На правах рукописи

ГОРИН Сергей Владимирович

ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СИНГУЛЯРНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2017

Работа выполнена на кафедре информатики и вычислительного эксперимента института математики механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Южный федеральный университет".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Пилиди Владимир Ставрович

Официальные оппоненты: Кац Борис Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет",
профессор кафедры математического анализа

Стукопин Владимир Алексеевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО "Донской государственный технический университет",
доцент кафедры прикладной математики

Ведущая организация: ФГБОУ ВО "Воронежский государственный университет"

Защита состоится 24 апреля 2017г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Южном федеральном университете по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8-а.

С диссертацией можно ознакомиться в сети Интернет по адресу
http://hub.sfedu.ru/diss/announcement/f39578c9-985d-478d-87b4-6309347aa2cb/

Автореферерат разослан "__"__________________ 2017г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.208.29 Кряквин В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию фредгольмости сингулярных интегральных операторов. Данные вопросы рассматривались в работах Н. И. Мусхелишвили, Ф. Д. Гахова, С. Г. Михлина, И. Б. Симоненко, И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника, А. П. Солдатова, З. Пресдорфа, Б. Зильберманна, Ю. И. Карловича, С. Г. Самко, Н. К. Карапетянца, В. Б. Дыбина, Л. И. Сазонова, Н. Л. Василевского, А. Н. Карапетянца, А. П. Солдатова, Г. С. Литвинчука, С. М. Грудского и многих других авторов. При этом исследование в своем развитии прошло несколько этапов. Сначала рассматривались индивидуальные уравнения. Для них находились достаточные условия нетеровости (или, по другой терминологии, фредгольмовости), определяемой в терминах свойств однородного уравнения и условий разрешимости уравнения неоднородного. При этом правая часть и искомые решения принадлежали некоторому множеству. Это множество обычно оказывалось линейным пространством. Типичная ситуация – теория сингулярных интегральных уравнений в классическом изложении в книгах Н. И. Мусхелишвили[1] и Ф. Д. Гахова[2], где в качестве основного объекта берутся пространство гельдеровских функций или его модификации.

Важным этапом стало применение в рассматриваемой теории методов функционального анализа. При этом фредгольмовость стала определяться в операторных терминах (замкнутость образа и конечномерность ядра и коядра оператора). Рассматривались различные банаховы пространства функций, в частности, пространства суммируемых функций. Как правило, в работах находились критерии (а не только достаточные условия) фредгольмовости.

Следующим этапом стало построение фредгольмовской теории для банаховых алгебр, порожденных операторами типа сингулярных (действующих в банаховых пространствах). При этом основным определением фредгольмовости стала обратимость порождаемого оператором смежного класса в алгебре

[1] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения, М.: Наука, 1968.
[2] *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи, М.: Наука, 1977.

Калкина. Центральным моментом в этой теории явилось построение символического исчисления, которое в общих чертах укладывается в следующую схему.

Пусть X — банахово пространство, $\mathfrak{R}$ — банахова алгебра всех линейных непрерывных в X операторов. Рассматриваемые операторы порождают некоторую подагебру $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$, обычно содержащую множество всех компактных оперататоров в X. Символическое исчисление — это непрерывный гомоморфизм из алгебры $\mathfrak{B}$, в некоторую "естественную"алгебру (непрерывных функций, матриц-функций и т.п.), называемую алгеброй символов. Ядром этого гомоморфизма является множество всех компактных операторов. Основным результатом в таком исследовании является доказательство эквивалентности фредгольмовости оператора и обратимости его символа в "естественной" алгебре, а также выражение индекса оператора через топологические характеристики его символа.

В более общем случае локально выпуклых функциональных пространств ситуация в настоящее время совершенно иная. Исследованию фредгольмовости сингулярных интегральных операторов, действующих в таких пространствах, посвящены работы З. Пресдорфа[3] и Б. Зильберманна[4]. Приведем их результаты, так как предмет исследования в них является наиболее приближенным к теме данной диссертации.

Пусть Γ — конечная система попарно непересекающихся ориентированных замкнутых кривых класса C^∞ в комплексной плоскости. Обозначим через $C^\infty(\Gamma)$ пространство, состоящее из всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на Γ. Топология в этом пространстве задается последовательностью норм

$$\|\varphi\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{t\in\Gamma} |\varphi^{(k)}(t)| \ , n \geqslant 0.$$

[3] *Прёсдорф З.*, Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979.

[4] *Зильберманн Б.* О сингулярных операторах в пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций – В сб. «Матем. исследования», Кишинев, Штиинца, 1971, т.6, №3, с.168-179.

В этом пространстве определен оператор сингулярного интегрирования

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma.$$

Этот оператор является непрерывным в пространстве $C^{\infty}(\Gamma)$ и, кроме того, $S^2 = I$. Введем стандартные проекторы

$$P = \frac{1}{2}(I + S), \quad Q = \frac{1}{2}(I - S).$$

В работах ставится вопрос о фредгольмовости оператора W вида:

$$W = c(t)P + d(t)Q + T,$$

где $c(t)$ и $d(t)$ — бесконечно дифференцируемые на Γ функции, T — компактный в $C^{\infty}(\Gamma)$ оператор. Для оператора W получен следующий критерий фредгольмовости[5].

Теорема. Для того, чтобы оператор W был фредгольмовым оператором в пространстве $C^{\infty}(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы каждая из двух функций $c(t)$ и $d(t)$ имела на Γ не более чем конечное множество нулей конечных порядков.

Данный критерий был обобщен на случай пространства $C_n^{\infty}(\Gamma)$ бесконечно дифференцируемых вектор-функций, определенных на Γ и принимающих значения в n-мерном линейном пространстве. Рассматриваемый оператор имел следующий вид

$$W = C(t)P + D(t)Q + T,$$

где $C(t)$ и $D(t)$ — бесконечно дифференцируемые на Γ матрицы-функции, T — компактный оператор. Критерий фредгольмовости в этом случае имеет вид [6]

[5] *Зильберманн Б.* О сингулярных операторах в пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций – В сб. «Матем. исследования», Кишинев, Штиинца, 1971, т.6, №3, с.168-179.

[6] *Прёсдорф З.*, Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979.

Теорема. Для того, чтобы оператор W был фредгольмовым оператором в пространстве $C_n^\infty(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы каждая из двух функций $\det C(t)$ и $\det D(t)$ имела на Γ не более чем конечное множество нулей конечных порядков.

Сформулированный таким образом критерий не допускает обобщения на случай функций, принимающих значения в произвольном гильбертовом пространстве. Кроме того, в рассматриваемых работах не было построено символическое исчисление. Одной из причин этого является тот факт, что, хотя указанные операторы и образуют алгебру (в "алгебраическом" смысле), регуляризаторы фредгольмовых операторов этого класса, вообще говоря, могут этой алгебре не принадлежать. Настоящая диссертация посвящена вопросам построения символического исчисления для алгебры сингулярных интегральных операторов, а также обобщению результатов на случай пространства функций, принимающих значения в произвольном гильбертовом пространстве.

Цели работы:

- расширение алгебры сингулярных интегральных операторов до более широкой алгебры $\mathfrak{B}$, которая содержит регуляризаторы фредгольмовых сингулярных интегральных операторов;
- построение для операторов алгебры $\mathfrak{B}$ символического исчисления;
- получение критерия фредгольмовости оператора алгебры $\mathfrak{B}$ в терминах обратимости его символа;
- обобщение полученных результатов на случай пространства бесконечно дифференцируемых вектор-функций, принимающих значения в произвольном гильбертовом пространстве.

Основные положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие основные результаты.

1. Построена алгебра операторов $\mathfrak{B}$, действующих в пространстве бесконечно дифференцируемых вектор-функций со значениями в конечномерном пространстве H, которая содержит в себе алгебру $\mathfrak{S}$ сингулярных интегральных операторов с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, а также регуляризаторы фредгольмовых операторов из $\mathfrak{S}$.

2. Для операторов этой алгебры построено символическое исчисление.

3. В случае, когда пространство H есть множество комплексных чисел, установлены характеристические свойства символа, т.е. необходимые и достаточные условия того, чтобы произвольный элемент алгебры символов являлся символом некоторого оператора рассматриваемой алгебры.

4. Доказано, что фредгольмовость оператора из алгебры $\mathfrak{B}$ равносильна обратимости его символа, а также, что регуляризаторы фредгольмовых операторов из $\mathfrak{B}$ принадлежат $\mathfrak{B}$.

5. Получены некоторые обобщения на случай бесконечномерного простанства H.

Методы исследования.

В диссертационной работе используются методы функционального и комплексного анализа, теории функций комплексного переменного, теории пространств Фреше.

Научная новизна и практическая значимость.

Полученные в диссертации результаты являются новыми, носят теоретический характер и могут найти применения к исследованию операторных уравнений в локально выпуклых функциональных пространствах.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова в Абрау-Дюрсо (2006 г.), Международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения"(2013, 2014 гг.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[6]. Работы [3] — [4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, действовавшего на период публикации.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы, содержащего 117 наименований. Теоремы, леммы и следствия имеют свою независимую нумерацию, содержащую номер главы, параграфа и результата. Общий объем диссертации – 139 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приводится краткий обзор исследований фредгольмовости сингулярных интегральных операторов в различных классах пространств, а также сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

Глава 1. Глава содержит доказательство двух критериев, характеризующих свойства линейных непрерывных операторов в произвольном счетно нормированном пространстве.

Пусть далее X и Y — произвольные счетно нормированные пространства, $\{\|\cdot\|_{n,X}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\|\cdot\|_{n,Y}\}_{n=0}^{\infty}$ — системы норм, порождающие топологии в пространствах X и Y соответственно.

Теорема. Пусть K — линейный оператор, действующий из пространства X в пространство Y. Для компактности оператора K необходимо, а в случае совершенного пространства Y и достаточно существование числа $m \geqslant 0$, такого, что для любого $n \geqslant 0$ существует константа $C_n > 0$, что для всех элементов $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|Kx\|_{n,Y} \leqslant C_n \|x\|_{m,X}.$$

Для формулировки второго критерия дадим некоторые определения.

Последовательность элементов $x_k \in X, k = 0, 1, 2, ...$ будем называть абсолютно некомпактной, если она не содержит сходящихся подпоследовательностей.

Для любого $n \geqslant 0$ обозначим через $D_n(X)$ класс всех абсолютно некомпактных последовательностей элементов пространства X, ограниченных относительно n-й нормы.

Оператор A, действующий из пространства X в пространство Y, называется Φ_+ (Φ_-)–оператором, если он обладает замкнутым образом и конечномерным ядром (коядром). Оператор, который является одновременно и Φ_+–оператором и Φ_-–оператором, называется оператором Фредгольма, или Φ–оператором.

Следующий критерий устанавливает связь между Φ_+–операторами и абсолютно некомпактными последовательностями.

Теорема. Пусть A — линейный непрерывный оператор в счетно нормированном пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. A является Φ_+–оператором.

2. Для любого $n \geqslant 0$ найдется число $m \geqslant 0$, такое, что для любой последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ класса $D_m(X)$ последовательность $\{Ax_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу $D_n(X)$.

3. Существует число $m \geqslant 0$, такое, что для любой последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ класса $D_m(X)$ последовательность $\{Ax_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу $D_0(X)$.

Пусть $C_H^{\infty}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций, определенных на единичной окружности Γ комплексной плоскости, принимающих значения в произвольном комплексном гильбертовом пространстве H (не обязательно сепарабельном) и являющихся бесконечно дифференцируемыми в смысле сильной сходимости в пространстве H.

Обозначим через $\mathfrak{L}(H)$ $(\mathfrak{K}(H))$ множество всех линейных непрерывных (компактных) операторов в H. Аналогично через $\mathfrak{L}(C_H^{\infty}(\Gamma))$ и $\mathfrak{K}(C_H^{\infty}(\Gamma))$ обозначим множества линейных непрерывных и компактных операторов в $C_H^{\infty}(\Gamma)$ соответственно.

Помимо приведенных критериев, первая глава содержит доказательства вспомогательных утверждений, которые используются в дальнейшем.

Теорема. Пусть $\mathfrak{K}(t,\tau)$ — оператор-функция двух переменных $t, \tau \in \Gamma$, принимающая значения во множестве $\mathfrak{K}(H)$ и бесконечно дифференцируемая в смысле равномерной операторной топологии пространства $\mathfrak{L}(H)$. Тогда оператор

$$(K\varphi)(t) = \int\limits_{\Gamma} \mathfrak{K}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

действующий в пространстве $C_H^{\infty}(\Gamma)$, компактен.

Лемма. Пусть $t_0 \in \Gamma, x(t) \in C_H^\infty(\Gamma), x(t_0) \neq 0$. Тогда для любого $m \geqslant 0$ последовательность

$$h_{m,k}(t) = \frac{1}{k^m} \left(\frac{t + t_0}{2t_0} \right)^m x(t)$$

принадлежит классу $D_m(C_H^\infty(\Gamma))$.

Лемма. Пусть функция $x(t) \in C_H^\infty(\Gamma)$ имеет в точке $t_0 \in \Gamma$ нуль бесконечного порядка. Тогда последовательность

$$\left(\frac{t + t_0}{2t_0} \right)^m x(t), m = 0, 1, 2, ...$$

сходится к нулю в топологии пространства $C_H^\infty(\Gamma)$.

Глава 2. Во второй главе рассматривается пространство $C_H^\infty(\Gamma)$ в предположении, что H является конечномерным пространством. При этом особый интерес представляет случай, когда $H = \mathbb{C}$. Ему посвящен первый параграф главы.

Для любой точки $t_0 \in \Gamma$ определим оператор

$$(R_{t_0}\varphi)(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, порожденная всеми операторами $R_{t_0} (t_0 \in \Gamma)$, операторами умножения на функции из $C^\infty(\Gamma)$ и компактными операторами. Для операторов этой алгебры определяется символ. В качестве множества, в котором принимает значения символ оператора из $\mathfrak{A}$, рассматривается множество $\mathfrak{F}$ формальных рядов Лорана переменной z, каждый из которых содержит конечное число отрицательных степеней z:

$$\mathfrak{F} = \Big\{ \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k z^k \mid a_k \in \mathbb{C} \Big\}.$$

На множестве $\mathfrak{F}$ вводятся стандартные операции сложения и умножения степенных рядов, относительно которых $\mathfrak{F}$ является полем. Символ образующих алгебру $\mathfrak{A}$ операторов определяется как отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t \in \Gamma$ элемент множества $\mathfrak{F}$ по следующим формулам:

$$\sigma_{t_0}(c(t)I) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c^{(k)}(t_0)}{k!} z^k, \quad t_0 \in \Gamma$$

$$\sigma_t(R_{t_0}) = \begin{cases} z^{-1}, & \text{если} \quad t = t_0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(t-t_0)^{k+1}} z^k, & \text{если} \quad t \neq t_0 \end{cases}$$

$$\sigma_t(K) = 0, \quad K \in \mathfrak{K}(C_H^\infty(\Gamma)), \quad t \in \Gamma.$$

Это отображение однозначно расширяется на всю алгебру $\mathfrak{A}$.

Устанавливаются следующие свойства символа оператора.

Теорема. Пусть $A \in \mathfrak{A}, \sigma_t(A) = \sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_k(t) z^k$. Тогда коэффициенты $a_k(t)$ обладают следующими свойствами:

1. для любого отрицательного индекса k функция $a_k(t)$ может быть отлична от нуля лишь в конечном числе точек;

2. если точка $t_0 \in \Gamma$ такова, что $a_{-m}(t_0) = ... = a_{-1}(t_0) = 0$, то существует некоторая окрестность U этой точки, в которой функции $a_k(t)$ являются бесконечно дифференцируемыми, причем для всех $t \in U$ справедливы равенства
$$a_k(t) = \frac{1}{k!} a_0^{(k)}(t);$$

3. если точка $t_0 \in \Gamma$ такова, что $a_{-m}(t_0) = ... = a_{-n-1}(t_0) = 0$ и $a_{-n}(t_0) \neq 0$ $(n > 0)$, то для любого $k \geqslant 0$ справедливо равенство
$$a_{k-n}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \sum_{l=0}^{\min\{k,n\}} C_n^l (t - t_0)^{n-l} a_{k-l}(t).$$

Эти свойства символа являются характеристическими, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_k(t)z^k, t \in \Gamma$ — произвольный формальный степенной ряд, коэффициенты $a_k(t)$ которого удовлетворяют свойствам 1–3 предыдущей теоремы. Тогда существует оператор $A \in \mathfrak{A}$, символ которого совпадает с данным рядом в каждой точке Γ.

Особый интерес представляют обратимые символы. Для них доказываются следующие утверждения.

Лемма. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ и его символ $\sigma_t(A) = \sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_k(t)z^k$ обратим в каждой точке $t \in \Gamma$. Тогда существует не более чем конечное множество точек, в которых коэффициент $a_0(t)$ обращается в нуль.

Теорема. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ и его символ $\sigma_t(A)$ обратим в каждой точке $t \in \Gamma$. Тогда существует оператор $B \in \mathfrak{A}$, символ $\sigma_t(B)$ которого удовлетворяет равенству $\sigma_t(B) = (\sigma_t(A))^{-1}$ для всех точек $t \in \Gamma$.

Подчеркнем, что последняя теорема дает достаточное условие фредгольмовости оператора из алгебры $\mathfrak{A}$, в ней устанавливается, что если оператор обладает обратимым символом, то у него существует регуляризатор, принадлежащий алгебре $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — алгебра, порожденная операторами алгебры $\mathfrak{A}$ и оператором сингулярного интегрирования S. Определенная таким образом алгебра $\mathfrak{B}$ содержит в себе все сингулярные интегральные операторы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Любой оператор $W \in \mathfrak{B}$ представим в виде

$$W = CP + DQ, \tag{1}$$

где $C, D \in \mathfrak{A}$. При этом операторы C и D определяются однозначно с точностью до компактного слагаемого.

С помощью символа, определенного для операторов алгебры $\mathfrak{A}$, вводится понятие символа оператора алгебры $\mathfrak{B}$. Для этого рассматривается множество $\mathfrak{F}^2$ упорядоченных пар элементов множества $\mathfrak{F}$ с покомпонентными операциями сложения и умножения. Так как $\mathfrak{F}$ является полем, то $\mathfrak{F}^2$ представляет собой коммутативное кольцо с единицей. Символ оператора (1) в каждой точке $t \in \Gamma$ определяется как упорядоченная пара

$$\sigma_t(W) = \begin{pmatrix} \sigma_t(C) \\ \sigma_t(D) \end{pmatrix}.$$

Основным результатом первого параграфа является

Теорема. Для того, чтобы оператор $W \in \mathfrak{B}$ являлся Φ–оператором в пространстве $C^\infty(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы его символ был обратим в любой точке $t \in \Gamma$. При этом если оператор $W \in \mathfrak{B}$ является Φ–оператором, то его регуляризатор также принадлежит алгебре $\mathfrak{B}$.

Во втором параграфе второй главы рассматривается случай вектор-функций, принимающих значения в конечномерном гильбертовом пространстве H. Пусть, как и ранее, для любой точки $t_0 \in \Gamma$

$$(R_{t_0}\varphi)(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_H$ алгебру, порожденную операторами умножения на бесконечно дифференцируемые оператор-функции, всеми операторами вида R_{t_0} и компактными операторами, через $\mathfrak{B}_H$ — алгебру, порожденную операторами из $\mathfrak{A}_H$ и оператором сингулярного интегрирования. По аналогии с одномерным случаем определяется множество $\mathfrak{F}_H$ рядов Лорана от переменной z с коэффициентами, принадлежащими пространству H, каждый из которых содержит конечное число отрицательных степеней z:

$$\mathfrak{F}_H = \Big\{ \sum_{k=-m}^{+\infty} x_k z^k \mid x_k \in H \Big\}.$$

Это множество относительно стандартных операций сложения степенных рядов и умножения степенного ряда из $\mathfrak{F}_H$ на ряд из $\mathfrak{F}$ является линейным пространством над полем $\mathfrak{F}$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}(H)}$ формальных рядов Лорана от переменной z с конечным числом отрицательных степеней z, коэффициенты которых представляют собой линейные операторы в пространстве H. Символ оператора из алгебры $\mathfrak{A}_H$ определяется как отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t \in \Gamma$ элемент из $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}(H)}$ (для образующих алгебру $\mathfrak{A}_H$ операторов определение символа аналогично "скалярному"случаю). Заметим, что элементы множества $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}(H)}$ представляют собой линейные операторы в пространстве $\mathfrak{F}_H$. Далее под обратимостью символа понимается обратимость соответствующего оператора в $\mathfrak{F}_H$.

По аналогии с первым параграфом символ оператора алгебры $\mathfrak{B}_H$ определяется как отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t \in \Gamma$ элемент множества $\mathfrak{F}^2_{\mathfrak{L}(H)}$ упорядоченных пар элементов множества $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}(H)}$ с покомпонентными операциями сложения и умножения.

Существенным отличием одномерного случая от многомерного является то, что в одномерном случае множество значений символа представляет собой поле, а значит, в нем каждый ненулевой элемент обратим. При этом несложно привести формулы, выражающие коэффициенты обратного ряда через коэффициенты исходного. В многомерном случае это не так. Например, ряд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^0$$

необратим. С другой стороны, ряд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z$$

обратим, несмотря на то, что ни один из его коэффициентов не является обратимым. Только в частном случае ряда, в котором коэффициент при самой младшей степени z обратим, можно утверждать обратимость всего ряда и построить явным образом обратный ему (по сути, это построение будет полным аналогом построения обратного в "скалярном" случае). Данное отличие многомерного случая от случая одномерного не позволяет сформулировать характеристические свойства символа в виде, приведенном выше.

Устанавливается, что произвольный оператор из алгебры $\mathfrak{A}_H$ представим в виде

$$A = R_{t_1}^{n_1}...R_{t_k}^{n_k} C(t) I + K,$$

где $C(t)$ — бесконечно дифференцируемая на Γ оператор-функция, $t_i \in \Gamma$, $K \in \mathfrak{K}(C_H^\infty(\Gamma))$. При этом операторы $R_{t_i}^{n_i}$ являются фредгольмовыми, поэтому вопрос фредгольмовости произвольного оператора из $\mathfrak{A}_H$ сводится к фредгольмовости оператора умножения на оператор-функцию $C(t)I$ (далее по тексту — просто "оператор умножения"). Для этого оператора справедливо следующее утверждение

Если существует точка $t_0 \in \Gamma$ и функция $x(t) \in C_H^\infty(\Gamma))$, такая, что $x(t_0) \neq 0$, а функция $C(t)x(t)$ имеет в точке t_0 нуль бесконечного порядка, то оператор $C(t)I$ не является фредгольмовым.

На данном утверждении основывается доказательство необходимости обратимости символа для фредгольмовости оператора умножения: *если символ оператора $C(t)I$ необратим в некоторой точке, то существует функция $x(t)$, которая не обращается в нуль в данной точке, и при этом функция $C(t)x(t)$ имеет в этой точке нуль бесконечного порядка.*

Для получения критерия фредгольмовости оператора умножения рассматриваются точки, в которых оператор-функция необратима. Предположим, что в пространстве H зафиксирован некоторый ортонормированный базис $\{e_j\}$. Пусть Q_k — оператор ортогонального проектирования на одномерное подпространство, порожденное элементом e_k, и $P_k = I - Q_k$. Рассмотрим оператор-функцию

$$D_{k,t_0}(t) = (t - t_0)Q_k + P_k.$$

Доказывается следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $t_0 \in \Gamma$ и оператор $C(t_0)$ необратим. Тогда оператор-функцию $C(t)$ можно представить в виде

$$C(t) = C_0(t)D_{k,t_0}(t)T^{-1},$$

где $C_0(t)$ – бесконечно дифференцируемая оператор-функция, T – обратимый в H линейный оператор, $1 \leq k \leq \dim H$.

Доказывается, что если оператор умножения $C(t)I$ не является фредгольмовым, то существует точка $t_0 \in \Gamma$, в которой для любого $m > 0$ можно построить разложение

$$C(t) = C_m(t) D_{k,t_0}(t) T_1^{-1} ... D_{k,t_0}(t) T_m^{-1},$$

где $1 \leq k \leq \dim H$, T_i — обратимые в H операторы и оператор $C_m(t_0)$ необратим.

Последнее разложение позволяет построить элемент $x_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}_H$, такой, что

$$\sigma_{t_0}(C(t)I) x_{\mathfrak{F}} = 0.$$

Таким образом, если оператор умножения не является фредгольмовым, то найдется точка, в которой его символ будет необратим. В завершение главы 2 этот результат обобщается на случай произвольного оператора из $\mathfrak{B}_H$.

Теорема. Оператор W, принадлежащий алгебре $\mathfrak{B}_H$, является фредгольмовым в пространстве $C_H^\infty(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда его символ обратим в любой точке $t \in \Gamma$. При этом регуляризатор фредгольмова оператора $W \in \mathfrak{B}_H$ также принадлежит алгебре $\mathfrak{B}_H$.

Глава 3. В последней главе рассматривается пространство вектор-функций, принимающих значения в произвольном бесконечномерном гильбертовом пространстве H. Принципиально важным свойством алгебр $\mathfrak{A}_H$ и $\mathfrak{B}_H$, рассматриваемых в главе 2, является то, что коммутаторы всех образующих эти алгебры операторов суть компактные операторы. Следующий простой пример показывает, что если H бесконечномерно, то это условие не выполнено.

Пусть $t_0 \in \Gamma$. Рассмотрим оператор $(\delta_{t_0}\varphi)(t) = \varphi(t_0)$. Очевидно, этот оператор не является компактным. Но

$$R_{t_0}(t - t_0)I = I, (t - t_0)R_{t_0} = I - \delta_{t_0}.$$

Таким образом, коммутатор операторов R_{t_0} и $(t - t_0)I$ не является компактным.

Первый параграф главы 3 посвящен построению алгебры операторов, для которых далее доказывается критерий фредгольмовости. Обозначим через $\mathfrak{K}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$ множество операторов умножения на бесконечно дифференцируемые (в смысле равномерной операторной топологии пространства линейных операторов в H) оператор-функции, принимающие значения во множестве компактных в H операторов. Обозначим через $\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma)$ множество операторов:

$$\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma)) = \Big\{ A \in \mathfrak{L}(C_H^\infty(\Gamma)) | \forall K(t)I \in \mathfrak{K}^\infty(C_H^\infty(\Gamma)) AK(t)I \in \mathfrak{K}(C_H^\infty(\Gamma)) \Big\}.$$

Непосредственно из определения множества $\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma))$ следует, что оно содержит множество компактных операторов и является левым идеалом в $\mathfrak{L}(C_H^\infty(\Gamma)$. Определим следующие алгебры операторов:

$\mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}}$ — алгебра, порожденная операторами умножения на бесконечно дифференцируемые оператор-функции, операторами R_{t_0} и операторами из множества $\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma))$,

$\mathfrak{B}_H^{\mathfrak{P}}$ — алгебра, порожденная операторами из $\mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}}$ и оператором сингулярного интегрирования.

Устанавливаются следующие свойства:

1. Коммутаторы образующих алгебры $\mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}}$ и $\mathfrak{B}_H^{\mathfrak{P}}$ операторов принадлежат множеству $\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma))$.

2. Множество $\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma))$ является двусторонним идеалом в алгебрах $\mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}}$ и $\mathfrak{B}_H^{\mathfrak{P}}$.

3. Множество $\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma))$ не содержит ненулевых операторов умножения на бесконечно дифференцируемые оператор-функции, операторов R_{t_0} и оператора сингулярного интегрирования.

В главе 3 определяется символ для операторов алгебр $\mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}}$ и $\mathfrak{B}_H^{\mathfrak{P}}$. Определения множеств $\mathfrak{F}_H$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}(H)}$ и $\mathfrak{F}^2_{\mathfrak{L}(H)}$ аналогичны главе 2. Символы образующих алгебру $\mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}}$ определяются следующим образом:

$$\sigma_{t_0}(C(t)I) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C^{(k)}(t_0)}{k!} z^k, t_0 \in \Gamma$$

$$\sigma_t(R_{t_0}) = \begin{cases} z^{-1}I, & \text{если} \quad t = t_0 \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(t-t_0)^{k+1}} z^k \right) I, & \text{если} \quad t \neq t_0 \end{cases}$$

$$\sigma_t(P) = 0, \quad P \in \mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma)), \quad t \in \Gamma$$

Символ оператора $W = CP + DQ \in \mathfrak{B}_H^{\mathfrak{P}}(C, D \in \mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}})$ определяется как упорядоченная пара

$$\sigma_t(W) = \begin{pmatrix} \sigma_t(C) \\ \sigma_t(D) \end{pmatrix}.$$

Как отмечалось выше, коммутаторы операторов, входящих в построенные алгебры $\mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}}$ и $\mathfrak{B}_H^{\mathfrak{P}}$, вообще говоря, не являются компактными. В первом параграфе главы 3 строятся подалгебры этих алгебр, которые исследуются далее.

Пусть $u \in H, ||u|| = 1$. Рассмотрим в H следующие операторы ортогонального проектирования

$$P_u x = x - (x, u)u, \quad Q_u x = (x, u)u.$$

Для любого $t_0 \in \Gamma$ определим операторы

$$R_{t_0,u} = P_u + Q_u R_{t_0},$$

$$D_{t_0,u} = P_u + Q_u (t - t_0) I.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$ множество операторов умножения на оператор-функции, представимые в виде суммы единичного оператора и оператор-функции из $\mathfrak{K}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$.

Пусть $\mathfrak{A}_H$ — подалгебра $\mathfrak{A}_H^{\mathfrak{P}}$, порожденная операторами из множества $\mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$, операторами $R_{t_0,u}(u \in H, ||u|| = 1, t_0 \in \Gamma)$, и пусть $\mathfrak{B}_H$ — подалгебра $\mathfrak{B}_H^{\mathfrak{P}}$, порожденная операторами из $\mathfrak{A}_H$ и оператором сингулярного интегрирования.

Операторы $R_{t_0,u}$ коммутируют с оператором сингулярного интегрирования, коммутатор оператора сингулярного интегрирования и оператора из $\mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$ компактен, относительно оператора из $\mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$ и оператора $R_{t_0,u}$ доказывается следующее утверждение.

Лемма. Пусть $u \in H, ||u|| = 1, t_0 \in \Gamma$ и $A(t)I \in \mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$. Тогда существуют оператор $B(t)I \in \mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$, обратимый в H оператор T, являющийся суммой единичного и компактного операторов, и компактный в $C_H^\infty(\Gamma)$ оператор K, такие, что

$$R_{t_0,u}A(t)T = B(t)R_{t_0,u} + K.$$

Это утверждение позволяет получить общий вид оператора из алгебры $\mathfrak{A}_H$:

Следствие. Любой оператор $A \in \mathfrak{A}_H$ можно представить в виде:

$$A = A(t)R_{t_n,u_n}T_n^{-1}R_{t_{n-1},u_{n-1}}T_{n-1}^{-1}...R_{t_1,u_1}T_1^{-1} + L,$$

где $A(t)I \in \mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$, L — компактный в $C_H^\infty(\Gamma)$ оператор, T_i — обратимые в H операторы, являющиеся суммой единичного и компактного операторов.

Кроме того, доказывается, что пересечение множеств $\mathfrak{A}_H$ и $\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma))$, а также множеств $\mathfrak{B}_H$ и $\mathfrak{P}(C_H^\infty(\Gamma))$, совпадает со множеством компактных операторов.

Во втором параграфе главы доказывается достаточное условие нетривиальности ядра символа оператора из $\mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$ в некоторой точке Γ.

Теорема. Пусть оператор $A(t)I \in \mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$, $t_0 \in \Gamma$ и существует последовательность $u_0, u_1, ..., u_m, ...$ элементов пространства H, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Для любого $m \geqslant 0$ $||u||_m = 1$ и $(u_{m+1}, u_m) \neq 0$.
2. Для любого $m \geqslant 0$ имеет место разложение

$$A(t) = A_m(t)D_{t_0,u_m}...D_{t_0,u_0},$$

где $A_m(t)I \in \mathfrak{M}^\infty(C_H^\infty(\Gamma))$.

Тогда существует ряд $x_{\mathfrak{F}} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k z^k \in \mathfrak{F}$, в котором $x_0 \neq 0$, такой, что

$$\sigma_{t_0}(A(t)I)x_{\mathfrak{F}} = 0.$$

Заключительный параграф третьей главы посвящен доказательству критерия фредгольмовости, который является основным результатом главы.

Теорема. Оператор W, принадлежащий алгебре $\mathfrak{B}_H$, является фредгольмовым в пространстве $C_H^\infty(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда его символ обратим в любой точке Γ. При этом регуляризатор фредгольмова оператора из $\mathfrak{B}_H$ также принадлежит алгебре $\mathfrak{B}_H$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Пилиди Владимиру Ставровичу за постановку задач, ценные советы, терпение, внимательное отнощение и постоянный интерес к работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Горин С.В. Фредгольмовость операторов типа сингулярных в пространствах гладких функций. // Деп. в ВИНИТИ, №206-В2005, 2005 г.

2. Горин С.В. Фредгольмовость операторов типа сингулярных с матричными коэффициентами в пространствах вектор-функций. // Деп. в ВИНИТИ, №1607-В2005, 2005 г.

3. Горин С.В. Об одной алгебре сингулярных операторов в пространстве гладких функций. // Известия высших учебных заведений. Сев-Кав регион. Сер. Естественные науки, 2006; N1; стр. 11-15.

4. Горин С.В. О фредгольмовости операторов одной алгебры в пространствах бесконечно дифференцируемых вектор-функций // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. - 2009. - N 4; стр 5-9.

5. Горин С.В. О фредгольмовости операторов типа сингулярных в пространствах гладких вектор-функций. // Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, изд-во ООО ЦВВР, Ростов-на-Дону, 2006 г; стр 116-117.

6. Горин С.В. Фредгольмовость операторов типа сингулярных в пространствах бесконечно дифференцируемых функций. //Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения III, тезисы докладов, Изд-во СКНЦ ВШ, ФГАОУ ВПО Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2013 г; стр. 16.