На правах рукописи

Королева Ольга Артуровна

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА СТОРОНАХ КВАДРАТА, ВПИСАННОГО В ЕДИНИЧНЫЙ КВАДРАТ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2018

Работа выполнена в Саратовском национальном исследовательском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского на кафедре дифференциальных уравнений и прикладной математики

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Хромов Август Петрович**
Официальные оппоненты:	**Ломов Игорь Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва профессор кафедры общей математики
	Гиль Алексей Викторович, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Южного федерального государственного университета», г. Ростов-на Дону, доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО **«Воронежский государственный университет»**, г. Воронеж

Защита состоится «02» октября 2018 г., в 17-00 ч на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 Южного федерального университета по адресу:
344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А, ауд. 211.

Автореферат разослан «___» июля 2018 г.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: 344103, г. Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 21-ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу:
`http://hub.sfedu.ru/media/diss/e6365719-c181-4b10-a769-7619448d640a/Koroleva_O_A-diss.pdf`.

Ученый секретарь
диссертационного совета В.Д. Кряквин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Многие исследования в области механики, физики и техники приводят к самосопряженным и несамосопряженным спектральным задачам. Большую часть этой теории составляют задачи о разложении произвольных функций в ряд по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных операторов. Как в приложениях, так и в теоретических исследованиях имеет большое значение построение и свойства этих разложений. Исследования в этой области предполагают изучение вопросов обращения указанных операторов, асимптотического представления резольвенты при больших значениях спектрального параметра, расположения спектра, суммируемости разложений по с.п.ф., равносходимости разложений по с.п.ф. и по известным системам функций, базисности, полноты системы из с.п.ф. и т.п.

Настоящая работа посвящена исследованию равносходимости разложений по с.п.ф. интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат и разложений в обычный тригонометрический ряд Фурье; вопросу суммируемости обобщенных средних Рисса этого класса операторов, а также получению аналога теоремы Жордана–Дирихле из теории тригонометрических рядов для разложений по с.п.ф. данного оператора .

Теоремы равносходимости впервые были получены в работах В.А. Стеклова[1], Е. Гобсона[2], А. Хаара[3] для случая дифференциального оператора Штурма-Лиувилля и Я.Д. Тамаркина [4], М. Стоуна[5] для дифференциального оператора произвольного порядка:

$$l[y] = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}, \quad p_k(x) \in C[0,1], \tag{1}$$

[1]Стеклов В.А. Sur les expressions asymptotyques de certaines functions définies par des équations différentielles linéaires du deuxiḿe ordre, et leur applications an probléme du developpment d'une function arbitraire en séries procédant suivant les dites functions// Харьков, Сообщ. матем. об-ва (2). – 1907-1909. – Т.10, № 2/6. – С. 97–199.

[2]Hobson E.W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions. Proc. London Math. Soc. 2. – 1908. – Vol. 8. – P. 349-395.

[3] Haar A.T. Theorie des ortogonalen Funktionen systeme// Math. Ann. – 1910. – Vol. 69. – P. 331-371; – 1911. – Vol. 71. – P. 38–53.

[4]Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. – Петроград, 1917.

[5]Stone M.H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff// Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – Vol. 28, № 4. – P. 695–761.

с произвольными краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1}[a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа[6]. Эти условия заключаются в отличии от нуля определителей, составленных из коэффициентов в краевых условиях $U_j(y)$. Оператор (1), (2)при произвольном n исследовал Дж. Биркгоф в 1908. При выполнении условий регулярности им были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций и было доказано, что ряд Фурье по с.п.ф. любой функции $f(x)$ ограниченной вариации сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в каждой точке $x \in (0, 1)$, а в Дж. Биркгоф и Я.Д. Тамаркин применяли метод Коши–Пуанкаре интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра. Если краевые условие регулярны, то М. Стоун показал, что имеет место равносуммируемость на любом отрезке $[a, b] \subseteq (0, 1)$ средних Рисса порядка ζ $(\zeta > 0)$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^{\zeta} R_\lambda f \, d\lambda, \tag{3}$$

где R_λ – резольвента оператора (1),(2), а контур $|\lambda| = r$ не проходит через собственные значения данного оператора, и аналогичных средних для обычного тригонометрического ряда Фурье произвольной функции $f \in L\,[0, 1]$. Полное решение вопроса о равномерной сходимости на всем отрезке $[0, 1]$ средних Рисса для спектральных разложений оператора (1),(2) дано, например, в работе[7], причем в работе[8] исследуется и сходимость средних в пространствае $C^m\,[0, 1]$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Далее, в статье[9] А.П. Хромовым установлена равносходимость на каждом $[a, b] \subseteq (0, 1)$ средних Рисса для спектральных разложений оператора (1),(2) и разложений в тригонометрический ряд Фурье произвольной функции из $L\,[0, 1]$ при достаточно больших ζ и в том случае, когда условия регулярности не выполняются, но ядро $G\,(x, t, \lambda)$ резольвенты при больших $|\lambda|$ имеет рост, не выше некоторой степени $|\lambda|$. На-

[6]Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы// – М.: Наука, 1969. – С. 66–67

[7]Freiling G., Kaufman F.-J. On uniform and L_p-convergence of eigenfunction expansions for indefinite eigenvalue problem. – 1990. – V. 13, № 2. – P. 193–215.

[8]Kaufman F.-J. Derived Birkhoff-series associated with $N(Y) = \lambda P(Y)$. Results in Math. – 1989. – V. 15. – P. 255-290.

[9]Хромов А.П. Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале// ДАН СССР. – 1962. – Т. 146, № 6. – С. 1294–1297.

конец, в работе[10] и работе[11] В.В. Тихомировым данный результат получен для случая некоторых дифференциальных операторов.

А.П. Гуревич и А.П. Хромов при исследовании суммируемости по Риссу разложений по с.п.ф. интегральных операторов[12] вводили в рассмотрение обобщенные средние Рисса следующего вида

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g\left(\lambda, r\right) R_\lambda f\, d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda f$ – резольвента рассматриваемого оператора, r такие, что на окружности $|\lambda| = r$ нет собственных значений рассматриваемого оператора, $g\left(\lambda, r\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g\left(\lambda, r\right)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;

2) существует такая константа $C > 0$, что $|g\left(\lambda, r\right)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;

3) существуют положительные ζ_1, ζ_2, такие, что

$$g\left(re^{i\varphi}, r\right) = O\left(\left|\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2}\right|^{\zeta_1}\left|\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right|^{\zeta_2}\right);$$

где $\alpha = \arg\sqrt{\delta}$ (оценки равномерны по r)

4) $g\left(\lambda, r\right) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Средние (4) являются обобщением средних Рисса вида (3).

В 1972 году в работе[13] В.А. Молоденков, А.П. Хромов рассмотрели дифференциальный оператор

$$L_0 y(x) = iy'(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] \tag{5}$$

[10]Тихомиров В.В. О рисовских средних разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М.В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов// Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 226, № 5. – С. 1015–1017.

[11]Тихомиров В.В. О средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора. В.В. Тихомиров // Матем. сб. – 1977. – Т. 102, № 1. – С. 33–55.

[12]Гуревич А.П., Хромов А.П. Суммируемость по Риссу разложений спектральных разложений одного класса интегральных операторов// Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 6. – С. 809–814.

[13]Молоденков В.А., Хромов А.П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования. Сб. науч трудов: Диффренциальные уравнения и вычислительная математика // Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 1972. – Вып. 1. – С. 17–26.

с краевым условием

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(x)\,d\sigma(x) = 0, \tag{6}$$

где $\sigma(x)$ – функция ограниченной вариации на отрезке $[-\pi,\pi]$ и имеет скачки в точках $-\pi$ и π, и для ряда Фурье по с.п.ф. оператора (5), (6) получили аналог известной теоремы Жордана–Дирихле равномерной сходимости обычных тригонометрических рядов[14], а именно:

Теорема. *Всякая функция $f(x)$ ограниченной вариации из $C[-\pi,\pi]$, удовлетворяющая условию* (6) *, есть равномерный предел на всем отрезке $[-\pi,\pi]$ некоторой последовательности частных сумм ряда Фурье.*

В 2005 году А.П. Хромов [15] для разложений по с.п.ф. оператора

$$Ly = \beta y'(x) + y'(1-x),\ \ x \in [0,1],\ \ \ \beta^2 \neq 1, \tag{7}$$

где $y'(1-x) = y'(\xi)|_{\xi=1-x}$
с интегральным граничным условием

$$U(y) = \int_0^1 \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha} y(t)\,dt = 0,\ \ \ 0 < \alpha < 1. \tag{8}$$

Оператор (7) замечателен тем, что

$$L^2 y = (\beta^2 - 1)y''(x)$$

и он является главной частью обратного оператора

$$y = Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt.$$

Теорема равносходимости для интегрального оператора впервые была получена А.П. Хромовым[16]. Он рассмотрел случай, когда некоторые производные ядра имеют разрыв 1-го рода на линии $t = x$. Затем исследовал новый класс интегральных операторов, когда это свойство ядер наблюдается на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. Один из таких операторов:

[14]Бари Н.К. Тригонометрические ряды // М.: Физматгиз, 1961. С. 121–122

[15]Хромов А. П. Об аналоге теоремы Жордана-Дирихле для разложений по собственным функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием// Современная математика и ее приложения, – 2005. – Т. 35. – С. 67 – 76

[16] Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов. Матем. сб. – 1981. – Т. 114(156). – № 3. – С. 378-404.

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha \int\limits_0^{x} A(x,t)f(t)\,dt,$$

где $x \in [0,1]$, ядро $A(x,t)$ n раз непрерывно дифференцируемо по x и один раз по t при $0 \le t \le x \le 1$ и $\frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)|_{t=x} = \delta_{n-1,j}$ $(s,j = \overline{0,n}$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, α – произвольное комплексное число, $\alpha^2 \ne 1$.

Важным достоинством этого оператора является то, что не требуется проверки труднопроверяемого условия регулярности по Биркгофу линейных форм в естественных граничных условиях.

В работе[17] и в работе[18] изучается равносходимость разложений произвольной функции в тригонометрический ряд Фурье и по с.п.ф. интегрального оператора

$$Af = \int\limits_0^{1} A(x,t)f(t)\,dt,$$

действующего из $L[0,1]$ в $C[0,1]$, когда само ядро или некоторые его производные имеют разрывы 1-го рода на диагонали $t = x$ и кодиагонали $t = 1 - x$. Данный класс замечателен тем, в этом случае можно достаточно просто исследовать поведение резольветы Фредгольма при больших значениях спектрального параметра, что важно при спектральном анализе таких операторов. И в первую очередь интересна задача обращения, которая рассматривалась Хромовым А.П. в 1998 г. впервые.

Исследование вопроса равносходимости разложений интегрального оператора, когда само ядро терпит разрывы на диагоналях в любых из квадратов

$$\prod_{ij} = \left\{ x,t |\, \frac{i-1}{n} \le x \le \frac{i}{n},\ \frac{j-1}{n} \le t \le \frac{j}{n} \right\}\ \ i,j = 1,\ldots,n$$

(при этом допускаются разрывы и на некоторых границах этих квадратов), проводилось в статье[19]. В этой работе возникают значительные трудности, вызванные рассмотрением векторного случая.

[17]Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях. Матем. заметки. – 1998. – Т. 64, вып. 6. – С. 932–942.

[18]Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях// Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 10. – С. 33–50

[19]Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях. Матем. сб. – 2006. – Т. 197.– № 115-142. – С. 378–404.

Отметим также работы Ломова И.С.[20] [21][22][23][24][25], близкие к теме диссертации, связанные с теоремами равносходимости, равномерной сходимости разложений и с исследованием спектральных свойств дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями.

В данной работе рассматривается интегральный оператор, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат:

$$y = Af = \int\limits_0^1 A\,(x,t)\; f(t)\,dt. \tag{9}$$

Обозначим:

$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\, 0 \le x \le 1/2\}$,

$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\, 0 \le x \le 1/2\}$,

$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\, 1/2 \le x \le 1\}$,

$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\, 1/2 \le x \le 1\}$,

$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\, 0 \le x \le 1/2\}$ и

$\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\, 1/2 \le x \le 1\}$.

Будем предполагать, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t), \quad (i = 1,...,5)$ непрерывны в своих областях, $(k + l \le 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1)$. $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t), \quad (i = 1,...,5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем

$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a$,

$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b$,

$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c$,

$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d$,

---

[20] Ломов И. С. О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма-Лиувилля в интегральной метрике// Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. № 9. С. 1480 – 1493.

[21] Ломов И. С. О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма-Лиувилля в интегральной метрике// Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. № 9. С. 1480 – 1493.

[22] Ломов И. С. Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. № 1. С. 80 – 93

[23] Ломов И. С. Равномерная сходимость биортогонального ряда для оператора Шредингера с многоточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 7. – С. 890 – 896.

[24] Афонин С. В., Ломов И. С. О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами // Докл. РАН. – 2010. – Т. 431. – № 2. – С. 151–153.

[25] Ломов И. С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15. – вып. 4. – С. 405–418.

где a, b, c, d – постоянные.

То есть ядро $A(x,t)$ имеет скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

Цели и задачи. Целью данной диссертационной работы является изучение оператора (9). Для него доказана равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по с.п.ф., доказана сходимость обобщенных средних Рисса и аналог теоремы Жордана–Дирихле.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми для данного интегрального оператора. Построены примеры, которые подтверждают существование таких операторов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы как в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов и аспирантов соответствующего направления, так и специалистами при решении задач спектральной теории интегральных операторов.

Методология и методы исследования. Основной метод, применяемый в работе, – это метод Коши–Пуанкаре интегрирования резольвенты изучаемого оператора по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра. При этом происходит переход в пространство вектор функций размерности 4.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты для интегрального оператора (9):

1. Равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по с.п.ф.
2. Сходимость обобщенных средних Рисса.
3. Аналог теоремы Жордана–Дирихле.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертации результатов обоснована теоретическими выкладками и строгими математическими доказательствами.

Результаты исследований докладывались и обсуждались на объединенном научном семинаре математических кафедр СГУ (под руководством профессора А.П. Хромова), на 16, 17, 18, 19 Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2012, 2014, 2018); на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения-XXVI" (Воронеж, 2015); на конференциях механико-математического факультета СГУ "Актуальные проблемы математики и механики" (Саратов, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-11]. Из них работы [1-3] опубликованы в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ. 7 работ опубликованы без соавторов. В совместной работе с научным руководителем Хромовым А. П. [1] постановка задачи и результат, представленный в теореме 1, принадлежит Хромову А. П., что составляет примерно 30 процентов от всей статьи. В совместной работе с научным руководителем [6] постановка задачи принадлежит Хромову А. П.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 122 страницы. Список литературы содержит 42 наименования.

Содержание работы

Первая глава Первая глава диссертационной работы посвящена преобразованию интегрального оператора в пространстве вектор–функций и изучению резольвенты Фредгольма данного оператора. В §1.1 в пространстве вектор–функций рассматривается оператор:

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t)g(t)\,dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{10}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t)=\begin{pmatrix} 0 & A(x,\frac{1}{2}-t) & A(x,\frac{1}{2}+t) & 0 \\ A(\frac{1}{2}-x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}-x,1-t) \\ A(\frac{1}{2}+x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}+x,1-t) \\ 0 & A(1-x,\frac{1}{2}-t) & A(1-x,\frac{1}{2}+t) & 0 \end{pmatrix},$$

и в теореме 1.1 доказывается, что (9) эквивалентно (10).

Представление типа (10) не единственно. Это представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x,t)$ терпят разрывы лишь на линии $t=x$. Далее, в лемме 1.1 находятся необходимые и достаточные условия существования обратного оператора B^{-1}, а в теореме 1.2 получено представление для B^{-1}:

Теорема 1.2 *Для оператора B^{-1} справедливо представление*

$$B^{-1}z(x)=Pz'(x)+a_1(x)z(0)+a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right)+a_3(x)z(x)+\int_0^{\frac{1}{2}}a(x,t)z(t)\,dt, \tag{11}$$

$$Sz(0)+Tz(\frac{1}{2})+\int_0^{\frac{1}{2}}a(t)z(t)\,dt=0. \tag{12}$$

где $a_i(x)$, $i=\overline{1,3}$, $a_3^{'}(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы a(x,t) имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x,t)$, S, T –некоторые постоянные матрицы 4×4.

Система (11), (12) позволяет найти резольвенту оператора A, а именно, в §1.2 доказывается теорема 1.3:

Теорема 1.3 *Если R_λ существует, то $R_\lambda f=v(x)$, где*

$$v(x)=z_1(x),\ \textit{при}\ x\in[0,\frac{1}{2}],\ \textit{и}\ v(x)=z_3\left(x-\frac{1}{2}\right),\ \textit{при}\ x\in[\frac{1}{2},1], \tag{13}$$

z_1,z_3 - первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе

$$Pz'(x)+a_1(x)z(0)+a_2(x)z(\frac{1}{2})+a_3(x)z(x)+\tilde{N}z-\lambda z(x)=g(x), \tag{14}$$

$$Sz(0)+Tz(\frac{1}{2})+\int\limits_0^{\frac{1}{2}}a(t)z(t)\,dt=0, \tag{15}$$

где $\tilde{N}z=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}a(x,t)z(t)\,dt$

Также доказывается утверждение:

Теорема 1.4 *Если λ таково, что однородная краевая задача для* (14), (15)*.) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле* (13).

В дальнейшем мы диагонализируем матрицу P^{-1} и находим $D=diag(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$, причем $\omega_i\neq0$ для всех $i=1,...,4$, $\omega_3=-\omega_2$, $\omega_4=-\omega_1$,

$\omega_1 \neq \omega_2$, такую, что $D = \Gamma^{-1} P^{-1} \Gamma$.

В §1.3 рассматривается система:

$$\begin{aligned} w'(x) = \lambda D w(x) + m(x), \\ U(w) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $m(x)$ произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0, \frac{1}{2}]$.

Для решения системы (16) $w = R_{1\lambda} m$ в лемме 1.8 доказываются оценки

$$\begin{aligned} &\|R_{1\lambda} m\|_\infty = O(\|m\|_1), \\ &\|R_{1\lambda} m\|_\infty = O(\psi(\lambda)\, \|m\|_\infty), \\ &\|R_{1\lambda} m\|_1 = O(\psi(\lambda)\, \|m\|_1), \\ &\|R_{1\lambda} \chi\|_\infty = O(\tfrac{1}{\lambda}), \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ нормы в пространстве вектор функций $L_\infty(0, \frac{1}{2})$, $L(0, \frac{1}{2})$, $\chi(x)$ - вектор функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка, содержащегося в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{4} \varkappa(|Re\, \lambda \omega_j|)$, $\varkappa(y) = \frac{1-e^{-y}}{y}$ при $y \geq 0$.

Вторая глава посвящена теореме равносходимости оператора A.

В **§2.1** доказывается теорема Штейнгауза для дифференциального оператора L : $L(y) = y'$, $y(0) = y(1)$. Рассматривается краевая задача:

$$L = y'(x) = \lambda y(x) + f(x) \tag{17}$$

$$y(0) = y\,(1) \tag{18}$$

Для ее решения $y(x) = (R_\lambda f)(x)$ доказывается теорема 2.1:

Теорема 2.1 *Решение* (17), (18) *имеет вид:*

$$y(x) = R_\lambda f = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \left[\int_0^x e^{-\lambda t} f(t) dt + \int_x^1 e^{\lambda(1-t)} f(t) dt \right],$$

где $\Delta(\lambda) = 1 - e^{\lambda}$. На основании этого доказывается теорема 2.4:

Теорема 2.4 *Если* $a(x) \in Lip[0;1]$, *то*

$$\|a(x)\sigma_r(f,x) - \sigma_r(af,x)\|_{C[\delta_1, 1-\delta_1]} \to 0,$$

при $r \to \infty$,

где $\sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda$, $\delta_1 \in (0; 1/2)$.

В **§2.2** доказывается теорема равносходимости:

Теорема 2.5 *Пусть существует* A^{-1}, *ядро* $A(x,t)$ *удовлетворяет условиям из* *пункта 1.1. Тогда в для любой* $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x)\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{3j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(\varphi_j, x-\frac{1}{2}\right)\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$*-частичная сумма ряда Фурье, по с.п.ф. оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k*, для которых* $|\lambda_k| < r, \sigma_r(f,x)$*-частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на* $[0,\frac{1}{2}]$ *по системе* $\left\{e^{4k\pi ix}\right\}$ *для тех* k*, для которых* $|4k\pi| < r$, γ_{ij} (δ_{ij}) *компоненты матрицы* $\Gamma(\Gamma^{-1})$, $\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(\frac{1}{2}-x) + \delta_{j3}f(\frac{1}{2}+x) + \delta_{j4}f(1-x)$.

В **третьей главе** рассматриваются обобщенные средние Рисса

$$J_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f d\lambda,$$

где $R_\lambda f = (E-\lambda A)^{-1}A$ - резольвента Фредгольма оператора A, а $g(\lambda,r)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1)$g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в $|\lambda| < r$ при любых $r > 0$;

2)$\exists\ C > 0$, т.ч. $|g\,(\lambda,r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;

3)$g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ;

4)$\exists\ \beta > 0$, т.ч.

$$g(\lambda,r) = \begin{cases} O\left(\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)^\beta\right), & -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \\ O\left(\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)^\beta\right), & 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{где } \varphi = arg\lambda\omega_2$$

В **§3.1** доказывается формула остаточного члена:

Теорема 3.1 *Пусть* $f(x)$ *– непрерывная функция на* $[0,1]$, $f_0(x)$ *– непрерывно-дифференцируемая функция на* $[0,1]$*, принадлежащая области значения оператора* A*. Тогда, если на окружности* $|\lambda| = r$ *нет собственных значений оператора* A*, то*

$$f(x) - J_r(f,x) = f(x) - f_0(x) + (1-g(o,r))\cdot f_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{R_\lambda\varphi_0}{\lambda}d\lambda -$$

$$-J_r(f-f_0,x),$$

где $f_0 = A\varphi_0$.

В **§3.2** доказывается основная теорема главы:

Теорема 2.5 *Соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) + J_r(f,x)\|_{C[0,1]} = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) \in \overline{\Delta}_A$*, где* $\overline{\Delta}_A$ *– замыкание обла-*

сти значений оператора A по норме $C[0,1]$.

В **четвертой главе** получен аналог теоремы Жордана–Дирихле.

В **§4.1**, рассмотрен скалярный случай для оператора дифференцирования L, где

$$L: \ Ly = y' \ ; \ U(y) = y(0) - y(1) + \int\limits_0^1 a(t)y(t)\,dt = 0, \tag{19}$$

где $a(t)$ - непрерывная функция на $[0,1]$ Доказывается теорема:

Теорема 4.1 *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, имеет на нем ограниченную вариацию и удовлетворяет граничному условию из (19), то*

$$\max_{0\le x\le 1} |f(x) - S_r(f,x)| \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В **§4.2** получены некоторые дополнительные оценки и в §4.3 доказывается основная теорема главы:

Теорема 4.2 *Если $f(x) \in \bar{\Delta}_A$, где $\bar{\Delta}_A$ - замыкание по норме $C[0,1]$ области значений оператора A и $f(x) \in V[0,1]$, то*

$$\|f(x) - S_r\,(f,x)\|_\infty \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В приложении разбирается случай интегральных операторов с кусочно–постоянными ядрами. Для этих операторов получаются условия для обращения, которые легко проверить. Эти условия связаны с отличием от нуля определителя четвертого порядка. Также приводятся примеры операторов, удовлетворяющие всем условиям из пунктов 1.1–1.3.

Таким образом, в работе рассмотрен новый класс интегральных операторов, для которого решены следующие задачи:

1. Получены условия для обращения оператора.

2. Найдены формулы для резольвенты.

3. Доказана равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по с.п.ф.

4. Доказана сходимость обобщенных средних Рисса.

5. Получен аналог теоремы Жордана–Дирихле.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ:

1. Королева О. А., Хромов А.П. Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях. // Изв. Сарат. ун-та. – Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, – 2012. – том 12. – выпуск 2. – С. 6 – 13.
2. Королева О. А. О сходимости средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям оператора с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях. Изв. Сарат. ун-та. – Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, – 2013. – том. 13, выпуск 1(2). – С. 63 – 67.
3. Королева О. А. Аналог теоремы Жордана–Дирихле для интегрального оператора с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях. Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия, – Сер. Математика. Механика. Информатика, – 2013. – том 13. – выпуск 4(1). – С. 14–23.

Публикации в других изданиях:

4. Королева О. А. Об одном интегральном операторе с ядром, разрывным на ломаных линиях.// Математика. Механика: Сб. науч. тр. / Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. – Вып. 10. – С. 31–34
5. Королева О. А. О сходимости средних Рисса одного интегрального оператора.// Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 16-й Саратовской зимней школы. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. – С. 95-96.
6. Королева О. А., Хромов А. П. О теореме Штейнгауза.// Математика. Механика: Сб. науч. тр. / Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. – Вып. 16. – С. 36-39
7. Королева О. А. Аналог теоремы Жордана–Дирихле. // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 17-й Саратовской зимней школы. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. – С. 130–134.
8. Королева О. А. Теорема Жордана–Дирихле для оператора дифференцирования с размазанным краевым условием.// Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXVI". – Воронеж: ВГУ, 2015. – С. 114.

9. Королева О. А. О теореме Штейнгауза.// Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы – конференции". – Казанское математическое общество, 2015. Т. 51 – С. 249–252.
10. Королева О. А. Теорема Жордана–Дирихле для одного интегрального оператора.// Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXVIII". – Воронеж: ВГУ, 2017. – С. 108–109.
11. Королева О. А. Теорема равносходимости для одного класса интегральных операторов [Текст].// Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы Тринадцатой международной Казанской летней научной школы – конференции". – Казанское математическое общество, 2017. Т. 54 – С. 205–207.