Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи

КОРОЛЕВА Ольга Артуровна

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА СТОРОНАХ КВАДРАТА, ВПИСАННОГО В ЕДИНИЧНЫЙ КВАДРАТ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Хромов А. П.

Саратов 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Исторические сведения. Многие исследования в области механики, физики и техники приводят к самосопряженным и несамосопряженным спектральным задачам. Значительную часть этой теории составляют задачи о разложении произвольных функций в ряд по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных операторов. Как в приложениях, так и в теоретических исследованиях имеет большое значение построение и свойства этих разложений. Исследования в этой области предполагают, в частности, изучение вопросов обращения указанных операторов, асимптотического представления резольвенты при больших значениях спектрального параметра, расположения спектра, суммируемости разложений по с.п.ф., равносходимости разложений по с.п.ф. и по известным системам функций, базисности, полноты системы из с.п.ф. и т.п.

Настоящая работа посвящена исследованию равносходимости разложений по с.п.ф. интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат и разложений в обычный тригонометрический ряд Фурье; вопросу суммируемости обобщенных средних Рисса этого класса операторов, а также получению аналога теоремы Жордана–Дирихле из теории тригонометрических рядов для разложений по с.п.ф. данного оператора .

Теоремы равносходимости впервые были получены в работах В.А. Стеклова [1], E.W. Hobson [2], A.T. Haar [3] для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля. Затем Я.Д. Тамаркин [4], M.H. Stone [5] распространили этот результат на дифференциальный оператор n-ого порядка:

$$l[y] = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}, \quad p_k(x) \in C[0,1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} [a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

которые удовлетворяют условиям регулярности Биркгофа ([6], с. 66-67).

Оператор (1), (2) для произвольного n в 1908 исследовал G. Birkhoff [7], [8].

G.D. Birkhoff и Я.Д. Тамаркин использовали метод контурного интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра (метод Коши–Пуанкаре). В.А. Ильин ([9]– [12]) разработал метод, при котором оператор не привязывается к граничным условиям, а лишь используется информация о поведении собственных значений и собственных функций.

М. Н. Стоун [5] показал, что при выполнении условий регулярности имеет место равносуммируемость на любом отрезке $[a, b] \subseteq (0, 1)$ средних Рисса порядка ζ $(\zeta > 0)$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^{\zeta} R_\lambda f \, d\lambda, \tag{3}$$

где R_λ – резольвента оператора (1),(2), на окружности $|\lambda| = r$ нет через собственных значений данного оператора, и аналогичных средних для обычного тригонометрического ряда Фурье произвольной функции $f \in L\,[0, 1]$. Вопрос о равномерной сходимости на всем отрезке $[0, 1]$ средних Рисса для спектральных разложений оператора (1), (2) был решен в [13], [14].

В [15] А.П. Хромовым доказана равносходимость на каждом $[a, b] \subseteq (0, 1)$ средних Рисса для спектральных разложений оператора (1),(2) и разложений в тригонометрический ряд Фурье произвольной функции из $L\,[0, 1]$ при достаточно больших ζ и в том случае, когда условия регулярности не выполняются.

А.П. Хромов и А.П. Гуревич [16]– [17]) рассматривали обобщенные средние Рисса следующего вида:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g\,(\lambda, r)\, R_\lambda f \, d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda f$ – резольвента оператора; r такие, что собственные значения оператора не лежат на окружности $|\lambda| = r$; $g(\lambda, r)$ удовлетворяет требованиям:

1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;
2) существует такая константа $C > 0$, что $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$;
3) существуют $\zeta_1 > 0$, $\zeta_2 > 0$, такие, что

$$g\left(re^{i\varphi}, r\right) = O\left(\left|\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right|^{\zeta_1} \left|\varphi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right|^{\zeta_2}\right);$$

где $\alpha = \arg\sqrt{\delta}$ (оценки равномерны по переменной r)

4) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

В качестве примера функций $g(\lambda, r)$ можно рассмотреть функции:

$$g(\lambda, r) = g_1(\lambda, r) g_2(\lambda, r),$$
$$g_1(\lambda, r) = \left(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\alpha - \pi/2)}\right)^{\beta_1} \left(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\alpha + \pi/2)}\right)^{\beta_2},$$
$$g_2(\lambda, r) = \left(1 - \frac{f(\lambda)}{M_r(f_k)}\right)^{\gamma_3},$$

$\beta_1,\ \beta_2 > 0,\ \gamma_3 \geq 0,\ M_r(f) = \max\limits_{|\lambda| = r} |f(\lambda)|$.

Средние (4) являются обобщением средних Рисса вида (3).

В.А. Молоденков, А.П. Хромов в 1972 году в работе [18] рассмотрели следующий оператор

$$L_0 y(x) = iy'(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] \tag{5}$$

с краевым условием

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} y(x)\, d\sigma(x) = 0, \tag{6}$$

где $\sigma(x) \in V[-\pi,\pi]$ (функция ограниченной вариации на $[-\pi,\pi]$), имеет скачки в точках $-\pi$ и π и для ряда Фурье по с.п.ф. оператора (5), (6) получили аналог теоремы Жордана–Дирихле [19]:

В 2005 году А.П. Хромов [20] для разложений по с.п.ф. оператора

$$Ly = \beta y'(x) + y'(1-x), \ \ x \in [0,1], \ \ \beta^2 \neq 1, \tag{7}$$

где $y'(1-x) = y'(\xi)|_{\xi=1-x}$
с интегральным граничным условием

$$U(y) = \int\limits_0^1 \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha} y(t)\,dt = 0, \ \ 0 < \alpha < 1 \tag{8}$$

получил аналог теоремы Жордана–Дирихле. Оператор (7) замечателен тем, что

$$L^2 y = (\beta^2 - 1) y''(x)$$

и он является главной частью обратного оператора

$$y = Af = \int\limits_0^1 A(x,t) f(t)\,dt.$$

Для интегральных операторов теоремами равносходимости впервые начал заниматься А.П. Хромов [21]. Он рассмотрел случай, когда некоторые производные ядра имеют разрыв 1-го рода на линии $t = x$.

В [22, 23] изучается равносходимость разложений произвольной функции в тригонометрический ряд Фурье и по с.п.ф. интегрального оператора

$$Af = \int\limits_0^1 A(x,t) f(t)\,dt,$$

действующего из $L[0,1]$ в $C[0,1]$, когда само ядро или некоторые его производные имеют разрывы 1-го рода на диагонали $t = x$ и кодиагонали $t = 1-x$. Данный класс замечателен тем, что в этом случае достаточно просто исследуется поведение резольветы Фредгольма при больших значениях спектрального параметра, что важно при спектральном анализе таких операторов. Там же решается задача обращения оператора, которая рассматривалась в [22] впервые.

Исследование вопроса равносходимости для интегрального оператора, когда само ядро терпит разрывы на диагоналях в любых из квадратов

$$\prod_{ij} = \left\{ x,t | \, \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}, \;\frac{j-1}{n} \leq t \leq \frac{j}{n} \right\} \;\; i,j = 1,\ldots,n$$

(при этом допускаются разрывы и на некоторых границах этих квадратов), проводилось в [24]. В этой работе возникают значительные трудности, вызванные рассмотрением векторного случая.

В данной работе рассматривается интегральный оператор, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат:

$$y = Af = \int_0^1 A\,(x,t)\;f(t)\,dt. \tag{9}$$

Обозначим:
$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \leq t \leq 1/2 - x,\, 0 \leq x \leq 1/2\}$,
$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \leq t \leq 1,\, 0 \leq x \leq 1/2\}$,
$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \leq t \leq -1/2 + x,\, 1/2 \leq x \leq 1\}$,
$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \leq t \leq 1,\, 1/2 \leq x \leq 1\}$,
$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \leq t \leq 1/2 + x,\, 0 \leq x \leq 1/2\}$ и
$\{-1/2 + x \leq t \leq 3/2 - x,\, 1/2 \leq x \leq 1\}$.

Будем предполагать, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t), \quad (i = 1,...,5)$ непрерывны в своих областях, $(k + l \leq 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1)$. $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t), \quad (i = 1,...,5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем
$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a$,
$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b$,
$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c$,
$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d$,

где a, b, c, d – постоянные.

То есть ядро $A(x,t)$ имеет скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат, который можно представить на рисунке 1

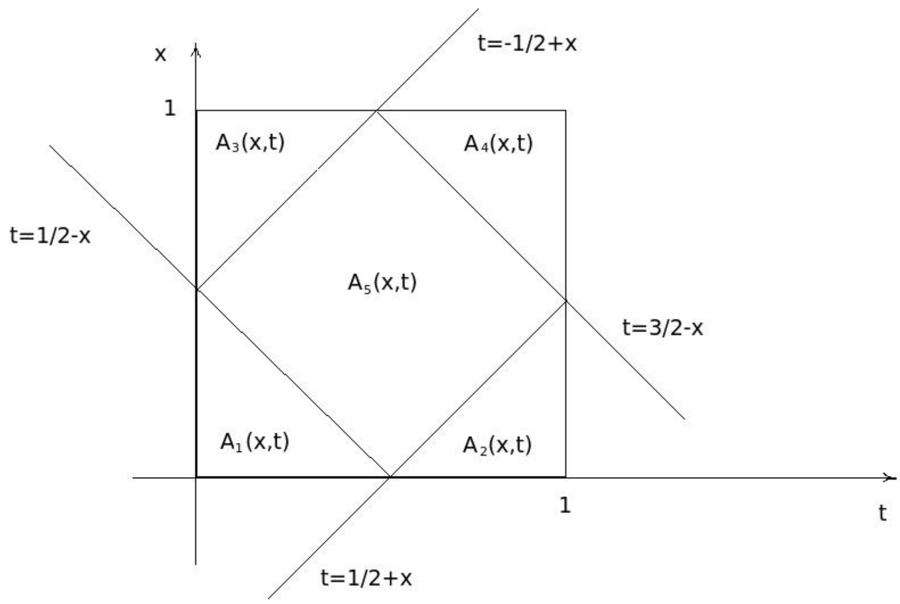

Рисунок 1

Частный случай оператора (9) рассматривался впервые в [24].

Отметим также работы Ломова И.С. [25]– [29]), близкие к теме диссертации, связанные с теоремами равносходимости, равномерной сходимости разложений и с исследованием спектральных свойств дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями.

Цель работы. Целью данной диссертационной работы является изучение оператора (9). Для него доказана равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по с.п.ф., доказана сходимость обобщенных средних Рисса и аналог теоремы Жордана–Дирихле.

Методы исследования. Основной метод, который применяется в работе, – это метод Коши–Пуанкаре интегрирования резольвенты изучаемого оператора по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра. При этом происходит переход в пространство вектор функций размерности 4.

Апробация работы. Результаты исследований обсуждались на кафедре дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета СГУ, докладывались на объединенном научном семинаре математических кафедр данного университета (под руководством профессора А.П. Хромова); на 16, 17, 18, 19 Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2012, 2014, 2018); на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения-XXVI" (Воронеж, 2015); на конференциях механико-математического факультета СГУ "Актуальные проблемы математики и механики" (Саратов, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018).

Публикации. Результаты исследований опубликованы в 11 научных работах. Среди которых 3 статьи в научном журнале [32–34], включенном в список ВАК; 2 статьи в сборниках [30, 35] и 6 статей в материалах международных конференций [31, 36, 37]. 7 работ опубликованы без соавторов. В совместной работе с научным руководителем Хромовым А. П. [32] постановка задачи и результат, представленный в теореме 1, принадлежит Хромову А. П., что составляет примерно 30 процентов от всей статьи. В совместной работе с научным руководителем [35] постановка задачи принадлежит Хромову А. П.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, приложения и списка литературы. В каждой главе своя нумерация определений, лемм, теорем и формул. Общий объем диссертации – 122 страницы. Из них 6 страниц занимает список литературы, который состоит из 42 наименований.

Содержание работы. Первая глава диссертационной работы посвящена преобразованию интегрального оператора в пространстве вектор–функций и изучению резольвенты Фредгольма данного оператора. В §1.1 в пространстве вектор–функций рассматривается оператор:

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t)g(t)\,dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{10}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x,\frac{1}{2}-t) & A(x,\frac{1}{2}+t) & 0 \\ A(\frac{1}{2}-x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}-x,1-t) \\ A(\frac{1}{2}+x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}+x,1-t) \\ 0 & A(1-x,\frac{1}{2}-t) & A(1-x,\frac{1}{2}+t) & 0 \end{pmatrix},$$

и в теореме 1.1 доказывается, что (9) эквивалентно (10).

Представление типа (10) не однозначно. Это представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x,t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$. Далее, в лемме 1.1 находятся необходимые и достаточные условия существования обратного оператора B^{-1}, а в теореме 1.2 получено представление для B^{-1}:

Теорема 1.2 *Для оператора B^{-1} справедливо представление*

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)z(t)\,dt, \tag{11}$$

$$Sz(0) + Tz(\frac{1}{2}) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t)\,dt = 0. \tag{12}$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1,3}$, $a_3'(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы a(x,t) имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x,t)$, S, T –некоторые постоянные матрицы 4×4.

В §1.2 в теореме 1.3 находится интегро-дифференциальная система для резольвенты Фредгольма оператора A:

Теорема 1.3 *Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$, где*

$$v(x) = z_1(x), \text{ при } x \in [0, \frac{1}{2}], \text{ и } v(x) = z_3\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{ при } x \in [\frac{1}{2}, 1], \tag{13}$$

z_1, z_3 - *первая и третья компоненты вектора* $z(x)$, *удовлетворяющего системе* (11), (12).

Также доказывается утверждение:

Теорема 1.4 *Если* λ *таково, что однородная краевая задача для* (11), (12) *имеет только нулевое решение, то* R_λ *существует и определяется по формуле* (13).

В лемме 1.3 приводятся условия для диагонализации матрицы P^{-1} и вводится матрица Γ – матрица, которая диагонализирует матрицу P^{-1}. С помощью замены $z = \Gamma \tilde{z}$ система (11), (12) приводится к виду:

$$z'(x) + P_1(x)z(0) + P_2(x)z(\frac{1}{2}) + P_3(x)z(x) + Nz(x) - \lambda D z(x) = m(x), \quad (14)$$

$$M_0 \Gamma z(0) + M_1 \Gamma z(\frac{1}{2}) + \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) z(t)\, dt = 0, \quad (15)$$

где

$P_i(x) = D\Gamma^{-1} a_i(x) \Gamma$,
$N = D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma$,
$m(x) = D\Gamma^{-1} g(x)$,
$\Omega(t) = a(t)\Gamma$,
$M_0 = S\Gamma$, $M_1 = T\Gamma$,
$z(x) = \tilde{z}(x), (z(x)$ имеет другой смысл).

И так как в дальнейшем вызывает затруднение матрица $P_3(x)$, приводится еще одно преобразование системы (14), (15) в лемме 1.4:

Лемма 1.4 *Существует матрица-функция* $H(x,t) = H_0(x) + \lambda^{-1} H_1(x)$ *с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц* $H_0(x)$, $H_1(x)$, *причем* $H_0(x)$ *невырождена при всех* x *и диагональная, такая что, преобразование* $z = H(x,t)v$ *приводит систему (1.31), (1.32) к виду:*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(\frac{1}{2}) + P_3(x,\lambda)v(x) + N_\lambda v(x) -$$
$$-\lambda D v(x) = m(x,\lambda),$$

$$U(v) = M_{0\lambda} v(0) + M_{1\lambda} v(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t,\lambda) v(t)\, dt = 0,$$

где
$P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda) P_1(x) H(0,\lambda)$,
$P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda) P_2(x) H(\frac{1}{2},\lambda)$,
$P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1} H^{-1}(x,\lambda) \left[H_1'(x) + P_3(x) H_1(x)\right]$,
$N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda) N H(x,\lambda)$,
$M_{0\lambda} = M_0 H(0,\lambda)$,
$M_{1\lambda} = M_1 H(\frac{1}{2},\lambda)$,
$\Omega(t,\lambda) = \Omega(t) H(t,\lambda)$,
$m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda) m(x)$.

В §1.3 рассматривается краевая задача

$$\begin{array}{r} w'(x) = \lambda D w(x) + m(x), \\ U(w) = 0, \end{array}, \tag{16}$$

где $m(x)$ произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0,\frac{1}{2}]$.

Обозначим решение системы (16) $w = R_{1\lambda} m$. В лемме 1.5 находится решение для (16):

Лемма 1.5 *Для решения* (16) *имеет место представление:*

$$R_{1\lambda} m = -Y(x,\lambda) \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda)) m(t)\, dt + g_\lambda m(x),$$

где

$$Y(x,\lambda) = diag\left(e^{\lambda\omega_1 x}, \ldots, e^{\lambda\omega_4 x}\right),$$

$$\Delta(\lambda) = U(Y(x,\lambda)),$$

U_x *означает, что* U *применяется по* x.

$$g(x,t,\lambda) = diag\left(g_1(x,t,\lambda), \ldots, g_4(x,t,\lambda)\right),$$

$$g_i\left(x,t,\lambda\right)=\begin{cases}-\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_i(x-t)} & \text{при}\, Re\,\lambda\omega_i\geq 0\\ \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_i(x-t)} & \text{при}\, Re\,\lambda\omega_i\leq 0\end{cases},$$

$$\varepsilon(x,t)=\begin{cases}1 & \text{при}\ t\leq x\\ 0 & \text{при}\ t>x\end{cases}\ \text{– функция Хевисайда.}$$

В лемме 1.6 получено представление для матрицы $\Delta(\lambda)$:

Лемма 1.6 *Для матрицы $\Delta(\lambda)$ при больших $|\lambda|$ имеет место следующее представление:*

$$\Delta(\lambda)=\left([a_{ij}]+[b_{ij}]\,e^{\mu\omega_j}\right)_{i,j=1}^{4},$$

где $\mu=\frac{\lambda}{2}$, a_{ij} (b_{ij}) - компоненты матрицы K_0 (L_0):

$$K_0=S\cdot\Gamma\cdot H_0(0)=S\cdot\Gamma,$$

$$L_0=T\cdot\Gamma\cdot H_0(\frac{1}{2}),$$

$[a]=a+o(1)$.

Важным моментом является асимптотика определителя $\det\Delta(\lambda)$:

Лемма 1.6 *Для $det\Delta\left(\lambda\right)$ имеет место асимтотическая формула*

$$det\Delta\left(\lambda\right)=\left\{\varphi(\lambda)+o(1)\right\}e^{\mu(\omega_1+\omega_2)},$$

где $\varphi(\lambda)=\theta_0+\theta_1e^{\mu(-\omega_1)}+\theta_2e^{\mu(-\omega_2)}+\theta_3e^{\mu(\omega_3-\omega_1-\omega_2)}+\theta_4e^{\mu(\omega_3-\omega_2)}+\theta_5e^{\mu(\omega_4-\omega_2)}+\theta_6e^{\mu(\omega_3-\omega_1)}+\theta_7e^{\mu(\omega_4-\omega_1)}+\theta_8e^{\mu(\omega_3+\omega_4-\omega_1-\omega_2)}$, θ_i - комплексные числа, причем

$$\theta_0=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&a_{13}&a_{14}\\ b_{21}&b_{22}&a_{23}&a_{24}\\ b_{31}&b_{32}&a_{33}&a_{34}\\ b_{41}&b_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix},\ \theta_8=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_{13}&b_{14}\\ a_{21}&a_{22}&b_{23}&b_{24}\\ a_{31}&a_{32}&b_{33}&b_{34}\\ b_{41}&a_{42}&b_{43}&b_{44}\end{vmatrix}$$

Накладываются условия регулярности:

$$\theta_0\cdot\theta_8\neq 0,$$

при выполнении которых, в лемме 1.8 для $R_{1\lambda}m$ доказываются оценки:

$$\begin{aligned}
&\|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\|m\|_1),\\
&\|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\psi(\lambda)\,\|m\|_\infty),\\
&\|R_{1\lambda}m\|_1 = O(\psi(\lambda)\,\|m\|_1),\\
&\|R_{1\lambda}\chi\|_\infty = O(\tfrac{1}{\lambda}),
\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ нормы в пространстве вектор функций $L_\infty(0,\frac{1}{2})$, $L(0,\frac{1}{2})$, $\chi(x)$ - вектор функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка, содержащегося в $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{4} \varkappa\left(|Re\,\lambda\omega_j|\right)$, $\varkappa(y) = \frac{1-e^{-y}}{y}$ при $y \geq 0$.

Глава 2 посвящена теореме равносходимости разложений для оператора A. В §2.1 доказывается теорема Штейнгауза для дифференциального оператора $L:\ L(y) = y'$, $y(0) = y(1)$. Рассматривается краевая задача:

$$L = y'(x) = \lambda y(x) + f(x) \tag{17}$$

$$y(0) = y\,(1) \tag{18}$$

Для ее решения $y(x) = (R_\lambda f)(x)$ доказывается теорема 2.1:

Теорема 2.1 *Решение* (17), (18) *имеет вид:*

$$y(x) = R_\lambda f = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\left[\int\limits_0^x e^{-\lambda t} f(t)dt + \int\limits_x^1 e^{\lambda(1-t)} f(t)dt\right],$$

где $\Delta(\lambda) = 1 - e^\lambda$. На основании этого доказывается теорема 2.4:

Теорема 2.4 *Если* $a(x) \in Lip[0;1]$, *то*

$$\|a(x)\sigma_r(f,x) - \sigma_r(af,x)\|_{C[\delta_1,1-\delta_1]} \to 0,$$

при $r \to \infty$, где $\sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$.

В §2.2 доказывается теорема равносходимости:

Теорема 2.5 *Пусть существует A^{-1}, ядро $A(x,t)$ удовлетворяет условиям из пункта 1.1–1.3. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x)\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{3j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(\varphi_j, x - \frac{1}{2}\right) \|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$-частичная сумма ряда Фурье, по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r, \sigma_r(f,x)$-частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на $[0, \frac{1}{2}]$ по системе $\left\{e^{4k\pi ix}\right\}$ для тех k, для которых $|4k\pi| < r$, $\gamma_{ij}\,(\delta_{ij})$ компоненты матрицы $\Gamma(\Gamma^{-1})$, $\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(\frac{1}{2}-x) + \delta_{j3}f(\frac{1}{2}+x) + \delta_{j4}f(1-x)$.

В третьей главе рассматриваются обобщенные средние Рисса

$$J_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f d\lambda,$$

где $R_\lambda f = (E-\lambda A)^{-1}A$ - резольвента Фредгольма оператора A, а $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим требованиям:
1)$g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в $|\lambda| < r$ при любых $r > 0$;
2)$\exists\ C > 0$, т.ч. $|g\,(\lambda, r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;
3)$g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ;
4)$\exists\ \beta > 0$, т.ч.

$$g(\lambda,r) = \begin{cases} O\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^\beta\right), & -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \\ O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^\beta\right), & 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{где } \varphi = arg\lambda\omega_2$$

В §3.1 доказывается формула остаточного члена:

Теорема 3.1 *Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[0,1]$, $f_0(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция на $[0,1]$, принадлежащая области значения оператора A. Тогда, если на окружности $|\lambda| = r$ нет собствен-*

ных значений оператора A, то

$$f(x)-J_r(f,x)=f(x)-f_0(x)+(1-g(o,r))\cdot f_0(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{R_\lambda\varphi_0}{\lambda}d\lambda-$$

$$-J_r(f-f_0,x),$$

где $f_0=A\varphi_0$.

В §3.2 доказываются вспомогательные предложения.

В §3.3 доказывается основная теорема главы:

Теорема 3.3 *Соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\|f(x)+J_r(f,x)\|_{C[0,1]}=0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)\in\overline{\Delta}_A$, где $\overline{\Delta}_A$ – замыкание области значений оператора A.

Также дается описание замыкания области значений оператора A:

Следствие 3.3 $\overline{\Delta}_A$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям:*

а)$f(x)\in C[0,1]$
б)$g(x)=(f(x),\ f(\frac{1}{2}-x),\ f(\frac{1}{2}+x),\ f(1-x))^T$ *удовлетворяет (1.22)*

В главе 4 получен аналог теоремы Жордана–Дирихле.

В §4.1, рассмотрен скалярный случай для оператора дифференцирования L, где

$$L:\ Ly=y'\ ;\ U(y)=y(0)-y(1)+\int\limits_0^1 a(t)y(t)\,dt=0, \tag{19}$$

где $a(t)$ - непрерывная функция на $[0,1]$.
Доказывается теорема:

Теорема 4.1 *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, имеет на нем ограниченную вариацию и удовлетворяет граничному условию из* (19), *то*

$$\max_{0\le x\le 1}|f(x)-S_r(f,x)|\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$$

где r таково, что окружность $|\lambda|=r$ находится в S_{δ_0}.

В §4.2 получены некоторые дополнительные оценки и в §4.3 доказывается основная теорема главы:

Теорема 4.2 *Если* $f(x) \in \bar{\Delta}_A$, *где* $\bar{\Delta}_A$ *- замыкание по норме* $C[0,1]$ *области значений оператора* A *и* $f(x) \in V[0,1]$, *то*

$$\left\| f(x) - S_r\left(f, x\right) \right\|_{\infty} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

В приложении разбирается случай интегральных операторов с кусочно–постоянными ядрами. Для этих операторов получаются условия для обращения, которые легко проверить. Эти условия связаны с отличием от нуля определителя четвертого порядка. Также приводятся примеры операторов, удовлетворяющие всем условиям из пунктов 1.1–1.3.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Августу Петровичу Хромову за постановку задачи и руководство работой.

1 Резольвента интегрального оператора A с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях

1.1 Преобразование оператора A в пространстве вектор-функций размерности 4

Рассмотрим интегральный оператор

$$y(x) = Af = \int_0^1 A\,(x,t)\ f(t)dt, \tag{1.1}$$

Обозначим:
$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и
$\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Предположим, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t), \quad (i = 1, ..., 5)$ непрерывны в своих областях, ($k+l \le 2$, причем, если $k+l = 2$, то $k = l = 1$). $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t), \quad (i = 1, ..., 5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем
$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a$,
$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b$,
$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c$,
$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d$,
где a, b, c, d – постоянные.

То есть ядро $A\,(x,t)$ может быть имеет скачки на сторонах квадрата, который может быть представлен на рисунке 1:

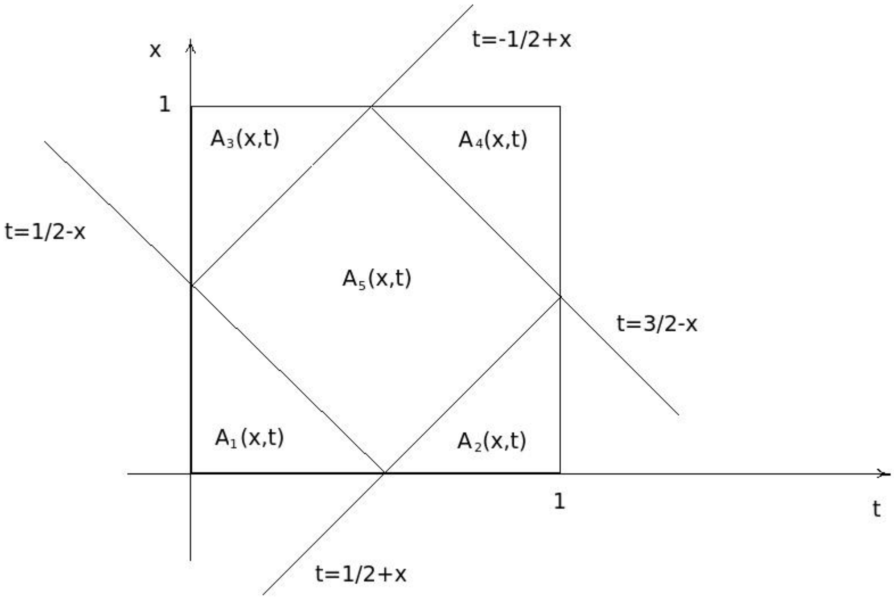

Рисунок 1

Частный случай оператора (1.1) впервые рассматривался в [1].

Рассмотрим следующий оператор:

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t)g(t)\,dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{1.2}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$, $B(x,t) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & A(x,1/2-t) & A(x,1/2+t) & 0 \\ A(1/2-x,t) & 0 & 0 & A(1/2-x,1-t) \\ A(1/2+x,t) & 0 & 0 & A(1/2+x,1-t) \\ 0 & A(1-x,1/2-t) & A(1-x,1/2+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.1. *Если $y = Af$, то $z = Bg$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1/2-x)$, $z_3(x) = y(1/2+x)$, $z_4(x) = y(1-x)$. $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(1/2-x)$, $g_3(x) = f(1/2+x)$, $g_4(x) = f(1-x)$. Обратно: если $z = Bg$ и $g_1(x) = g_2(1/2-x)$, $g_3(x) = g_4(1/2-x)$, то $z_1(x) = z_2(1/2-x)$, $z_3(x) = z_4(1/2-x)$*

и $y = Af$, *где* $f(x) = g_1(x)$, *при* $x \in [0, 1/2]$; $f(x) = g_3(-1/2 + x)$, *при* $x \in [1/2, 1]$ *и* $y(x) = z_1(x)$, *при* $x \in [0, 1/2]$; $y(x) = z_3(-1/2 + x)$, *при* $x \in [1/2, 1]$.

Доказательство. Пусть $y = Af$. Тогда имеем

$$y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} A(x,t)f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 A(x,t)f(t)\,dt \tag{1.3}$$

Пусть $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Представим (1.3) в виде

$$y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} A\left(x, \frac{1}{2} - t\right) f\left(\frac{1}{2} - t\right) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} A\left(x, \frac{1}{2} + t\right) f\left(\frac{1}{2} + t\right) dt \tag{1.4}$$

Здесь разрывы ядер в обоих интегралах на линии $x = t$. Положим в (1.4) $\frac{1}{2} - x$ вместо x и в обоих интегралах выполним замены $t = \frac{1}{2} - \xi$, затем переобозначим $\xi = t$, чтобы опять разрывы ядер были на линии $x = t$, т.е. будем иметь

$$y\left(\frac{1}{2} - x\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} A\left(\frac{1}{2} - x, t\right) f(t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} A\left(\frac{1}{2} - x, 1 - t\right) f(1 - t)\,dt \tag{1.5}$$

Пусть теперь $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Тогда возьмем в (1.3) $\frac{1}{2} + x$ вместо x (т.е. опять получаем, что $x \in [0, \frac{1}{2}]$) и во втором слагаемом сделаем замену $t = 1 - \xi$, $\xi = t$, то есть добьемся, что разрывы ядер в интегралах опять будут на линии $x = t$, т.е. имеем

$$y\left(\frac{1}{2} + x\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} A\left(\frac{1}{2} + x, t\right) f(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} A\left(\frac{1}{2} + x, 1 - t\right) f(1 - t)\,dt \tag{1.6}$$

Наконец, в (1.6) положим $\frac{1}{2} - x$ вместо x и, сделаем замену $t = \frac{1}{2} - \xi$, $\xi = t$, придем к

$$y(1-x) = \int_0^{\frac{1}{2}} A\left(1 - x, \frac{1}{2} - t\right) f\left(\frac{1}{2} - t\right) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} A\left(1 - x, \frac{1}{2} + t\right) f\left(\frac{1}{2} + t\right) dt \tag{1.7}$$

В итоге, (1.4) – (1.7) представляет собой $z = Bg$.
Обратное очевидно. $\square$

Замечание 1.1. *Представление типа (1.2) не единственно. Наше же представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x,t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$.*

Займемся обращением оператора B.
Представим B в виде

$$z(x) = Bg(x) = \int_0^x B_1(x,t)g(t)\,dt + \int_x^{\frac{1}{2}} B_2(x,t)g(t)\,dt, \tag{1.8}$$

где

$$B_1(x,t) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & A_5(x,1/2-t) & A_5(x,1/2+t) & 0 \\ A_1(1/2-x,t) & 0 & 0 & A_2(1/2-x,1-t) \\ A_3(1/2+x,t) & 0 & 0 & A_4(1/2+x,1-t) \\ 0 & A_5(1-x,1/2-t) & A_5(1-x,1/2+t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2(x,t) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & A_1(x,1/2-t) & A_2(x,1/2+t) & 0 \\ A_5(1/2-x,t) & 0 & 0 & A_5(1/2-x,1-t) \\ A_5(1/2+x,t) & 0 & 0 & A_5(1/2+x,1-t) \\ 0 & A_3(1-x,1/2-t) & A_4(1-x,1/2+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Дифференцируем (1.8) по x. Получим

$$z'(x) = \int_0^x B_{1x}(x,t)g(t)dt +$$

$$+ \int_x^{\frac{1}{2}} B_{2x}(x,t)g(t)dt + Qg(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} B_x(x,t)g(t)dt + Qg(x), \tag{1.9}$$

где $Q = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b \\ -c & 0 & 0 & -d \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix}$.

Считаем, что Q обратима, т.е. требуем, чтобы $ad - cb \neq 0$. Тогда, из (1.9) получим

$$Pz'(x) = g(x) + \tilde{B}g(x), \tag{1.10}$$

где $P = Q^{-1}$, $\tilde{B}g(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \tilde{B}(x,t)g(t)dt$, $\tilde{B}(x,t) = PB_x(x,t)$.

В пространстве вектор–функций $L_2^4[0,1/2]$ рассмотрим систему: $e_{1k}(x) = (e^{2\pi ikx},0,0,0)^T$, $e_{2k}(x) = (0,e^{2\pi ikx},0,0)^T$, $e_{3k}(x) = (0,0,e^{2\pi ikx},0)^T$, $e_{4k}(x) = (0,0,0,e^{2\pi ikx})^T$, $k = 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3...$

Эта система образует полный ортонормированный базис пространства $L_2^4[0,1/2]$. Множество всех таких векторов счетно, поэтому перенумеруем их так: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$,... . Пусть ψ_k – всевозможные линейные комбинации этих векторов. Тогда любой конечномерный оператор V может быть представлен в виде

$$Vg(x) = \sum_{k=1}^{m}(g,\,\psi_k)\varphi_k(x)$$

для некоторых ψ_k, где $(g,\psi_k) = \sum\limits_{j=1}^{4}\int\limits_0^{1/2} g_j(t)\psi_k^j(t)\,dt$. Представим оператор $\tilde{B}$ в пространстве $L_2^4[0,\frac{1}{2}]$ в виде $\tilde{B} = W + V$, где $||W||_\sigma < 1$ ($||W||_\sigma = \sqrt{\int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{1/2}\max\limits_{ij}|W_{ij}^2(x,t)|\,dt\,dx}$ – норма Гильберта–Шмидта, $W_{ij}(x,t)$- компоненты ядра оператора W), а V – конечномерный. Такое представление возможно в силу конечномерной апроксимации оператора Гильберта–Шмидта $\tilde{B}$.

Из (1.10) получаем

$$(E+W)^{-1}\cdot Pz'(x) = g(x) + (E+W)^{-1}Vg(x) \tag{1.11}$$

Лемма 1.1. *Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда $rang\,M = m$ где*

$$M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi},\psi)^T \\ \int_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)\tilde{\varphi}^T(t)\,dt \end{pmatrix},$$

здесь E-единичная матрица $m{\times}m$,

$(\tilde{\varphi},\psi) = (\tilde{\varphi}_j,\psi_k)_{j,k=1}^m$, $\tilde{\varphi}_k = (E+W)^{-1}\varphi_k$, $\tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1,...,\tilde{\varphi}_m)$

Доказательство. Пусть $Bg = 0$, тогда, проведя все рассуждения, начиная с теоремы 1.1 при $z(x) = 0$, получим:

$$g(x) + \tilde{B}g(x) = 0,$$

$$g(x) + (E + W)^{-1}Vg(x) = 0$$

$$g(x) + (E + W)^{-1}\sum_{k=1}^{m}(g, \psi_k)\,\varphi_k(x) = 0,$$

$$g(x) + \sum_{k=1}^{m}(g, \psi_k)\,(E + W)^{-1}\varphi_k(x) = 0,$$

В обозначениях теоремы

$$g(x) + \sum_{k=1}^{m}(g, \psi_k)\,\tilde{\varphi}_k(x) = 0, \tag{1.12}$$

Обозничим $\gamma_k = (g, \psi_k)$.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{m}(-\gamma_k)\tilde{\varphi}_k(x).$$

Домножим (1.12) скалярно на $\psi_j(x)$:

$$(g, \psi_j) + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,(\tilde{\varphi}_k(x), \psi_j) = 0,$$

$$\gamma_j + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,(\tilde{\varphi}_k, \psi_j) = 0,\;\; j = 1, ..., m$$

Поменяем местами индексы:

$$\gamma_k + \sum_{j=1}^{m}\gamma_j\,(\tilde{\varphi}_j, \psi_k) = 0,\;\; k = 1, ..., m \tag{1.13}$$

Запишем (1.13) в матричном виде:

$$E \cdot (\gamma_1 ... \gamma_m)^T + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \cdot (\gamma_1 ... \gamma_m)^T = 0,$$

то есть

$$\left(E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T\right) \cdot (\gamma_1 ... \gamma_m)^T = 0, \tag{1.14}$$

Так как $Bg = 0$ при любом $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то, в частности,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t) g(t)\, dt = 0,$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t) \sum_{k=1}^{m} (-\gamma_k) \tilde{\varphi}_k(t) dt = 0.$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t) \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \tilde{\varphi}_k(t) dt = 0.$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)\, \tilde{\varphi}_k(t) dt = 0, \tag{1.15}$$

Запишем (1.15) в матричном виде:

$$\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)\, \tilde{\varphi}_1(t) dt, ..., \int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)\, \tilde{\varphi}_m(t) dt \right) \cdot (\gamma_1 ... \gamma_m)^T = 0,$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)\, \tilde{\varphi}(t) dt\, (\gamma_1 ... \gamma_m)^T = 0. \tag{1.16}$$

Запишем (1.14) и (1.16) вместе:

$$\begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)\tilde{\varphi}^T(t)\,dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ ... \\ \gamma_m \end{pmatrix} = 0,$$

это необходимые и достаточные условия для нахождения γ_k, и поэтому B^{-1} существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы M равен m.

□

Лемма 1.2. *Пусть B^{-1} существует и, для определенности, минор Δ матрицы M, образованный из первых m строк, отличен от нуля. Тогда*

$$B^{-1}z = (E+W)^{-1}Pz'(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}\Big((E+W)^{-1}Pz', \psi_j\Big)\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x), \quad (1.17)$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)B^{-1}z(t)\,dt = z(0), \quad (1.18)$$

где Δ_{jk} - алгебраические дополнения элементов определителя Δ.

Доказательство. Пусть $z = Bg$, тогда имеет место (1.11):

$$(E+W)^{-1}Pz'(x) = g(x) + (E+W)^{-1}Vg(x).$$

Так как $Vg(x)$ имеет вид:

$$Vg(x) = \sum_{k=1}^{m}(g, \psi_k)\,\varphi_k(x),$$

то

$$(E+W)^{-1}Pz'(x) = g(x) + (E+W)^{-1}\sum_{k=1}^{m}(g, \psi_k)\,\varphi_k(x).$$

Так как $(E+W)^{-1}\varphi_k = \tilde{\varphi}_k$, то

$$(E+W)^{-1}Pz'(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{m}(g,\psi_k)\,\tilde{\varphi}_k \tag{1.19}$$

Умножим это равенство скалярно на ψ_j, $j=\overline{1,m}$. Получим

$$\big((E+W)^{-1}Pz'(x),\psi_j\big) = (g(x),\psi_j) + \sum_{k=1}^{m}(g,\psi_k)\,(\tilde{\varphi}_k,\psi_j)\,, \quad j=\overline{1,m} \tag{1.20}$$

Определитель системы (1.20) равен Δ, значит, по формулам Крамера,

$$(g,\psi_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$

где Δ_k - определитель, составленый из элементов Δ, к-тый столбик которого заменен столбиком

$$\Big(((E+W)^{-1}Pz',\psi_1)\,,((E+W)^{-1}Pz',\psi_2),\,\dots,((E+W)^{-1}Pz',\psi_m)\Big)^T.$$

Если Δ_k разложить по элементам k-ого столбика, то он будет равен:

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^{m}\Big((E+W)^{-1}Pz',\psi_j\Big)\cdot\Delta_{jk},$$

тогда

$$(g,\psi_k) = \frac{1}{\Delta}\cdot\sum_{j=1}^{m}\Big((E+W)^{-1}Pz',\psi_j\Big)\cdot\Delta_{jk}.$$

Подставим это равенство в (1.19), получим:

$$g(x) = ((E+W)^{-1}Pz'(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}\Big((E+W)^{-1}Pz',\psi_j\Big)\Delta_{jk}\widetilde{\varphi_k}.$$

Следовательно равенство (1.17) доказали. Равенство (1.18) следует из существования обратного оператора. Лемма доказана. □

Теорема 1.2. *Для оператора B^{-1} справедливо представление:*

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x)+a_1(x)z(0)+a_2(x)z(\frac{1}{2})+a_3(x)z(x)+\int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)z(t)\,dt, \quad (1.21)$$

$$Sz(0) + Tz(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t)\,dt = 0, \quad (1.22)$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ - непрерывно-дифференцируемые матрицы-функции, $a(x)$ -непрерывная матрица-функция, каждая компонента матрицы $a(x,t)$ непрерывно–дифференцируема по x при $x \leq t$, $x \geq t$ и непрерывна по t при $t \leq x$, $t \geq x$. S и T - постоянные матрицы 4×4.

Доказательство. Так как $\|W\| < \|W\|_\sigma < 1$, то $(E+W)^{-1}$ существует и $(E+W)^{-1} = E + W + W^2 + \ldots$. Так как $\left\|W + W^2 + W^3 \ldots\right\|_\sigma \leqslant \|W\|_\sigma + \|W\|_\sigma^2 + \ldots = \frac{\|W\|_\sigma}{1-\|W\|_\sigma} < \infty$, то $W + W^2 + W^3 + \ldots$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Обозначим $W_1 = W + W^2 + W^3 + \ldots$, тогда $(E+W)^{-1} = E + W_1$ и $(E+W)(E+W_1) = E$. Значит $E + EW_1 + WE + WW_1 = E$. Также $(E+W_1)(E+W) = E$. Следовательно,

$$W_1 = -W - WW_1,\ W_1 = -W - W_1W. \quad (1.23)$$

Значит,

$$W_1 = -W - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} W(x,\tau)W_1(\tau,t)\,d\tau,$$

$$W_1 = -W - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} W_1(x,\tau)W(\tau,t)\,d\tau,$$

где $W(x,\tau)$ и $W_1(x,\tau)$ соответственно ядра операторов W и W_1.

1) Покажем, что компоненты ядра W_1 непрерывны по t при $0 \leq t \leq x$ и $x \leq t \leq \frac{1}{2}$ и непрерывны по x при $0 \leq x \leq t$ и $t \leq x \leq \frac{1}{2}$. Разобьем доказательство на несколько частей:

а) Компоненты ядра W есть разность соответствующих компонент ядер $\tilde{B} - V$. Значит, компоненты ядер W имеют такую же гладкость по x и t, что и $\tilde{B}$.

б) Компоненты ядра $W_1(x,t)$ являются ядрами операторов Гильберта-Шмидта. Значит

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left|W_{ij}^1(x,t)\right|^2 dxdt < \infty,$$

где $W_{ij}^1(x,t)$ – компоненты матрицы $W_1(x,t)$ 4-го порядка.

в) Покажем непрерывность ядра оператора WW_1W по x (при $0 \le x \le t$ и $t \le x \le 1/2$) и t (при $0 \le t \le x$ и $x \le t \le 1/2$). В самом деле, рассмотрим первую компоненту разности

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(W(x_1,\tau) - W(x_2,\tau)\right) d\tau \int\limits_0^{\frac{1}{2}} W_1(\tau,\xi)W(\xi,t)\, d\xi,$$

которую обозначим (1,1):

$$(1,1) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(W_{11}(x_1,\tau) - W_{11}(x_2,\tau)\right) d\tau \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Big(W_{11}^{(1)}(\tau,\xi)W_{11}(\xi,t) + W_{12}^{(1)}(\tau,\xi)\cdot$$

$$\cdot W_{21}(\xi,t) + ... + W_{14}^1(\tau,\xi)W_{41}(\xi,t)\Big)\, d\xi,$$

Следовательно

$$|(1,1)| = \left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(W_{11}(x_1,\tau) - W_{11}(x_2,\tau)\right) d\tau \int\limits_0^{\frac{1}{2}} W_{11}^{(1)}(\tau,\xi)W_{11}(\xi,t)\, d\xi + ... + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(W_{11}(x_1,\tau) - W_{11}(x_2,\tau)\right) d\tau \int\limits_0^{\frac{1}{2}} W_{14}^{(1)}(\tau,\xi)W_{41}(\xi,t)\, d\xi\right| \le |I_1| + ... + |I_4|,$$

где $I_j = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (W_{11}(x_1,\tau) - W_{11}(x_2,\tau))\, d\tau \int\limits_0^{\frac{1}{2}} W_{1j}^{(1)}(\tau,\xi) W_{j1}(\xi,t)\, d\xi$, $j = 1,...,4$

Рассмотрим каждый интеграл отдельно. По неравенству Коши-Буняковского

$$|I_1| \leq \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (W_{11}(x_1,\tau) - W_{11}(x_2,\tau)) \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left| W_{11}^{(1)}(\tau,\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} |W_{11}(\xi,t)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \right| =$$

$$\left| \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} |W_{11}(\xi,t)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} |W_{11}(x_1,\tau) - W_{11}(x_2,\tau)| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left| W_{11}^{(1)}(\tau,\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \right| \leq$$

$$\left| \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} |W_{11}(\xi,t)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} |W_{11}(x_1,\tau) - W_{11}(x_2,\tau)|^2\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left| \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left| W_{11}^{(1)}(\tau,\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right| = J_1 \times J_2 \times J_3,$$

где $J_1 = \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} |W_{11}(\xi,t)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$, $J_2 = \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} |W_{11}(x_1,\tau) - W_{11}(x_2,\tau)|^2\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$

$$J_3 = \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left| W_{11}^{(1)}(\tau,\xi) \right|^2 d\xi\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $W_{11}(\xi,t)$ непрерывна по обеим аргументам, то J_1 ограниченна. J_3 ограничен как ядро оператора Гильберта-Шмидта. J_2 представим в виде $\int\limits_0^1 = \int\limits_0^{\underline{x}} + \int\limits_{\underline{x}}^{\overline{x}} + \int\limits_{\overline{x}}^1$, где $\underline{x} = min\{x_1,x_2\}$, $\overline{x} = max\{x_1,x_2\}$. Отсюда следует непрерывность I_1 по x x при $x \leq t$, $x \geq t$. Также доказывается непрерывность остальных слагаемых I_2, I_3, I_4. Значит, $|(1,1)|$ непрерывна по x при $x \leq t$, $x \geq t$. Остальные компоненты также. То есть доказали непрерывность по x компонентов ядра оператора WW_1W. Непрерывность по t доказывается аналогично, если рассмотрим первое равенство в (1.23).

Далее, так как $W_1 = -W - W_1W$, то $WW_1 = -W^2 - WW_1W$, и, поэтому, компоненты ядра оператора WW_1 также непрерывно по x и по t. А поскольку имеет место $W_1 = -W - WW_1$, то получаем непрерывность компонентов ядра W_1 по x и t.

2) Из второго равенства (1.23) также следует, что при $t \le x$

$$W_1(x,t) = -W(x,t) - \int\limits_0^t W_1(x,\tau)W(\tau,t)\,d\tau - \int\limits_t^x W_1(x,\tau)W(\tau,t)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_x^1 W_1(x,\tau)W(\tau,t)\,d\tau.$$

Отсюда получаем, что компоненты $W_1(x,t)$ непрерывны по t, при $t \le x$. При $t \ge x$ из представления

$$W_1(x,t) = -W(x,t) - \int\limits_0^x W_1(x,\tau)W(\tau,t)\,d\tau - \int\limits_x^t W_1(x,\tau)W(\tau,t)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_t^1 W_1(x,\tau)W(\tau,t)\,d\tau$$

получаем, что компоненты $W_1(x,t)$ непрерывны по t, при $t \ge x$.
Из первого равенства (1.23) следует, что компоненты $W_1(x,t)$ непрерывны по x, при $x \le t$, $x \ge t$.

3)Подставим $(E+W)^{-1} = E + W_1$ в (1.17):

$$B^{-1}z = (E+W_1)\,Pz'(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}\left((E+W_1)\,Pz',\psi_j\right)\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x),$$

$$B^{-1}z = Pz'(x) + W_1Pz'(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}\left(Pz',\psi_j\right)\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x) -$$

$$-\frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}\left(W_1Pz',\psi_j\right)\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x),$$

$$B^{-1}z = Pz'(x) + I_1 - I_2 - I_3,$$

где $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} W_1(x,t)Pz'(t)\,dt$, $I_2 = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\left(\sum\limits_{l=1}^{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(Pz(t))'_l\psi_j^l\,dt\right)\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)$,

$I_3 = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}(W_1Pz',\psi_j)\,\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)$.

Заметим, что $\tilde{\varphi}_k(x) = (E+W_1)\varphi_k(x) = \varphi_k(x) + \int\limits_0^{1/2} W_1(x,t)\varphi_k(t)\,dt$ – вектор–функция, компоненты которой непрерывно–дифференцируемы по x.

Рассмотрим слагаемые:

$I_1 = \int\limits_0^x + \int\limits_x^{1/2} = W_1(x,t)Pz(t)\mid_{t=0}^{t=x} - \int_0^x W'_{1t}(x,t)Pz(t)\,dt + W_1(x,t)Pz(t)\mid_{t=x}^{t=1/2} - \int_x^{1/2} W'_{1t}(x,t)Pz(t)\,dt = -W_1(x,0+0)Pz(0) + (W_1(x,x-0)P-$

$-W_1(x,x+0)P)\,z(x) + W_1(x,1/2-0)Pz(1/2) - \int\limits_0^{1/2} W'_{1t}(x,t)Pz(t)\,dt.$

$I_2 = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m} J_1\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)$, где $J_1 = \sum\limits_{l=1}^{4}\int_0^{\frac{1}{2}}((Pz)(t))'_l\,\psi_j^l(t)\,dt.$

$J_1 = \sum\limits_{l=1}^{m}(Pz)_l(t)\psi_j^l(t)\mid_0^{1/2} - \sum\limits_{l=1}^{4}\int\limits_0^{1/2}(Pz)_l(t)\psi_j^{l\prime}(t)\,dt = \sum\limits_{l=1}^{4}\psi_j^l(t)(Pz)_l(t)\mid_0^{1/2} - \sum\limits_{l=1}^{4}\int\limits_0^{1/2}\psi_j^{l\prime}(t)(Pz)_l(t)\,dt = \psi_j^T(t)Pz(t)\mid_0^{1/2} - \int\limits_0^{1/2}\psi_j^{T\prime}(t)Pz(t)\,dt.$

Значит, $I_2 = J_2 - J_3$, где

$J_2 = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\Delta_{jk}\left[\psi_j^T(t)Pz(t)\mid_0^{1/2}\right]\tilde{\varphi}_k(x) = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)\psi_j^T(t)Pz(t)\mid_0^{1/2} = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)\psi_j^T(1/2)Pz(1/2) - \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)\psi_j^T(0)Pz(0).$

Аналогично

$J_3 = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\Delta_{jk}\left(\int\limits_0^{1/2}\psi_j^{T\prime}(t)Pz(t)\,dt\right)\tilde{\varphi}_k(x) = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)\times$

$\times\int\limits_0^{1/2}\psi_j^{T\prime}(t)Pz(t)\,dt = \int\limits_0^{1/2}\frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)\psi_j^{T\prime}(t)Pz(t)\,dt.$

Рассмотрим $I_3 = \frac{1}{\Delta}\sum\limits_{j,k=1}^{m}\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x)J_4$, где $J_4 = (W_1Pz',\psi_j) = (I_1,\psi_j)$.

Воспользуемся найденным ранее I_1:

$J_4 = (-W_1(x,0+0)Pz(0),\psi_j) + ((W_1(x,x-0)P - W_1(x,x+0)P)\,z(x),\psi_j) + (W_1(x,1/2-0)Pz(1/2),\psi_j) - \left(\int\limits_0^{1/2} W'_{1t}(x,t)Pz(t)\,dt,\psi_j\right) =$

$-\left(\int\limits_0^{1/2}\psi_j^T(\tau)W_1(\tau,0+0)P\,d\tau\right)z(0)+\int\limits_0^{1/2}\psi_j^T(t)\Big(W_1(t,t-0)P-$

$-W_1(t,t+0)P\Big)z(t)\,dt + \left(\int\limits_0^{1/2}\psi_j^T(\tau)W_1(\tau,1/2-0)P\,d\tau\right)z(1/2) -$

$\int\limits_0^{1/2}\left(\psi_j^T(\tau)\int_0^{1/2}W'_{1t}(\tau,t)P\,d\tau\right)z(t)\,dt$. Подставим J_4 в I_3, приведем подобные слагаемые, введем обозначения для коэффициентов при $z(0)$, $z(\frac{1}{2}$, $z(x)$, $z(t)$ придем к (1.21).

Подставим (1.21) в (1.18):

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}B(0,t)B^{-1}z(t)\,dt=z(0),$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}B(0,t)\left[Pz'(t)+a_1(t)z(0)+a_2(t)z(\frac{1}{2})+a_3(t)z(t)+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}a(t,\eta)z(\eta)\,d\eta\right]=z(0),$$

то есть

$P\int\limits_0^{\frac{1}{2}}B(0,t)z'(t)\,dt + z(0)\int\limits_0^{\frac{1}{2}}B(0,t)a_1(t)\,dt + z(\frac{1}{2})\int\limits_0^{\frac{1}{2}}B(0,t)a_2(t)\,dt +$
$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}B(0,t)a_3(t)z(t)\,dt+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}B(0,t)a(t,\eta)z(\eta)\,d\eta\,dt=z(0),$

$z(0)$ перенесем влево и сгруппируем со вторым интегралом. Первый интеграл проинтегрируем по частям. Второй и третий интегралы обозначим соответственно S и T. В пятом интеграле переобозначим $\eta=t$, $t=\eta$ и поменяем порядок интегрирования. Получим (1.22). Таким образом, теорема доказана. □

1.2 Резольвента оператора A

Получим интегро-дифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1} Af$ оператора A. Если $y(x) = R_\lambda(A)f = (E-\lambda A)^{-1} Af$, то $y = A(\lambda y + f)$. Тогда по теореме 1.1 $z = B(\lambda z + g)$. То есть $z = (E - \lambda B)^{-1} Bg$. Значит $(E - \lambda B)\, z = Bg$, $z - \lambda Bz = Bg$. Следовательно

$$B^{-1} z(x) - \lambda z(x) = g(x), \tag{1.24}$$

где B^{-1} определяется из (1.21), а $z(x)$ удовлетворяет (1.22).

Подставим $B^{-1}z(x)$ из (1.21) в (1.24), получим:

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(\frac{1}{2}) + a_3(x)z(x) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)z(t)\,dt -$$

$$-\lambda z(x) = g(x), \tag{1.25}$$

Обозначим $\tilde{N}z = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)z(t)\,dt$, тогда (1.25) принимает вид:

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(\frac{1}{2}) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x),$$

Докажем теорему:

Теорема 1.3. *Если R_λ существует, то*

$$R_\lambda f = v(x) \tag{1.26}$$

где $v(x) = z_1(x)$ при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, и $v(x) = z_3(x - \frac{1}{2})$ при $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; $z_1(x)$, $z_3(x)$ - первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе:

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(\frac{1}{2}) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x), \tag{1.27}$$

$$Sz(0) + Tz(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t)\,dt = 0. \qquad (1.28)$$

Доказательство. Для $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ теорема доказана выше. Докажем для $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$: При $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $R_\lambda f = v(x) = y(x)$, где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T = (y(x), y(\frac{1}{2} - x), y(\frac{1}{2} + x), y(1 - x))^T$. То есть $z_3(x) = y(\frac{1}{2} + x)$. Сделаем замену: $x = \xi - \frac{1}{2}$. Тогда $\xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Переобозначим $\xi = x$. Получаем $z_3(x - \frac{1}{2}) = y(x)$
Таким образом, теорема доказана.

□

Теорема 1.4. *Если λ таково, что однородная краевая задача для (1.27), (1.28) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (1.26)*

Доказательство. По условию, однородная задача для (1.27), (1.28) имеет только тривиальное решение. (1.27) можно переписать в виде

$$B^{-1}z(x) - \lambda z(x) = 0.$$

Тогда $z(x) - \lambda Bz(x) = 0$ имеет только тривиальное решение. Значит, по теореме Фредгольма существует и притом единственное решение уравнения $z(x) = \lambda Bz(x) + Bg(x)$.Следовательно, существует $R_\lambda B$, а значит, существует $R_\lambda A$ по теореме 1.1. То есть $z_1(x) = R_\lambda(A)f(x)$, при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Так как $z_3(x) = z_1(\frac{1}{2} + x)$, то, заменяя $x = \xi - \frac{1}{2}$, где уже $\xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $z_3(\xi - \frac{1}{2}) = z_1(\xi) = R_\lambda(A)f(\xi)$ при $\xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Переобозначим $\xi = x$. Теорема доказана.

□

Минимальный многочлен матрицы P^{-1} совпадает с характеристическим многочленом и он равен:

$$\lambda^4 - \lambda^2(d^2 + 2bc + a^2) + (ad - bc)^2.$$

Значит, выполняется лемма:

Лемма 1.3. *При условии $d+a \neq 0$, $(a-d)^2+4bc \neq 0$, матрица P^{-1} подобна диагональной $D = diag(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, причем $\omega_i \neq 0$ для всех $i = 1, ..., 4$, $\omega_3 = -\omega_2$, $\omega_4 = -\omega_1$, $\omega_1 \neq \omega_2$.*

Пусть матрица Γ такая, что $\Gamma^{-1}P^{-1}\Gamma = D$. Выполним в (1.27),(1.28) замену $z = \Gamma\tilde{z}$. Тогда

$$P\Gamma\tilde{z}'(x) + a_1(x)\Gamma\tilde{z}(0) + a_2(x)\Gamma\tilde{z}(\frac{1}{2}) + a_3(x)\Gamma\tilde{z}(x) + \tilde{N}\Gamma\tilde{z}(x) -$$

$$-\lambda\Gamma\tilde{z}(x) = g(x), \qquad (1.29)$$

$$S\Gamma\tilde{z}(0) + T\Gamma\tilde{z}(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(t)\Gamma\tilde{z}(t)\,dt = 0. \qquad (1.30)$$

Умножим (1.29) на $\Gamma^{-1}P^{-1}$ слева и воспользуемся тем, что $\Gamma^{-1}P^{-1} = D\Gamma^{-1}$. Получим:

$$\tilde{z}'(x) + D\Gamma^{-1}a_1(x)\Gamma\tilde{z}(0) + D\Gamma^{-1}a_2(x)\Gamma\tilde{z}(\frac{1}{2}) + D\Gamma^{-1}a_3(x)\Gamma\tilde{z}(x) + D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma\tilde{z} -$$

$$-\lambda D\tilde{z}(x) = D\Gamma^{-1}g(x)$$

Обозначим:
$P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma$,
$N = D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma$,
$m(x) = D\Gamma^{-1}g(x)$,
$\Omega(t) = a(t)\Gamma$,
$M_0 = S\Gamma$, $M_1 = T\Gamma$,
$z(x) = \tilde{z}(x)$, ($z(x)$ имеет другой смысл).
Тогда равенства (1.29), (1.30) имеют вид:

$$z'(x) + P_1(x)z(0) + P_2(x)z(\frac{1}{2}) + P_3(x)z(x) + Nz(x) - \lambda Dz(x) = m(x), \quad (1.31)$$

$$M_0\Gamma z(0) + M_1\Gamma z(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)z(t)\,dt = 0. \tag{1.32}$$

При изучении системы (1.31), (1.32) большие затруднения вызывает матрица $P_3(x)$. В связи с этим займемся ее преобразованием:

Лемма 1.4. *Существует матрица-функция $H(x,t) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональная, такая что, преобразование $z = H(x,t)v$ приводит систему (1.31), (1.32) к виду:*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(\frac{1}{2}) + P_3(x,\lambda)v(x) + N_\lambda v(x) -$$

$$-\lambda D v(x) = m(x,\lambda), \tag{1.33}$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t,\lambda)v(t)\,dt = 0, \tag{1.34}$$

где

$P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda),$

$P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_2(x)H(\frac{1}{2},\lambda),$

$P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)\,[H_1'(x) + P_3(x)H_1(x)],$

$N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda),$

$M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda),$

$M_{1\lambda} = M_1H(\frac{1}{2},\lambda),$

$\Omega(t,\lambda) = \Omega(t)H(t,\lambda),$

$m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x).$

Доказательство. В системе (1.31), (1.32) выполним замену $z = H(x,\lambda)v$, где $H(x,\lambda)$ – матрица с непрерывно – дифференцируемыми по x элементами (пока неоределенная). Из (1.31) следует:

$$H(x,\lambda)v'(x) + I\cdot v(x) +$$

$$+P_1(x)H(0,\lambda)v(0)+P_2(x)H(\frac{1}{2},\lambda)v(\frac{1}{2})+NH(x,\lambda)v(x)-$$

$$-\lambda H(x,\lambda)Dv(x)=m(x), \tag{1.35}$$

где $I = H'(x,\lambda)+P_3(x)H(x,\lambda)+\lambda\left(H(x,\lambda)D-DH(x,\lambda)\right)$ Рассмотрим I в (1.35). Известно, что, если H_0 - диагональная матрица, то $H_0D-DH_0=0$. Представим $H(x,\lambda)=H_0(x,\lambda)+H_1(x,\lambda)$, где $H_0(x,t)$ - диагональная матрица, а элементы главной диагонали $H_1(x,\lambda)$ равны нулю (кодиагональная матрица). Тогда :

$$I=H_0'(x,\lambda)+H_1'(x,\lambda)+P_3(x)H_0(x,\lambda)+P_3(x)H_1(x,\lambda)+\lambda(H_0(x,\lambda)D-$$

$$-DH_0(x,\lambda))+\lambda(H_1(x,\lambda)D-DH_1(x,\lambda)). \tag{1.36}$$

Пятое слагаемое равно 0. Диагональные элементы матрицы $H_1(x,\lambda)D-DH_1(x,\lambda)$ равны нулю, и уравнение

$$\lambda(H_1(x,\lambda)D-DH_1(x,\lambda)=L, \tag{1.37}$$

где L - любая матрица с нулевыми диагональными элементами, имеет и притом единственное решение. Поэтому, если подобрать матрицу $H_0(x,\lambda)$ так, чтобы диагональные элементы матрицы $L_1=H_0'(x,\lambda)+P_3(x)H_0(x,\lambda)$ равнялись нулю, и взять в качестве $L=-L_1$, то (1.36) значительно упростится. $H_0(x,\lambda)$ можно брать не зависящей от λ, так как $P_3(x)$ не зависит от λ. Пусть $H_0(x,\lambda)=H_0(x)=diag\,(h_1(x),\ldots h_4(x))$. Тогда диагональные элементы L_1 есть $h_i'(x)+p_{ii}(x)h_i(x)$, $i=\overline{1,4}$, где $p_{ii}(x)$ - диагональные элементы $P_3(x)$. Поэтому, считая, что $h_i'(x)+p_{ii}(x)h_i(x)=0$, получаем, что $h_i(x)=exp^{-\int\limits_0^x p_{ii}(\xi)\,d\xi}$ непрерывно-дифференцируемые. Теперь из (1.37) находим $H_1(x,\lambda)$, причем $\lambda H_1(x,\lambda)$ от λ не зависит (L_1 зависит только от x, а D - числовая). Значит, $\lambda H_1(x,\lambda)=H_1(x)$ Окончательно имеем

$$I=\lambda^{-1}\left[H_1'(x)+P_3(x)H_1(x)\right].$$

Значит, (1.35) переходит:

$$H(x,\lambda)v'(x)+\lambda^{-1}\left[H_1'(x)+P_3(x)H_1(x)\right]v(x)+P_1(x)H(0,\lambda)v(0)+$$

$$+P_2(x)H(\frac{1}{2},\lambda)v(\frac{1}{2})+NH(x,\lambda)v(x)-\lambda H(x,\lambda)Dv(x)=m(x).$$

Умножим на $H^{-1}(x,\lambda)$ слева:

$$v'(x)+\lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)\left[H_1'(x)+P_3(x)H_1(x)\right]v(x)+H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda)v(0)+$$

$$+H^{-1}(x,\lambda)P_2(x)H(\frac{1}{2},\lambda)v(\frac{1}{2})+H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda)v(x)-$$
$$-H^{-1}(x,\lambda)\lambda H(x,\lambda)Dv(x)=H^{-1}(x,\lambda)m(x).$$

Теперь (1.33) становится очевидным. Равенство (1.34) очевидно. □

1.3 Некоторые оценки

Приведем необходимое исследование системы (1.33), (1.34). Будем считать, что

$$Re\lambda\omega_1 \geq Re\lambda\omega_2 \geq 0.$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} w'(x) = \lambda D w(x) + m(x), \\ U(w) = 0, \end{aligned} \tag{1.38}$$

где $U(x)$ берется из (1.34), а $m(x)$ произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0, \frac{1}{2}]$. Обозначим решение системы (1.38) через $R_{1\lambda}m$. Имеет место лемма:

Лемма 1.5. *Для решения (1.38) имеет место представление:*

$$R_{1\lambda}m = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt + g_\lambda m(x),$$

где

$$Y(x,\lambda) = diag\left(e^{\lambda\omega_1 x}, \ldots, e^{\lambda\omega_4 x}\right),$$

$$\Delta(\lambda) = U(Y(x,\lambda)),$$

U_x означает, что U применяется по x.

$$g(x,t,\lambda) = diag\left(g_1(x,t,\lambda), \ldots, g_4(x,t,\lambda)\right),$$

$$g_i\left(x,t,\lambda\right) = \begin{cases} -\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_i(x-t)} & \text{\textit{при}}\, Re\,\lambda\omega_i \geq 0 \\ \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_i(x-t)} & \text{\textit{при}}\, Re\,\lambda\omega_i \leq 0 \end{cases},$$

$$\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{\textit{при} } t \leq x \\ 0 & \text{\textit{при} } t > x \end{cases} \text{ – \textit{функция Хевисайда.}}$$

$$g_\lambda m(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)\,dt.$$

Доказательство. Докажем сначала, что $g_\lambda m(x)$ удовлетворяет (1.38). В самом деле,

$$g_\lambda m(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)\,dt = \int_0^{x} g(x,t,\lambda)m(t)\,dt + \int_x^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda\omega_3(x-t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda\omega_4(x-t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ m_3(t) \\ m_4(t) \end{pmatrix} dt +$$

$$+ \int_x^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -e^{\lambda\omega_1(x-t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda\omega_2(x-t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ m_3(t) \\ m_4(t) \end{pmatrix} dt,$$

Значит,

$$g_\lambda m(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{\lambda\omega_3(x-t)}m_3(t) \\ e^{\lambda\omega_4(x-t)}m_4(t) \end{pmatrix} dt + \int_x^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -e^{\lambda\omega_1(x-t)}m_1(t) \\ -e^{\lambda\omega_2(x-t)}m_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

Продифференцируем:

$$(g_\lambda m(x))' = \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda\omega_3 e^{\lambda\omega_3(x-t)}m_3(t) \\ \lambda\omega_4 e^{\lambda\omega_4(x-t)}m_4(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3(x) \\ m_4(x) \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_x^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\lambda\omega_1 e^{\lambda\omega_1(x-t)}m_1(t) \\ -\lambda\omega_2 e^{\lambda\omega_2(x-t)}m_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt - \begin{pmatrix} -m_1(x) \\ -m_2(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \int_0^x \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda e^{\lambda\omega_3(x-t)} m_3(t) \\ \lambda e^{\lambda\omega_4(x-t)} m_4(t) \end{pmatrix} dt +$$

$$+\lambda \int_x^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda e^{\lambda\omega_1(x-t)} m_1(t) \\ -\lambda e^{\lambda\omega_2(x-t)} m_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} m_1(x) \\ m_2(x) \\ m_3(x) \\ m_4(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda D \underbrace{\left[\int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{\lambda\omega_3(x-t)} m_3(t) \\ e^{\lambda\omega_4(x-t)} m_4(t) \end{pmatrix} dt + \int_x^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -e^{\lambda\omega_1(x-t)} m_1(t) \\ -e^{\lambda\omega_2(x-t)} m_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \right]}_{g_\lambda m(x)} + m(x).$$

Значит, $g_\lambda m(x)$ удовлетворяет (1.38).

Рассмотрим теперь однородное уравнение:

$$w'(x) = \lambda D w(x).$$

Его общее решение имеет вид:

$$w(x) = \left(c_1 e^{\lambda\omega_1 x}, c_2 e^{\lambda\omega_2 x}, c_3 e^{\lambda\omega_3 x}, c_4 e^{\lambda\omega_4 x} \right)^T.$$

Значит общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$h(x,\lambda) = \left(c_1 e^{\lambda\omega_1 x}, c_2 e^{\lambda\omega_2 x}, c_3 e^{\lambda\omega_3 x}, c_4 e^{\lambda\omega_4 x} \right)^T +$$

$$+ g_\lambda m(x) = Y(x,\lambda) \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4)^T + g_\lambda m(x).$$

Для нахождения c_i подставим это решение в краевое условие:

$$M_{0\lambda} Y(0,\lambda) \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4)^T + M_{0\lambda} g_\lambda m(0) + M_{1\lambda} Y(\frac{1}{2}, \lambda) \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4)^T +$$

$$+M_{1\lambda}g_\lambda m(\frac{1}{2})+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t,\lambda)Y(t,\lambda)\cdot(c_1,c_2,c_3,c_4)^T\,dt+$$

$$+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t,\lambda)g_\lambda m(t)\,dt=0.$$

$$M_{0\lambda}Y(0,\lambda)\cdot(c_1,c_2,c_3,c_4)^T+M_{1\lambda}Y(\frac{1}{2},\lambda)\cdot(c_1,c_2,c_3,c_4)^T+$$

$$+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t,\lambda)Y(t,\lambda)\cdot(c_1,c_2,c_3,c_4)^T\,dt=-\Bigg(M_{0\lambda}\int_0^{\frac{1}{2}}g(0,t,\lambda)m(t)\,dt+$$

$$+M_{1\lambda}\int_0^{\frac{1}{2}}g(\frac{1}{2},t,\lambda)m(t)\,dt+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t,\lambda)g_\lambda m(t)\,dt\Bigg),$$

То есть

$$U(Y(x,\lambda))\cdot(c_1,c_2,c_3,c_4)^T=-\int_0^{\frac{1}{2}}U_x\left(g(x,t,\lambda)\right)m(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$(c_1,c_2,c_3,c_4)^T=-\left(\Delta(\lambda)\right)^{-1}\int_0^{\frac{1}{2}}U_x\left(g(x,t,\lambda)\right)m(t)\,dt,$$

а значит,

$$w(x)=w(x,\lambda)=-Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int_0^{\frac{1}{2}}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt+g_\lambda m(x).$$

□

Лемма 1.6. *Для матрицы $\Delta(\lambda)$ при больших $|\lambda|$ имеет место следующее представление:*

$$\Delta(\lambda)=\left([a_{ij}]+[b_{ij}]\,e^{\mu\omega_j}\right)_{i,j=1}^4\,, \tag{1.39}$$

где $\mu = \frac{\lambda}{2}$, a_{ij} (b_{ij}) *- компоненты матрицы* K_0 (L_0)*:*

$$K_0 = S \cdot \Gamma \cdot H_0(0) = S \cdot \Gamma,$$

$$L_0 = T \cdot \Gamma \cdot H_0(\frac{1}{2}),$$

$[a] = a + o(1)$.

Доказательство. Имеем

$$\Delta(\lambda) = U(Y(x,\lambda)) = U\left(diag\left(e^{\lambda\omega_1 x}, \ldots, e^{\lambda\omega_4 x}\right)\right) =$$

$$= M_{0\lambda}\begin{pmatrix} e^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} + M_{1\lambda}\begin{pmatrix} e^{\mu\omega_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu\omega_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu\omega_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu\omega_4} \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t,\lambda)\begin{pmatrix} e^{\lambda\omega_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda\omega_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda\omega_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda\omega_4 t} \end{pmatrix} dt.$$

Тогда, обозначив

$$\Delta_0(\lambda) = M_{0\lambda}\begin{pmatrix} e^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} + M_{1\lambda}\begin{pmatrix} e^{\mu\omega_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu\omega_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu\omega_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu\omega_4} \end{pmatrix} =$$

$$= M_{0\lambda}Y(0,\lambda) + M_{1\lambda}Y(\frac{1}{2},\lambda),$$

$$\Delta_1(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t,\lambda)\begin{pmatrix} e^{\lambda\omega_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda\omega_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda\omega_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda\omega_4 t} \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t,\lambda)Y(t,\lambda)\,dt,$$

получим:
$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \Delta_1(\lambda), \tag{1.40}$$

Рассмотрим подробнее $\Delta_1(\lambda)$:
$\Delta_1(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t,\lambda)Y(t,\lambda)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H(t,\lambda)Y(t,\lambda)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)\left(H_0(t) + \frac{1}{\lambda}H_1(t)\right)Y(t,\lambda)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)Y(t,\lambda)\,dt + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_1(t)Y(t,\lambda)\,dt =$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)\begin{pmatrix} e^{\lambda\omega_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda\omega_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda\omega_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda\omega_4 t} \end{pmatrix} dt +$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_1(t)\begin{pmatrix} e^{\lambda\omega_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda\omega_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda\omega_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda\omega_4 t} \end{pmatrix} dt.$$

Известно, что если $f(\xi,t)$ - непрерывная функция двух аргументов, то

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(\xi,t)e^{z\xi}\,d\xi = o(e^{z\gamma_1}) + o(e^{z\gamma_2}).$$

То есть элементы j - го $(j = 1, ...4)$ столбика первого слагаемого $\Delta_1(\lambda)$ имеют вид $o(1) + o(e^{\mu\omega_j})$, а второго слагаемого: $\frac{1}{\lambda}\left(o(1) + o(e^{\mu\omega_j})\right)$.

Значит $\Delta_1(\lambda) = o(1) + o(e^{\mu\omega_j}) + \frac{1}{\lambda}\left(o(1) + o(e^{\mu\omega_j})\right) = o(1) + o(e^{\mu\omega_j}) = o(1 + |e^{\mu\omega_j}|) = o(1 + e^{Re\,\mu\omega_j}) = o(e^0 + e^{Re\,\mu\omega_j}) =$

$$= \begin{cases} o\left(e^{Re\,\mu\omega_j}\left(e^{-Re\,\mu\omega_j} + 1\right)\right) = o\left(e^{Re\,\mu\omega_j}\right), & \text{при}\, j = 1\,, 2, \\ o\left(1 + e^{Re\,\mu\omega_j}\right) = o(1), & \text{при}\, j = 3\,, 4. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь $\Delta_0(\lambda)$:

$$\Delta_0(\lambda) = M_{0\lambda}Y(0,\lambda) + M_{1\lambda}Y(\frac{1}{2},\lambda) = M_0H(0,\lambda)Y(0,\lambda) + M_1H(\frac{1}{2},\lambda)Y(\frac{1}{2},\lambda) =$$

$$= M_0H(0,\lambda)Y(0,\lambda) + M_1H(\frac{1}{2},\lambda)Y(\frac{1}{2},\lambda) =$$

$$= S\cdot\Gamma\cdot\left(H_0(0)+\frac{1}{\lambda}H_1(0)\right)+T\cdot\Gamma\cdot\left(H_0(\frac{1}{2})+\frac{1}{\lambda}H_1(\frac{1}{2})\right)Y(\frac{1}{2},\lambda)=$$

$$= S\cdot\Gamma+\frac{1}{\lambda}S\cdot\Gamma H_1(0)+\left(T\cdot\Gamma\cdot H_0(\frac{1}{2})+\frac{1}{\lambda}T\cdot\Gamma\cdot H_1(\frac{1}{2})\right)Y(\frac{1}{2},\lambda)=$$

$$= K_0+\frac{1}{\lambda}K_1+\left(L_0+\frac{1}{\lambda}L_1\right)Y(\frac{1}{2},\lambda)=K_0+o(1)+(L_0+o(1))\,Y(\frac{1}{2},\lambda).$$

Обозначим элементы матриц K_0, L_0 соответственно a_{ij}, b_{ij} при $j=1,...,4$. Тогда, так как $\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\Delta_1(\lambda)$, то элементы первых двух столбиков ($j=1,2$) имеют вид: $a_{ij}+o(1)+(b_{ij}+o(1))e^{\mu\omega_j}+o(e^{\mu\omega_j})=[a_{ij}]+(b_{ij}+o(1)+o(1))\,e^{\mu\omega_j}=[a_{ij}]+[b_{ij}]\,e^{\mu\omega_j}$, $i=1,...,4$.
Последних двух столбиков ($j=3,4$): $a_{ij}+o(1)+(b_{ij}+o(1))e^{\mu\omega_j}+o(1)=[a_{ij}]+[b_{ij}]\,e^{\mu\omega_j}$, $i=1,...,4$. Тогда

$$\Delta(\lambda)=\left(a_{ij}+o(1)+(b_{ij}+o(1))e^{\mu\omega_j}+o(1)\right)_{ij}=\left([a_{ij}]+[b_{ij}]\,e^{\mu\omega_j}\right)_{ij},.$$

где $i=1,...,4,\ j=1,...,4$

□

Лемма 1.7. *Для* $det\Delta\,(\lambda)$ *имеет место асимтотическая формула*

$$det\Delta\,(\lambda)=\{\varphi(\lambda)+o(1)\}\,e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}, \tag{1.41}$$

где $\varphi(\lambda)=\theta_0+\theta_1e^{\mu(-\omega_1)}+\theta_2e^{\mu(-\omega_2)}+\theta_3e^{\mu(\omega_3-\omega_1-\omega_2)}+\theta_4e^{\mu(\omega_3-\omega_2)}+\theta_5e^{\mu(\omega_4-\omega_2)}+\theta_6e^{\mu(\omega_3-\omega_1)}+\theta_7e^{\mu(\omega_4-\omega_1)}+\theta_8e^{\mu(\omega_3+\omega_4-\omega_1-\omega_2)}$, θ_i *- комплексные числа, причем*

$$\theta_0=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} & a_{14}\\ b_{21} & b_{22} & a_{23} & a_{24}\\ b_{31} & b_{32} & a_{33} & a_{34}\\ b_{41} & b_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix},\ \theta_8=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} & b_{14}\\ a_{21} & a_{22} & b_{23} & b_{24}\\ a_{31} & a_{32} & b_{33} & b_{34}\\ b_{41} & a_{42} & b_{43} & b_{44}\end{vmatrix}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $det\left(a_{ij}+o(1)\right)_{ij}=det\left(a_{ij}\right)_{ij}+o(1)$. Рассмотрим определитель:

$$P_0=det\left([a_{ij}]+[b_{ij}]\,e^{\mu(\omega_j)}\right)_{i,j=1}^{4}$$

и разложим его на сумму определителей по столбцам, используя аддитивное свойство:

$$P_0 = det\left(([a_{ij}])_{ij}\right) + det\left([\check{a_1}][\check{a_2}][\check{a_3}][\check{b_4}]e^{\mu\omega_4}\right) + det\left([\check{a_1}][\check{a_2}][\check{b_3}]e^{\mu\omega_3}[\check{b_4}]e^{\mu\omega_4}\right) +$$

$$+det\left([\check{a_1}][\check{b_2}]e^{\mu\omega_2}[\check{b_3}]e^{\mu\omega_3}[\check{b_4}]e^{\mu\omega_4}\right) + \ldots + det\left([\check{b_1}]e^{\mu\omega_1}[\check{b_2}]e^{\mu\omega_2}[\check{b_3}]e^{\mu\omega_3}[\check{b_4}]e^{\mu\omega_4}\right),$$

где $[\check{\ }]$, $j = \overline{1,4}$ - обозначение j-го столбика. После вынесения в каждом слагаемом за скобки $e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}$ получим (1.41). Лемма доказана.

□

Зафиксируем $arg\lambda$. Потребуем, чтобы $\theta_0 \cdot \theta_8 \neq 0$ (условие регулярности). Из (1.41) следует, что нули $det\Delta(\lambda)$, а именно они являются собственными значениями краевой задачи (1.38), при больших $|\lambda|$ находятся в полосах, границы которых параллельны некоторым лучам, исходящим из точки $\lambda = 0$, причем в каждой полосе в любом прямоугольнике единичной длины число нулей $det\Delta(\lambda)$ ограничено числом, не зависящем от прямоугольника. Тогда известно ([41]; гл. 3, § 1, лемма 1), что, если удалить все собственные значения вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ, то в получившейся области S_δ справедлива оценка:

$$|det\,\Delta\,(\lambda)\,| \geq c \cdot \left|e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}\right|, \tag{1.42}$$

где $c > 0$ и зависит только от δ.

Лемма 1.8. *В области S_δ при больших λ для решения $w(x,\lambda) = R_{1\lambda}m$ задачи (1.38) имеют место оценки:*

$$\begin{array}{l} \|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\|m\|_1) \\ \|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\psi(\lambda)\,\|m\|_\infty) \\ \|R_{1\lambda}m\|_1 = O(\psi(\lambda)\,\|m\|_1) \\ \|R_{1\lambda}\chi\|_\infty = O(\frac{1}{\lambda}) \end{array}, \tag{1.43}$$

где $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ нормы в пространстве вектор функций $L_\infty(0,\frac{1}{2})$, $L(0,\frac{1}{2})$, $\chi(x)$ - вектор функция, у которой каждая компонента есть характери-

стическая функция какого-нибудь отрезка, содержащегося в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{4} \varkappa\left(|Re\,\lambda\omega_j|\right)$, $\varkappa(y) = \frac{1-e^{-y}}{y}$ *при* $y \geq 0$.

Доказательство. Докажем первую оценку. В силу (1.39) алгебраические дополнения элементов матрицы $\Delta(\lambda)$ имеют оценки:

$$\begin{array}{l} \Delta_{i1} = O(e^{\mu\omega_2}) \\ \Delta_{i2} = O(e^{\mu\omega_1}) \\ \Delta_{i3} = O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) \\ \Delta_{i4} = O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) \end{array}. \tag{1.44}$$

Поэтому:

$$(d_{ij})_{i,j=1}^{4} = Y(x,\lambda) \cdot \Delta^{-1}(\lambda) = Y(x,\lambda) \cdot \frac{1}{det\Delta(\lambda)} \cdot \Delta(\lambda)^*,$$

где $\Delta(\lambda)^*$ - присоединенная матрица к $\Delta(\lambda)$, составленная из алгебраических дополнений. Тогда, по (1.42) и (1.44):

$$d_{1j} = O\left(\frac{e^{\lambda\omega_1 x} \cdot e^{\mu\omega_2}}{e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}}\right) = O\left(e^{\lambda\omega_1 x} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_1}\right) = O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right),$$

$$d_{2j} = O\left(\frac{e^{\lambda\omega_2 x} \cdot e^{\mu\omega_1}}{e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}}\right) = O\left(e^{\lambda\omega_2 x} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_2}\right) = O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right),$$

$$d_{3j} = O\left(\frac{e^{\lambda\omega_3 x} \cdot e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}}{e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}}\right) = O\left(e^{\lambda\omega_3 x}\right),$$

$$d_{4j} = O\left(\frac{e^{\lambda\omega_4 x} \cdot e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}}{e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}}\right) = O\left(e^{\lambda\omega_4 x}\right).$$

Рассмотрим теперь $\|g_\lambda(m(x))\|_\infty$:

$$\|g_\lambda(m(x))\|_\infty = \left\| \int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda) m(t)\, dt \right\|_\infty =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left\| \int_0^{\frac{1}{2}} (-\varepsilon(t,x)) e^{\lambda\omega_k(x-t)} m_k(t)\, dt \right\|_\infty + \sum_{k=3}^{4} \left\| \int_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t) e^{\lambda\omega_k(x-t)} m_k(t)\, dt \right\|_\infty =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left\| \int\limits_0^x + \int\limits_x^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty + \sum_{k=3}^{4} \left\| \int\limits_0^x + \int\limits_x^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty .$$

По определению $\varepsilon(t, x)$ в каждом слагаемом останется только один интеграл, например, в последнем, при $k = 4$, останется первый. Тогда, для него $\left\| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t) e^{\lambda\omega_4(x-t)} m_4(t)\, dt \right\|_\infty = \left\| \int\limits_0^{x} e^{\lambda\omega_4(x-t)} m_4(t)\, dt \right\|_\infty \leq$ $\int\limits_0^x \left| e^{\lambda\omega_4(x-t)} \right| |m_4(t)|\ dt \leq \int\limits_0^x |m_4(t)|\ dt \leq \int\limits_0^1 |m_4(t)|\ dt = \|m_4\|_1$.

Аналогично для других слагаемых. Тогда

$\|g_\lambda(m(x))\|_\infty \leq \sum\limits_1^4 \|m_k\|_1 = \|m(x)\|_1$.

Рассмотрим теперь $\int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\, dt$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\, dt = M_{0\lambda} \int_0^{\frac{1}{2}} g(0,t,\lambda)m(t)\, dt + M_{1\lambda} \int_0^{\frac{1}{2}} g(\frac{1}{2},t,\lambda)m(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\eta,\lambda) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)\, dt \right) d\eta.$$

Так как элементы матриц $M_{0\lambda}$, $M_{1\lambda}$, $\Omega(\eta,\lambda)$ есть $O(1)$, то элементы $\int_0^{\frac{1}{2}} U_x g(x,t,\lambda)m(t)\, dt$ имеют оценку $O(\|m\|)_1$.

Значит,

$\|R_{1\lambda}m\|_\infty = \left\| -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{\frac{1}{2}} U_x g(x,t,\lambda)m(t)\, dt + g_\lambda m(x) \right\|_\infty \leq$

$$\left\| \begin{pmatrix} O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right) \\ O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right) \\ O\left(e^{\lambda\omega_3}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_3}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_3}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_3}\right) \\ O\left(e^{\lambda\omega_4}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_4}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_4}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_4}\right) \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times\, (O(\|m\|_1),\, O(\|m\|_1),\, O(\|m\|_1),\, O(\|m\|_1))^T + g_\lambda m(x) \right\|_\infty =$$

$$+ \left\| (O(\|m\|_1),\, O(\|m\|_1),\, O(\|m\|_1),\, O(\|m\|_1))^T \right\|_\infty = O\left(\|m\|_1\right)$$

Докажем вторую оценку: Рассмотрим сначала

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)\, dt,$$

это столбик, на j - том месте которого стоит $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} -\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_j(x-t)}m_j(t)\,dt$ при $j=1,2$ или $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_j(x-t)}m_j(t)\,dt$ при $j=3,4$. Рассмотрим, например $j=4$:

$$\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_4(x-t)}m_4(t)\,dt\right| \leq \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t)e^{Re\lambda\omega_4(x-t)}|m_4(t)|\,dt \leq$$
$$||m_4||_\infty \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t)e^{Re\lambda\omega_4(x-t)}\,dt = ||m_4||_\infty \int\limits_0^{x} e^{Re\lambda\omega_4(x-t)}\,dt =$$
$$||m_4||_\infty e^{Re\lambda\omega_4 x}\int\limits_0^{x} e^{-Re\lambda\omega_4 t}\,dt = ||m_4||_\infty e^{Re\lambda\omega_4 x}\frac{1}{-Re\lambda\omega_4}\left(e^{-Re\lambda\omega_4 x}-1\right) =$$
$$||m_4||_\infty \frac{1-e^{Re\lambda\omega_4 x}}{-Re\lambda\omega_4} \leq ||m_4||_\infty \frac{1-e^{Re\lambda\omega_4}}{-Re\lambda\omega_4} = ||m_4||_\infty \frac{1-e^{-|Re\lambda\omega_4|}}{|Re\lambda\omega_4|} \leq ||m||_\infty \frac{1-e^{-|Re\lambda\omega_4|}}{|Re\lambda\omega_4|}$$

Аналогично для других компонент. Значит, для произвольного $x \in [0,\frac{1}{2}]$ имеет место:

$$\left\|\int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)\,dt\right\|_\infty = \sum_{k=1}^{4} O\left(\|m\|_\infty \frac{1-e^{-|Re\lambda\omega_k|}}{|Re\lambda\omega_k|}\right) = O\left(\|m\|_\infty \psi(\lambda)\right),$$

теперь вторая оценка становится очевидной.

Докажем третью оценку:

Также, как во второй оценке, рассмотрим 4-ую компоненту столбика $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)\,dt$:

$$\left\|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_4(x-t)}m_4(t)\,dt\right\|_1 = \int\limits_0^{1}\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_4(x-t)}m_4(t)\,dt\right|dx \leq$$
$$\int\limits_0^{1}\left(\int\limits_0^{1} \varepsilon(x,t)\left|e^{\lambda\omega_4(x-t)}\right||m_4(t)|\,dt\right)dx \leq \int\limits_0^{1}|m_4(t)|\left|e^{-\lambda\omega_4 t}\right|\left(\int\limits_0^{1}\varepsilon(x,t)\left|e^{\lambda\omega_4 x}\right|dx\right)dt =$$
$$\int\limits_0^{1}|m_4(t)|\left|e^{-\lambda\omega_4 t}\right|\left(\int\limits_t^{1} e^{Re\lambda\omega_4 x}\,dx\right)dt = \frac{1}{Re\lambda\omega_4}\int\limits_0^{1}|m_4(t)|\left|e^{-\lambda\omega_4 t}\right|\left(e^{Re\lambda\omega_4}-e^{Re\lambda\omega_4 t}\right)dt =$$
$$-\frac{1}{Re\lambda\omega_4}\int\limits_0^{1}|m_4(t)|\left(1-e^{Re\lambda\omega_4(1-t)}\right)dt \leq -\frac{1}{Re\lambda\omega_4}\int\limits_0^{1}|m_4(t)|\left(1-e^{Re\lambda\omega_4}\right)dt =$$
$$-\frac{1-e^{Re\lambda\omega_4}}{Re\lambda\omega_4}\|m_4(x)\|_1 = \frac{1-e^{-|Re\lambda\omega_4|}}{|Re\lambda\omega_4|}\|m_4(x)\|_1 = O\left(\|m_4(x)\|_1\psi(\lambda)\right).$$

Значит, $\|g_\lambda m(x)\|_1 = O\left(\|m_4(x)\|_1\psi(\lambda)\right)$.

Докажем четвертую оценку:

Пусть $\chi(t) = (\chi_1(t),\chi_2(t),\chi_3(t),\chi_4(t),)^T$, где $\chi_i(t) = \begin{cases} 1, t \in [a_i, b_i]\,, \\ 0, t \notin [a_i, b_i]\,, \end{cases}$,

$[a_i, b_i] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Рассмотрим опять, для примера, 4-ую компоненту: $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda) m(t)\,dt$:

$I_4 = \left\| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon(x,t) e^{\lambda\omega_4(x-t)} \chi_4(t)\,dt \right\|_\infty = \left\| \int\limits_{a_4}^{b_4} \varepsilon(x,t) e^{\lambda\omega_4(x-t)}\,dt \right\|_\infty$.

Если $[0,x] \cap [a_4, b_4] = [\alpha_4, \beta_4]$, то

$I_4 = \left\| \int\limits_{\alpha_4}^{\beta_4} e^{\lambda\omega_4(x-t)}\,dt \right\|_\infty \leq \left| \int\limits_{\alpha_4}^{\beta_4} e^{\lambda\omega_4(x-t)}\,dt \right| = \left| \frac{e^{\lambda\omega_4 x}(e^{-\lambda\omega_4\beta_4} - e^{-\lambda\omega_4\alpha_4})}{-\lambda\omega_4} \right| \leq \frac{\left|e^{\lambda\omega_4(x-\beta_4)}\right| + \left|e^{\lambda\omega_4(x-\alpha_4)}\right|}{|\lambda\omega_4|} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Значит, и

$$\|R_{1\lambda}\chi\|_\infty = O(\frac{1}{\lambda})$$

как сумма слагаемых с оценкой $O(\frac{1}{\lambda})$.

□

Замечание 1.2. *Если $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)^T$, $m_i \in C[0, \frac{1}{2}]$, то*

$$\|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\|m\|_{C[0,\frac{1}{2}]} \cdot \psi(\lambda)).$$

Доказательство. Очевидно, если в доказательстве леммы (1.8) использовать $\|m\|_\infty = \|m\|_{C[0,\frac{1}{2}]}$. □

Лемма 1.9. *Если $f(x)$ – вектор – функция с компонентами, являющимися функциями ограниченной вариации, то*

$$\|R_{1\lambda}f\|_{C[0,\frac{1}{2}]} = O(\frac{1}{\lambda}).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$R_{1\lambda}f = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_x\left(g(x,t,\lambda)\right) f(t)\,dt + g_\lambda(f(x)).$$

Известно, что элементы первой строки матрицы $Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$ имеют оценку $O(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})})$, второй строки: $O(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})})$, третьей строки: $O(e^{\lambda\omega_3 x})$, четвертой строки: $O(e^{\lambda\omega_3 x})$. Рассмотрим $g_\lambda(f(x))$:

$g_\lambda(f(x)) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(-\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_1(x-t)}f_1(t), -\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_2(x-t)}f_2(t),\right.$

$\left.\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_3(x-t)}f_3(t), \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_4(x-t)}f_4(t)\right)^T\,dt.$

Тогда

$\|g_\lambda(f(x))\|_{C[0,\frac{1}{2}]} = \sum\limits_{k=1}^{2}\left\|-\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_k(x-t)}f_k(t)\right\|_{C[0,\frac{1}{2}]} + \sum\limits_{k=3}^{4}\left\|\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_k(x-t)}f_k(t)\right\|_{C[0,\frac{1}{2}]} = \sum\limits_{k=1}^{2}\left\|\int\limits_0^x + \int\limits_x^{\frac{1}{2}}\right\|_{C[0,\frac{1}{2}]} + \sum\limits_{k=3}^{4}\left\|\int\limits_0^x + \int\limits_x^{\frac{1}{2}}\right\|_{C[0,\frac{1}{2}]}.$

По определению функции $\varepsilon(x,t)$ в каждом слагаемом останется один интеграл, например, в последнем слагаемом останется первый. Рассмотрим его при $k=4$:

$I = \int\limits_0^x e^{\lambda\omega_4(x-t)}f_4(t)\,dt = \int\limits_0^x \left(\frac{-1}{\lambda\omega_4}e^{\lambda\omega_4(x-t)}\right)_t' f_4(t)\,dt.$

Так как $f_4(x)$ – функция ограниченной вариации, то можно применить формулу интегрирования по частям:

$I = \left(\frac{-1}{\lambda\omega_4}e^{\lambda\omega_4(x-t)}\right)\Big|_{t=0}^{t=x} - \frac{1}{\lambda\omega_4}\int\limits_0^x e^{\lambda\omega_4(x-t)}\,df_4(t) = O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}) = O(\frac{1}{\lambda})$ $\square$

Лемма 1.10. *В S_δ при больших $|\lambda|$*

$$\|R_{1\lambda}N_\lambda\|_\infty = o(1).$$

Доказательство. С одной стороны, $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda)$. С другой стороны, можем записать:

$N_\lambda = N_\lambda - H_0^{-1}NH_0 + H_0^{-1}NH_0$. Тогда $R_{1\lambda}\left(N_\lambda - H_0^{-1}NH_0\right) + R_{1\lambda}\left(H_0^{-1}NH_0\right)$.

Так как $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x))$, то матрицу $H(x,\lambda)$ можно записать так:

$$H(x,\lambda) = \begin{pmatrix} a & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & b & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & c & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & d \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, O(\frac{1}{\lambda})$ - непрерывно-дифференцируемые по x функции в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Тогда $H^{-1}(x,\lambda)$ имеет вид:

$$H^{-1}(x,\lambda) = h \cdot \begin{pmatrix} bcd + O(\frac{1}{\lambda^2}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & acd + O(\frac{1}{\lambda^2}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & abd + O(\frac{1}{\lambda^2}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & abc + O(\frac{1}{\lambda^2}) \end{pmatrix},$$

где $h = \frac{1}{abcd + O(\frac{1}{\lambda^2})}$ Запишем также N в виде:
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, где $a_{ij},\ i,j = 1,...,4$ непрерывно-дифференцируемые по x функции в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Тогда
$N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda) N H(x,\lambda) =$

$$= \ h \cdot \begin{pmatrix} a_{11}abcd + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{12}b^2cd + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{13}c^2bd + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{14}d^2bc + O(\frac{1}{\lambda}) \\ a_{21}a^2cd + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{22}abcd + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{23}c^2ad + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{24}d^2ac + O(\frac{1}{\lambda}) \\ a_{31}a^2bd + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{32}b^2ad + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{33}abcd + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{34}d^2ab + O(\frac{1}{\lambda}) \\ a_{41}a^2bc + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{42}b^2ac + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{43}c^2ab + O(\frac{1}{\lambda}) & a_{44}abcd + O(\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix}.$$

Также можно выписать матрицу $H_0^{-1} N H_0$:

$$H_0^{-1} N H_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\frac{b}{a} & a_{13}\frac{c}{a} & a_{14}\frac{d}{a} \\ a_{21}\frac{a}{b} & a_{22} & a_{23}\frac{c}{b} & a_{24}\frac{d}{b} \\ a_{31}\frac{a}{c} & a_{32}\frac{b}{c} & a_{33} & a_{34}\frac{d}{c} \\ a_{41}\frac{a}{d} & a_{42}\frac{b}{d} & a_{43}\frac{c}{d} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Тогда элементы матрицы $N_\lambda - H_0^{-1} N H_0$ имеют вид: $O(\frac{1}{\lambda})$. И по лемме 1.8 $\left\| R_{1\lambda}\left(N_\lambda - H_0^{-1} N H_0\right)\right\|_\infty = O(\frac{1}{\lambda})$.

Покажем теперь, что $\left\| R_{1\lambda}(H_0^{-1} N H_0)\right\|_\infty = O(\frac{1}{\lambda})$:
По определению: $H_0^{-1} N H_0 = H_0^{-1} D \Gamma^{-1} \tilde{N} \Gamma H_0$. Тогда: $R_{1\lambda}(H_0^{-1} N H_0 m(x)) =$

$$-Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda)) H_0^{-1} D \Gamma^{-1} \tilde{N} \Gamma H_0 m(t)\, dt \qquad +$$

$g_\lambda\left(H_0^{-1}D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma H_0 m(x)\right) = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))H_0^{-1}D\Gamma^{-1}$
$\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(t,\eta)\Gamma H_0 m(\eta)\,d\eta\right)\,dt + g_\lambda\left(H_0^{-1}D\Gamma^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)\Gamma H_0 m(t)\,dt\right).$
Рассмотрим последнее слагаемое:
$g_\lambda\left(H_0^{-1}D\Gamma^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)\Gamma H_0 m(t)\,dt\right) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)H_0^{-1}D\Gamma^{-1}\times$
$\times\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(t,\eta)\Gamma H_0(\eta)m(\eta)\,d\eta\right)\,dt.$
Это столбец, k – тый элемент которого имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{4}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_k(x-t)}\left[\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{4}a_{ki}(t,\eta)m_i(\eta)\right)\,d\eta\,dt\right]. \qquad (1.45)$$

В (1.45) рассмотрим одно из слагаемых, например при $k=4$, $i=1$:
$I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_4(x-t)}\left[\int\limits_0^{\frac{1}{2}} a_{41}(t,\eta)m_1(\eta)\,d\eta\right]\,dt.$
Поменяем порядки интегрирования:
$I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} m_1(\eta)\,d\eta\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_4(x-t)}a_{41}(t,\eta)\,dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} m_1(\eta)\,d\eta\int\limits_0^{x} e^{\lambda\omega_4(x-t)}a_{41}(t,\eta)\,dt =$
$o(1)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} m_1(\eta)\,d\eta = o(1)\left\|m_1\right\|_1.$
Аналогично другие слагаемые. Значит,
$\left\|R_{1\lambda}(H_0^{-1}NH_0)m\right\|_\infty = o(1)\left\|m\right\|_1.$ □

Следствие 1.1. *В S_δ при больших $|\lambda|$ оператор $E + R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda$ обратим в L_∞.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\|R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda\|_\infty \leq 1$. В самом деле: $\|R_{1\lambda}N_\lambda\|_\infty = o(1)$ по лемме 1.10. Так как $P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)\left(H_1'(x) + P_3(x)H_1(x)\right)$, то, по первой оценке из (1.43) $\|R_{1\lambda}P_3(x,\lambda)\|_\infty = O(\|P_3(x,\lambda)\|_1) = O(\frac{1}{\lambda})$. □

Лемма 1.11. *В области S_δ при больших $|\lambda|$ система (1.33), (1.34) однозначно разрешима и для ее решения $v(x,\lambda) = v(x)$ справедлива оценка:*

$$\| v(x) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)) \|_\infty = O\left(\left(\frac{1}{|\lambda|} + \psi^2(\lambda)\right) \|f\|_1\right).$$

Доказательство. Для решения задачи (1.33) имеем:

$v'(x) = -\lambda Dv(x) - P_3(x,\lambda)v(x) - N_\lambda v(x) - P_1(x,\lambda)v(0) - P_2(x,\lambda)v(\frac{1}{2}) + m(x,\lambda)$.

Обозначим $q(x,\lambda) = -P_3(x,\lambda)v(x) - N_\lambda v(x) - P_1(x,\lambda)v(0) - P_2(x,\lambda)v(\frac{1}{2}) + m(x,\lambda)$.

Тогда

$$v'(x) = -\lambda Dv(x) + q(x,\lambda).$$

Значит,

$v(x) = R_{1\lambda}q(x,\lambda) = R_{1\lambda}\left(-P_3(x,\lambda)v(x) - N_\lambda v(x) - P_1(x,\lambda)v(0) - \right.$
$\left. -P_2(x,\lambda)v(\frac{1}{2}) + m(x,\lambda)\right)$.

Сгруппируем:

$(E + R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda)\, v(x) = -R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)v(0) - R_{2\lambda}P_1(x,\lambda)v(\frac{1}{2}) + R_{1\lambda}m(x,\lambda)$.

Обозначим

$L_\lambda = (E + R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda)^{-1}$.

Следовательно, $v(x) = -L_\lambda R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)v(0) - L_\lambda R_{1\lambda}P_2(x,\lambda)v(\frac{1}{2}) + L_\lambda R_{1\lambda}m(x,\lambda)$.

Подставим $x = 0,\ \frac{1}{2}$ и получим, что для нахождения $v(0),\ v(\frac{1}{2})$ надо решить систему:

$$\begin{cases} d_{11}v(0) + d_{12}v(\frac{1}{2}) = d_1 \\ d_{21}v(0) + d_{22}v(\frac{1}{2}) = d_2, \end{cases} \tag{1.46}$$

где

$d_{11} = E + L_\lambda R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)\,|_{x=0}$,

$d_{21} = L_\lambda R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)\,|_{x=\frac{1}{2}}$,

$d_{12} = L_\lambda R_{1\lambda} P_2(x,\lambda) \mid_{x=0}$,
$d_{22} = E + L_\lambda R_{1\lambda} P_2(x,\lambda) \mid_{x=\frac{1}{2}}$,
$d_1 = L_\lambda R_{1\lambda} m(x,\lambda) \mid_{x=0}$,
$d_2 = L_\lambda R_{1\lambda} m(x,\lambda) \mid_{x=\frac{1}{2}}$.
Тогда $d_{11} = E + L_\lambda R_{1\lambda} H^{-1}(x,\lambda) P_1(x) H(0,\lambda) \mid_{x=0} = E + (E + R_{1\lambda} P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda} N_\lambda)^{-1} \left(R_{1\lambda} H^{-1}(x,\lambda) P_1(x) H(0,\lambda)\right) \mid_{x=0} = E + (E + o(1))\, O(1) = E + o(1)$.
Аналогично доказывается, что $d_{21} = o(1)$, $d_{12} = o(1)$, $d_{22} = E + o(1)$, $d_1 = O(\|f\|_1)$, $d_2 = O(\|f\|_1)$.
Тогда (1.46) можно переписать:

$$\begin{cases} (E + o(1))\, v(0) + o(1) v(\frac{1}{2}) = O(\|f\|_1), \\ o(1) v(0) + (E + o(1))\, v(\frac{1}{2}) = O(\|f\|_1). \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $v(0) = (E + o(1))^{-1} \left[O(\|f\|_1) + o(1) v(\frac{1}{2})\right] = (E + o(1)) \left[O(\|f\|_1) + o(1) v(\frac{1}{2})\right] = O(\|f\|_1) + o(1) + o(1) v(\frac{1}{2})$.
Подставим во второе уравнение системы:
$o(1) \left[O(\|f\|_1) + o(1) + o(1) v(\frac{1}{2})\right] + (E + o(1))\, v(\frac{1}{2}) = O(\|f\|_1)$.
Тогда $(E + o(1))\, v(\frac{1}{2}) = O(\|f\|_1) + o(1)$.
Следовательно,
$v(\frac{1}{2}) = (E + o(1))\, O(\|f\|_1) + o(1) = O(\|f\|_1)$.
Вернемся к первому уравнению: $(E + o(1))\, v(0) + o(1) v(\frac{1}{2}) = O(\|f\|_1)$.
Следовательно,
$v(0) = (E + o(1))\, (O(\|f\|_1) + o(1)) = O(\|f\|_1)$. Тогда
$v(x) = L_\lambda R_{1\lambda} P_1(x,\lambda) O(\|f\|_1) + L_\lambda R_{1\lambda} P_2(x,\lambda) O(\|f\|_1) + L_\lambda R_{1\lambda} m(x,\lambda)$. Тогда, так как L_λ – ограниченный оператор,
$v(x) = O\left(\|R_{1\lambda} P_1(x,\lambda)\|_\infty \|f\|_1\right) + O\left(\|R_{1\lambda} P_2(x,\lambda)\|_\infty \|f\|_1\right) + L_\lambda R_{1\lambda} m(x,\lambda)$.
Далее, если $\varphi(x)$ – функция ограниченной вариации, то $\|R_{1\lambda}\|_\infty = O(\frac{1}{\lambda})$ и, следовательно,

$$v(x) = O(\frac{1}{\lambda} \|f\|_1) + L_\lambda R_{1\lambda} m(x,\lambda). \tag{1.47}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (1.47): По лемме 1.8:

$$\|R_{1\lambda}\|_{\infty} = O\left(\|m\|_1\right).$$

Тогда, так как $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$, а $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, получим:
$H^{-1}(x,\lambda) = \left(H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)\right)^{-1} = H_0^{-1}(x)\left[E + \lambda^{-1}H_1(x)H_0^{-1}\right]^{-1} = H_0^{-1}\left[E + O(\frac{1}{\lambda})\right]$. Следовательно,
$L_\lambda R_{1\lambda} m(x,\lambda) = L_\lambda R_{1\lambda}\left(H^{-1}(x,\lambda)m(x)\right) = L_\lambda R_{1\lambda}\left[\left(H_0^{-1}(x) + H_0^{-1}(x)O(\frac{1}{\lambda})\right)m(x)\right] = L_\lambda R_{1\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_1\right)$.
Рассмотрим подробнее оператор L_λ:
$L_\lambda = (E + R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda)^{-1}$,
$L_\lambda^{-1} = E + R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda$,
$L_\lambda\left(E + R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda\right) = E$,
$L_\lambda E + L_\lambda R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + L_\lambda R_{1\lambda}N_\lambda = E$,
$L_\lambda = E - L_\lambda R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) - L_\lambda R_{1\lambda}N_\lambda$.
Значит,
$L_\lambda R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x) = R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x) - L_\lambda\left(R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda\right)R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x) = R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_1\right) - L_\lambda R_{1\lambda}N_\lambda R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)$.
Рассмотрим теперь $L_\lambda R_{1\lambda}N_\lambda R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)$:
$L_\lambda R_{1\lambda}N_\lambda R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x) = L_\lambda R_{1\lambda}H_0^{-1}NH_0R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\|m\|_1\right) = O\left(\psi(\lambda)\left\|H_0^{-1}NH_0R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)\right\|_1\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\|m\|_1\right) = O\left(\psi(\lambda)\psi(\lambda)\|m\|_1\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\|m\|_1\right) = O\left(\psi^2(\lambda)\|f\|_1\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_1\right)$.
Значит,

$$\| v(x) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda) \|_{\infty} = O\left(\left(\frac{1}{|\lambda|} + \psi^2(\lambda)\right)\|f\|_1\right)$$

□

Лемма 1.12. *Если $m(x) = \chi(x)$, то*

$$\left\|v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right\|_{\infty} = O(\lambda^{-2}).$$

Доказательство. Аналогично лемме 1.11, при этом учесть, что $d_i = O(\lambda^{-1})$, $i = 1, 2$ $\square$

Лемма 1.13. *Для любой* $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right] \, d\lambda \right\|_\infty = 0$$

(считается, что окружности $|\lambda| = r$ *находятся в* S_δ*.)*

Доказательство. Рассмотрим $H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right]$:
$H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right] = \left(H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\right)v(x,\lambda) - \left(H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\right)R_1H_0^{-1}m(x,\lambda) = H_0(x)\left(v(x,\lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}(x)m(x,\lambda)\right) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\left(v(x,\lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}(x)m(x,\lambda)\right)$.
По лемме 1.11
$H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right] = H_0(x)O\left(\psi^2(\lambda) + (\frac{1}{\lambda})\|m\|_1\right) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)O\left(\psi^2(\lambda) + (\frac{1}{\lambda})\|m\|_1\right)$.
Тогда
$\int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right] d\lambda = O(I_1 + I_2)$, где
$I_1 = \int\limits_{|\lambda|=r} H_0(x)O\left(\psi^2(\lambda) + (\frac{1}{\lambda})\|m\|_1\right) d\lambda$,
$I_2 = \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda}H_1(x)O\left(\psi^2(\lambda) + (\frac{1}{\lambda})\|m\|_1\right)$.
Рассмотрим I_1:
$I_1 = \int\limits_{|\lambda|=r} H_0(x)\psi^2(\lambda)\|m\|_1 \, d\lambda + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{|\lambda|=r} H_0(x)\|m\|_1 \, d\lambda = J_1 + J_2$.
Рассмотрим сначала J_2. Сделаем замену:
$\lambda = re^{i\varphi}$, Тогда $|\lambda| = r$, $d\lambda = rd\varphi$. Значит
$J_2 = O(\frac{1}{r})\int\limits_0^{2\pi} r\|m\|_1 = O(1)$
Рассмотрим J_1:
$J_1 = O\left(\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{\left(1-e^{-Re\lambda\omega_2}\right)^2}{|Re\lambda\omega_2|^2}|d\lambda|\right)$
Сделаем замену:
$\lambda\omega_2 = re^{i\varphi}$, Тогда $d\lambda = \frac{1}{\omega_2}rd\varphi$. Тогда

$J_1 = O\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-e^{-r\,cos\varphi})^2}{r\,cos^2\varphi}\,d\varphi\right) = O\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right).$

Рассмотрим первый интеграл: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(1-e^{-r\,cos\varphi})^2}{r\,cos^2\varphi}\,d\varphi.$

Сделаем замену: $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$,

$0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, а значит $\frac{2\psi}{\pi} \le \sin\psi \le \psi$. Тогда

$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1-e^{-r\,sin\psi}\right)^2}{r\,sin^2\psi}\,d\psi \le \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1-e^{-r\,\psi}\right)^2}{r\,\psi^2}\,d\psi.$

Замена $r\psi = \xi$, $d\psi = \frac{1}{r}d\xi$ дает:

$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1-e^{-r\,\psi}\right)^2}{r\,\psi^2}\,d\psi = \int\limits_{0}^{\frac{r\pi}{2}} \frac{1}{\xi^2}(1-e^{-\xi})^2\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\xi^2}(1-e^{-\xi})^2\,d\xi + \int\limits_{1}^{\frac{r\pi}{2}} \frac{1}{\xi^2}(1-e^{-\xi})^2\,d\xi.$

В первом интеграле особенность пропадает после разложения $e^{-\xi}$ в ряд, а второй сходится.

Значит $I_1 = O(1)$. Легко увидеть, что $I_2 = o(1)$, то есть $\int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right]\,d\lambda$ ограничен. Если же возьмем $f(x) = \chi(x)$, то аналогично легко показать, что $\int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right]\,d\lambda = o(1)$. По теореме Банаха – Штейнгауза лемма доказана. □

2 Теорема равносходимости для интегрального оператора A

2.1 Аналог теоремы Штейнгауза

Пусть L : $L(y) = y'$, $y(0) = y(1)$ – дифференциальный оператор. Рассмотрим краевую задачу:

$$L = y'(x) = \lambda y(x) + f(x) \tag{2.1}$$

$$y(0) = y\,(1) \tag{2.2}$$

Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L. Пусть $y(x) = (R_\lambda f)(x)$. Тогда $y(x)$ – решение краевой задачи (2.1), (2.2). Докажем теорему:

Теорема 2.1. *Решение (2.1), (2.2) имеет вид:*

$$y(x) = R_\lambda f = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \left[\int\limits_0^x e^{-\lambda t} f(t)dt + \int\limits_x^1 e^{\lambda(1-t)} f(t)dt \right],$$

где $\Delta(\lambda) = 1 - e^\lambda$.

Доказательство. Очевидно, что решение (2.1) имеет вид:

$$y(x) = R_\lambda f = y(x) = ce^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt, \tag{2.3}$$

где c – некоторая константа. Для определения c, подставим $x = 0$ и $x = 1$ в равенство (2.3):

$$c = ce^\lambda + \int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)} f(t)dt,$$

тогда

$$c = \frac{1}{1-e^{\lambda}} \int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)} f(t)dt.$$

Значит:

$$R_\lambda f = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)} f(t)dt + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt, \tag{2.4}$$

где $\Delta(\lambda) = 1 - e^{\lambda}$. Преобразуем (2.4):

$$R_{\lambda f} = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \left[e^{\lambda} \int\limits_0^1 e^{-\lambda t} f(t)dt + \frac{1-e^{\lambda}}{e^{\lambda x}} \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt \right] =$$

$$= \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \left[e^{\lambda} \int\limits_0^1 e^{-\lambda t} f(t)dt + \frac{1}{e^{\lambda x}} \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt - \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda x}} \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt \right] =$$

$$= \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \left[e^{\lambda} \int\limits_0^1 e^{-\lambda t} f(t)dt + \int\limits_0^x e^{-\lambda t} f(t)dt - e^{\lambda} \int\limits_0^x e^{-\lambda t} f(t)dt \right] =$$

$$= \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \left[\int\limits_0^x e^{-\lambda t} f(t)dt + \int\limits_x^1 e^{\lambda(1-t)} f(t)dt \right]$$

Теорема доказана.

□

Пусть $a(x) \in Lip[0;1]$, то есть $\forall x, t \in [0;1]$: $|a(x) - a(t)| \le M|x-t|$ для некоторого $M > 0$. Также пусть $a(0) = a(1)$. Рассмотрим разность:

$$\Omega_r(f, x) = a(x)\sigma_r(f, x) - \sigma_r(af, x),$$

где $\sigma_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda$.

Удалим из комплексной плоскости собственные значения оператора L вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_1. Обозначим полученную область за S_{δ_1}. Имеет место теорема:

Теорема 2.2. *Имеет место неравенство:*

$$|\Omega_r(f,x)| \leq c\,\|f\|_1\,,$$

где $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 \|f(t)\|\,dt$ *и* r *таково, что окружность* $|\lambda| = r$ *целиком находятся в* S_{δ_1}

Доказательство. Рассмотрим разность $S = |a(x)R_\lambda f - R_\lambda af|$:

$$S \leq \frac{c}{|e^\lambda|}\left[\int\limits_0^x |e^{\lambda(x-t)}||a(x)-a(t)||f(t)|dt + \int\limits_x^1 |e^{\lambda(1+x-t)}||a(x)-a(t)||f(t)|dt\right],$$

Здесь и далее c – различные константы.

Продолжим $a(x)$ периодически на R. Тогда $a(x)$ абсолютно непрерывна на $(-\infty;+\infty)$ и $|a'(x)| \leq M$ почти всюду, то есть $a'(x) \in L_\infty$. Пусть $Re\lambda \geq 0$. В S_{δ_1} при $Re\lambda \geq 0$ справедлива оценка

$$|\Delta(\lambda)| \geq c|e^\lambda|,$$

где $c > 0$ и зависит только от δ. Тогда, рассуждая, как в [42], получаем

$$S = c\left[\int\limits_0^x |e^{-\lambda(1-x+t)}||a(x)-a(1+t)||f(t)|dt + \int\limits_x^1 |e^{-\lambda(t-x)}||a(x)-a(t)||f(t)|dt\right] \leq$$

$$\leq c\cdot M\left[\int\limits_0^x e^{-(1-x+t)Re\lambda}|1-x+t||f(t)|dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^1 e^{-(t-x)Re\lambda}|x-t||f(t)|dt\right].$$

$\left|\int\limits_{|\lambda|=r}{}' (a(x)R_\lambda f - R_\lambda af)\,d\lambda\right| = \left|\int\limits_{|\lambda|=r,\,Re\lambda\geq 0} (a(x)R_\lambda f - R_\lambda af)\,d\lambda\right| \leq c\cdot M\int\limits_{|\lambda|=r}{}'\left[\left|\int\limits_0^x e^{-(1-x+t)Re\lambda}|1-x+t||f(t)|dt\right| + \left|\int\limits_x^1 e^{-(t-x)Re\lambda}|x-t||f(t)|dt\right|\right]|d\lambda| = c\cdot M\,(I_1+I_2)\,,$

где $\int\limits_{|\lambda|=r}{}'$ означает интегррование в полуплоскости $Re\,\lambda \geq 0$.

Рассмотрим $I_1 = \int\limits_{|\lambda|=r}{}' \left[\int\limits_0^x e^{-(1-x+t)Re\lambda} |1-x+t||f(t)|dt \right] d\lambda.$

Сделаем замену:

$\lambda = r \cdot e^{i\varphi},$

тогда $|\lambda| = r$, $|d\lambda| = r\,d\varphi$, $Re\lambda = r \cdot cos\varphi$, тогда

$I_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^x e^{-(1-x+t)r\cdot\cos\varphi} |1-x+t||f(t)|r\,dt \right] d\varphi = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} = J_1 + J_2,$

Рассмотрим J_1 и сделаем в нем замену:

$\psi = \varphi - \frac{3\pi}{2}$, тогда

$\psi \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos\varphi = \sin\psi$, $\sin\psi \in [\frac{2\psi}{\pi}; \psi]$. Значит:

$J_1 \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^x e^{-(1-x+t)r\cdot\frac{2\psi}{\pi}} |1-x+t||f(t)|r\,dt \right] d\psi = \int\limits_0^x |f(t)|\,dt \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(1-x+t)r\cdot\frac{2\psi}{\pi}} |1-$

$x+t|\,d\psi \leq \int\limits_0^1 |f(t)|\,dt \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(1-x+t)r\cdot\frac{2\psi}{\pi}} |1-x+t|\,d\psi.$

Сделаем замену : $\xi = (1-x+t)\frac{2r\psi}{\pi}$.

Тогда $|d\xi| = |d\xi| \frac{\pi}{2r(1-x+t)}$ Значит

$J_1 = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 |f(t)|\,dt \int\limits_0^{(1-x+t)r} e^{-\xi}\,d\xi \leq \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 |f(t)|\,dt \int\limits_0^{\infty} e^{-\xi}\,d\xi = O\left(\|f\|_1\right)$. Аналогично $I_2 = O\,\|f\|_1$.

Также доказывается при $Re\lambda \leq 0$.

Теорема доказана.

□

Обозначим через $\mathcal{D}_L$ область определения оператора L, то есть $f(x) \in \mathcal{D}_L$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ абсолютно непрерывна, $f'(x) \in L_2[0;1]$, $f(0) = f(1)$. $\mathcal{D}_L$ всюду плотно в L_2.

Докажем лемму:

Лемма 2.1. *Если $f(x) \in \mathcal{D}_L$, то и $a(x)f(x) \in \mathcal{D}_L$.*

Доказательство. 1. Произведение $a(x)f(x)$ – абсолютно непрерывно.

2. Рассмотрим производную:

$(a(x)f(x))' = a'(x)f(x) + a(x)f'(x)$. Отсюда $\left|(a(x)f(x))'\right| \leq C_1 \cdot |f(x)| + C_2 \cdot |f'(x)|$ для некоторых $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$. Тогда

$(a(x)f(x))' \in L_2[0;1]$.
3. $a(0)f(0) = a(1)f(1)$.
Лемма доказана.

$\square$

Докажем следующую лемму:

Лемма 2.2. *Если $f(x) \in \mathcal{D}_L$, то*

$$\left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda \right\|_\infty \to 0 \text{ при } r \to \infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – норма в $L_\infty[0;1]$, а r таково, что окружности $|\lambda| = r$ целиком находятся в S_{δ_1}

Доказательство. Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L. Тогда, обозначим $g = (L - \mu_0 E)f$. Отсюда
$R_\lambda g = f + (\lambda - \mu_0) R_\lambda f$ и
$\frac{f}{\lambda-\mu_0} + R_\lambda f = \frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}$. Проинтегрируем:

$$\left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda \right\|_\infty = \frac{1}{2\pi i} \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g}{\lambda - \mu_0} \, d\lambda \right\|_\infty .$$

Так как

$$\|R_\lambda f\|_\infty = O(||f||_1),$$

то в области S_{δ_1} очевидна оценка:

$$\frac{1}{2\pi i} \| \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g}{\lambda - \mu_0} \, d\lambda \|_\infty \leq c \cdot \|g\|_1 .$$

Отметим, что когда $f(x)$ пробегает $\mathcal{D}_L$, то $g(x)$ пробегает все $L_2[0,1]$.Пусть $g_0 \in \mathcal{D}_L$, и $g_1 = (L - \mu_0 E) g_0$. Тогда

$$\frac{g_0}{\lambda - \mu_0} + R_\lambda g_0 = \frac{R_\lambda g_1}{\lambda - \mu_0}.$$

Тогда

$$\|\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g_0}{\lambda-\mu_0}\,d\lambda\|_\infty = \|\int\limits_{|\lambda|=r} \left[\left(-\frac{g_0}{\lambda-\mu_0}+\frac{R_\lambda g_1}{\lambda-\mu_0}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}\right]d\lambda\|_\infty =$$

$$= \|\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g_1}{(\lambda-\mu_0)^2}\,d\lambda\|_\infty \leq \frac{C}{|r|} \to 0 \text{ при } r\to\infty$$

Так как $\mathcal{D}_L$ всюду плотно в L_2, то по теореме Банаха – Штейнгауза лемма доказана. □

Докажем теорему:

Теорема 2.3. *Если $f \in L[0,1]$, то*

$$||a(x)\sigma_r(f,x) - \sigma_r(af,x)||_\infty \to 0 \textit{ при } r\to\infty \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{D}_L$, тогда по лемме 2.1 $a(x)f(x) \in \mathcal{D}_L$, поэтому, по лемме 2.2 $||a(x)f(x) - \sigma_r(af,x)||_\infty \to 0$ при $r\to\infty$.
Значит,

$$||a(x)\sigma_r(f,x)-\sigma_r(af,x)||_\infty = ||a(x)[\sigma_r(f,x)-f(x)]+[a(x)f(x)-\sigma_r(af,x)]||_\infty \leq$$

$$\leq ||a(x)[\sigma_r(f,x)-f(x)]||_\infty + ||a(x)f(x)-\sigma_r(af,x)||_\infty \to 0$$

при $r\to\infty$.
В силу теоремы 2.2, по теореме Банаха-Штейнгауза, теорема доказана. □

Пусть теперь $a(x) \in Lip[0,1]$, но $a(0)\neq a(1)$.
Тогда рассмотрим

$$\widetilde{a}(x) = \begin{cases} a(x),\ x\in[\sigma, 1-\sigma] \\ \text{периодич., удовлетв. усл.Липшеца} \end{cases}$$

Тогда $\widetilde{a} \in Lip[0,1]$.
Рассмотрим разность при $x \in [\sigma_1, 1-\sigma_1]$; где $\sigma_1 > \sigma$

$$a(x)\sigma_r(f,x)-\sigma_r(af,x)=\widetilde{a}(x)\sigma(f,x)-\sigma_r(\widetilde{a}f,x)+\sigma_r((\widetilde{a}-a)f,x)$$

Рассмотрим $\sigma_r((\widetilde{a}-a)f,x)$ при $x\in[\sigma_1,1-\sigma_1]$:

$$\sigma_r((\widetilde{a}-a)f,x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}{}^{'}\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(x)}\left[\int\limits_0^\delta(\widetilde{a}(t)-a(t))e^{-\lambda t}f(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1-\delta}^1(\widetilde{a}(t)-a(t))e^{\lambda(1-t)}f(t)\,dt\right]d\lambda=(I_1+I_2)\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)$$

Рассмотрим I_1:

$$|I_1|\le\int\limits_{|\lambda|=r}{}^{'}c\cdot\left[\int\limits_0^\delta\left|e^{\lambda(x-1)}\right|\cdot\left|e^{-\lambda t}\right|\cdot|f(t)|\;dt\right]\,|d\lambda|=$$

$$=\int\limits_0^\delta c\,|f(t)|\;dt\int\limits_{|\lambda|=r}{}^{'}\left|e^{-\lambda(1+t-x)}\right|\,|d\lambda|$$

Замена

$\lambda=re^{i\varphi}$; $|d\lambda|=r\cdot d\varphi$;

$Re\lambda=r\cdot\cos(\varphi)$; $|\lambda|=r$ приводит внутренний интеграл к виду

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-r\cdot\cos(\varphi)(1+t-x)}r\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-rcos(\varphi)(1+t-x)}r\,d\varphi+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-rcos(\varphi)(1+t-x)}r\,d\varphi=$$

$$J_1+J_2.$$

Замена

$\psi=\varphi+\frac{\pi}{2}$, $0\le\psi\le\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=\sin\psi$, $\frac{2\psi}{\pi}\le\sin\psi\le\psi$ дает:

$J_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r\sin\psi(1+t-x)}\cdot r\,d\psi\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r\frac{2\psi(1+t-x)}{\pi}}\cdot r\,d\psi.$

Так как $1+t-x\ge1-x$ и $x\le1-\delta_1$, то $1+t-x\ge\delta_1$. Значит

$J_1 \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\frac{2\psi\delta_1}{\pi}} \cdot r\,d\psi = -\frac{\pi}{r\cdot 2\cdot\delta_1} \cdot r \cdot e^{-r\frac{2\psi}{\pi}\delta_1}|_0^{\frac{\pi}{2}} = O(1)$, при $r \to \infty$.
Аналогично I_2 Тогда

$$\|I_1\|_{C[\delta_1,1-\delta_1]} = O(\|f\|_1).$$

Если же $f \in \mathcal{D}_L$, то, применяя интегрирование по частям в I_1:

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}{}' \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(x)}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}f(t)|_0^{\delta} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\delta} e^{-\lambda t}f'(t)\,dt\right]d\lambda,$$

получим:

$$\|I_1\|_{C[\delta_1,1-\delta_1]} = O(\frac{1}{\lambda}),$$

при $r \to \infty$.

Аналогично I_2. Таким образом доказали теорему:

Теорема 2.4. *Если $a(x) \in Lip[0;1]$, то*

$$\|a(x)\sigma_r(f,x) - \sigma_r(af,x)\|_{C[\delta_1,1-\delta_1]} \to 0,$$

при $r \to \infty$.

2.2 Равносходимость разложений по с.п.ф. оператора A и в тригонометрический ряд Фурье

Рассмотрим краевую задачу

$$u'(x) = \lambda D u(x) + m(x), \tag{2.6}$$

$$U_2(u) = u(0) - u(\frac{1}{2}) = 0, \tag{2.7}$$

где $m(x)$ – вектор–функция с компонентами из $L[0,1/2]$. Ее решение обозначим через $R_{2\lambda}m$. Тогда для $R_{2\lambda}m$ имеет место лемма 1.5, где Δ, U заменяются на Δ_2, U_2 и оценки (1.43). Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями δ нули $det\Delta_2(\lambda)$. Получим новую область, которую опять обозначим за S_δ. Тогда в S_δ выполняются леммы:

Лемма 2.3. *Имеет место*

$$\lim_{r\to\infty} \| \int_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[R_{1\lambda}m(x) - R_{2\lambda}m(x)]\, d\lambda \,\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\|\cdot\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]}$ *– норма в* $C[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$.

Доказательство. Рассмотрим разность $J = R_{1\lambda} - R_{2\lambda}$:
$J = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt +$
$g_\lambda m(x) + Y(x,\lambda)\Delta_2^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_{2x}(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt -$
$g_\lambda m(x) = Y(x,\lambda)\Delta_2^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_{2x}(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt -$
$Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt = J_1 + J_2.$

При доказательстве леммы 1.8 были получены оценки для элементов матрицы $(d_{ij})_{i,j=1}^4 = \left(Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\right)_{i,j=1}^4$ и столбика $(d_j)_{j=1}^4 = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt\right)_{j=1}^4$:
$d_{1j} = O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right)$,

$d_{2j} = O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right)$,
$d_{3j} = O\left(e^{\lambda\omega_3(x)}\right)$,
$d_{4j} = O\left(e^{\lambda\omega_4(x)}\right)$,
$d_j = O(\|m\|_1)$.
Такие же оценки верны и для элементов $\left(Y(x,\lambda)\Delta_2^{-1}(\lambda)\right)_{i,j=1}^4$ и столбика $\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_{2x}(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt\right)_{j=1}^4$. Тогда
$\| \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[R_{1\lambda}m(x) - R_{2\lambda}m(x)]\,d\lambda \|_{C[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} \leq \int_{|\lambda|=r} \| [R_{1\lambda}m(x) - R_{2\lambda}m(x)] \|_{C[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} |d\lambda| =$

$$\int\limits_{|\lambda|=r} \left\| \begin{pmatrix} O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}\right) \\ O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}\right) \\ O\left(e^{\lambda\omega_3}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_3}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_3}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_3}\right) \\ O\left(e^{\lambda\omega_4}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_4}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_4}\right) & O\left(e^{\lambda\omega_4}\right) \end{pmatrix} \times \right.$$
$$\left. \times \left(O(\|m\|_1), O(\|m\|_1), O(\|m\|_1), O(\|m\|_1)\right)^T \right\|_{C[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} |d\lambda| = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T.$$

Рассмотрим последний интеграл покомпонентно. Первый и второй элементы столбика имеют вид:

$$a_j = \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} O\left(e^{\lambda\omega_i(x-\frac{1}{2})}\|m\|_1\right) \right\|_{C[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} |d\lambda|,$$

$j = 1, 2$.
Так как $Re\lambda\omega_1 \geq Re\lambda\omega_2 \geq 0$, то

$$a_j = \int\limits_{|\lambda|=r} O\left(e^{-\varepsilon\lambda\omega_2}\|m\|_1\right) |d\lambda|,$$

$j = 1, 2$.
Третий и четвертый элементы столбика имеют вид:

$$a_j = \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} O\left(e^{\lambda\omega_i x}\|m\|_1\right) \right\|_{C[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} |d\lambda|,$$

$j = 3, 4.$

Так как $Re\lambda\omega_4 \le Re\lambda\omega_3 \le 0$, то

$$a_j = \int\limits_{|\lambda|=r} O\left(e^{-\varepsilon\lambda\omega_2}\left\|m\right\|_1\right)\,|d\lambda|\,,\ j = 3, 4.$$

Значит $a_j = \int\limits_{|\lambda|=r} O\left(e^{-\varepsilon\lambda\omega_2}\left\|m\right\|_1\right)\,|d\lambda|$, $j = 1, ..., 4.$

Переобозначим $-\varepsilon\omega_2 = a$, тогда

$a_j = \int\limits_{|\lambda|=r} O\left(e^{\lambda a}\left\|m\right\|_1\right)\,|d\lambda|$, $j = 1, ..., 4.$

Сделаем замену:

$\lambda a = re^{i\varphi}$,

$|d\lambda| = \frac{r}{|a|}d\varphi$. Значит

$a_j = \frac{1}{|a|}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{rcos\varphi}r\,d\varphi = \frac{1}{|a|}\left[\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right] = a_{j1} + a_{j2}.$

Рассмотрим первый интеграл и сделаем замену: $\tau = \varphi + \frac{\pi}{2}$, тогда

$0 \le \tau \le \frac{\pi}{2}$, значит

$\frac{2}{\pi}\tau \le sin\tau \le \tau$. Получим

$a_{j1} = \frac{1}{|a|}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-rsin\tau}r\,d\tau \le \frac{1}{|a|}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\frac{2}{\pi}\tau}r\,d\tau = O(1).$

Аналогично a_{j2}. Значит интеграл ограничен. Теперь в качестве $f(x)$ возьмем $\chi(x)$ – характеристическую функцию отрезка $[0, 1]$. Повторяя рассуждения доказательства с $d_j = O(\lambda^{-1})$, получим:

$a_{j1} = \frac{1}{|a|}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-rsin\tau}\,d\tau \le \frac{1}{|a|}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\frac{2}{\pi}\tau}\,d\tau = -\frac{\pi}{2r|a|}\left(e^{-r} - e^{0}\right) \to 0$ при $r \to \infty$.

Таким образом, по теореме Банаха-Штейнгауза теорема доказана.

$\square$

Лемма 2.4. *Если* $f(x) \in L[0, 1]$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \| \int_{|\lambda|=r} [H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right)]\,d\lambda \,\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $v(x,\lambda)$ *- решение задачи (1.33), (1.34).*

Доказательство. Имеем
$H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right) = H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right)\right] +$
$H(x,\lambda)\left[R_{1\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right) - R_{2\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right)\right] + \left[H(x,\lambda) - H_0(x)\right] R_{2\lambda}H_0^{-1}m.$
Так как $H(x,\lambda) - H_0(x) = O(\frac{1}{\lambda})$, $R_{2\lambda}\left(H_0^{-1}m\right) = O\left(\|f\|_1\right)$, то

$$\| \int_{|\lambda|=r} [H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right)] \, d\lambda \, \|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = O(\|f\|_1).$$

Пусть теперь $m(x) = \chi(x)$. $R_{2\lambda}\left(H_0^{-1}m\right) = O(\frac{1}{\lambda})$. Отсюда, на основании лемм 1.12 и 2.1 по теореме Банаха – Штейнгауза получаем утверждение леммы. □

Теперь можно сформулировать теорему равносходимости.

Теорема 2.5. *Пусть существует A^{-1}, ядро $A(x,t)$ удовлетворяет условиям из пунктов 1.1–1.3. Тогда в для любой $f(x) \in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x)\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{3j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(\varphi_j, x - \frac{1}{2}\right) \|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$-частичная сумма ряда Фурье, по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r, \sigma_r(f,x)$-частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на $[0,\frac{1}{2}]$ по системе $\left\{e^{4k\pi i x}\right\}$ для тех k, для которых $|4k\pi| < r$, $\gamma_{ij}\,(\delta_{ij})$ компоненты марицы $\Gamma(\Gamma^{-1})$, $\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(\frac{1}{2} - x) + \delta_{j3}f(\frac{1}{2} + x) + \delta_{j4}f(1-x)$.

Доказательство. Имеем: $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f\,dx$, $\sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f\,dx$, где $R_{0\lambda}f$ – решение краевой задачи:

$$y' - \lambda y = f,$$

$$y(0) = y\left(\frac{1}{2}\right).$$

Пусть $x \in \left[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right]$. Тогда, в силу лемм 1.13, 2.1, 2.2:

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} z_1(x)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} (\Gamma\tilde{z}(x))_1 \, d\lambda,$$

где $(\,)_1$ первая компонента вектора, помещенного в скобки.
Тогда

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} (\Gamma H(x,\lambda)v(x,\lambda))_1 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} \left(\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x))\right)_1 \, d\lambda + o(1),$$

где $o(1) \to 0, r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]$. Значит,

$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\Gamma \int_{|\lambda|=r} H_0(x)R_{2\lambda}\left(h_1^{-1}(x)\omega_1\varphi_1(x), ..., h_4^{-1}(x)\omega_4\varphi_4(x)\right)^T d\lambda\right)_1 +$
$+o(1) = (\Gamma \cdot (h_1(x)\sigma_{r|\omega_1|}(h_1^{-1}\varphi_1, x), ..., h_4(x)\sigma_{r|\omega_4|}(h_4^{-1}\varphi_4, x))^T)_1 + o(1)$.
По аналогу теоремы Штейнгауза

$$a(x)\sigma_r(f,x) = \sigma_r(a \cdot f, x) + o(1),$$

$$S_r(f,x) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x) + o(1).$$

Аналогично доказывается при $x \in [\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$
Теорема доказана. □

Лемма 2.5. *Для того, чтобы ω_1, ω_2 – различные корни уравнения*

$$\lambda^2 - a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{2.8}$$

где $a_1 = d^2 - 2bc + a^2$, $\quad a_2 = (bc - ad)^2$,
удовлетворяли условию $|\omega_1| = |\omega_2|$ необходимо и достаточно, чтобы

$$a_1 = l(e^{\alpha i} + e^{\beta i}), \qquad a_2 = l^2 e^{(\alpha+\beta) i}, \tag{2.9}$$

где $l = |\omega_1|$, $\alpha = arg\, \omega_1$, $\beta = arg\, \omega_2$

Доказательство. Пусть $|\omega_1| = |\omega_2| = l$. Тогда $\omega_1 = l\, e^{\alpha i}$, $\omega_2 = l\, e^{\beta i}$, и α, β различны. Тогда из (2.8) получим систему:

$$\begin{cases} a_2 - l\, e^{\alpha i} a_1 = -l^2 e^{2\alpha i} \\ a_2 - l\, e^{\beta i} a_1 = -l^2 e^{2\beta i}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Отсюда $a_1 = l(e^{\alpha\, i} + e^{\beta\, i})$, $a_2 = l^2 e^{(\alpha+\beta)\, i}$

Обратно, пусть выполняется (2.9). Тогда выполняется (2.10). То есть, уравнение (2.8) имеет корни $\omega_1 = l\, e^{\alpha i}$, $\omega_2 = l\, e^{\beta i}$. Лемма доказана. □

Теорема 2.6. *Если* $|\omega_j| = l$, $j = \overline{1, 4}$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{rl}(f, x)\|_{[\epsilon, \frac{1}{2}-\epsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f, x) - \sigma_{rl}(g, x - \frac{1}{2})\|_{[\frac{1}{2}+\epsilon, 1-\epsilon]} = 0,$$

где $g(x) = f(\frac{1}{2} + x)$

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\sigma_{rl}(\varphi_j, x) = \sigma_{rl}(\gamma_{11}\varphi_1 + \gamma_{12}\varphi_2 + \gamma_{13}\varphi_3 + \gamma_{14}\varphi_4,\, x)$$

Так как $\gamma_{11}\varphi_1 + \gamma_{12}\varphi_2 + \gamma_{13}\varphi_3 + \gamma_{14}\varphi_4 = \big(\Gamma \cdot (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T\big)_1 = \Big(\Gamma \cdot \Gamma^{-1} \big(f(x),\, f(\frac{1}{2} - x),\, f(\frac{1}{2} + x),\, f(1 - x)\big)^T\Big)_1 = f(x)$, то первое утверждение доказано.

Аналогично доказывается второе утверждение. □

3 Сходимость средних Рисса разложений по с.п.ф. оператора A

3.1 Формула остаточного члена

Пусть $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим требованиям:
1)$g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в $|\lambda| < r$ при любых $r > 0$;
2)$\exists\ C > 0$, т.ч. $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$;
3)$g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ;
4)$\exists\ \beta > 0$, т.ч.
$g(\lambda, r) = \begin{cases} O\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^{\beta}\right), & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \\ O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^{\beta}\right), & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, где $\varphi = arg\lambda\omega_2$

В качестве обобщённых средних Рисса будем брать интегралы

$$J_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda,$$

где $R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1} A$ - резольвента Фредгольма оператора A.

Докажем формулу остаточного члена:

Теорема 3.1. *(формула остаточного члена)*

Пусть $f(x)$ *– непрерывная функция на* $[0, 1]$, $f_0(x)$ *– непрерывно-дифференцируемая функция на* $[0, 1]$, *принадлежащая области значения оператора* A. *Тогда, если на окружности* $|\lambda| = r$ *нет собственных значений оператора* A, *то*

$$f(x) - J_r(f, x) = f(x) - f_0(x) + (1 - g(o, r)) \cdot f_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)\frac{R_\lambda \varphi_0}{\lambda} d\lambda -$$

$$-J_r(f - f_0, x),$$

где $f_0 = A\varphi_0$.

Доказательство. По тождеству Гильберта имеем

$$\frac{f_0}{\lambda} + R_\lambda f_0 = \frac{1}{\lambda} R_\lambda \varphi_0.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{f_0(x)}{\lambda}\,d\lambda + (-\frac{1}{2\pi i})\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f_0\,d\lambda =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r))R_\lambda\varphi_0\,d\lambda. \tag{3.1}$$

Первый интеграл равен $f_0(x)g(0,\lambda)$. Тогда (3.1) примет вид:
$f_0(x)g(0,\lambda) + J_r(f_0,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r)R_\lambda\varphi_0\,d\lambda$.
Значит для произвольного $f(x) \in C[0,1]$:
$f(x) - J_r(f,x) = f(x) - J_r(f,x) - f_0(x) + f_0(x) - J_r(f_0,x) + J_r(f_0,x) =$
$= [f(x) - f_0(x)] - J_r(f - f_0, x) + f_0(x)[1 - g(0,r)] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r))R_\lambda\varphi_0\,d\lambda.$

□

Рассмотрим задачу:

$$u'(x) = \lambda D u(x) + m(x), \tag{3.2}$$

$$U_0(u) = M_0H_0(0)u(0) + M_1H_0(\frac{1}{2})u(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H_0(t)u(t)\,dt = 0, \tag{3.3}$$

где $m(x)$ – вектор–функция с компонентами из $C[0,1/2]$. Обозначим $\Delta_0(\lambda) = U_0(Y(x,\lambda))$. Для решения $u(x,\lambda) = R_{0\lambda}m$ системы (3.2),(3.3) имеет место лемма 1.5, где Δ, U заменяются на Δ_0, U_0 и оценки (1.42). Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями δ нули $\Delta_0(\lambda)$. Получим новую область, которую опять обозначим за S_δ.

Рассмотрим подробнее (3.2):
$u' = \lambda\, Du + m$. Умножим на D^{-1} слева:
$D^{-1}u' = \lambda u + D^{-1}m$. Обозначим: $Lu = D^{-1}u'$. Тогда
$Lu = \lambda u D^{-1}m$. Значит,
$(L-\lambda E)u = D^{-1}m \Longrightarrow u = (L-\lambda E)^{-1}D^{-1}m$. Обозначим $\tilde{R}_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ – обычная резольвента дифференциального оператора. Тогда

$$u = \tilde{R}_\lambda D^{-1}m$$

Значит,

$$R_{0\lambda} = \tilde{R}_\lambda D^{-1}.$$

Обозначим

$$J_{1r}(m,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\tilde{R}_\lambda m d\lambda$$

Докажем формулу остаточного члена для векторного случая:

Теорема 3.2. *(формула остаточного члена) Пусть* $m(x)$*- непрерывная вектор-функция с компонентами из* $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $m_0(x)$ *– непрерывно-дифференцируемая вектор-функция с компонентами из* $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ *и удовлетворяющая* (3.3)*. Тогда, если на окружности* $|\lambda| = r$ *нет собственных значений оператора* L*, то*

$$m(x)-J_{1r}(m,x) = m(x)-m_0(x)+(1-g(o,r))\cdot m_0(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{\tilde{R}_\lambda g_0}{\lambda}d\lambda-$$

$$-J_{1r}(m-m_0,x),$$

где $g_0 = Lm_0$*.*

Доказательство. Пусть

$$g_0 = Lm_0 \Longrightarrow g_0 = Lm_0 - \lambda m_0 + \lambda m_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g_0 = (L-\lambda E)m_0 + \lambda m_0 \Longrightarrow (L-\lambda E)^{-1}g_0 =$$

$$= m_0 + \lambda(L - \lambda E)^{-1} m_0 \Longrightarrow \tilde{R}_\lambda g_0 = m_0 + \lambda \tilde{R}_\lambda m_0 \Longrightarrow \tilde{R}_\lambda m_0 =$$

$$= \frac{\tilde{R}_\lambda g_0}{\lambda} - \frac{m_0}{\lambda} \Longrightarrow J_{1r}(m_0, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) \left[\frac{\tilde{R}_\lambda g_0}{\lambda} - \frac{m_0}{\lambda} \right] d\lambda =$$

$$= m_0(x) g(0, r) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) \frac{\tilde{R}_\lambda g_0}{\lambda} d\lambda.$$

$$m(x) - J_{1r}(m, x) = m(x) - J_{1r}(m, x) - m_0(x) + m_0(x) - J_{1r}(m_{0_1}, x) + J_{1r}(m_{0_1}, x) =$$

$$= m(x) - m_0(x) - J_{1r}(m - m_0, x) + m_0(x) - m_x g(0, r) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) \frac{\tilde{R}_\lambda g_0}{\lambda} d\lambda =$$

$$= m(x) - m_0(x) - J_{1r}(m - m_0, x) + (1 - g(0, r)) m_0(x) + \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) \frac{\tilde{R}_\lambda g_0}{\lambda} d\lambda$$

□

3.2 Вспомогательные предложения

Докажем некоторые леммы:

Лемма 3.1. *Пусть $f = (f_1(x), ..., f_4(x))^T$, $f_i(x) \in C[0, 1/2]$. При достаточно больших λ справедлива оценка:*

$$I = \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \, ||R_{0\lambda} f||_{C_{[0, \frac{1}{2}]}} |d\lambda| = \|f\|_{C_{[0, \frac{1}{2}]}} \cdot O(1)$$

Доказательство. Воспользуемся оценками (1.42):

$$I = \|f\|_{C_{[0, \frac{1}{2}]}} \left[O\left(\int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-|Re\lambda\omega_1|}}{|Re\lambda\omega_1|} \right) |d\lambda| + \right. \right.$$

$$\left. + \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-|Re\lambda\omega_2|}}{|Re\lambda\omega_2|} \right) |d\lambda| \right) +$$

$$+O\left(\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\left(\frac{1-e^{-|Re\lambda\omega_3|}}{|Re\lambda\omega_3|}\right)|d\lambda|+\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\left(\frac{1-e^{-|Re\lambda\omega_4|}}{|Re\lambda\omega_4|}\right)|d\lambda|\right)\Bigg]=$$

$$=\|f\|_{C_{[0,\frac{1}{2}]}}O\left(I_1+I_2+I_3+I_4\right).$$

Рассмотрим I_2.

Сделаем замену:

$\lambda\omega_2 = re^{i\varphi}$. Тогда $d\lambda = \frac{1}{\omega_2}r\cdot i\cdot e^{i\varphi}d\varphi$ $(Re\lambda\omega_2\geq 0)$ $|d\lambda| = \frac{1}{|\omega_2|}rd\varphi$, т.е.

$$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|g(\lambda,r)|\left(\frac{1-e^{-r\cdot cos\varphi}}{|r\cdot cos\varphi|}\right)\cdot\frac{r}{|\omega_2|}|d\varphi| = \frac{1}{\omega_2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|g(\lambda,r)|\left(\frac{1-e^{-r\cdot cos\varphi}}{cos\varphi}\right)d\varphi\leq$$

$$\leq\frac{1}{\omega_2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|g(\lambda,r)|\cdot\frac{1}{cos\varphi}d\varphi.$$

Разбив интеграл на два интеграла, получаем:

$$I\leq\frac{1}{\omega_2}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Рассмотрим

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|g(\lambda,r)|\cdot\frac{1}{cos\varphi}\,d\varphi:$$

Сделаем замену: $\psi=\varphi+\frac{\pi}{2};\quad 0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2}$.

Тогда, так как $0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{\pi}\psi\leq sin\psi\leq\psi$, то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|g(\lambda,r)|\frac{1}{cos\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}d\psi=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|g(\lambda,r)|\frac{1}{sin\psi}d\psi\leq$$

$$\leq\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|g(\lambda,r)|\frac{1}{\psi}d\psi$$

Так как по определению $|g(\lambda,r)|=O\left(\psi^{\beta}\right)$ при $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq 0$, то интеграл сходится.

Рассмотрим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| \cdot \frac{1}{cos\varphi}\, d\varphi :$$

Сделаем замену: $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi \;\; 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ... = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)} d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| \frac{1}{sin\psi} d\psi \le$$

$$\le \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| \frac{1}{\psi} d\psi$$

По определению $|g(\lambda, r)| = O\left(\psi^{\beta}\right)$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, значит, интеграл сходится.

Рассмотрим теперь I_1 :

$$\int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-|Re\lambda\omega_1|}}{|Re\lambda\omega_1|}\right) |d\lambda| \le \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \frac{1}{|Re\lambda\omega_1|} |d\lambda| \le \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \times$$

$$\times \frac{1}{|Re\lambda\omega_2|} |d\lambda| .$$

Эта оценка аналогична оценки для I_2. Значит, интеграл сходится.

Рассмотрим I_3 :

$$\int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \cdot \left(\frac{1 - e^{-|Re\lambda\omega_3|}}{|Re\lambda\omega_3|}\right) |d\lambda| = \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \cdot \left(\frac{1 - e^{-|Re\lambda\omega_2|}}{|Re\lambda\omega_2|}\right) |d\lambda| = I_2$$

(т.к.$|Re\lambda\omega_1| = |Re\lambda\omega_4|$, $|Re\lambda\omega_2| = |Re\lambda\omega_3|$)
Аналогично I_2.

Рассмотрим I_4:

$$\int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \cdot \left(\frac{1 - e^{-|Re\lambda\omega_4|}}{|Re\lambda\omega_4|}\right) |d\lambda| = \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \cdot \left(\frac{1 - e^{-|Re\lambda\omega_1|}}{|Re\lambda\omega_1|}\right) |d\lambda| = I_1$$

Аналогично I_1.

$\square$

Докажем лемму:

Лемма 3.2. *Пусть вектор-функция $f(x)$ с компонентами из $C\left[0,\frac{1}{2}\right]$ удовлетворяет (3.3). Тогда $\forall\varepsilon>0$ существует вектор-функция $f_0(x)$ с компонентами из $C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]$, удовлетворяющая (3.3), такая что $\|f(x)-f_0(x)\|_\infty<\varepsilon$.*

Доказательство. Перейдём от $f(x)$ и $f_0(x)$ к скалярным функциям $F(x)$ и $F_0(x)$ по формулам

$$F(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ f_2(x-\frac{1}{2}), & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\\ f_3(x-\frac{3}{2}), & x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]\\ f_4(x-2), & x\in\left[\frac{3}{2},2\right]\end{cases},$$

аналогично определим $F_0(x)$. Это скалярные функции, $F(x)$ ($F_0(x)$)- непрерывная ($F_0(x)$ - непрерывно-дифференцируемая), кроме, быть может, точек с абсциссами $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1$; $x_3=\frac{3}{2}$; $x_4=2$. Утверждение леммы становится следствием соответствующего результата для скалярного случая.

□

Докажем это утверждение для скалярного случая:

Лемма 3.3. *Если $y(x)\in C\left[0,1\right]$ удовлетворяет условию*

$$V_j(y)=s_jy(0)+t_jy(1)+(a_j(x),y(x))=0;\ j=\overline{1,4}, \tag{3.4}$$

где s_j и t_j, $j=1,...,4$ – произвольные числа. Тогда
1. Существует такая последовательность функций $\{y_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, что $y_m(x)\in C^1\left[0,1\right]$,
2. $V_j(y_m)=0$, $j=1,...,4$,
3. $\|y-y_m\|_{C[0,1]}\longrightarrow 0$, при $m\longrightarrow\infty$

Доказательство. Пусть $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ - последовательность алгебраических многочленов, сходящихся к $y(x)$ в $C\left[0,1\right]$. Тогда имеем: $V_j(p_m)\longrightarrow 0$, при

$m \longrightarrow \infty$, $j = \overline{1,4}$. Обозначим через $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{2}$ - произвольный набор функций из $C^1\left[0, \frac{1}{2}\right]$, т.ч.

$$U_j(\psi_i) = s_j\psi_i(0) + t_j\psi_i\,(1) = \delta_{ij},$$

при $j \geq i$.
Такие функции существуют, например, интерполяционные многочлены. Обозначим через $h_\nu(x), \nu = 1, 2, 3, ..., n$ такие функции из $C^1\,[0, 1]$, что
1) $h_\nu(x) \equiv 1,\ x \in \left[0, \frac{1}{2\nu}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{2\nu}, 1\right]$,
2) $h_\nu(x) \equiv 0,\ x \in \left[\frac{1}{\nu}, 1 - \frac{1}{\nu}\right]$,
3) $0 \leq h_\nu(x) \leq 1,\ x \in \left[\frac{1}{2\nu}, \frac{1}{\nu}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{\nu}, -\frac{1}{2\nu}\right]$,
Положим $\psi_{i\nu} = \psi_i h_\nu$. Тогда
1) $(a_j, \psi_{i\nu}) = 0(1)$ при $\nu \to \infty$,
2) $U_j(\psi_{i\nu}) = U_j(\psi_i h_\nu) = U_j(\psi_i)$.
Будем искать требуемую последовательность в виде:

$$y_m(x) = p_m(x) - \sum_{i=1}^{4} c_{im}\psi_{i\nu}(x),$$

где $\nu = \nu(m)$ будут выбраны ниже. $y_m(x)$ будет удовлетворять (3.4), если система

$$\sum_{i=1}^{4} c_{im}\left(U_j(\psi_i) + o(1)\right) = V_j(p_m);$$

$j = 1, ..., 4$, будет иметь решение. Рассмотрим эту систему: Матрица $\left\{U_j(\psi_i)_{i,j=1}^{4}\right\}$ является треугольной, на главной диагонали которой стоят единицы, а ниже – нули, поэтому $detU_j(\psi_i) = 1$ и, значит, при достаточно больших ν определитель системы больше или равен $\frac{1}{2}$. Одно из таких ν возьмем в виде $\nu = \nu(m)$. Тогда, так как $V_j(p_m) = o(1)$ при $m \to \infty$, получаем

$$c_{im} = o(1),$$

при $m \to \infty$

$\square$

Докажем теорему:

Теорема 3.3. *Соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|m(x) + J_{1r}(m,x)\|_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]} = 0$$

имеет место, если

a) m(x)- вектор-функция с непрерывными компонентами;

b) m(x) удовлетворяет (3.3)

Доказательство. По лемме 3.2 $\forall\varepsilon > 0\ \exists m_0 \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right]$, т.ч.

$$\|m(x) - m_0(x)\|_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]} < \varepsilon.$$

Зафиксируем это ε. Для него

$$\|m(x) - J_{1r}\|_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]} =$$

$$= ||m(x) - m_0(x) + (1 - g(o,r))m_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{\tilde{R}_\lambda g_0}{\lambda}d\lambda -$$

$$-J_{1r}(m - m_0, x)\,||_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]} = \max_{0\le x\le\frac{1}{2}} |m(x) - m_0(x) + (1 - g(o,r))m_0(x) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{\tilde{R}_\lambda g_0}{\lambda}d\lambda - \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\tilde{R}_\lambda(m - m_0)d\lambda\,| \le$$

$$\le \max_{0\le x\le\frac{1}{2}}[|m(x) - m_0(x)| + |1 - g(o,r)|\,|m_0(x)| +$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda,r)|\,\frac{1}{|\lambda|}\cdot\left\|\tilde{R}_\lambda g_0\right\|_{C[0,\frac{1}{2}]}|d\lambda|\right|]+$$

$$+\max_{0\le x\le\frac{1}{2}}\left[\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\left\|\tilde{R}_\lambda(m(x) - m_0(x))\right\|_{C[0,\frac{1}{2}]}|d\lambda|\right|\right] \le$$

$$\le \max_{0\le x\le\frac{1}{2}}\left[\varepsilon + o(1)\,|m_0(x)|\right] +$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\frac{1}{|\lambda|}\left\|\tilde{R}_\lambda g_0\right\||d\lambda|\right|+\varepsilon\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\left\|\tilde{R}_\lambda\right\|_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]}|d\lambda|\right),$$

по свойству 3 функции $g(\lambda,r)$. Значит, по формулам 1.42

$$\|m(x)-J_{1r}\|_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]}=\varepsilon+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\frac{1}{\lambda}O(\psi(\lambda))\right|\|g_0\|_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]}|d\lambda|+\varepsilon\frac{1}{2\pi}O(1),$$

при $r\to\infty$.

Рассмотрим

$$\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\frac{1}{|\lambda|}O(\psi(\lambda))\,|d\lambda|=O\left(\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\frac{1}{\lambda}\psi(\lambda)\,|d\lambda|\right)=$$

$$O\left(\sum_{j=1}^{4}\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-e^{-|Re\lambda\omega_i|}}{|Re\lambda\omega_i|}\right)|d\lambda|\right)=O(I_1+I_2+I_3+_4).$$

Рассмотрим, для примера I_2 (остальные слагаемые аналогично):

$$I_2=\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-e^{-|Re\lambda\omega_2|}}{|Re\lambda\omega_2|}\right)|d\lambda|\,.$$

Сделаем замену:
$\lambda\omega_2=r\cdot e^{i\varphi}$
$|d\lambda|=\frac{1}{\omega_2}r^{d\varphi}$
$|\lambda|=\frac{1}{\omega_2}r$ Тогда, также как и в лемме 3.1 показывается, что

$$I_2\leq\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|g(\lambda,r)|\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r\cdot\cos(\varphi)}\right)r\frac{1}{|\omega_2|}d\varphi=\frac{1}{r}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|g(\lambda,r)|\frac{1}{cos(\varphi)}d\varphi\right]=\frac{1}{r}O(1)\to 0,$$

при $r\to\infty$

$\square$

Аналогично лемме 1.11 можно доказать лемму:

Лемма 3.4. *В S_δ при больших $|\lambda|$ справедлива оценка:*

$$\left\|v(x,\lambda)-R_{0\lambda}H_0^{-1}m(x,\lambda)\right\|_\infty = O\left(\left(\frac{1}{\lambda}+\psi^2(\lambda)\right)\|m\|_1\right)$$

в $C\left[0,\frac{1}{2}\right]$, где $v(x,\lambda)$ – решение задачи

$$v'(x)+P_1(x,\lambda)v(0)+P_2(x,\lambda)v(\frac{1}{2})+P_3(x,\lambda)v(x)+N_\lambda v(x)-\lambda Dv(x)=m(x,\lambda),$$

$$U_0(v)=M_0H_0(0)v(0)+M_1H_0(\frac{1}{2})v(\frac{1}{2})+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H_0(t)v(t)\,dt=0,$$

Также верны следствия:

Следствие 3.1. *Если $f(x)$ – функция ограниченной вариации, то*

$$\|R_{0\lambda}f\|_{C[0,\frac{1}{2}]}=O(\frac{1}{\lambda})$$

Следствие 3.2. *Если $f(x)=\chi(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0,1]$, то*

$$\left\|v(x,\lambda)-R_{0\lambda}(H_0^{-1}m(x,\lambda)\right\|_\infty=O(\lambda^{-2}).$$

Докажем следующую теорему:

Теорема 3.4. *Для любой $f(x)\in C\,[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int_{|\lambda|=r}g(\lambda,r)\left(H(x,\lambda)\nu(x,\lambda)-H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)\right)\right\|_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]}=$$

$=o(1)$.

Доказательство. Рассмотрим $\forall\, f(x)\in C\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Тогда

$$H(x,\lambda)\nu(x,\lambda)-H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)=H(x,\lambda)\nu(x,\lambda)-$$

$$-H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)+$$

$$+H(x,\lambda)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)-H(x,\lambda)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)=$$

$$= H(x,\lambda)\left[\nu(x,\lambda) - R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)\right] + \left[H(x,\lambda) - H_0(x)\right] R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right) =$$

$$= H(x,\lambda) O\left(\left(\frac{1}{|\lambda|} + \psi^2(\lambda)\right)\|f(x)\|_1\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) O\left(\psi(\lambda)\left\|H_0^{-1}(x)f(x)\right\|_1\right) =$$

$$= \left[H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\right] O\left(\frac{1}{|\lambda|} + \psi^2(\lambda)\right)\|f(x)\|_1 +$$

$$+ O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) O\left(\psi(\lambda)\left\|H_0^{-1}(x)f(x)\right\|_1\right).$$

Тогда

$$\left\|\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\left(H(x,\lambda)\nu(x,\lambda) - H_0(x)R_{0\lambda}H_0^{-1}(x)m(x)\right)\, d\lambda\right\|_{C\left[0,\frac{1}{2}\right]} =$$

$$= O\left(\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)H_0(x)\frac{1}{|\lambda|}\|m\|_1\,|d\lambda| + \int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)H_0(x)\psi^2(\lambda)\|m\|_1\,|d\lambda| +\right.$$

$$\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{1}{|\lambda|^2}H_1(x)\|m\|_1\,|d\lambda| + \int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{1}{|\lambda|}H_1(x)O\left(\psi^2(\lambda)\|m\|_1\right)|d\lambda| +$$

$$\left. + \int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{1}{|\lambda|}O\left(\psi(\lambda)\left\|H_0^{-1}(x)m\right\|_1\right)|d\lambda|\right) =$$

$$= O\left(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5\right)$$

Рассмотрим I_1:
Замена $\lambda = re^{i\varphi},\ |\lambda| = r$
$|d\lambda| = r\cdot d\varphi$
нам даёт:

$$|I_1| = O\left(\int_0^{2\pi}|g(\lambda,r)|\frac{1}{r}\|m\|_1\, r\, d\varphi\right) = O(1)$$

Рассмотрим I_2:

$$|I_2| = O\left(\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\psi^2(\lambda)\,\|m\|\,|_1 d\lambda|\right) = O\left(\int_{|\lambda|=r}|g(\lambda,r)|\psi^2(\lambda)\,|d\lambda|\right).$$

Так как

$$\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{4} \frac{1 - e^{-|Re\lambda\omega_j|}}{|Re\lambda\omega_j|}$$

и

$Re\lambda\omega_1 \geq Re\lambda\omega_2 \geq 0$
$Re\lambda\omega_4 = -Re\lambda\omega_1$
$Re\lambda\omega_3 = -Re\lambda\omega_2$
то

$$\psi^2(\lambda) \leq \frac{1}{|Re\lambda\omega_2|^2}\left(2 - 2e^{-|Re\lambda\omega_1|} + 2 - 2e^{-|Re\lambda\omega_2|}\right)^2 =$$
$$= \frac{4}{|Re\lambda\omega_2|^2}\left(2 - e^{-|Re\lambda\omega_1|} - e^{-|Re\lambda\omega_2|}\right)^2 \leq$$
$$\leq \frac{16}{|Re\lambda\omega_2|^2}\left(1 - e^{-|Re\lambda\omega_2|}\right)^2.$$

Следовательно

$$I_2 \leq C \cdot \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \frac{\left(1 - e^{-Re\lambda\omega_2}\right)^2}{|Re\lambda\omega_2|^2} |d\lambda|$$

Замена $\lambda\omega_2 = re^{i\varphi}$
$d\lambda = \frac{1}{\omega_2} rie^{i\varphi} d\varphi$
$|d\lambda| = \frac{1}{\omega_2} r d\varphi$ дает:

$$I_2 \leq C \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g(x, \lambda)| \frac{(1 - e^{-r\cos\varphi})^2}{r^2\cos^2\varphi} \cdot \frac{r}{|\omega_2|} d\varphi = C_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| \frac{(1 - e^{-r\cos\varphi})^2}{r\cos^2\varphi} d\varphi =$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

Рассмотрим $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$:

Замена $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$
$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$
$\frac{2\psi}{\pi} \leq \sin\psi \leq \psi$

дает:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = C_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| \frac{\left(1 - e^{-r\sin\psi}\right)^2}{r\sin^2\psi} d\psi \leq C_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| \frac{\left(2 - e^{-r\psi}\right)^2}{r\psi^2} d\psi$$

Заменим $r\psi = \xi$, тогда
$d\psi = \frac{1}{r} d\xi$
тогда

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = C_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}r} |g(\lambda, r)| \frac{\left(1 - e^{-\xi}\right)^2}{\xi^2} d\xi = \int_0^1 + \int_1^{\frac{\pi}{2}r},$$

Каждое слагаемое сходится. Аналогично рассматривается интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$

В I_3 воспользуемся ограниченностью $g(\lambda, r)$.

$$I_3 \leq C_4 \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \frac{1}{|\lambda|^2} |d\lambda|$$

Замена $\lambda = re^{i\varphi}$,
$d\lambda = rd\varphi$
дает:

$$I_3 \leq C_4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| \frac{1}{r^2} r d\varphi = \frac{1}{r} C_4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda, r)| d\varphi = o(1)$$

I_4, I_4 аналогичноI_2.

Таким образом, для произвольного $f(x) \in C\,[0;1]$ наша разность ограничена. Возьмём $m(x) = \chi(x)$. По следствиям 3.1 и 3.2

1)$\left\|\nu(x, \lambda) - R_{0\lambda} H_0^{-1} \chi(x)\right\|_{C\left[0;\frac{1}{2}\right]} = O(\lambda^{-2})$
2)$\left\|R_{0\lambda} H_0^{-1} \chi\right\|_{C\left[0;\frac{1}{2}\right]} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

Тогда

$$H(x, \lambda)\nu(x, \lambda) - H_0(x) R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)\chi(x)\right) =$$

$$= H(x, \lambda)\nu(x, \lambda) - H_0(x) R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)\chi(x)\right) + H(x, \lambda) R_{0\lambda}\left(H_0^{-1} f(x)\right) -$$

$$-H(x, \lambda) R_{0\lambda}\left(H_0^{-1} f(x)\right) = \left(H_0(x) + \frac{1}{\lambda} H_1(x)\right) O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) +$$

$$+\left(H(x,\lambda)-H_0(x)\right)O\left(\lambda^{-1}\right)=O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=$$

$$=O(\frac{1}{\lambda})=o(1).$$

Значит,

$\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\left(H(x,\lambda)\nu(x,\lambda)-H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)\chi(x)\right)\right)d\lambda \quad =$

$\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)O(\frac{1}{\lambda^2})=\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}O\left(e^{Re\varphi}\right)d\varphi=o(1)$

при $r\to\infty$. Тогда по теореме Банаха-Штейнгауза теорема доказана. □

3.3 Сходимость средних Рисса

Теперь приступим к скалярному случаю. Рассмотрим $f(x)\in C[0,1]$ и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f d\lambda.$$

По теореме 1.3 при $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)z_1(x)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\left(\Gamma\cdot \tilde{z(x)}\right)_1 d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\cdot$$

$$\cdot\left(\Gamma\cdot H(x,\lambda)v(x)\right)_1 d\lambda=\left(\Gamma\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)d\lambda\right)_1+$$

$$+o(1)=\left(\Gamma\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)\cdot D\ \cdot\Gamma^{-1}\cdot g(x)\right)d\lambda\right)_1+o(1)=$$

$$=\left(\Gamma\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)H_0(x)R_{0\lambda}\left(D\,H_0^{-1}(x)\cdot\Gamma^{-1}\cdot g(x)\right)d\lambda\right)_1+o(1)=$$

$$=\left(\Gamma\cdot H_0(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\tilde{R_\lambda}\left(H_0^{-1}(x)\cdot\Gamma^{-1}\cdot g(x)\right)d\lambda\right)_1+o(1).$$

По теореме 3.3, если $H_0^{-1}(x)\cdot\Gamma^{-1}\cdot g(x)$ удовлетворяет (3.3), что эквивалентно тому, что $g(x)$ удовлетворяет (1.22), то $J_{1r}\left(H_0^{-1}(x)\cdot\Gamma^{-1}\cdot g(x)\right)=H_0^{-1}(x)\cdot$

$\Gamma^{-1} \cdot g(x) + o(1)$ в $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ при $r \to \infty$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda = \left(\Gamma \cdot H_0(x) H_0^{-1}(x) \cdot \Gamma^{-1} \cdot g(x)\right)_1 + o(1) =$$

$$= (g(x))_1 + o(1) = f(x) + o(1).$$

Аналогично при $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) z_3 \left(x - \frac{1}{2}\right) d\lambda.$$

Сделаем замену $\xi = x - \frac{1}{2}$. Тогда $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$.
Повторяя рассуждения выше, получим:
$-J_r(f, x) = (g(\xi))_3 + o(1) = f\left(\frac{1}{2} + \xi\right) + o(1)$. Т.к. $\xi = x - \frac{1}{2} \Rightarrow -J_r(f, x) = f(x) + o(1)$.
Таким образом, можем доказать теорему:

Теорема 3.5. *Соотношение*

$$\lim_{r \to \infty} \|f(x) + J_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда

а)$f(x) \in C[0, 1]$
б)$g(x) = (f(x),\ f(\frac{1}{2} - x),\ f(\frac{1}{2} + x),\ f(1 - x))^T$ *удовлетворяет (1.22)*

Доказательство. 1) достаточность доказали
2)необходимость очевидна, т.к.

$$J_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda$$

состоит из с.п.ф. оператора A, которые непрерывны и $g(x)$ удовлетворяет (1.22).

□

Теперь можем сформулировать основную теорему:

Теорема 3.6. *Соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) + J_r(f,x)\|_{C[0,1]} = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) \in \overline{\Delta}_A$*, где* $\overline{\Delta}_A$ *– замыкание в* $C[0,1]$ *области значений оператора* A*.*

Доказательство. Необходимость очевидна, так как $J_r(f,x)$ состоит из с.п.ф. оператора A, которые принадлежат области значений оператора A, а значит и замыканию. Докажем достаточность: Пусть $f(x) \in \overline{\Delta}_A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f_0 \in \Delta_A$, такая что $\|f - f_0\|_{C[0,1]} < \varepsilon$.
Рассмотрим
$\|f(x) + J_r(f,x)\|_{C[0,1]} = \|f(x) - f_0 + f_0 + J_r(f_0) - J_r(f_0) + J_r(f)\|_{C[0,1]} \leq \|f - f_0\|_{C[0,1]} + \|f_0 + J_r(f_0)\|_{C[0,1]} + \|J_r(f - f_0)\|_{C[0,1]} \leq \varepsilon + \|f_0 + J_r(f_0)\|_{C[0,1]} + \|J_r(f - f_0)\|_{C[0,1]}$. Известно, что $\|J_r\|_{C[0,1]} \leq C$, где $C > 0$ не зависит от r, $\|f - f_0\|_{C[0,1]} < \varepsilon$. Следовательно,
$\|f(x) + J_r(f,x)\|_{C[0,1]} \leq \varepsilon + C\varepsilon + \|f_0 + J_r(f_0)\|_{C[0,1]}$. Известно, по теореме 3.1, что $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists r_0$, такое что $\forall r > r_0$ $\|f_0 + J_r(f_0)\|_{C[0,1]} < \varepsilon_1$.
Пусть $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$. Тогда
$\forall \varepsilon_0 > 0$ $\exists r_0$, такое что $\forall r > r_0$ $\lim\limits_{r\to\infty} \|f + J_r(f,x)\|_{C[0,1]} < \varepsilon_1 = 0$.

□

Из последних двух теорем следует:

Следствие 3.3. $\overline{\Delta}_A$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям а) и б) из теоремы 3.5.*

4 Аналог теоремы Жордана – Дирихле

4.1 Скалярный случай для оператора дифференцирования

Найдем условия разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям скалярного дифференциального оператора L, где

$$L:\ Ly = y'\ ;\ U(y) = y(0) - y(1) + \int\limits_0^1 a(t)y(t)\,dt = 0, \tag{4.1}$$

где $a(t)$ - непрерывная функция на $[0,1]$. Как известно, для частичной суммы ряда Фурье $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$, где $R_\lambda f$ - резольвента оператора L. Рассмотрим краевую задачу:

$$y'(x) = \lambda y(x) + f(x) \tag{4.2}$$

$$U(y) = 0 \tag{4.3}$$

Ее решение, найденное методом вариации, имеет вид:

$$y(x,\lambda) = R_\lambda f = -e^{\lambda x} \triangle^{-1}(\lambda) \int_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))f(t)dt + g_\lambda f(x), \tag{4.4}$$

где $\triangle(\lambda) = U(e^{\lambda x})$, U_x означает, что U применяется по x,
$g(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t,x)e^{\lambda(x-t)}, & \text{при } Re\lambda \geqslant 0, \\ \quad \varepsilon(x,t)e^{\lambda(x-t)}, & \text{при } Re\lambda < 0, \end{cases}$
$\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leqslant x, \\ 0, & \text{при } t > x, \end{cases}$
$g_\lambda f(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)f(t)dt.$

Рассмотрим $f(x) \in C\,[0,1] \cap V\,[0,1]$. Известно, если $g(x) \in C^1\,[0,1]$, то

$$\int\limits_a^b g'(x)f(x)\,dx = g(x)f(x)\,\big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,df(x) \tag{4.5}$$

Будем считать, что $Re\lambda \le 0$. (Случай $Re\lambda \ge 0$ рассматривается аналогично.)

Лемма 4.1. *Имеет место формула:*
$\int_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))f(t)dt = \frac{1}{\lambda}\left(f(1) - e^{\lambda}f(0)\right) - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}\,df(t) - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)e^{\lambda\tau}f(0)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)\,d\tau\int\limits_0^\tau e^{\lambda(\tau-t)}\,df(t)$

Доказательство. В самом деле,
$I = U_x(g(x,t,\lambda) = g(0,t,\lambda) - g(1,t,\lambda) + \int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\,d\tau = -e^{\lambda(1-t)} + \int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \varepsilon(0,t)e^{\lambda(0-t)} - \varepsilon(1,t)e^{\lambda(1-t)} + \int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\,d\tau = 0 - e^{\lambda(1-t)} + \int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\,d\tau.$
Тогда
$\int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\lambda)f(t)\,dt = -\int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}f(t)\,dt + \int\limits_0^1 f(t)\,dt\int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\,d\tau.$
В первом интеграле применим формулу (4.5), во втором интеграле поменяем порядки интегрирования, тогда $I = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 \left(e^{\lambda(1-t)}\right)'_t f(t)\,dt + \int\limits_0^1 a(\tau)\,d\tau\int\limits_0^1 f(t)g(\tau,t,\lambda)\,dt = \frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda(1-t)}f(t)|_0^1 - \int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}\,df(t)\right] + \int\limits_0^1 a(\tau)\,d\tau\left[\int\limits_0^\tau f(t)\varepsilon(\tau,t)e^{\lambda(\tau-t)}\,dt + \int\limits_\tau^1 f(t)\varepsilon(\tau,t)e^{\lambda(\tau-t)}\,dt\right] = \frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda(1-t)}f(t)|_0^1 - \int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}\,df(t)\right] + \int\limits_0^1 a(\tau)\,d\tau\int\limits_0^\tau e^{\lambda(\tau-t)}f(t)\,dt.$
Во внутреннем интеграле второго слагаемого также применим формулу (4.5):
$I = \frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda(1-t)}f(t)|_0^1 - \int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}\,df(t)\right] - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)\,d\tau\left[e^{\lambda(\tau-t)}f(t)|_0^\tau - \int\limits_0^\tau e^{\lambda(\tau-t)}\,df(t)\right] = \frac{1}{\lambda}\left(f(1) - e^{\lambda}f(0)\right) - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}\,df(t) - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)e^{\lambda\tau}f(0)\,d\tau +$

$\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\tau e^{\lambda(\tau-t)}\,df(t)$.
Получили требуемое.

$\square$

Рассмотрим теперь $g_\lambda f(x)$ из (4.4):

Лемма 4.2. *Выполнятся равенство:*
$g_\lambda f(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}f(0) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t)$

Доказательство. В самом деле: $g_\lambda f(x) = \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt = -\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda(x-t)}f(t)|_0^x - \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t)\right] = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}f(0) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t)$ $\square$

Вернемся к решению задачи (4.2), (4.3).

Лемма 4.3. *Если $f(x)$ удовлетворяет условию (4.3), то $R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \Omega_\lambda f$, где*

$\Omega_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left[I_1 + I_2 + I_3\right]$, *где* $I_1 = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^x e^{-\lambda t}\,df(t)$, $I_2 = \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}\,df(t)$, $I_3 = -\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 a(x)\,dx\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t)$.

Доказательство. По леммам 4.1, 4.2
$R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}f(1) + \frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)}f(0) + \frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}\,df(t) + \frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 a(\tau)f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}\int\limits_0^1 a(\tau)f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 a(\tau)e^{\lambda\tau}f(0)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 a(x)\,dx\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t) - \frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}f(0) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t)$.
Рассмотрим два слагаемых этого равенства:
$I_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)}f(0) + \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}f(0)$
Преобразуем их:
$I_1 = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}f(0)\left[\frac{e^\lambda}{\Delta(\lambda)} + 1\right] = \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(0)\left[e^\lambda + \Delta(\lambda)\right] = \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(0)\left[e^\lambda + U(e^{\lambda x})\right] = \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(0)\left[e^\lambda + 1 - e^\lambda + \int\limits_0^1 a(t)e^{\lambda t}\,dt\right] = \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(0)\left[1 + \int\limits_0^1 a(t)e^{\lambda t}\,dt\right] = \frac{1}{\lambda\Delta}e^{\lambda x}f(0) + \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(0)\int\limits_0^1 a(t)e^{\lambda t}\,dt.$

Значит,

$$R_\lambda f = \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(0) - \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(1) + \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(0)\int\limits_0^1 a(t)e^{\lambda t}\,dt + \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}\,df(t) + \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}\int\limits_0^1 a(\tau)f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}f(0)\int\limits_0^1 a(t)e^{\lambda t}\,dt - \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}\int\limits_0^1 a(x)\,dx\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t) - \frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t) = \frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}e^{\lambda x}\left[f(0) - f(1) + \int\limits_0^1 a(\tau)f(\tau)\,d\tau\right] + \frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}\,df(t) - \frac{1}{\lambda}\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)}\int\limits_0^1 a(x)\,dx\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t) - \frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t).$$

Так как квадратная скобка обращается в 0, то лемма доказана. $\square$

Удалим из комплексной плоскости собственные значения оператора L вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_0. В полученной области S_{δ_0} при $Re\lambda \le 0$ справедлива оценка $|\Delta(\lambda)| \ge c\left|e^{-\lambda}\right|$. Докажем теорему.

Теорема 4.1. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, имеет на нем ограниченную вариацию и удовлетворяет условию (4.3), то*

$$\max_{0\le x\le 1}|f(x) - S_r(f,x)| \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где r таково, что окружность $|\lambda| = r$ находится в S_{δ_0}.

Доказательство. $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$. На основании предыдущей леммы $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\left[-\frac{1}{\lambda}f(x) + \Omega_\lambda f\right]\,d\lambda = f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\Omega_\lambda f\,d\lambda$. Значит, для доказательства утверждения достаточно показать, что

$$\max_{0\le x\le 1}\left|\int\limits_{|\lambda|=r}\Omega_\lambda f\,d\lambda\right| \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Зададим сколь угодно малое ε. Тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое что $\bigvee\limits_{1-\delta}^{1}(f) < \varepsilon$. Значит, для первого слагаемого в Ω_λ при $|\lambda| = r$:

$\left|\frac{1}{\lambda}I_1\right| \leq \frac{|e^{\lambda}||e^{\lambda x}|}{c\cdot r}\left\{\int\limits_0^{x-\delta}\left|e^{-\lambda t}\right||df(t)| + \int\limits_{x-\delta}^{x}\left|e^{-\lambda t}\right||df(t)|\right\} \leq$
$\frac{|e^{\lambda x}|}{c\cdot r}\int\limits_0^{x-\delta}\left|e^{-\lambda(x-\delta)}\right||df(t)| + \frac{1}{c\cdot r}\int\limits_{x-\delta}^{x}\left|e^{\lambda(x-t)}\right||df(t)| \leq$
$\frac{1}{c\cdot r}\left\{\int\limits_0^{x-\delta}\left|e^{\lambda\delta}\right||df(t)| + \int\limits_{x-\delta}^{x}|df(t)|\right\} \leq \frac{1}{c\cdot r}\left\{\left|e^{\lambda\delta}\right|\bigvee\limits_0^1(f) + \bigvee\limits_{1-\delta}^1(f)\right\} = \frac{c}{r}\left\{\left|e^{\lambda\delta}\right| + \epsilon\right\}$, где за c обозначены разные константы. Аналогично для остальных слагаемых $\left|\frac{1}{\lambda}I_2\right|$ и $\left|\frac{1}{\lambda}I_3\right|$ из Ω_λ. Поэтому $\left|\int\limits_{|\lambda|=r}{}'\,\Omega_\lambda f\,d\lambda\right| \leq \frac{c}{r}\int\limits_{|\lambda|=r}{}'\left|e^{\lambda\delta}\right||d\lambda| + \frac{c\cdot\epsilon}{r}\int\limits_{|\lambda|=r}{}'|d\lambda| \leq$
$\frac{c}{r}2\,r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\delta r\,sin\theta}\,d\theta + c\,\pi\,\varepsilon \leq 2\,c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\delta r\frac{2}{\pi}\theta}\,d\theta + c\,\pi\,\varepsilon \leq \frac{c}{r} + c\cdot\pi\cdot\varepsilon \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$, где $(')$ означает часть $|\lambda| = r$, в которой $Re\lambda \leq 0$. Теорема доказана. □

4.2 Об одной теореме равносходимости интегро – дифференциального оператора

Рассмотрим разность $R_{1\lambda} - R_{0\lambda}$:

$$R_{1\lambda} - R_{0\lambda} = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt + g_\lambda m(x) +$$

$$+\,Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}U_{0x}(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt - g_\lambda m(x) =$$

$$= -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt + Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt -$$

$$Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt + Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}U_{0x}(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt =$$

$$-Y(x,\lambda)\left(\Delta^{-1}(\lambda) - \Delta_0^{-1}(\lambda)\right)\int\limits_0^{\frac{1}{2}}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt +$$

$$Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(U_{0x}(g(x,t,\lambda)) - U_{0x}(g(x,t,\lambda))\right)m(t)\,dt$$

Лемма 4.4. *Имеет место оценка* $Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda) = O(1)$

Доказательство. Следует из (1.42) и(1.44). □

Аналогично можно доказать, что $Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda) = O(1)$ Докажем лемму:

Лемма 4.5. *Имеет место оценка:*

$$Y(x,\lambda)\left(\Delta^{-1}(\lambda)-\Delta_0^{-1}(\lambda)\right)=O(\frac{1}{\lambda})$$

Доказательство. Рассмотрим сначала $\left(\Delta^{-1}(\lambda)-\Delta_0^{-1}(\lambda)\right)$:

$\Delta(\lambda)=M_0H(0,\lambda)Y(0,\lambda)+M_1H(\frac{1}{2},\lambda)Y(\frac{1}{2},\lambda)+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H(t,\lambda)Y(t,\lambda)\,dt.$

$\Delta_0(\lambda)=M_0H_0(0)Y(0,\lambda)+M_1H_0(\frac{1}{2})Y(\frac{1}{2},\lambda)+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H_0(t)Y(t,\lambda)\,dt.$

Значит

$\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)=M_0\left(H(0,\lambda)-H_0(0)\right)Y(0,\lambda)+M_1\left(H(\frac{1}{2},\lambda)-H_0(\frac{1}{2})\right)Y(\frac{1}{2},\lambda)+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(H(t,\lambda)-H_0(t)\right)Y(t,\lambda)\,dt.$

$H(t,\lambda)-H_0(t)=\frac{1}{\lambda}H_1(t)$ – кодиагональная матрица. Следовательно,

$$H(t,\lambda)-H_0(t)=\frac{1}{\lambda}H_1(t)=\begin{pmatrix}0 & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda})\\ O(\frac{1}{\lambda}) & 0 & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda})\\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & 0 & O(\frac{1}{\lambda})\\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & 0\end{pmatrix}.$$

$$diag\left(e^{\lambda\omega_1 t},e^{\lambda\omega_2 t},e^{\lambda\omega_3 t},e^{\lambda\omega_4 t}\right)=$$
$$\begin{pmatrix}0 & O(\frac{1}{\lambda})O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t}e^{\lambda\omega_4 t}\\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & 0 & O(\frac{1}{\lambda})O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t}\\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & 0 & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t}\\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & 0\end{pmatrix}$$

Рассмотрим теперь

$$\Omega(t)\left(H(t,\lambda)-H_0(t)\right)Y(t,\lambda)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t)\\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & a_{34}(t)\\ a_{41}(t) & a_{42}(t) & a_{43}(t) & a_{44}(t)\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0 & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t}\\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & 0 & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t}\\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & 0 & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t}\\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & 0\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t} \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t} \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t} \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4 t} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij}(t)$, $i,j = \overline{1,4}$ – непрерывные функции. Проинтегрируем последнюю матрицу по t от 0 до $\frac{1}{2}$. Для примера возьмем элемент из первого столбца: $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t}\,dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|e^{\lambda\omega_1 t}\right|\,dt\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|e^{\frac{1}{2}\lambda\omega_1}\right|\,dt\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda\frac{1}{2}\omega_1}\right)$.
Аналогично для элементов второго столбца.

Учитывая, что $Re\,\lambda\omega_i \le 0$ при $i = 3,4$:
$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_1 t}\,dt = O\left(\frac{1}{\lambda}e^{0\cdot\lambda\frac{1}{2}\omega_1}\right) = O(\frac{1}{\lambda})$.
Значит, после интегрирования получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta - \Delta_0 = O(\tfrac{1}{\lambda}) + O(\tfrac{1}{\lambda}) \cdot diag\left(e^{\mu\omega_1}, e^{\mu\omega_2}, e^{\mu\omega_3}, e^{\mu\omega_4}\right) +$$

$$+ \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_1}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_2}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_3}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_4}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_1}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_2}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_3}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_4}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_1}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_2}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_3}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_4}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_1}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_2}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_3}) & O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda}e^{\mu\omega_4}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь $Y(x,\lambda)\left(\Delta^{-1}(\lambda) - \Delta_0^{-1}(\lambda)\right) = Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\left(\Delta_0(\lambda) - \Delta(\lambda)\right)\Delta_0^{-1}(\lambda)$.

Здесь

$$\Delta_0^{-1}=\frac{1}{det\Delta_0}\begin{pmatrix} O(e^{\mu\omega_2}) & O(e^{\mu\omega_2}) & O(e^{\mu\omega_2}) & O(e^{\mu\omega_2}) \\ O(e^{\mu\omega_1}) & O(e^{\mu\omega_1}) & O(e^{\mu\omega_1}) & O(e^{\mu\omega_1}) \\ O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) & O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) & O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) & O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) \\ O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) & O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) & O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) & O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}) \end{pmatrix}.$$

Так как $\frac{1}{det\Delta_0}=O(e^{-\mu(\omega_1+\omega_2)})$, то

$$\Delta_0^{-1}=\begin{pmatrix} O(e^{-\mu\omega_1}) & O(e^{-\mu\omega_1}) & O(e^{-\mu\omega_1}) & O(e^{-\mu\omega_1}) \\ O(e^{-\mu\omega_2}) & O(e^{-\mu\omega_2}) & O(e^{-\mu\omega_2}) & O(e^{-\mu\omega_2}) \\ O(1) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(1) & O(1) \end{pmatrix}.$$

Значит

$$Y(x,\lambda)\left(\Delta^{-1}(\lambda)-\Delta_0^{-1}(\lambda)\right) = O(1)\begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_1} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\mu\omega_2} & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} O(e^{-\mu\omega_1}) & O(e^{-\mu\omega_1}) & O(e^{-\mu\omega_1}) & O(e^{-\mu\omega_1}) \\ O(e^{-\mu\omega_2}) & O(e^{-\mu\omega_2}) & O(e^{-\mu\omega_2}) & O(e^{-\mu\omega_2}) \\ O(1) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(1) & O(1) \end{pmatrix}=$$

$$=O(\tfrac{1}{\lambda})\begin{pmatrix} O(1) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(1) & O(1) \end{pmatrix}=O(\tfrac{1}{\lambda})$$

□

В доказательстве леммы 1.8 было установлено, что $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_x\left(g(x,t,\lambda)\right)m(t)\,dt=O(\|m\|_1)$, Значит, доказали, что

$$-Y(x,\lambda)\left(\Delta^{-1}(\lambda)-\Delta_0^{-1}(\lambda)\right)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt=O(\frac{1}{\lambda}\,\|m\|_1)$$

Докажем следующую лемму:

Лемма 4.6. *Имеет место оценка:*

$$Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(U_{0x}(g(x,t,\lambda))-U_x(g(x,t,\lambda))\right)m(t)\,dt=O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1)$$

Доказательство. Рассмотрим $(U_{0x}(g(x,t,\lambda)) - U_x(g(x,t,\lambda)) = M_0H_0(0)g(0,t,\lambda) + M_1H_0(\frac{1}{2})g(\frac{1}{2},t,\lambda) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H_0(t)g(x,t,\lambda)\,dt - M_0H(0,\lambda)g(0,t,\lambda) - M_1H(\frac{1}{2},\lambda)g(\frac{1}{2},t,\lambda) - \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H(t,\lambda)g(x,t,\lambda)\,dt = M_0\left(H_0(0)-H(0,\lambda)\right)g(0,t,\lambda) + M_1\left(H_0(\frac{1}{2})-H(\frac{1}{2},\lambda)\right)g(\frac{1}{2},t,\lambda) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)\left(H_0(t)-H(t,\lambda)\right)g(x,t,\lambda)\,dt.$

Рассмотрим подинтегральное выражение, стоящее в третьем слагаемом: $\Omega(t)\left(H_0(t)-H(t,\lambda)\right)g(x,t,\lambda)$:

Элементы первых двух столбиков имеют вид:

$$-O(\frac{1}{\lambda})\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_j(x-t)},$$

где $j=1,2$.

Элементы последних двух столбиков имеют вид:

$$-O(\frac{1}{\lambda})\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_1(x-t)},$$

где $j=3,4$.

Проинтегрируем полученную матрицу от 0 до $\frac{1}{2}$. Рассмотрим элементы первого столбца (второго аналогично): $\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}}-O(\frac{1}{\lambda})\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_1(x-t)}\,dt\right| = \left|\int\limits_0^{x}+\int\limits_x^{\frac{1}{2}}\right|$.

Первый интеграл равен нулю, во втором $t\geq x$, поэтому:

$\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}}-O(\frac{1}{\lambda})\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_1(x-t)}\,dt\right| \leq \int\limits_x^{\frac{1}{2}}O(\frac{1}{\lambda})\left|e^{\lambda\omega_1(x-t)}\right|\,dt = O(\frac{1}{\lambda})\int\limits_x^{\frac{1}{2}}e^{(x-t)Re\lambda\omega_1}\,dt = O(\frac{1}{\lambda})$.

Рассмотрим элементы третьего столбца (четвертого аналогично):

$\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} O(\frac{1}{\lambda})\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_3(x-t)}\,dt\right| = \left|\int\limits_0^{x} + \int\limits_x^{\frac{1}{2}}\right|.$

Второй интеграл равен нулю, в первом $t \le x$, поэтому:

$\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} O(\frac{1}{\lambda})\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_3(x-t)}\,dt\right| \le \int\limits_0^{x} O(\frac{1}{\lambda})\left|e^{\lambda\omega_3(x-t)}\right|\,dt = O(\frac{1}{\lambda})\int\limits_x^{\frac{1}{2}} e^{(x-t)Re\lambda\omega_3}\,dt = O(\frac{1}{\lambda}).$

Теперь рассмотрим $M_0\left(H_0(0) - H(0,\lambda)\right)g(0,t,\lambda)$:

$$M_0\left(H_0(0) - H(0,\lambda)\right)g(0,t,\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & 0 & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & 0 & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & 0 \end{pmatrix} \cdot diag\left(e^{-\lambda\omega_1 t}, e^{-\lambda\omega_2 t}, 0, 0\right) =$$

$$\begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & 0 & 0 \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & 0 & 0 \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & 0 & 0 \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a_{ij}, $i,j = \overline{1,4}$ константы.

Теперь рассмотрим $M_1\left(H_0(\frac{1}{2}) - H(\frac{1}{2},\lambda)\right)g(\frac{1}{2},t,\lambda)$:

$$M_1\left(H_0(\frac{1}{2}) - H(\frac{1}{2},\lambda)\right)g(\frac{1}{2},t,\lambda) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} & b_{14} \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & a_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & a_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & 0 & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & 0 & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & 0 \end{pmatrix} \cdot diag\left(0, 0, e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)}, e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)},\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ 0 & 0 & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ 0 & 0 & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ 0 & 0 & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \end{pmatrix},$$

где $b_{ij},\ i,j=\overline{1,4}$ константы.
Тогда $U_{0x}\left(g(x,t,\lambda)\right)-U_x\left(g(x,t,\lambda)\right)=$

$$\begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \\ O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) & O(\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_2 t} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \\ O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)} & O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_4(\frac{1}{2}-t)} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим теперь $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(U_{0x}(g(x,t,\lambda))-U_x(g(x,t,\lambda))\right)m(t)\,dt.$ Рассмотрим элементы первого столбика (второго аналогично):

$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda\omega_1 t}\right)m(t)\,dt = O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1) + O(\frac{1}{\lambda})\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-t\,Re\lambda\omega_1}m(t)\,dt = O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1)+O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1)=O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1).$

Рассмотрим элементы третьего столбика (четвертого аналогично):

$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(O(\frac{1}{\lambda})+O(\frac{1}{\lambda})e^{\lambda\omega_3(\frac{1}{2}-t)}\right)m(t)\,dt = O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1) + O(\frac{1}{\lambda})\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{(\frac{1}{2}-t)\,Re\lambda\omega_3}m(t)\,dt = O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1)+O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1)=O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1).$

Учитывая теперь, что $Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda) = O(1)$, получаем утверждение леммы. $\square$

Таким образом, доказали лемму:

Лемма 4.7. *Если $m(x)$ с компонентами из $L[0, \frac{1}{2}]$,то*

$$R_{1\lambda} - R_{0\lambda} = O(\frac{1}{\lambda}\left\|m\right\|_1)$$

Также имеет место лемма:

Лемма 4.8. *Если $m(x)$ функция, компоненты которой есть функции ограниченной вариации на $[0, \frac{1}{2}]$,то*

$$R_{1\lambda} - R_{0\lambda} = O(\frac{1}{\lambda^2}\left\|m\right\|_1)$$

Доказательство. Учитывая, что при вычислении интеграла в последнем слагаемом $R_{1\lambda} - R_{0\lambda}$ будет столбик:
$I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\tau)\left(H_0(\tau) - H(\tau,\lambda)\right) g(\tau,t,\lambda)\, d\tau\right] m(t)\, dt,$
каждая компонентна которого есть сумма интегралов вида:
$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} O(\frac{1}{2})\left[\varepsilon(t,\tau)e^{\lambda\omega_i(\tau-t)}\, d\tau\right] m_i(t)\, dt$, $i = 1, 2$, или
$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} O(\frac{1}{2})\left[\varepsilon(\tau,t)e^{\lambda\omega_j(\tau-t)}\, d\tau\right] m_j(t)\, dt$, $j = 3, 4$.
Рассмотрим, для примера, первый вид (второй вид рассматривается аналогично). Поменяем пределы интегрирования:
$O(\frac{1}{2})\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left[\varepsilon(t,\tau)e^{\lambda\omega_i(\tau-t)} m_i(t)\, dt\right]\, d\tau.$
Применяя интегрирование по частям во внутреннем интеграле, получим оценку $O(\frac{1}{\lambda^2}\left\|m\right\|_1)$.
Значит и $I = O(\frac{1}{\lambda^2}\left\|m\right\|_1)$.
Учитывая также оценку :

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_x\left(g(x,t,\lambda)\right) m(t)\, dt = O(\left\|m\right\|_1),$$

получаем утверждение леммы.

□

4.3 Основная теорема

Докажем лемму:

Лемма 4.9. *Для вектор-функции $m = m(x)$ с компонентами из $C[0, \frac{1}{2}]$ имеет место:*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} \left[H(x,\lambda)R_{1\lambda}(H_0^{-1}m) - H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}m)\right] \, d\lambda \right\|_{\infty} = 0$$

Доказательство. Рассмотрим $J = H(x,\lambda)R_{1\lambda}(H_0^{-1}m) - H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}m)$: $J = \left(H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\right) R_{1\lambda}(H_0^{-1}m) - H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}m) = H_0(x)\left(R_{1\lambda}(H_0^{-1}) - R_{0\lambda}(H_0^{-1})\right) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)R_{1\lambda}(H_0^{-1}m)$.
По лемме 4.7 имеем:
$J = H_0(x)\left[O\left(\frac{1}{\lambda}\|m\|_1\right)\right] + \left[O\left(\frac{1}{\lambda}\|m\|_1\right)\right] = \left[O\left(\frac{1}{\lambda}\|m\|_1\right)\right]$.
Тогда рассмотрим $\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda}||m||_1 \, d\lambda \right\|_{\infty}$. Сделаем замену:
$\lambda = re^{i\varphi}$, тогда $|\lambda| = r$, $|d\lambda| = r\varphi$. Значит:
$\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda}||m||_1 \, d\lambda \right\|_{\infty} = \left\| \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r}||m||_1 r \, d\varphi \right\|_{\infty} = O(1)$. Если же m - вектор – функция, компоненты которой есть функции ограниченной вариации, то $J = O(\frac{1}{\lambda^2})$, а значит,
$\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda^2} \, d\lambda \right\|_{\infty} = \left\| \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r \, d\varphi \right\|_{\infty} = \left\| \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r} \, d\varphi \right\|_{\infty} = o(1)$.
По теореме Банаха – Штейнгауза получаем утверждение леммы.

□

Лемма 4.10. *Имеет место равенство*

$$\lim_{r\to\infty} \| \int_{|\lambda|=r} [H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)] \, d\lambda \, \|_{\infty} = 0,$$

где $v(x,\lambda)$ - решение задачи (1.33), (1.34), $\|\cdot\|_{\infty}$ – норма в C_{∞}.

Доказательство. Рассмотрим разность: $H(x,\lambda)(v(x,\lambda,)) - H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x))$:
$H(x,\lambda)(v(x,\lambda,)) - H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}m(x)) = H(x,\lambda)R_{1\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x)) - H(x,\lambda)R_{1\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x)) + H(x,\lambda)(v(x,\lambda,)) - H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}m(x)) = H(x,\lambda)[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x))] - [H(x,\lambda)R_{1\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x)) - H_0(x)R_{0\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x))]$.
Учитывая лемму 4.9, надо рассмотреть только первое слагаемое $H(x,\lambda)[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x))]$. По лемме 1.11 имеем:
$H(x,\lambda)[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x))] = H(x,\lambda)O\left(\left(\frac{1}{\lambda}+\psi^2(\lambda)\right)||m||_1\right) = \left[H_0(x)+\frac{1}{\lambda}H_1(x)\right] \cdot O\left(\left(\frac{1}{\lambda}+\psi^2(\lambda)\right)||m||_1\right) = H_0(x)O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + H_0(x)O\left(\psi^2(\lambda)||m||_1\right) + H_1(x)O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + H_1(x)O\left(\frac{1}{\lambda}\psi^2(\lambda)||m||_1\right)$.
Очевидно, что интеграл от каждого слагаемого ограничен. Если же в качестве $f(x)$ взять функцию, являющуюся характеристической функцией отрезка $[0,1]$, то по следствию из леммы 1.11 получим, что интеграл есть $o(1)$ при $r\to\infty$. Лемма доказана.

$\square$

Лемма 4.11. *При* $x\in[0,1/2]$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda = \left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \Gamma H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}D\Gamma^{-1}g\right)\,d\lambda\right)_1 + o(1),$$

$()_1$ - *это первая компонента вектора,* $o(1)\to 0$ *при* $r\to\infty$ *равномерно по* $x\in[0,1/2]$.
При $x\in[1/2,1]$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda = \left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \Gamma H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}D\Gamma^{-1}g\right)\,d\lambda\right)_3 + o(1),$$

$()_3$ - *это третья компонента вектора,* $o(1)\to 0$ *при* $r\to\infty$ *равномерно по* $x\in[1/2,1]$.

Доказательство. Пусть $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Тогда, по теореме 1.3 и лемме 4.10 имеем: $\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} (\Gamma\tilde{z})_1 \, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=r} (\Gamma H(x,\lambda)v(x))_1 \, d\lambda =$ $\int\limits_{|\lambda|=r} \left(\Gamma H_0(x) R_{0\lambda} \left(H_0^{-1}(x)m(x)\right)\right)_1 \, d\lambda + o(1) =$ $\int\limits_{|\lambda|=r} \left(\Gamma H_0(x) R_{0\lambda} \left(H_0^{-1} D \Gamma^{-1} g\right) \, d\lambda\right)_1 + o(1),$
где $()_1$ – первая компонента стобика.

Если $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, то преобразования аналогичны, только уже для третьего столбика. Лемма доказана. □

Будем считать, что компоненты $m(x)$ принадлежат $C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap V\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Рассмотрим подробно $R_{0\lambda}m$ при этом условии.

Лемма 4.12. *Имеет место формула:*
$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_{0x}(g(x,t,\lambda))m(t)dt = -\frac{1}{\lambda} M_0 H_0(0) D^{-1} g(0, \frac{1}{2}, \lambda) m(\frac{1}{2}) + \frac{1}{\lambda} M_0 H_0(0) D^{-1} \times$

$\times\ g(0, 0+, \lambda)m(0) + \frac{1}{\lambda} M_0 H_0(0) D^{-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(0,t,\lambda) d\, m(t) - \frac{1}{\lambda} M_1 H_0(\frac{1}{2}) D^{-1} g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 0, \lambda) m(\frac{1}{2}) +$

$+ \frac{1}{\lambda} M_1 H_0(\frac{1}{2}) D^{-1} g(\frac{1}{2}, 0, \lambda) m(0) + \frac{1}{\lambda} M_1 H_0(\frac{1}{2}) D^{-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\frac{1}{2}, t, \lambda) dm(t) -$
$\frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) H_0(t) D^{-1} m(t) dt +$

$+ \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\tau) H_0(\tau) D^{-1} d\tau \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\tau, t, \lambda) d\, m(t) + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\tau) H_0(\tau) D^{-1} g(\tau, 0, \lambda) m(0) d\tau -$
$\frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\tau) \times$
$\times\ H_0(\tau) D^{-1} g(\tau, \frac{1}{2}, \lambda) m(\frac{1}{2}) d\tau$

Доказательство. В самом деле, $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} U_{0x}(g(x,t,\lambda))m(t)dt =$

$M_0 H_0(0) \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(0,t,\lambda) m(t) dt +$

$+ M_1 H_0(\frac{1}{2}) \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\frac{1}{2}, t, \lambda) m(t) dt + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\tau) H_0(\tau) d\tau \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\tau, t, \lambda) m(t) dt =$

$-\frac{1}{\lambda}M_0H_0(0)D^{-1}\times$

$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g'_t(0,t,\lambda)m(t)dt - \frac{1}{\lambda}M_1H_0(\frac{1}{2})D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g'_t(\frac{1}{2},t,\lambda)m(t)dt - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(\tau)H_0(\tau)d\tau D^{-1}\times$

$\int\limits_0^{\tau} g'_t(\tau,t,\lambda)m(t)dt - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(\tau)H_0(\tau)d\tau D^{-1}\int\limits_{\tau}^{\frac{1}{2}} g'_t(\tau,t,\lambda)m(t)dt.$

Применив формулу интегрирования по частям, получим требуемое. Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь $g_\lambda m(x)$ из равенства (3.2).

Лемма 4.13. *Справедлива формула:*

$g_\lambda m(x) = -\frac{1}{\lambda}D^{-1}m(x) + \frac{1}{\lambda}D^{-1}g(x,0,\lambda)m(0) - \frac{1}{\lambda}D^{-1}g(x,\frac{1}{2},\lambda)m(\frac{1}{2}) +$
$+\frac{1}{\lambda}D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)dm(t)$

Доказательство. Имеем:
$g_\lambda m(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)dt = \int\limits_0^{x} g(x,t,\lambda)m(t)dt + \int\limits_x^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)m(t)dt$. К каждому интегралу применим формулу интегрирования по частям и получим требуемое. Лемма доказана. □

Значит, решение системы (3.2), (3.3) принимает вид:

$R_{0\lambda}m = I_1 + I_2 - \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda)M_0H_0(0)D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(0,t,\lambda)d\,m(t) -$
$\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda)\times$

$\times M_1H_0(\frac{1}{2})D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\frac{1}{2},t,\lambda)dm(t) - \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H_0(t)D^{-1}m(t)dt -$

$-\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(\tau)H_0(\tau)D^{-1}d\tau\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\tau,t,\lambda)d\,m(t) - \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(\tau)\times$

$\times H_0(\tau)D^{-1}g(\tau,0,\lambda)m(0)d\tau + \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(\tau)H_0(\tau)D^{-1}g(\tau,\frac{1}{2},\lambda)m(\frac{1}{2})d\tau -$
$\frac{1}{\lambda}D^{-1}\times$

$$\times m(x) + \frac{1}{\lambda}D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)dm(t), \tag{4.6}$$

где

$I_1 = \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1}g(0,\frac{1}{2},\lambda)m(\frac{1}{2}) + \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_1H_0(\frac{1}{2})D^{-1}g(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-0,\lambda) \times$
$\times m(\frac{1}{2}) - \frac{1}{\lambda}D^{-1}g(x,\frac{1}{2},\lambda)m(\frac{1}{2})$,

$I_2 = -\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1}g(0,0+,\lambda)m(0) - \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_1H_0(\frac{1}{2})D^{-1}g(\frac{1}{2},0,\lambda) \times$
$\times m(0) + \frac{1}{\lambda}D^{-1}g(x,0,\lambda)m(0)$

Рассмотрим в (4.7) некоторые слагаемые.

Лемма 4.14. *Имеет место формула:*

$$I_1 = \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_1H_0(\tfrac{1}{2})D^{-1}m(\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H_0(t) \times$$
$$\times Y(t,\lambda)Y^{-1}(x,\lambda)D^{-1}g(x,\tfrac{1}{2},\lambda)dt\, m(\tfrac{1}{2})$$

Доказательство. В самом деле, за счет перестановочности диагональных матриц,

$I_1 = \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}ID^{-1}m(\frac{1}{2})$, где $I = M_0H_0(0)g(0,\frac{1}{2},\lambda) + M_1H_0(\frac{1}{2})g(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-0,\lambda) - \Delta_0Y^{-1}(x,\lambda)g(x,\frac{1}{2},\lambda)$.

Рассмотрим подробно I:

$$I = M_0H_0(0)\,\mathrm{d}iag\left(-e^{-\lambda\omega_1\frac{1}{2}}, -e^{-\lambda\omega_2\frac{1}{2}}, 0, 0\right) + M_1H_0(\tfrac{1}{2})\,\mathrm{d}iag\,(0,0,1,1) -$$
$$- M_0H_0(0)Y(0,\lambda)\,\mathrm{d}iag\left(e^{-\lambda\omega_1x}, e^{-\lambda\omega_2x}, e^{-\lambda\omega_3x}, e^{-\lambda\omega_4x}\right) \times$$
$$\mathrm{d}iag\left(-e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}, -e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}, 0, 0\right) - M_1H_0(\tfrac{1}{2})Y(\tfrac{1}{2},\lambda) \times$$
$$\times\,\mathrm{d}iag\left(e^{-\lambda\omega_1x}, e^{-\lambda\omega_2x}, e^{-\lambda\omega_3x}, e^{-\lambda\omega_4x}\right) \times$$
$$\times\,\mathrm{d}iag\left(-e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}, -e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}, 0, 0\right) -$$
$$-\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H_0(t)Y(t,\lambda)Y^{-1}(x,\lambda)g(x,\tfrac{1}{2},\lambda)dt = M_0H_0(0) \times$$
$$\times\,[\;\mathrm{d}iag\left(-e^{-\lambda\omega_1\frac{1}{2}}, -e^{-\lambda\omega_2\frac{1}{2}}, 0, 0\right) + \mathrm{d}iag\,(1,1,1,1) \times$$
$$\times\,\mathrm{d}iag\left(e^{-\lambda\omega_1x}, e^{-\lambda\omega_2x}, e^{-\lambda\omega_3x}, e^{-\lambda\omega_4x}\right) \times$$
$$\times\,\mathrm{d}iag\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}, e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}, 0, 0\right)\;] + M_1H_0(\tfrac{1}{2})\,[\;\mathrm{d}iag\,(0,0,1,1) +$$
$$+\,\mathrm{d}iag\left(e^{\lambda\omega_1\frac{1}{2}}, e^{\lambda\omega_2\frac{1}{2}}, e^{\lambda\omega_3\frac{1}{2}}, e^{\lambda\omega_4\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}iag\left(e^{-\lambda\omega_1x}, e^{-\lambda\omega_2x}, e^{-\lambda\omega_3x}, e^{-\lambda\omega_4x}\right) \times$$
$$\times\,\mathrm{d}iag\left(e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}, e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}, 0, 0\right)\;] - \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Omega(t)H_0(t)Y(t,\lambda)Y^{-1}(x,\lambda)g(x,\tfrac{1}{2},\lambda)dt =$$

$= M_0 H_0(0)\,[\ \mathrm{d}iag\left(-e^{-\lambda\omega_1\frac{1}{2}}, -e^{-\lambda\omega_2\frac{1}{2}}, 0, 0\right) + \mathrm{d}iag\left(e^{\lambda\omega_1\frac{1}{2}}, e^{\lambda\omega_2\frac{1}{2}}, 0, 0\right)\ ] +$
$+ M_1 H_0(\frac{1}{2})\,[\ \mathrm{d}iag\,(0,0,1,1) + \mathrm{d}iag\,(1,1,0,0)\ ] -$
$- \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) H_0(t) Y(t,\lambda) Y^{-1}(x,\lambda) g(x,\frac{1}{2},\lambda) dt.$
Первое слагаемое обращается в ноль и мы получили требуемое.
Лемма доказана. □

Лемма 4.15. *Имеет место формула:*
$I_2 = \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} M_0 H_0(0) D^{-1} m(0) + \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) H_0(t) \times$
$\times Y(t,\lambda) Y^{-1}(x,\lambda) D^{-1} g(x,0,\lambda) dt\, m(0)$

Доказательство. Аналогично лемме 4.13. □

Значит равенство (4.6) приобретает вид:
$R_{0\lambda} m = \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} M_0 H_0(0) D^{-1} m(0) + \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} M_1 H_0(\frac{1}{2}) D^{-1} m(\frac{1}{2}) + \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} \times$
$\times \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) H_0(t) D^{-1} m(t) dt - \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} M_0 H_0(0) D^{-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) H_0(t) g(0,t,\lambda) dm(t) -$
$- \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} M_1 H_0(\frac{1}{2}) D^{-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) H_0(t) g(\frac{1}{2},t,\lambda) dm(t) - \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\tau) \times$
$\times H_0(\tau) d\tau D^{-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\tau,t,\lambda) dm(t) +$

$$+\frac{1}{\lambda} D^{-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda) dm(t) - \frac{1}{\lambda} Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\,[\,\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2\,], \qquad (4.7)$$

где
$\tilde{I}_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) H_0(t) Y(t,\lambda) Y^{-1}(x,\lambda) g(x,\frac{1}{2},\lambda) dt D^{-1} m(\frac{1}{2}) - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t) H_0(t) g(t,\frac{1}{2},\lambda) dt D^{-1} m(\frac{1}{2}),$

$\tilde{I}_2 = -\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)Y(t,\lambda)Y^{-1}(x,\lambda)g(x,0,\lambda)dtD^{-1}m(0) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)g(t,0,\lambda)dtD^{-1}m(0)$

Лемма 4.16. *В равенстве (4.7)* $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = 0.$

Доказательство. Рассмотрим, например, $\tilde{I}_1$.

$\tilde{I}_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)\, I\, dtD^{-1}m(\frac{1}{2})$, где $I = Y(t,\lambda)Y^{-1}(x,\lambda)g(x,\frac{1}{2},\lambda) - g(t,\frac{1}{2},\lambda)$. В свою очередь,

$I = \mathrm{d}iag\left(e^{\lambda\omega_1 t}, e^{\lambda\omega_2 t}, e^{\lambda\omega_3 t}, e^{\lambda\omega_4 t}\right) \cdot \mathrm{d}iag\left(e^{-\lambda\omega_1 x}, e^{-\lambda\omega_2 x}, e^{-\lambda\omega_3 x}, e^{-\lambda\omega_4 x}\right) \times$
$\times\, \mathrm{d}iag\left(-e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}, -e^{\lambda\omega_2(x-\frac{1}{2})}, 0, 0\right) - \mathrm{d}iag\left(-e^{\lambda\omega_1(t-\frac{1}{2})}, -e^{\lambda\omega_2(t-\frac{1}{2})}, 0, 0\right) =$
$= \mathrm{d}iag\left(-e^{\lambda\omega_1(t-\frac{1}{2})}, -e^{\lambda\omega_2(t-\frac{1}{2})}, 0, 0\right) + \mathrm{d}iag\left(e^{\lambda\omega_1(t-\frac{1}{2})}, e^{\lambda\omega_2(t-\frac{1}{2})}, 0, 0\right) = 0.$

Аналогично $\tilde{I}_2$. Лемма доказана. □

Равенство (4.7) теперь приобретает вид:

$$R_{0\lambda}m = \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}J - \frac{1}{\lambda}D^{-1}m(x) + \Omega_\lambda m(x), \tag{4.8}$$

где $J = M_0H_0(0)D^{-1}m(0) + M_1H_0(\frac{1}{2})D^{-1}m(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)D^{-1}m(t)dt,$

$\Omega_\lambda m(x) = -\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)g(0,t,\lambda)dm(t) -$

$-\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_1H_0(\frac{1}{2})D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)g(\frac{1}{2},t,\lambda)dm(t) - \frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\tau)\times$

$\times\, H_0(\tau)d\tau D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\tau,t,\lambda)dm(t) + \frac{1}{\lambda}D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)dm(t).$

Рассмотрим $R_{0\lambda}m$ при $m(x) = H_0^{-1}(x)D\Gamma^{-1}g(x)$.

Лемма 4.17. *Если* $m(x) = H_0^{-1}(x)D\Gamma^{-1}g(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяет условию (1.22), то*

$$R_{0\lambda}m = -\frac{1}{\lambda}D^{-1}m(x) + \Omega_\lambda m(x) \tag{4.9}$$

Доказательство. Рассмотрим J в равенстве (4.8) при $m(x) = H_0^{-1}(x)D\Gamma^{-1}g(x)$: $J = M_0H_0(0)D^{-1}H_0^{-1}(0)D\Gamma^{-1}g(0) + M_1H_0(\frac{1}{2})D^{-1}H_0^{-1}(\frac{1}{2})D\Gamma^{-1}g(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)D^{-1}H_0^{-1}(t) \times$
$\times D\Gamma^{-1}g(t)dt.$
Подставим $M_0 = S\Gamma$, $M_1 = T\Gamma$, $\Omega(t) = a(t)\Gamma$ из леммы (1.31) и воспользуемся перестановочностью диагональных матриц D^{-1} и $H_0(x)$, получим:

$$J = Sg(0) + Tg(\frac{1}{2}) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} a(t)g(t)\,dt.$$

Так как $g(x)$ удовлетворяет условию (1.22), то $J = 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.18. *В S_{δ_0} при больших $|\lambda|$*

$$\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} (\Omega_\lambda m)(x)\,d\lambda \right\|_\infty \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Так как
$\Omega_\lambda m(x) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где теперь $I_1 = -\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)g(0,t,\lambda)dm(t),$

$I_2 = -\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_1H_0(\frac{1}{2})D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)g(\frac{1}{2},t,\lambda)dm(t),$

$I_3 = -\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Omega(\tau)H_0(\tau)d\tau D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(\tau,t,\lambda)dm(t),$

$I_4 = \frac{1}{\lambda}D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)dm(t).$
Рассмотрим первое слагаемое.

$I_1 = -\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}M_0H_0(0)D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}iag\left(-e^{-\lambda\omega_1 t}, -e^{-\lambda\omega_2 t}, 0, 0\right)dm(t) = -\frac{1}{\lambda}Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1} \times$
$\times M_0H_0(0)D^{-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(-e^{-\lambda\omega_1 t}dm_1, -e^{-\lambda\omega_2 t}dm_2, 0, 0\right)^T.$

Так как (лемма (4.4)) компоненты матрицы $Y(x,\lambda)\Delta_0^{-1}$ имеют оценку $O(1)$, то после перемножения компоненты вектора I_1 имеют вид: $J_1+J_2=\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} O(1)e^{-\lambda\omega_1 t}dm_1+\int\limits_0^{\frac{1}{2}} O(1)e^{-\lambda\omega_2 t}dm_2$, где $O(1)$ – разные ограниченные функции. Тогда, для произвольного $x\in[0,\frac{1}{2}]$:

$|J_1|\leq \frac{c}{r}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|e^{-\lambda\omega_1 t}\right||dm_1|$.

Зададим сколь угодно малое ε. Тогда существует $\delta=\delta(\varepsilon)$, такое что $\bigvee\limits_0^{\delta}(m_1)<\varepsilon$. Значит,

$|J_1|\leq \frac{c}{r}\int\limits_0^{\delta}\left|e^{-\lambda\omega_1 t}\right||dm_1|+\frac{c}{r}\int\limits_{\delta}^{\frac{1}{2}}\left|e^{-\lambda\omega_1 t}\right||dm_1|\leq \frac{c}{r}\int\limits_0^{\delta}|dm_1|+\frac{c}{r}\int\limits_{\delta}^{\frac{1}{2}}\left|e^{-\lambda\omega_1 \delta}\right||dm_1|\leq$

$\leq \frac{c}{r}\bigvee\limits_0^{\delta}(m_1)+\frac{c}{r}\left|e^{-\lambda\omega_1\delta}\right|\bigvee\limits_0^{\frac{1}{2}}(m_1)\leq \frac{c}{r}\varepsilon+\frac{c}{r}\left|e^{-\lambda\omega_1\delta}\right|$,

где за c обозначены разные константы. Также оценивается J_2:

$|J_2|\leq \frac{c}{r}\varepsilon+\frac{c}{r}\left|e^{-\lambda\omega_2\delta}\right|$. Значит,

$\|I_1\|_\infty\leq \frac{c}{r}\varepsilon+\frac{c}{r}\left|e^{-\lambda\omega_2\delta}\right|$.

Аналогично с I_2, I_3, I_4. Тогда

$$\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}(\Omega_\lambda m)(x)\,d\lambda\right\|_\infty\leq \frac{c}{r}\varepsilon\int\limits_{|\lambda|=r}|d\lambda|+\frac{c}{r}\int\limits_{|\lambda|=r}\left|e^{-\lambda\omega_2\delta}\right||d\lambda|=\pi\cdot\varepsilon+\frac{c}{r}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

в силу произвольности ε. Лемма доказана. □

Теорема 4.2. *Если $f(x)\in\bar\Delta_A$, где $\bar\Delta_A$ - замыкание по норме $C[0,1]$ области значений оператора A и $f(x)\in V[0,1]$, то*

$$\|f(x)-S_r(f,x)\|_\infty\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Доказательство. Известно, следствие (3.3), что $\bar\Delta_A$ состоит из непрерывных функций, удовлетворяющих условию (1.22). Рассмотрим $S_r(f,x)$ По лемме (4.11) для $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$:

$S_r(f,x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}R_\lambda f\,d\lambda=\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\Gamma H_0(x)R_{0\lambda}\left(H_0^{-1}D\Gamma^{-1}g\right)\,d\lambda\right)_1+o(1)$.

По (18) имеем:

$S_r\left(f,x\right) = \left(\frac{1}{2\pi i}\Gamma H_0(x)\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}D^{-1}m(x)d\lambda\right)_1 - \left(\Gamma H_0(x)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\Omega_\lambda m(x)d\lambda\right)_1 +$
$o(1) =$
$= \left(\Gamma H_0(x)D^{-1}m(x)\right)_1 - \left(\Gamma H_0(x)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\Omega_\lambda m(x)d\lambda\right)_1 + o(1).$
Так как $m(x) = H_0^{-1}(x)D\Gamma^{-1}g(x)$, то
$S_r\left(f,x\right) = f(x) - \left(\Gamma H_0(x)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\Omega_\lambda m(x)d\lambda\right)_1 + o(1).$
Для $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ получаем аналогичное равенство с $()_3$ вместо $()_1$. В силу леммы 4.18 теорема доказана. $\square$

5 Приложение

Приведем примеры операторов с кусочно–постоянным ядром, для которых выполняются все условия на ядро оператора A.

Пример 1:

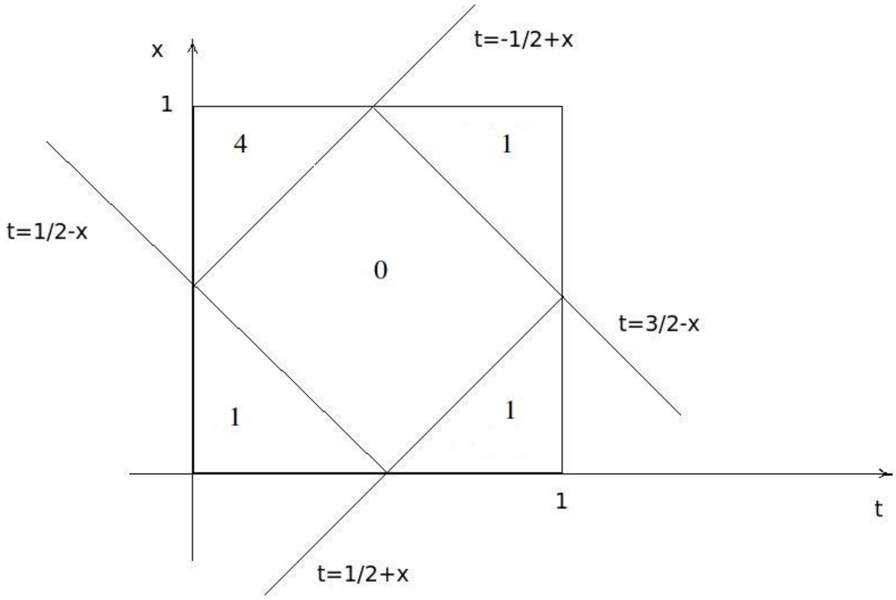

Рисунок 2

Пример 2:

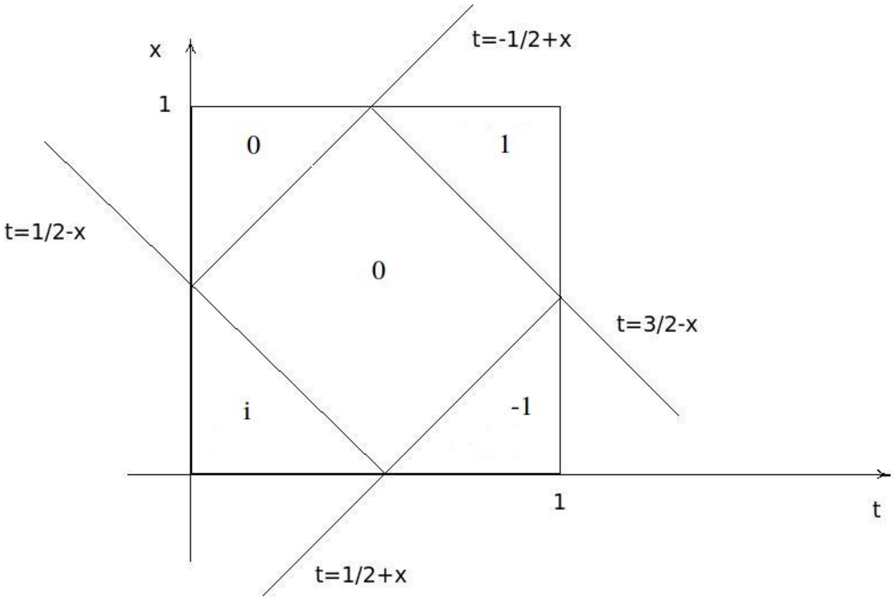

Рисунок 3

Пример 3:

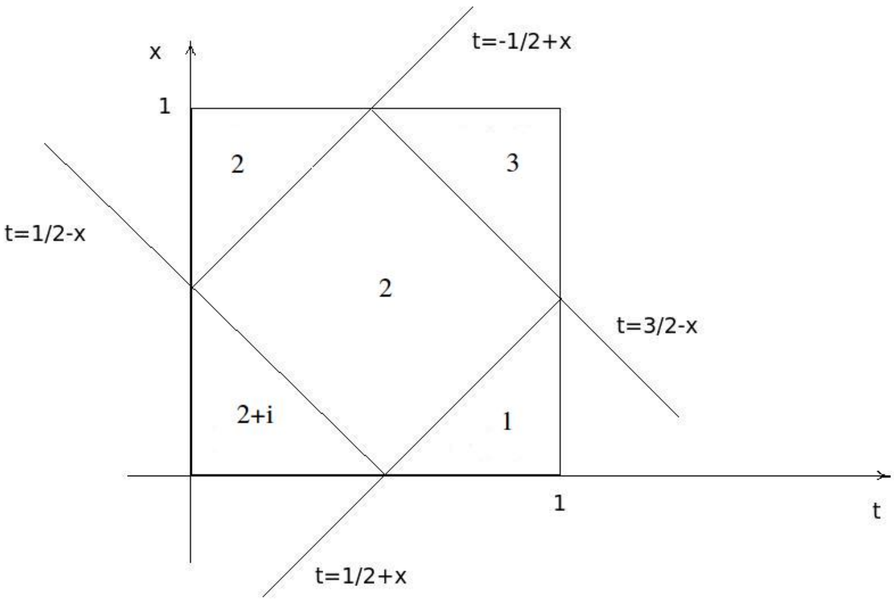

Рисунок 4

Пример 4:

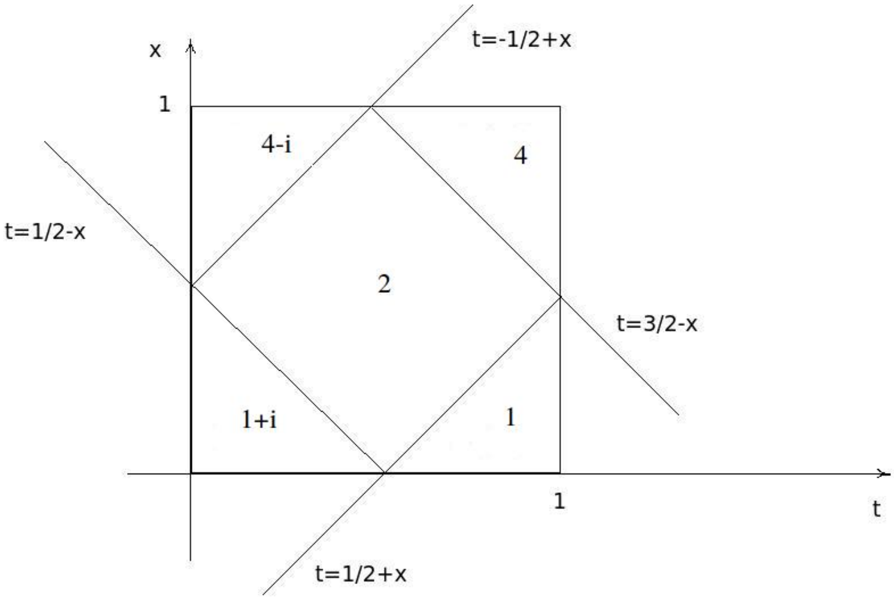

Рисунок 5

Рассмотрим подробно пример 4:
В этом случае $a = 1 - i$, $b = 1$, $c = -2 + i$, $d = -2$. Ядро оператора (1.2) имеет в этом случае вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1 & 0 \\ i-1 & 0 & 0 & -1 \\ 2-i & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2+i & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как известно, B^{-1} существует тогда и только тогда, когда однородное уравнение $Bg = 0$ имеет только нулевое решение. Рассмотрим это однородное уравнение:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(x,t)g(t)\,dt = 0.$$

Запишем его в виде:

$$\int\limits_0^x B(x,t)g(t)\,dt + \int\limits_x^{\frac{1}{2}} B(x,t)g(t)\,dt = 0$$

Из определения $A(x,t)$ и $B(x,t)$ имеем:

$$\int\limits_0^x \begin{pmatrix} 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 \end{pmatrix} g(t)\,dt + \int\limits_x^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix} g(t)\,dt = 0.$$

Продифференцируем это равенство по x. Получим

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_5 & \alpha_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(\frac{1}{2}-x) \\ f(\frac{1}{2}+x) \\ f(1-x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(\frac{1}{2}-x) \\ f(\frac{1}{2}+x) \\ f(1-x) \end{pmatrix} = 0$$

То есть

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_5-\alpha_1 & \alpha_5-\alpha_2 & 0 \\ \alpha_1-\alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_2-\alpha_5 \\ \alpha_3-\alpha_5 & 0 & 0 & \alpha_4-\alpha_5 \\ 0 & \alpha_5-\alpha_3 & \alpha_5-\alpha_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(\frac{1}{2}-x) \\ f(\frac{1}{2}+x) \\ f(1-x) \end{pmatrix} = 0.$$

Введем обозначения:

$$\alpha_5-\alpha_1 = a, \alpha_5-\alpha_2 = b, \alpha_5-\alpha_3 = c, \alpha_5-\alpha_4 = d,$$

где a, b, c, d – постоянные. Получаем, что для обратимости оператора B необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b \\ -c & 0 & 0 & -d \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix}$$

была невырождена, то есть

$$det\, Q = ad - cb \neq 0.$$

Это условие выполняется, так как $ad - cb = -8 + 6i$. Займемся диагонализацией матрицы Q^{-1}, которая в случае кусочно – постоянного ядра совпадает с B. По лемме 1.3 для диагонализации матрицы должны выполняться условия:

$$d + a \neq 0, \ \ (a - d)^2 + 4bc \neq 0.$$

В нашем случае $d + a = -1 - i$, $(a - d)^2 + 4bc = -8 + 6i$, то есть, эти условия тоже выполнены. Матрица D, подобная матрице $P = Q^{-1}$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

А матрица подобия Γ, которая осуществляет преобразование подобия имеет вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & -2-i & -2-i & -1 \\ -i & 2i-1 & 1-2i & i \\ i & -5i & 5i & -i \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители θ_0 и θ_8 тоже вычисляются в этом случае: $\theta_0 = 12.48 + 10.64i$, $\theta_8 = -6.72 - 14.96i$. Видим, что все условия выполняются.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Стеклов В. А. Sur les expressions asymptotyques de certaines functions définies par des équations différentielles linéaires du deuxiḿe ordre, et leur applications an probléme du developpment d'une function arbitraire en séries procédant suivant les dites functions [Текст] / В.А. Стеклов // Харьков, Сообщ. матем. об-ва (2). – 1907-1909. – Т.10, № 2/6. – С. 97-199.

2. Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions [Текст] / E.W. Hobson // Proc. London Math. Soc. 2. – 1908. – Vol. 8. – P. 349-395.

3. Haar A.T. Theorie des ortogonalen Funktionen systeme [Текст] / A.T. Haar // Math. Ann. – 1910. – Vol. 69. – P. 331-371; – 1911. – Vol. 71. – P. 38-53.

4. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [Текст] / Я. Д. Тамаркин. – Петроград, 1917.

5. Stone M. H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff / M.H. Stone // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – Vol.28, № 4. – P. 695-761.

6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы [Текст] / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

7. Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter [Текст] / G.D. Birkhoff // Trans Amer. Math. Soc., 1908. – V. 9. – № 2. – P. 219-231.

8. Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problems of ordinary differential equations [Текст] / G.D. Birkhoff // Trans Amer. Math. Soc., 1908. – V. 9. – № 4. – P. 373-397.

9. Ильин В. А. О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье [Текст] / В.А. Ильин // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223. № 3. – С. 548-551.

10. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I [Текст] / В.А. Ильин // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. № 5. – С. 771-794.

11. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II [Текст] / В.А. Ильин // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. № 6. – С. 980-1009.

12. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системам экспонент [Текст] / В.А. Ильин // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 273. № 4. – С. 789-793.

13. Freiling G. On uniform and L_p-convergence of eigenfunction expansions for indefinite eigenvalue problem [Текст] / G. Freiling, F.-J. Kaufman // Integral Equations Operator Theoty. – 1990. – V. 13. № 2. – P. 193-215.

14. Kaufman F.-J. Derived Birkhoff-series associated with $N(Y) = \lambda P(Y)$ [Текст] / F.-J. Kaufman // Results in Math. – 1989. – V. 15. – P. 255-290.

15. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале [Текст] / А.П. Хромов // ДАН СССР. – 1962. – Т. 146. № 6. – С. 1294-1297.

16. Гуревич А. П. Суммируемость по Риссу разложений спектральных разложений одного класса интегральных операторов [Текст] / А.П. Гуревич, А.П. Хромов // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37.– № 6. – С. 809-814.

17. Гуревич А. П. Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов [Текст] / А.П. Гуревич, А.П. Хромов // Известия ВУЗов. Сер. Математика. – 2003. – № 2(489). – С. 24-35.

18. Молоденков В. А. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования / В.А. Молоденков, А.П. Хро-

мов Сб. науч трудов: Диффренциальные уравнения и вычислительная математика // Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 1972. – Вып. 1. – С. 17-26.

19. Бари Н. К. Тригонометрические ряды [Текст] / Н.К. Бари – М.: Физматгиз, – 1961.

20. Хромов А. П. Об аналоге теоремы Жордана-Дирихле для разложений по собственным функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием [Текст] / А.П. Хромов // Современная математика и ее приложения, – 2005. – Т. 35. – С. 67 – 76

21. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов [Текст] / А.П. Хромов // Матем. сб. – 1981. – Т. 114(156). – № 3. – С. 378-405.

22. Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях [Текст] / А.П. Хромов// Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. вып. 6. – С. 932-942.

23. Корнев В. В. О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях [Текст] / В.В. Корнев, А.П. Хромов // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 10. – С. 33-50

24. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях [Текст] / А.П. Хромов // Матем. сб. – 2006. – Т. 197. – № 11 – С. 115 – 142.

25. Ломов И. С. О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма-Лиувилля в интегральной метрике [Текст] / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. № 9. С. 1480 – 1493.

26. Ломов И. С. Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка [Текст] / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. № 1. С. 80 – 93.

27. Ломов И. С. Равномерная сходимость биортогонального ряда для оператора Шредингера с многоточечными краевыми условиями [Текст] / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 7. – С. 890 – 896.

28. Афонин С. В. О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами [Текст] /С. В. Афонин, И.С. Ломов // Докл. РАН. – 2010. – Т. 431. – № 2. – С. 151 – 153.

29. Ломов И. С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов [Текст] / И.С. Ломов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15. – вып. 4. – С. 405 – 418.

30. Королева О. А. Об одном интегральном операторе с ядром, разрывным на ломаных линиях [Текст] / О.А. Королева // Математика. Механика: Сб. науч. тр. / Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. – Вып. 10. – С. 31 – 34.

31. Королева О. А. О сходимости средних Рисса одного интегрального оператора [Текст] / О.А. Королева // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы. 16-й Саратовской зимней школы. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. – С. 95 – 96.

32. Королева О.А.Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях [Текст] / О.А. Королева, А.П Хромов // Изв. Сарат. ун-та. – Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, – 2012. – том 12. – выпуск 2. – С. 6 – 13.

33. Королева О. А. О сходимости средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям оператора с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях [Текст] / О.А. Королева // – Изв. Сарат. ун-та. – Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, – 2013. – том. 13, выпуск 1(2). – С. 63 – 67.

34. Королева О. А. Аналог теоремы Жордана–Дирихле для интегрального оператора с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях [Текст] /

О.А. Королева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия, – Сер. Математика. Механика. Информатика, – 2013. – том 13. – выпуск 4(1). – С. 14–23.

35. Королева О. А. О теореме Штейнгауза [Текст] / О.А. Королева, А.П. Хромов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. / Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. – Вып. 16. – С. 36-39.

36. Королева О. А. Аналог теоремы Жордана–Дирихле [Текст] / О.А. Королева // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 17-й Саратовской зимней школы. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. – С. 130–134.

37. Королева О. А. Теорема Жордана–Дирихле для оператора дифференцирования с размазанным краевым условием [Текст] / О.А. Королева // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXVI". – Воронеж: ВГУ, 2015. – С. 114.

38. Королева О. А. О теореме Штейнгауза [Текст] / О.А. Королева // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы – конференции". – Казанское математическое общество, 2015. – Т. 51. – С. 249–252.

39. Королева О. А. Теорема Жордана–Дирихле для одного интегрального оператора [Текст] / О.А. Королева // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXVIII". – Воронеж: ВГУ, 2017. – С. 108–109.

40. Королева О. А. Теорема равносходимости для одного класса интегральных операторов [Текст] / О.А. Королева // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы Тринадцатой международной Казанской летней научной школы – конференции". – Казанское математическое общество, 2017. – Т. 54. – С. 205–207.

41. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений, Наука, М., 1964. – 464 с.

42. Бурлуцкая М. Ш. Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально – дифференциальных операторов [Текст] / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Матем. заметки. – 2011. – Т. 90. Вып. 1. – С. 22–33.