На правах рукописи

Абуд Ахмед Ханун

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовании учреждения высшего образования «Дагестанский государственный университет».

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Вагабов Абдулвагаб Исмаилович

Официальные оппоненты:

Гликлих Юрий Евгеньевич
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», профессор

Островская Ирина Владимировна
кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», доцент института математики, механики и компьютерных наук

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», г.Уфа

Защита состоится 18 июня 2019 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Южном федеральном университете по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул.Мильчакова 8А, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южного федерального университета по адресу: г.Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 21-ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу: http://hub.sfedu.ru/media/diss/f938a32f-99a8-4f54-bd41-538c7f9afae1/Abud_dissertation_19.pdf

Автореферат разослан «___»_______________2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д. 212.208.29 Кряквин В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Спектральная теория краевых задач для обыкновенных линейных дифференциальных операторов и пучков таких операторов восходит к работам Фурье, Пуассона, Коши, г. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М.В. Келдыша, А.В. Ильина, А.А. Самарского, А.Г. Костюченко, В.А. Садовничева, А.П. Хромова, Н. Данфорда, В. Эбергарда, Г. Фрейлинга, А.А. Шкаликова и многих последователей. В большинстве случаев подробному изучению подвергались вопросы, связанные с проблемами полноты и базисности систем корневых элементов операторных пучков типа Келдыша. В работах А.И. Вагабова детально изучены пучки обыкновенных линейных дифференциальных операторов более общего вида.

Асимптотические методы, начиная с Лиувилля, заключаются в том, что не обязательно иметь точное выражение для резольвенты задачи, а достаточно иметь ее асимптотическое представление. Существенное развитие указанных методов нашло отражение в работах Г. Биркгофа и его учеников. Ими определены «регулярные» краевые задачи с параметром. Велись исследования и в случае простейших нерегулярных задач третьего порядка, на которые обратил внимание А.П. Хромов. Дальнейшее развитие и обобщение нашло отражение в работах вышеуказанных авторов. Особо отметим работы Келдыша, в которых впервые затронут вопрос о n-кратных разложениях и n-кратной полноте системы корневых векторов пучков линейных операторов в гильбертовом пространстве. Эти работы имели большое влияние на последующее развитие спектральной теории. Оно отражено в работах Дж.Э. Алахвердиева, С. Агмона, М.Л. Расулова, М.Г. Гасымова и А.М. Магеррамова, В. Эбергарда, Данфорда и Дж. Шварца.

Цель работы. Выявление естественных новых классов регулярных краевых задач, у которых характеристические корни основного дифференциального выражения не являются простыми. В свою очередь желательно иметь в будущем более общую теорию в данном трудном направлении.

Научная новизна. Создана общая теория регулярных спектральных задач с трех- и четырехкратными характеристиками для пучков соответствующих порядков. Выработаны некоторые общие методы в данном новом направлении, относящиеся к исследованию резольвенты задачи.

Опираясь на спектральную теорию, изложенную в первой главе, осуществлен метод разделения переменных в решении многомерных несамосопряженных смешанных задач с разделяющимися переменными и найдена эффективная формула, обобщающая все известные формулы решений в частных ситуациях.

Методы исследования, – методы теории аналитических функций, асимптотические методы дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Разработаны начальные этапы изучения спектральных задач обыкновенных дифференциальных операторов с кратными характеристиками.

Спектральная теория дифференциальных операторов имеет приложения в аэронавтике, математической физике, квантомеханической теории рассеивания, в изучении процессов, происходящих в атомных реакторах и др.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

1) XXII междунар. конф. "Математика. Экономика. Образование". 27.05-3.06. 2014 г. Махачкала, 2014.

2) VII междунар. конф. "ФДУ и их приложения" 21-24.09.2015 г. Махачкала, 2015.

3) XXIII междунар. конф. "Математика. Экономика. Образование". 27.05-3.06. 2016 г. Махачкала, 2016.

4) Межд. конф. « Воронежская зимняя математическая школа ». С.Г. Крейна , 2018.

Также на семинарах кафедры алгебры и геометрии ДГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, четыре ([1], [2], [4], [5]) из них в журналах списка ВАК. Из совместных с руководителем работ в диссертацию вошли результаты, полученные автором самостоятельно под руководством Вагабова А.И.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем работы составляет 95 страниц, библиография – 63 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** отражены актуальность, содержание, научная новизна, теоретическая и практическая ценности работы, а также ее апробация.

В **первой главе** дается анализ понятия регулярности для наиболее общих параметрических пучков обыкновенных линейных дифференциальных операторов вида

$$\sum_{\substack{k_0 \le p-1 \\ k_0+k_1 \le p}} \lambda^{k_0} A^{k_0,k_1}(x) \frac{d^{k_1} v}{dx^{k_1}} - \lambda^p v = 0, \quad a < x < b, \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$\sum_{\substack{k_1 < p-1 \\ k_0+k_1 \le p}} \lambda^{k_0} \left\{ \alpha^{k_0,k_1} \frac{d^{k_1} v}{dx^{k_1}}\bigg|_{x=a} + \beta^{k_0,k_1} \frac{d^{k_1} v}{dx^{k_1}}\bigg|_{x=b} \right\} = 0, \qquad (2)$$

где $A^{k_0,k_1}(x)-n\times n$ матричные функции, $\alpha^{k_0,k_1},\beta^{k_0,k_1}(x)-np\times n$ – матрицы. Известной процедурой [39, с. 65] нормировки граничных условий, строится их определяющая $(np\times 2np)$ матрица (α,β). Соображениями простоты изложения, рассуждения здесь отнесем к случаю скалярного пучка, $n=1$, предполагая, что φ – корни характеристического уравнения

$$A^{(0)}(x)\varphi^{p}+A^{1,p-1}(x)\varphi^{p-1}+\ldots+A^{p-1,1}(x)\varphi-1=0 \qquad (3)$$

различны при всех x, отличны от нуля, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x. Для этих корней прямые $d_{ij}:\operatorname{Re}\lambda\varphi_i=\operatorname{Re}\lambda\varphi_j$, и прямые $d_i:\operatorname{Re}\lambda\varphi_i=0$ разбивают λ-плоскость на конечное число секторов S, в каждом из которых при некоторой нумерации φ-корней справедливы неравенства:

$$\operatorname{Re}\lambda\varphi_i(x)\le\ldots\le\operatorname{Re}\lambda\varphi_\tau(x)\le 0\le\operatorname{Re}\lambda\varphi_{\tau+1}(x)\le\ldots\operatorname{Re}\lambda\varphi_p(x) \qquad (4)$$

Легко установлен необходимый признак регулярности (т.е. p-кратной базисности корневых функций задачи (1), (2)):

$$\min(rank\ \alpha,\ rank\ \beta)\ge\max\tau \qquad (5)$$

Заметим, что во всех известных нам случаях условие (5) оказывается достаточным, хотя общее доказательство этого мы не имеем.

Пример. Иллюстрирующий признак (5):

$$v''(x)-\lambda^2 v(x)=0,\quad v(0)=v(1)=0,\quad 0<x<1,$$

связанный с задачей колебания конечной струны. Здесь φ корни имеют вид, $\lambda_{1,2}=\pm1$. В этом примере λ-плоскость разбивается лишь на два сектора S_1,S_2 – левая и правая полуплоскость в каждой из которых имеется по одному характеристическому корню φ_1 либо φ_2. Матрица (α, β) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и неравенство (5) очевидно, так как $\max \tau = 1$.

В конце главы I приведены теоремы наиболее общего характера.

Теорема 6. *Пусть* $h(x)$*– произвольная суммируемая на* (a,b) p*-вектор-функция. Если задача (1) – (2) регулярная, то ряд Фурье по корневым функциям этой задачи покомпонентно сходится в точке при тех же условиях и к тому же пределу, что и классические ряды Фурье от компонент. Сходимость будет равномерной на любом компакте из* (a,b)*, на котором ряды Фурье от компонент сходятся равномерно.*

Как следствие признака (5), приводятся замечательные по простоте случаи установления необходимых признаков регулярности задачи (1) – (2):

1) $\min(rank\ \alpha, rank\ \beta) \geq \left[\dfrac{p+1}{2}\right]$

2) $rank\ \alpha + rank\ \beta = p$ в случае четного p и распадающихся граничных условий.

Указанные здесь признаки также и достаточны. Однако в векторном случае указана задача:

$$\frac{dy}{dx} - \lambda \begin{pmatrix} x & -1 \\ x^2 - 1 & -x \end{pmatrix} y = 0, \quad y(-1) = y(1), \quad 0 < x < 1,$$

с переменным матричным коэффициентом, система собственных вектор-функций которой обладает бесконечным дефектом в $L_2^2(-1, 1)$.

Последняя теорема относится к задачам, для которых корни основного характеристического уравнения имеют равные модули.

Теорема 7. *Если все корни характеристического уравнения (3) имеют равные модули, то для регулярной задачи (28) – (29) разложение суммируемой вектор-функции по главным функциям этой задачи равномерно равносходится с ее разложениями в тригонометрические ряды.*

Глава завершается приведением простейших примеров квадратичных пучков, связанных с общей теорией и носящих уникальный характер.

Отметим, что в принципе общее содержание первой главы принадлежит моему научному руководителю Вагабову А.И. и отражено в его докторской диссертации. В предлагаемой же диссертации произведена существенная переработка, как по форме, так и по содержанию, в частности касающихся ряда примеров. Помимо сказанного эта глава находится в неразрывном контексте с материалом последующего изложения.

Вторая глава является центральной, как по месту, так и по содержанию. Она относится к почти неизученной части, – спектральной теории обыкновенных линейных дифференциальных пучков с n-кратными корнями характеристических уравнений соответствующих дифференциальных выражений. Приведено ряд частных задач «регулярного» типа, относящихся к случаям $n=3,4$, а также при любом n, но при условии единственности характеристического корня кратности n и распадающихся краевых данных. Лишь § 5 относится к ситуации модельного пучка четвертого порядка с двумя характеристическими корнями кратностей 2.

§ 2 посвящен задаче с трехкратной характеристикой при периодических граничных условиях:

$$l\,(y)\equiv\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)^3 y(x),\ \ 0<x<1;\ \ \left.\frac{d^i y}{dx^i}\right|_0^1=0,\quad i=0,1,2 \qquad (6)$$

Существенным моментом в изучении задачи (6) является использование нами элементарных решений $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}$ уравнения $l(y)=0$, а также функции Коши этого уравнения:

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при}\quad 0\le\xi\le x\le 1 \\ -\frac{1}{2}(x-\xi)^2 e^{\lambda(x-\xi)} & \text{при}\quad 0<x\le\xi\le 1 \end{cases}$$

Проводится построение и анализ функции Грина задачи. Спектр задачи исчерпывается числами $\lambda_k = 2k\pi i,\ k \in Z$. Установлена основная теорема о трехкратном разложении.

Теорема. *Пусть* $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ *трижды непрерывно дифференцируемые на* (0,1) *функции и* $\left.\frac{d^k f_s(x)}{dx^k}\right|_{x=0,1} = 0, \quad k = 0,1; \quad s = 0,1,2$.

Тогда справедлива формула трехкратного разложения по собственным элементам задачи (1) – (2):

$$\lim_{\substack{\nu\to\infty \\ s=0,1,2}} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda^s d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) F(\xi, f, \lambda) d\xi = f_s(x), \tag{7}$$

где $F(\xi, f, \lambda) = -\lambda^2 f_0(\xi) + 3\lambda f_0'(\xi) - 3 f_0''(\xi) - \lambda f_1(\xi) + 3 f_1'(\xi) - f_2(\xi)$, C_ν – *последовательность окружностей с центром в начале* λ*-плоскости и радиусами* $R_\nu = (2\nu+1)\pi, \quad \nu = 1,2,3,\ldots, G(x,\xi,\lambda)$ *– функция Грина.*

§ 3. Этот параграф отнесен к вопросу регулярности пучка четвертого порядка:

$$l(y) \equiv \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^4 y(x), \quad 0 < x < 1 \tag{8}$$

при периодических граничных условиях

$$y^{(k)}(0) - y^{(k)}(1) = 0,\ k = \overline{0,3} \tag{9}$$

Непосредственно проверяется, что система функций $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, x^3 e^{\lambda x}$ является фундаментальной системой решений уравнения $l(y) = 0$.

Для функции Грина выделением главной части $g(x,\xi,\lambda)$, (так называемая функция Коши), производится разбиение в сумму:

$$G(x,\xi,\lambda)=g(x,\xi,\lambda)+\frac{E(x,\xi,\lambda)}{\det\Delta(\lambda)}, \tag{10}$$

где $\det\Delta(\lambda)=12\left(1-e^{\lambda}\right)$ – характеристический определитель задачи (8) – (9). Его корни $\lambda_k=2\pi ki$ исчерпывают при $k\in Z$ четырехкратные собственные значения задачи, каждой из которых соответствуют собственная функция $e^{\lambda_k x}$ и три присоединенные к ней функции: $\lambda_k e^{\lambda_k x}$, $\lambda_k^2 e^{\lambda_k x}$, $\lambda_k^3 e^{\lambda_k x}$.

В предположении девятикратной дифференцируемости функции $f(x)$, а также $f^{(k)}(x)\big|_{x=0,1}=0$ при $k=\overline{0,9}$, доказывается справедливость равенства

$$\int_x^1 G(x,\xi,\lambda)\,f(\xi)d\xi\Big|_{C_\nu}=\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{\varepsilon(x,\lambda)}{\lambda}\bigg|_{C_\nu}, \tag{11}$$

на окружностях $C_\nu:|\lambda|=2\pi\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)$, где $\varepsilon(x,\lambda)\to 0$ при $\nu\to\infty$ равномерно по $x\in(0,1)$ при $\nu\to\infty$. Доказана основная

Теорема. *При указанных условиях на каждую из четырех функций* $f_i(x), i=\overline{0,3}$, *справедлива формула четырехкратного разложения по собственным функциям задачи (8) – (9):*

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}\lambda^s d\lambda\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)F(\xi,f,\lambda)d\xi=f_s(x),\quad s=\overline{0,3}, \tag{12}$$

где

$$F(\xi,f,\lambda)=\lambda^3 f_0(\xi)-4\lambda^2 f_0'(\xi)+6\lambda f_0''(\xi)-4f_0'''(\xi)+$$

$+\lambda^2 f_1(\xi)-4\lambda f_1'(\xi)+6\lambda f_1''(\xi)+\lambda f_2(\xi)-4f_2'(\xi)-f_3(\xi)$ и сходимость в (12) равномерна на (0,1).

§ 4 относится к элементарному пучку с *n*-кратной характеристикой. Решается задача *n*-кратного разложения *n* произвольных функций по корневым (производным цепочкам) элементам краевой задачи с *n*-кратным корнем основного характеристического уравнения. При этом все краевые условия, кроме одного, задаются на одном конце (что недопустимо с точки зрения обычных регулярных задач из первой главы). Задача имеет вид:

$$l(y) \equiv \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^n y(x) = 0,\ 0 < x < 1 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} U_s(y) &\equiv \left.\frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}}\right|_{x=0} = 0, \quad s = \overline{1, n-1}, \\ U_n(y) &\equiv \left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=1} - \lambda^{n-1}\left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=0} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

В аналогии с случаями n=3, 4 обнаружим фундаментальную систему решений $y_j(x,\lambda) = x^j e^{\lambda x}$, $j = \overline{0, n-1}$ – уравнения $l(y) = 0$. Аналогично придем к функции Коши уравнения (13):

$$g(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda(x-\xi)} & при \quad 0 \le \xi \le x \le 1 \\ 0 & при \quad 0 \le x \le \xi \le 1 \end{cases},$$

используемую при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и к подобной же функции в правой λ-полуплоскости. Согласно известному выражению функции Грина, спектр задачи находим как нули знаменателя этой функции:

$$\Delta(\lambda) = 2! \cdot 3! \Lambda\ (n-1)!\left([1]e^{\lambda} - (n-1)!\right),$$

то есть $\lambda_v = \ln(n-1)! + 2\pi v i,\ v = 0, \pm 1, \pm 2 K$ Расчетами получено представление

$$G(x,\xi,\lambda) = g(x,\xi,\lambda) + \frac{(-x)^{n-1} e^{\lambda, x}}{\lambda^{n-1}\left([1]e^{\lambda} - (n-1)!\right)} \cdot \left(\left.\frac{d^{n-1}(x-\xi)^{n-1} e^{\lambda(x-\xi)}}{dx^{n-1}}\right|_{x=1} \right), \tag{15}$$

для функции Грина. Для $\forall f(x),\ 0 < x < 1$, дифференцируемой непрерывно n раз и такой, что $f^{(k)}(x)\big|_{x=0,1} = 0$ при $k = \overline{0, n-1}$ установлено равенство

$\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)\, f(\xi) d\xi = \dfrac{f(x)}{\lambda^n} + \dfrac{\varepsilon(x,\lambda)}{\lambda^n}$, где $\varepsilon(x,\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ вне δ окрестности спектра задачи.

При формулировке основной теоремы используется выражение

$$F(\xi, f, \lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-i-1} (-1)^k \binom{n}{k} \lambda^{n-k} f_i^{(k)}(\xi)}{\lambda^{i+1}},$$

относящееся к n функциям $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$.

Теорема. *Пусть* $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ *– функции, имеющие n непрерывных производных, на (0,1). Считаем, что* $f_i^{(k)}(x)\big|_{x=0,1} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}$. *Справедлива формула n-кратного разложения по корневым элементам задачи (1) – (2).*

$$\lim_{v \to \infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{C_v} \lambda^s d\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda) F(\xi, f, \lambda) d\xi = f_s(x), \tag{16}$$

где C_v*– окружность с центром в начале комплексной* λ *-плоскости радиуса* $\sqrt{\ln^2(n-1) + 4\pi^2 \left(v + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad v = 1,2,\Lambda$. *Сходимость в (16) равномерная на (0,1).*

§ 5. Это единственный параграф, посвященный задаче с двумя кратными корнями характеристического уравнения спектральной задачи четвертого порядка. Здесь пришлось преодолевать отсутствие элементарного представления для функции и как следствие трудности требующие точности вычислительных процедур, связанных с этой функцией. Преодоление этих трудностей привело к положительному результату.

Выскажемся подробно. Предметом изучения является операторный пучок

$$l(y)\equiv\left(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)^2 y(x),\quad 0<x<1;\quad y(1)=0,\quad \left.\frac{d^{s-2}y(x)}{dx^{s-2}}\right|_{x=0}=0,\quad s=2,3,4 \tag{17}$$

Опираясь на фундаментальные решения $y_1=e^{\lambda x}$, $y_2=xe^{\lambda x}$, $y_3=e^{-\lambda x}$, $y_4=xe^{-\lambda x}$ строится функция Коши.

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(\xi)\Lambda\ y_4(\xi)\\ y_1'(\xi)\Lambda\ y_4'(\xi)\\ y_1''(\xi)\Lambda\ y_4''(\xi)\\ y_1(x)\Lambda\ y_4(x)\end{vmatrix}\quad при\quad x\le\xi$$
$$g(x,\xi,\lambda)=0\qquad\qquad при\quad x\ge\xi \tag{18}$$

Написанное выражение используется при $\operatorname{Re}\lambda>0$. Аналогичное выражение используется при $\operatorname{Re}\lambda<0$. Вычисление определителя $g(x,\xi,\lambda)$ дает

$$g(x,\xi,\lambda)=-\frac{2\lambda\xi-1}{8\lambda^3}e^{\lambda(x-\xi)}+\frac{x}{4\lambda^2}e^{\lambda(x-\xi)}+\frac{2\lambda\xi-1}{8\lambda^3}e^{-\lambda(x-\xi)}+\frac{x}{4\lambda^2}e^{-\lambda(x-\xi)} \tag{19}$$

Обращаясь к выражению функции Грина $G(x,\xi,\lambda)=\Delta(x,\xi,\lambda)\big/\Delta(\lambda)$, где $\Delta(\lambda)=-4\lambda^2\{[1]e^{\lambda}+[1]e^{-\lambda}\}$, находятся собственные числа задачи: $\lambda_k\approx k\pi i,\ k\in Z,\ |k|>>1$, а также, выделяя главную часть функции Грина, приходим к доказательству теоремы.

Теорема. *Пусть* $f_k(x), 0<x<1$ *четырехкратно непрерывно дифференцируемые функции, равные нулю вместе со всеми производными на концах промежутка (0,1). Справедлива формула 4-кратного разложения по корневым функциям пучка* (1) – (2):

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\nu}\lambda^s d\lambda\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\sum_{k=0}^{3}\frac{l(f_k(\xi))}{\lambda^{k+1}}d\xi=f_s(x), \tag{20}$$

$s=\overline{0,3}$, C_ν – окружность радиусов $\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$, $\nu\in N,\ \nu>>1$.

Глава 3 относится к приложениям спектральной теории к решению задач математической физики. Подобные задачи рассматривались и ранее, см. например, [5], [6]. Первый параграф относится к построению решения многомерной спектральной задачи.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{A_k(x_k)\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}+B_k(x_k)\frac{\partial v}{\partial x_k}+C_k(x_k)v\right\}-\lambda^2 v=$$

$$=\lambda\varphi^0(x_1\Lambda\ x_n)+\varphi^1(x_1\Lambda\ x_n),\quad a_k<x_k<b_k,\quad A_k(x_k)>0, \tag{21}$$

$$v(x_1\Lambda\ x_n)\big|_{x_k=a_k,b_k}=0,\quad k=\overline{1,n} \tag{22}$$

В свою очередь задача (21), (22) сводится к одномерным регулярным спектральным задачам. При наших условиях каждая из этих задач:

$$A_k(x_k)\frac{d^2X_k(x_x)}{dx_k^2}+B_k(x_k)+C_k(x_k)X_k(x_k)-\mu_k^2X_k(x_k)=\mu_k h_k(x_k) \tag{23}$$

$X_k(a_k)=X_k(b_k)=0,$ где $\mu_k, k=\overline{1,n}$ – комплексный параметр является регулярной спектральной задачей в смысле первой главы. Обозначая через $G_k(x_k,\xi_k,\mu_k)$ – функцию Грина задачи (23) и c_{v_k} – замкнутый контур в μ_k – плоскости, окружающий единственный ее полюс μ_{v_k}, вводится проектор Рисса: $\mathrm{P}_{v_k}(h(x_k))\equiv h_{v_k}(x_k)=\dfrac{-1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_{v_k}}\mu_k\int_{a_k}^{b_k}G_k(x_k,\xi_k,\mu_k)A_k^{-1}(\xi_k)h(\xi_k)d\xi_k$,

относящийся к корневому подпространству, соответствующему μ_{v_k}. Для произвольной функции $h(x_1\Lambda\ x_n)$, $h_{v_1\Lambda\ v_n}(x_1\Lambda\ x_n)$ означает результат последовательного приложения P_{v_k} к $h(x_1\Lambda\ x_n)$ в натуральном порядке. Доказана

Теорема. *Если функции* φ^0, φ^1 *удовлетворяют условию Дини и* $A_k''(x_k), B_k', C_k(x_k)$ *непрерывны,* $A_k(x) > 0$, *то решение задачи* (21), (22) *единственно и представимо в виде*

$$v(x_1 \Lambda\ x_n \lambda) = \sum_{\nu_1, \Lambda\ \nu_n = 1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi^0_{\nu_1 \Lambda\ \nu_n}(x_1 \Lambda\ x_n) + \varphi^1_{\nu_1 \mathrm{K}\ \nu_n}(x_1 \Lambda\ x_n)}{\mu^2_{\nu_1} + \Lambda\ \mu^2_{\nu_n} - \lambda^2}, \tag{24}$$

где имеется в виду прямоугольный способ суммирования.

Во втором параграфе результат § 1 позволяет найти представление для решения смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ A_k(x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + B_k(x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C_k(x_k) u \right\}, a_k < x_k < b_k, \tag{25}$$

$$u\big|_{x_k = a_k, b_k} = 0, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{26}$$

$$u(x_1 \Lambda\ x_n, 0) = \varphi^0(x_1 \Lambda\ x_n), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi^1(x_1 \Lambda\ x_n), \tag{27}$$

Полагаем, что

а) $A(x_k) > 0$ при любых k и $x_k \in [a_k, b_k]$,

б) $A_k''(x_k), B_k'(x_k), C_k(x_k)$ – непрерывно дифференцируемые функции при $x_k \in [a_k, b_k]$,

в) φ^0, φ^1 – функции, обладающие непрерывными производными, соответственно, второго и первого порядков, равными нулю на границе вместе с самими функциями.

Решение задачи (25) – (27) единственно и имеет представление

$$u(x_1 \Lambda\ x_n, t) =$$

$$= 2^n \sum_{\nu_1 \Lambda\ \nu_n = 1}^{\infty} \left\{ \varphi^0_{\nu_1 \Lambda\ \nu_n}(x_1, \Lambda\ , x_n) ch \lambda_{\nu_1 \cdot \Lambda\ \nu_n} t + \varphi^1_{\nu_1 \Lambda\ \nu_n}(x_1, \Lambda\ , x_n, \lambda) \right\} \frac{sh \lambda_{\nu_1 \Lambda\ \nu_n} t}{\lambda_{\nu_1 \Lambda\ \nu_n}}$$

Показано, что в частных случаях, к примеру, при $n = 2$, эта формула совпадает с широко известной формулой из книги [44, с. 520].

В **§ 3** дано приложение асимптотических методов в построении явных выражений для решения задачи Коши в случае гиперболической системы с переменными коэффициентами:

$$A(x)\frac{\partial u}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + A^1(x)u + \Phi(x,t), \qquad 0 < x < \infty \tag{28}$$

$$u(x,0) = F(x), \tag{29}$$

где $u(x,t), A(x), \Phi(x,t)$ $- n \times n$ – матричные функции, причем:

1) $A'(x), A''(x), \dfrac{dA^1(x)}{dx}$ – суммируемые и покомпонентно ограниченные на $[0,\infty)$ функции; $F(x) \in W_2^1(0,\infty)$, $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} \in (L_2(0,\infty) \times (0,\mathrm{T}))$, $\Phi(0,t) \equiv 0$.

2) Корни $\phi_i(x)$ уравнения $\det(A(x) - \phi \mathrm{E}) = 0$ вещественны, при $\forall x \in [0,\infty)$ и $\phi_1(x) < \mathrm{K} < \phi_\tau(x) < \phi_{\tau+1}(x) < \mathrm{K}\ \phi_n(x)$.

Задаче (28) – (29) ставится в соответствие дифференциальная система с параметром λ:

$$L(Y) \equiv Y' - \lambda A(x)Y + A^1(x)Y = F(x), \quad 0 < x < \infty\ . \tag{30}$$

Обосновывается существование фундаментального матричного решения системы $L(Y) = 0$, вида:

$$Y(x,\lambda) = \{M(x) + \mathrm{E}(x,\lambda)\} \exp \lambda \int_0^x D(\xi)\, d\xi, \tag{31}$$

где $D(x)$ – диагональная форма матрицы, $A(x), \mathrm{E}(x,\lambda) = 0\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$, при $|\lambda| >> 1$, а $M(x)$ – матрица, трансформирующая $A(x)$ в $D(x)$. С помощью выражения (31) получено представление

$$Y(x,F,\lambda)=\int_0^x Y^{\tau}(x,\lambda)Y^{-1}(\xi,\lambda)F(\xi)d\xi-\int_x^{\infty} Y^{n-\tau}(x,\lambda)Y^{-1}(\xi,\lambda)F(\xi)d\xi, \qquad (32)$$

для решения уравнения (30). Здесь Y^{τ} – матрица, у которой первые τ столбцов совпадают с первыми же τ столбцами $Y(x,\lambda)$, а остальные столбцы – нулевые, в $Y^{n-\tau}$ последние $n-\tau$ столбцов взяты из $Y(x,\lambda)$, а первые τ столбцов – нулевые.

Используя формулу (32) доказывается формула интегрального представления типа Лапласа для функции $F(x)$:

$$F(x)=\frac{-1}{\pi\sqrt{-1}}\int_{\operatorname{Re}\lambda=H>0} Y(x,\tilde{F},\lambda)d\lambda, \quad x>0 \qquad (33)$$

где $\tilde{F}(x)=A(x)F(x)$.

На основании формулы (33) приходим к теореме.

Теорема. При условиях 1), 2) решение задачи (28) – (29) однозначно и представимо формулой

$$u(x,t)=\frac{-1}{\pi\sqrt{-1}}\int_{\operatorname{Re}\lambda=H} e^{\lambda t}d\lambda\int_x^{\infty} Y(x,\lambda)Y^{-1}(\xi,\lambda)\left(F(\xi)+\int_0^x e^{-\lambda\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau\right).$$

Публикации по теме диссертации

1. Абуд, А.Х. Спектральная задача с трехкратными корнями основного характеристического уравнения дифференциального пучка третьего порядка /А.Х. Абуд //Успехи современной науки. Т.1, № 2, 2016. С. 145-147.

2. Абуд, А.Х. Метод разделения переменных в решении многомерных смешанных задач с разделяющимися переменными /А.И. Вагабов, А.Х. Абуд //Докл. РАН. Т. 456, № 1, 2014. – 4 с.

3. Абуд, А.Х. Асимптотика по параметру решений ОДУ n-го порядка /А.И. Вагабов, А.Х. Абуд //Тезисы XXII междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование». Абрау-Дюрсо. 2014.

4. Абуд, А.Х. Интегральные представления функций решением обыкновенной линейной дифференциальной системы с параметром на полуоси /А.И. Вагабов, А.Х. Абуд //Изв. вузов Сев.-Кавк. региона. Сер. Естеств. науки, № 1, 2014, Ростов-на-Дону. С. 8-10.

5. Абуд А.Х. Четырехкратная разложимость в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с четырехкратной характеристикой /А.И. Вагабов, А.Х. Абуд //Вестник Дагестанского гос. университета. Сер. Естеств. науки. № 1. 2015. С. 34-39.

6. Абуд А.Х. Спектральная задача регулярного типа с двумя четырехкратными характеристиками /А.И. Вагабов, А.Х. Абуд //Материалы VII междунар. конф. «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». Махачкала, 2015. С. 9 – 12.

7. Абуд, А.Х. Задача с трехкратным корнем характеристического уравнения пучка третьего порядка /А.Х. Абуд, //Материалы межд. конф. « Воронежская зимняя математическая школа ». С.Г. Крейна , 2018. С. 104-105.

8. Абуд, А.Х. О полноте корневых элементов пучков обыкновенных дифференциальных операторов /А.Х. Абуд, //Материалы межд. конф. « Воронежская зимняя математическая школа ». С.Г. Крейна , 2018. С. 105-106.

Работы [1], [2], [4], [5] опубликованы в журналах, рекомендованных в ВАК Минобрнауки РФ.