных подпространств в пространстве Шварца при возмущении их спектров

1. Пусть последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям:

$$d_\Lambda := D_{BM}(\Lambda) < \infty, \qquad \textit{(Z1)} \text{ и } \textit{(Z2)}.$$

Напомним, что Λ называется *синтезируемой*, если D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{E}_\infty$ с дискретным спектром $\sigma_W = -\mathrm{i}\Lambda$ и резидуальным промежутком $I_W = [-d_\Lambda; d_\Lambda]$ единственно (и следовательно, допускает спектральный синтез в слабом смысле).

Принимая во внимание результаты работы [72] (цитированная выше, в п.2.6.3, теорема U), доказанное нами в главе 2 предложение 2.1, видим, что множество последовательностей Λ с описанными выше свойствами (включая свойство синтезирумеости) есть в точности совокупность нулевых множеств функций класса P_{syn}. Поэтому из утверждений пп. 1, 2 теоремы 5.1 о сохранении классов P, P_{syn} вытекает

Теорема 5.3. *Пусть для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ получена р-возмущением из $\mathcal{M}$.*

Тогда последовательности $\mathcal{M}$ и Λ синтезируемы или нет одновременно.

2. Рассмотрим опять последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющую условиям: $d_\Lambda := D_{BM}(\Lambda) < \infty$, *(Z1)*, *(Z2)*.

Из пунктов 1 и 3 теоремы 5.1 и теорем 4.1, 4.2, учитывая также замечание 4.1 и совпадение условий (4.1.4) и *(Z2)*, нетрудно вывести следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть для последовательности $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия (Z1) и (Z2), а последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ получена р-возмущением из $\mathcal{M}$.*

Тогда

1) $D_{sd}(\Lambda) = D_{sd}(\mathcal{M})$;

2) *для D-инвариантных подпространств W и $\widetilde{W}$ со спектрами $(-\mathrm{i}\mathcal{M})$ и $(-\mathrm{i}\Lambda)$ и резидуальными промежутками I, $\widetilde{I}$, соответственно, пары соотношений*

$$W = W_I \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W} \quad \text{и} \quad D_{sd}(\mathcal{M}) < |I|$$

и

$$\widetilde{W} = W_{\widetilde{I}} \oplus \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} \widetilde{W}} \quad \text{и} \quad D_{sd}(\Lambda) < |\widetilde{I}|$$

имеют место или нет одновременно.

5.4.2 Сохранение полноты и (бес)конечности избытка и недостатка экспоненциальных систем

Для последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ обозначим символом $\operatorname{Exp}_\Lambda$ соответствующую систему экспоненциальных одночленов и предположим, что

$$d_\Lambda := D_{BM}(\Lambda) < \infty.$$

Если система Exp_Λ полна в пространстве $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$ или в пространтсве $C[-a;a]$, где $a = \pi d_\Lambda$, то ее *избытком* $E_p(\Lambda)$ $(p = +\infty$ соответствует пространству $C[-a;a])$ называется величина $m \in \mathbb{Z}_+ \bigcup \{+\infty\}$, такая, что, в случае конечного m, система, полученная удалением m элементов из Exp_Λ, полна в соответствующем пространстве, а полученная удалением $(m+1)$ элемента — уже нет; избыток $E_p(\Lambda)$ системы Exp_Λ равен $+\infty$, если после удаления любого конечного числа элементов оставшаяся система полна.

Для неполной в $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$ или в $C[-a;a]$ системы Exp_Λ ее *избытком* $E_p(\Lambda)$ $(p = +\infty$ соответствует пространству $C[-a;a])$ называется величина $m \in (-\mathbb{N}) \bigcup \{-\infty\}$, такая, что после добавления $(-m-1)$ элемента к Exp_Λ полученная система еще не полна, а после добавления $(-m)$ элементов — полна в соответствующем пространстве; избыток $E_p(\Lambda)$ неполной системы Exp_Λ равен $-\infty$, если добавление к ней любого конечного числа элементов приводит к неполной системе.

Отметим, что избыток данной экспоненциальной системы конечен или равен бесконечности определенного знака одновременно для всех пространств: $L^p(-a;a)$ $(1 < p < +\infty)$, $C[-a;a]$, где $a = \pi D_{BM}(\Lambda)$.

Из сформулированных определений следует, что

$E_p(\Lambda) \geq 0 \Longleftrightarrow$ система $\mathrm{Exp}(\Lambda)$ полна;

$E_p(\Lambda) \leq 0 \Longleftrightarrow$ система $\mathrm{Exp}(\Lambda)$ минимальна;

$E_p(\Lambda) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Exp}(\Lambda)$ — полная и минимальная система.

Пусть $\mathcal{L} = \{\Lambda\}$ — совокупность всех последовательностей $\Lambda \subset \mathbb{C}$,

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots,$$

удовлетворяющих условиям *(Z1)*, *(Z2)*, то есть таких, что

$$|\mathrm{Im}\,\lambda_k| = O(\ln|\lambda_k|), \quad k \to +\infty.$$

$$n(t+1) - n(t) = O(\ln t), \quad t \to +\infty,$$

где $n(t)$ — считающая функция последовательности $\mathrm{Re}\,\Lambda$.

Далее, пусть $\{\nu_k\} \subset \mathbb{C}$ — *возмущающая последовательность* и

$$\mathcal{M} = \{\mu_k\}, \quad \mu_k = \lambda_k + \nu_k.$$

Из результатов об устойчивости классов P, P_0, P_{wsd}, P_{nwsd} при p-возмущениях нулевых множеств функций из этих классов (теоремы 5.1, 5.2) выводится

Теорема 5.5. *Для того чтобы оба избытка, $E_p(\mathcal{M})$ и $E_p(\Lambda)$, были конечны (или бесконечны и одного знака: $E_p(\mathcal{M}) = E_p(\Lambda) = \pm\infty$) для всех последовательностей $\Lambda \in \mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы возмущающая последовательность $\{\nu_k\}$ удовлетворяла условиям*

$$\operatorname{Re}\nu_k = O(1), \quad \operatorname{Im}\nu_k = O(\ln|\lambda_k|), \quad k \to +\infty,$$

то есть, чтобы последовательности Λ и $\mathcal{M}$ можно было получить друг из друга p-возмущением.

Заключение

В диссертации получены следующие новые результаты.

1) Доказаны теоремы о том, что

– D-инвариантное подпространство W пространства Ω-ультрадифференцируемых функций (и пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых функций) на интервале $(a;b)$, имеющее дискретный спектр, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль содержит подмодуль вида $\mathcal{J}(\varphi)$, то есть слабо локализуемый подмодуль, порожденный одной функцией.

– D-инвариантное подпространство W пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых функций, имеющее дискретный спектр, допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль содержит функцию φ, порождающую слабо локализуемый главный подмодуль, то есть такую, что $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi)$.

2) Как следствие теорем из предыдущего пункта, установлено утверждение о том, что D-инвариантное подпространство с дискретным спектром W в пространстве Ω-ультрадифференцируемых (или всех бесконечно дифференцируемых) функций на интервале $(a;b)$

– всегда допускает слабый спектральный синтез, если $|I_{W_I}| > 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$ (в частности, если резидуальный промежуток I_W не компактен в $(a;b)$) ,

– может как допускать слабый спектрадьный синтез, так и не допускать его, если $|I_{W_I}| = 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$,

– тривиально (совпадает со всем пространством), если $|I_{W_I}| < 2r(\mathrm{i}\sigma_W)$

3) Для подпространства W_S, порожденного одним распределением S в пространстве Шварца установлены удобные для проверки достаточные условия допустимости слабого спектрального синтеза, формулируемые в терминах поведения $|\varphi|$, где φ — преобразование Фурье-Лапласа распределения S.

4) Доказан весовой критерий допустимости слабого спектрального синтеза подпространствами вида W_S.

5) Получены критерии того, что сдвиг целочисленной последовательности представляет собой нулевое множество делителя алгебры Шварца

или весовой алгебры целых функций, реализующей пространство Ω-ультрараспределений.

6) Доказана теорема об условии на считающую функцию вещественной последовательности, необходимом для того, чтобы эта последовательность была нулевым множеством делителя алгебры Шварца; также показано, что это условие нельзя усилить на классе всех вещественных последовательностей.

7) Доказаны теоремы о представимости D-инвариантного подпространства в пространстве Шварца в виде прямой алгебраической и топологической суммы его резидуальной и экспоненциальной компонент; условия представимости имеют ту же форму, что и условия допустимости слабого спектрального синтеза, но вместо радиуса полноты использована введенная нами более тонкая характеристика комплексной последовательности, тесно связанная с понятием делителя в алгебре Шварца.

8) Получены неулучшаемые условия сохранения различных классов целых функций, в том числе класса делителей алгебры Шварца, класса функций, порождающих слабо локализуемые главные подмодули, при возмущении нулевых множеств; эти условия применены для получения новых утверждений о слабом спектральном синтезе и о (не)полноте систем экспоненциальных функций.

В работе использован аппарат функционального анализа, в частности, теория двойственности для локально-выпуклых пространств, и аналитические методы теории целых и субгармонических функций. Также при изучении возникающих в ходе основного исследования вопросов, касающихся свойств целых функций и их нулевых множеств были разработаны новые методы и подходы, которые могут быть полезными для решения других задач теории функций.

Результаты и методы диссертации представляют интерес как для специалистов, проводящих исследования по теории целых и субгармонических функций, так и для специалистов, работающих в других областях анализа (спектральная теория дифференциальных операторов, уравнения свертки и их обобщения и др.)

Литература

[1] Абанин А. В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. — М.: Наука, 2007.

[2] Абанин А. В. Ω-ультрараспределения // Известия РАН, сер. Матем. — 2008. — Т. 72, № 2. — С. 207–240.

[3] Абанин А. В., Абанина Д. А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. матем. журн. — 2010. — Т. 12, № 3. — С. 3–20.

[4] Абанина Д. А. Экспоненциально-полиномиальный базис в пространстве решений однородного уравнения свертки на классах ультрадифференцируемых функций // Владикавк. матем. журн. — 2011. — Т. 13, № 4. — С. 3–17.

[5] Абанина Д. А. Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, № 3. — С. 477–494.

[6] Беренстейн К., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Комплексный анализ – многие переменные – 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 54, ВИНИТИ, М. — 1989. — С. 5–111.

[7] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике // М.:Наука, 1979.

[8] Волковая Т. А., Шишкин А. Б. Локальное описание целых функций. Подмодули ранга 1 // Владикавк. матем. журн. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 14–28.

[9] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 2. — М.: Физматгиз, 1958.

[10] Гельфонд А. О. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Тр. МИАН СССР. — 1951. — Т. 38. — С. 42–67.

[11] Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. — 1951. — Т. 29(71), № 3. — С. 477–500.

[12] Гуревич Д. И. Контрпримеры к проблеме Л. Шварца // Функц. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, № 2. — С. 29–35.

[13] Дьедонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах (F) и (LF) // Математика. Сб. переводов инстранных статей. — 1958. — Т.2, № 2. — С. 77–107.

[14] Заболоцкий Н. В. Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка // Матем. заметки. — 1998. — Т. 63, № 2. — С. 196–208.

[15] Красичков И. Ф. О замкнутых идеалах в локально-выпуклых алгебрах целых функций, I, II // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1967. — Т. 31, № 1. — С. 37–60; 1968. — Т. 32, № 5. — С. 1024–1032.

[16] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. — 1972. — Т. 87(129), № 4. — С. 459–489.

[17] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. — 1972. — Т. 88(130), № 1(5). — С. 3–30.

[18] Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб. — 1972. — Т. 88(130), № 3(7). — С. 331–352.

[19] Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Известия АН СССР, серия матем. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 44–66.

[20] Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // Известия АН СССР, серия матем. — 1979. — Т. 43, № 2. — С. 309–341.

[21] Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей, I–III // Матем. сб. — 1980. — Т. 111(153), № 1, с. 3–41; Т. 111(153), № 3, с. 384–401; Т. 112(154), № 1(5), с. 94–114.

[22] Красичков-Терновский И. Ф., ШишкинА. Б. Спектральный синтез для оператора кратного дифференцирования // Докл. АН СССР. — 1989. — Т.307, № 1. — С. 24–27.

[23] Красичков-Терновский И. Ф. Интерпретация теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты // Матем. сб. — 1989. Т. 180, № 3. С. 397–423.

[24] Красичков-Терновский И. Ф. Абстрактные приемы локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций // Матем. сб. — 1990. — Т. 181, № 12. — С. 1640–1658.

[25] Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами,I–IV. // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 11. — С. 1559–1587; 1992. — Т. 183, № 1. — С. 3–19; 1992. — Т. 183, № 6. — С. 55–86; 1992. — Т. 183, № 8. — С. 23–46.

[26] Красичков-Терновский И. Ф., Шишкин А. Б. Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 11. — С. 35–54.

[27] Красносельский М. А., Рутицкий А. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича // М.: Физматлит, 1958. — 271 с.

[28] Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. — 1992. — Т. 47, № 6. — С. 3–58.

[29] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций // М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

[30] Левин Б. Я., Островский И. В. О малых возмущениях множества корней функций типа синуса // Изв. АН СССР, серия Матем. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 87–110.

[31] Леонтьев А. Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка // Труды IV Всесоюзного матем. съезда. — 1961. — Т. II. — С. 648–660.

[32] Леонтьев А. Ф. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т.29, № 2. — С. 269–328.

[33] Леонтьев А. Ф. Представление функций обобщенными рядами Дирихле // УМН. — 1969. — Т. 24, № 2. — С. 97–164.

[34] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент — М.: Наука, 1976. — 536 с.

[35] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, т. 1. — М.: Мир, 1971.

[36] Мерзляков С. Г. Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования // Матем. заметки. — 1983. — Т. 33, № 5. — С. 701–713.

[37] Мерзляков С. Г. О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, № 5. — С. 635–639.

[38] Моржаков В. В. Уравнения в свертках в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях и выпуклых компактах в $\mathbb{C}^n$ // Матем. заметки. — 1974. — Т. 16, № 3. — С. 431–440.

[39] Напалков В. В. О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно сдвига // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1972. — Т. 36, № 6. — С. 1269–1281.

[40] Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах // Матем. заметки. — 1979. — Т. 25, № 5. — С. 761–774.

[41] Никольский Н. К. Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. ВИНИТИ, М. — 1974. — Т. 12. — С. 199–412.

[42] Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами — М.: Наука, 1967. — 487 с.

[43] Полякова Д. А. О решениях уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26, № 6. — С. 121–142.

[44] Саранчук Ю. С., Шишкин А. Б. Общее элементарное решение однородного уравнения типа q-сторонней свертки // Алгебра и анализ. — 2022. — Т. 34, № 4. — С. 188–213.

[45] Себастьян-и-Сильва Ж. О некоторых классах ЛВП, важных в приложениях // Математика. Сб. переводов инстранных статей. — 1957. — Т. 1, № 1. — С. 60–77.

[46] Седлецкий А. М. О функциях, периодических в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1970. — Т.34, № 6. — С. 1391–1415.

[47] Седлецкий А. М.Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, I // Совр. Матем. Фунд. Напр. — 2003. — Т. 5. — С. 3-–152.

[48] Седлецкий А. М. Негармонический анализ // Функциональный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ, М. — 2006. — Т. 96. — С. 106-–211.

[49] Седлецкий А. М. Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 2. — С. 262-–271.

[50] Татаркин А. А., Шишкин А. Б. Экспоненциальный синтез в ядре оператора q-сторонней свертки // Исследования по линейным операторам и теории функций. 50, Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 512. — С. 191–222.

[51] Титчмарш Е. Теория функций // М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.

[52] Ткаченко В. А. О спектральом синтезе в пространствах аналитических функционалов // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 223, № 2. — С. 307–309.

[53] Ткаченко В. А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную // Матем. сб. — 1980. — Т. 112(154), № 3(7). — С. 421–466.

[54] Фаворов С. Ю. Множества нулей целых функций экспоненциального типа с дополнительными условиями на вещественной прямой // Алгебра и анализ. — 2008. — Т.20, № 1. — С. 138–145.

[55] Хейфиц А. И. Характеристика нулей некоторых специальных классов целых функций конечной степени // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1969. — Т. 9. — С. 3–13.

[56] Хермандер Л. Об области значений дифференциальных операторов и операторов свертки // Математика. Сб. переводов инстранных статей. — 1962. — Т.6, № 3 . — С. 37–65.

[57] Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких переменных // М.: Мир, 1968. 279 с.

[58] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье // М.: Мир, 1986.

[59] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: Мир, 1986.

[60] Шишкин А. Б. Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. — 1989. — Т. 46, № 6. — С. 94–100.

[61] Шишкин А. Б. Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 6. — С. 828–848.

[62] Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Матем. сб. — 1998.— Т. 189, № 9. — С. 143–160.

[63] Шишкин А. Б. Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Исследования по линейным операторам и теории функций. 44, Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 447. — С. 129–170.

[64] Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. — 1985. — V. 11. — Pp. 257–282.

[65] Юлмухаметов Р. С. Однородные уравнения свертки // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 316, № 2. — С. 312–315.

[66] Юлмухаметов Р. С. Разложение целых функций на произведение двух „почти равных“ функций // Сиб. матем. журнал. — 1997. — Т.38, № 2. — С. 463–473.

[67] Юлмухаметов Р. С. Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации // Матем. сб. — 1999.— Т.190, № 4. — С. 123–157.

[68] Юлмухаметов Р. С. Спектральный синтез в ядре оператора свёртки в весовых пространствах // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 264–279.

[69] Юхименко А. А. Об одном классе функций типа синуса // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83, № 6. — С. 941-–954.

[70] Aleman A., Baranov A., Belov Yu. Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation // Journal of Functional Analysis. — 2015. — V. 268. — Pp. 2421–2439.

[71] Aleman A., Korenblum B. Derivation-invariant subspaces of C^∞ // Comp. Meth. and Function Theory. — 2008. V. 8, № 2. — Pp. 493–512.

[72] Baranov A, Belov Yu. Synthesizable differentiation-invariant subspaces // Geometric and Functional Analysis. — 2019. — V. 29, № 1. — Pp. 44–71.

[73] Belov Yu. Complementability of exponential systems // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2015. V. 353. — Pp. 215–218.

[74] Berenstein C. A.,Taylor B. A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. in Math. — 1980. — V. 33. — Pp. 109–143.

[75] Bernstein V. Lecons sur les progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet. — Paris: Gauthier-Villars, 1933.

[76] Beurling A. Quasi-analyticity and general distributions. Lectures 4 and 5 — Amer. Math. Soc., Summer Inst., Stanford, 1961.

[77] Björck G. Linear partial differential operators and generalized distributions // Ark. Mat. — 1966. — V. 6, № 4–5. — Pp. 351–407.

[78] Björck G. Beurling Distributions and Linear Partial Differential Equations. — Roma: 1st. Alta Mat., 1971.

[79] Boas R. P., Jr. Entire functions // New-York: Acad. Press. Publ. Inc., 1954. 276 p.

[80] Braun R. W., Meise R., Taylor B.A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math. — 1990. — V. 17, № 3–4. — Pp. 206–237.

[81] Cartan H. Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes // Bulletin de la Société. Mathematique de France. — 1950. — V. 78, № 1. — Pp. 29–64.

[82] Chin Ch'eng Chou La transformation de Fourier complexe et l'équation de convolution // Lecture Notes in Math., 325, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.

[83] Cioranescu I., Zsidó L. ω-ultradistributions and their applications to operator theory // Spectral Theory (Warsaw, 1977), 8, Banach Center Publ. — 1982. — Pp. 77–220.

[84] De Branges L. Hilbert spaces of entire functions // N.J.: Prentice-Hall inc., 1968.

[85] Delsarte L. Les fonctions moyenne-périodiques // J. math, pures et appl. — 1935. — V. 14. — Pp. 403–453.

[86] Dickson D. G. Expansions in series of solutions of linear difference-differential and infinite order differential equations with constant coefficients // Mem. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 23.

[87] Dickson D. G. Analytic mean periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1964. — V. 110, № 2. — Pp. 361–374.

[88] Ehrenpreis L. Solution of some problems of division, I // Amer. J. Math. — 1954. — V. 76. — Pp. 883–903.

[89] Ehrenpreis L. Mean periodic functions. I. Varieties whose annihilator ideals are principal // Amer. J. Math.— 1955. — V. 77, № 2. — Pp. 293–328.

[90] Ehrenpreis L. Solution of some problems of division, IV // Amer. J. Math. — 1960. — V. 57, № 1. — Pp. 522–588.

[91] Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables — Pure Appl. Math., 17, Wiley-Intersci. Publ. John Wiley and Sons, New York–London–Sydney, 1970. — xiii+506 pp.

[92] Euler L. De integratione aequationum differentialum altiorum gradum // Miscellanea Berol. — 1743. — № 7. — Pp. 193–242.

[93] Hitt D. Invariant subspaces of H^2 of an annulus // Pacific J. Math. — 1988. — V. 134, № 1. — Pp. 101–120.

[94] Hörmander L. Generators for some rings of analytic functions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 73, № 6. — Pp. 943–949.

[95] Hörmander L. Convolution equations in convex domains // Invent. math. — 1968. — V. 4. — Pp. 306–317.

[96] Kahane J. P. Sur les fonctions moyenne—pérlodiques bornées // Ann. Inst. Fourier. — 1957. — V. 7. — Pp. 293–314.

[97] Kahane J. P. Lectures on Mean Periodic Functions. — Bombay: Tata Institute of Fundamental Research — 1957. — 152 p.

[98] Kelleher J. J., Taylor B. A. Closed ideals in locally convex algebras of analitic functions // J. für die Reine und Angewandte Mathematik. — 1972. — V. 225. — Pp. 190–209.

[99] Komatsu H. Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math. — 1973. — V. 20. — Pp. 25–105.

[100] Koosis P. Note sur les fonctions moyenne-périodiques // Ann. Inst. Fourier. — 1956. — V. 6. — Pp. 357–360.

[101] Koosis P. Approximation of certain functions by exponentials on a half line // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — V. 8, № 3. — Pp. 428–435.

[102] Koosis P. On functions which are mean periodic on a half-line // Gommuns Pure and Appl. Math. — 1957. — V. 10, № 1. — Pp. 133–149.

[103] Koosis P. Logarithmic Integral I // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.

[104] Koosis P. Logarithmic Integral II // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

[105] Levin B. Y. (in collaboration with Lyubarskii Yu., Sodin M., Tkachenko V.). Lectures on entire functions (Rev. Edition) // Rhode Island: AMS. Providence, 1996. 254 p.

[106] Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivees partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier. — 1956. — V. 6. — Pp. 271–355.

[107] Meise R., Taylor B. A., Vogt D. Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J. — 1987. — T. 36, № 4. — C. 729–756.

[108] Ortega-Cerda J., Seip K. Fourier frames // Annals of Math. — 2002. — V. 155. Pp. 789–806.

[109] Paley R. E. A. C., Wiener N. Fourier transforms in the complex domain // N. Y.: AMS, 1934.

[110] Pincherle S. Sur la résolution de l'equation fonctionnelle $\sum h_0\varphi(x + a_0) = f(x)$ a coefficients constants // Acta Math. — 1926. — V. 48. — Pp. 279–391.

[111] Roumieu C. Sur quelques extensions de la notion de distribution // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). — 1960. — V. 77, № 1. — Pp. 41–121.

[112] Roumieu C. Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables // J. Anal. Math. — 1962. — V. 10. — Pp 153–192.

[113] Rubel L. (with Colliander J. E.) Entire and meromorphic functions // N.Y.: Springer, 1996.

[114] Sarason D. A remark on the Volterra operator // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — V. 12. — Pp. 244–246.

[115] Schwartz L. Theorie générale des fonctions moyenne-périodique // Ann. of Math. — 1947. — V. 48, № 4. — Pp. 857–929.

[116] Schwartz L. Théorie des distributions vol. I, II. — Paris: Hermann, 1950–51.

[117] Struppa D. C. The Fundamental Principle for systems of convolution equations — Memoirs Amer. Math. Soc., 1983.— 273 p.

[118] Struppa D. C. Convolution equations and spaces of ultradifferentiable functions // Isr. J. Math. — 1986. — V. 54. — Pp. 60–70.

Список работ автора

[1] Абузярова Н. Ф. Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси // Уфимск. матем. журн. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 3–18.

[2] Абузярова Н. Ф. Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций. // Доклады РАН.— 2014. — Т. 457, № 5. — С. 510–513.

[3] Абузярова Н. Ф. Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси // Уфимск. матем. журн. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 3–14.

[4] Абузярова Н. Ф. О 2-порожденности слабо локализуемых подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси // Уфимск. матем. журн. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 8–21.

[5] Абузярова Н. Ф. Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца // Матем. Заметки. — 2017. — Т. 102, № 2. — С. 163–177.

[6] Абузярова Н. Ф. О сдвигах целочисленной последовательности, порождающих функции, обратимые по Эренпрайсу // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2019. — Т. 480. — С. 5–25.

[7] Abuzyarova N. F. Principal submodules in the module of entire functions, which is dual to the Schwartz space, and weak spectral synthesis in the Schwartz space // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 241, № 6. — Pp. 658–671.

[8] Абузярова Н. Ф. Обратимые по Эренпрайсу функции в алгебре Шварца // Доклады РАН. — 2019. — Т. 484, № 1. — С. 7–11.

[9] Абузярова Н. Ф. Синтезируемые последовательности и главные подмодули в модуле Шварца // Уфимск. матем. журн. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 11–21.

[10] Абузярова Н. Ф. Главные подмодули в модуле Шварца // Изв. вузов. Матем. — 2020. — № 5. — С. 83–88.

[11] Абузярова Н. Ф., Сагадиева А. Ф., Фазуллин З. Ю. О нулевых множествах слабо локализуемых главных подмодулей в алгебре Шварца // Челяб. физ.-матем. журн. — 2020. — Т. 5, № 3. — С. 261–270.

[12] Abuzyarova N. F. On conditions of invertibility in the sense of Ehrenpreis in the Schwartz algebra // Lobachevskii J. of Math. — 2021. — V. 42, № 6. — Pp. 1141–1153.

[13] Абузярова Н. Ф. Сохранение классов целых функций, выделяемых ограничениями на рост вдоль вещественной оси, при возмущениях их нулей // Алгебра и анализ. — 2021. — Т. 33, № 4. — С. 1–31.

[14] Абузярова Н. Ф. Представление синтезируемых инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств в пространстве Шварца // Доклады РАН. — 2021. — Т. 498. — С. 5–9.

[15] Абузярова Н. Ф. Об условии представления инвариантного относительно дифференцирования подпространства в пространстве Шварца в виде прямой суммы его резидуальной и экспоненциальной составляющих // Уфимский матем. журнал. — 2021. — Т. 13, № 4. — С. 3–7.

[16] Abuzyarova N. F. On properties of functions invertible in the sense of Ehrenpreis in the Schwartz algebra. // Eurasian Math. J. — 2022. — V. 13, № 1. — Pp. 9–18.

[17] Abuzyarova N. F. Differentiation operator in the Beurling space of ultradifferentiable functions of normal type on an interval. // Lobachevskii Journal of Math. — 2022. — V. 43, № 6. — Pp. 1472–1485.

[18] Абузярова Н. Ф. Представление инвариантных подпространств в пространстве Шварца. // Матем. сб. — 2022. — Т. 213, № 8. — С. 3–25.