На правах рукописи

Казарников Алексей Владимирович

Формирование пространственно-временных структур в системе Фитцхью-Нагумо с диффузией и ее предельных случаях

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2018

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Ревина Светлана Васильевна
Официальные оппоненты:	**Кудрявцев Олег Евгеньевич,** доктор физико-математических наук, доцент, Ростовский филиал ГКОУ ВО «Российская таможенная академия», заведующий кафедрой информатики и информационных таможенных технологий
	Рудаков Игорь Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры прикладной математики
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»,** г. Воронеж

Защита состоится «4» декабря 2018 г. в   часов на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, улица Мильчакова, 8а, ауд. 211

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 21-ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу: `http://hub.sfedu.ru/diss/announcement/d5f5e186-8511-47ae-86ca-4b36fa76b118/`

Автореферат разослан «   » октября 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Кряквин В.Д.

Общая характеристика работы

<u>**Актуальность темы.**</u>

В настоящей работе исследуется система Фитцхью-Нагумо с диффузией и ее предельные случаи. Модель представляет собой пространственно-распределенный аналог двухкомпонентной редукции модели Ходжкина-Хаксли распространения нервного импульса в гигантском аксоне кальмара. В системе Фитцхью-Нагумо одна компонента решения является быстрой и представляет собой потенциал мембраны, а вторая — медленной и играет роль переменной восстановления. В работе рассмотрено два предельных случая системы Фитцхью-Нагумо. В первом предельном случае обе компоненты предполагаются быстрыми. В качестве второго предельного случая рассматривается система Рэлея с диффузией, которая при отбрасывании диффузионных членов переходит в классическое уравнение Рэлея теории нелинейных колебаний.

Системы реакции-диффузии образуют важный класс математических моделей, позволяющих описывать процессы самоорганизации. Впервые однокомпонентные уравнения реакции-диффузии были использованы для моделирования популяционных процессов в работах А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова и Р. Фишера в 1937 году. В 1952 году А. Тьюринг рассмотрел двухкомпонентную систему реакции-диффузии как качественную модель биологического морфогенеза. В его работе показано, что при определенных условиях на коэффициенты диффузии и нелинейные функции реакции в двукомпонентной системе реакции-диффузии может иметь место диффузионная неустойчивость, когда пространственно-однородное стационарное решение системы устойчиво при отсутствии диффузии, но неустойчиво при ее наличии. По мнению ряда авторов эта неустойчивость приводит к формированию пространственно-неоднородных структур в процессе биологического морфогенеза. Первое экспериментальное наблюдение тьюринговых структур было представлено в работе, опубликованной П. Де Кеппером с соавторами в 1990 году. В настоящее время системы реакции-диффузии находят широкое применение как в исходном химико-биологическом контексте (моделировании химических реакций, описании процессов роста и развития биологических популяций, изучении колоний микроорганизмов и пр.), так и в иных областях научного знания, таких как физика полупроводниковых приборов, модели нейронных сетей и другие.

Известно, что помимо формирования стационарных пространственно-неоднородных структур, системы реакции-диффузии могут демонстрировать немало различных пространственно-временных режимов, включая спиральные волны, пространственно-временной хаос и другие. В литературе имеется большое количество работ, посвященных исследованию качественных свойств динамики данных систем. Эффекты, связанные с добавлением диффузионных членов в уравнения реакции, исследовались в работах таких авторов, как А.Ю Колесов, С.Д. Глызин, Н.Х. Розов и других. Построению стационарных решений для систем реакции-диффузии методом Ляпунова-Шмидта посвящены работы Дж. Вея (J. Wei), М. Винтера (M. Winter) и М. Варда (M. Ward). Влияние конфигурации пространственной области, краевых условий на границе, а также переход к растущим пространственным областям вида $D(t)$ подробно исследованы в работах таких ученых, как Ф. Майни (P. Maini), Э. Крампин (E. Crampin) и Р. Баррио (R. Barrio). Наряду с имеющимися аналитическими подходами, важную роль в исследовании бифуркационного поведения решений систем реакции-диффузии играет вычислительный эксперимент. Численное исследование разрушения вторичных решений вдали от точки потери устойчивости проводится как в работах отечественных авторов, например И.А. Башкирцевой, Ю.В. Тютюнова, В.Н. Говорухина и В.Г. Цибулина, так и зарубежных авторов, таких как З. Мей (Z. Mei) и другие.

Цель данной работы — аналитическими методами исследовать условия рождения пространственно-неоднородных периодических по времени и стационарных структур в системе Фитцхью-Нагумо с диффузией и ее предельных случаях, а также определить характер устойчивости и исследовать эволюцию рождающихся решений при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности.

Для достижения поставленной цели было необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследование поведения пространственно-неоднородных периодических по времени и стационарных решений системы Рэлея с диффузией (2), рождающихся в результате монотонной и колебательной потери устойчивости нулевого решения

2. Отыскание инвариантных подпространств фазового пространства системы Рэлея с диффузией в случае одной пространственной переменной (3) и исследование бифуркаций на данных подпространствах; численное исследование поведения системы вдали от точек потери устойчивости

3. Определение критических значений управляющего параметра системы Фитцхью-Нагумо с диффузией, отвечающих монотонной и колебательной потере устойчивости нулевого решения и исследование бифуркационного поведения решений системы Фитцхью-Нагумо с диффузией (1) в случае одной пространственной переменной.

Научная новизна: При решении поставленных в диссертации задач получены следующие новые научные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Получены явные представления в виде степенных рядов для пространственно-временных структур, которые образуются в результате колебательной и монотонной потери устойчивости нулевого решения системы Рэлея с диффузией (2) при различных краевых условиях.

2. Показано существование счетного множества бесконечномерных инвариантных подпространств системы (3) и исследовано бифуркационное поведение системы на данных подпространствах.

3. Проведено численное исследование процесса разрушения вторичных стационарных и периодических по времени режимов для различных краевых условий

4. Проведено исследование бифуркационного поведения стационарных решений системы Фитцхью-Нагумо с диффузией (1) в случае одной пространственной переменной при различных коэффициентах диффузии

Практическая значимость. Полученные результаты имеют широкую область применения для математического моделирования процессов разной природы, описываемых уравнениями реакции-диффузии.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обусловлена корректной постановкой задачи и применением строгих математических методов. Результаты численных экспериментов базируются на использовании апробированных методов дискретизации и проведением апостериорного анализа для применяемых численных схем, а также подтверждены сопоставлением с данными, имеющимися в литературе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: VII,VIII,IX,X,XI,XII Всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», пос. Дивноморское, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017; IV,V,VI Международных научных конференциях «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», г. Ростов-на-Дону, 2014, 2015, 2016; XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону, 2014; IV российско-китайской конференции «Numerical algebra with applications», г. Ростов-на-Дону, 2015; Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», с. Цей, 2015, 2017; XII Региональной школе-конференции «Владикавказская молодежная математическая школа», пос. В. Фиагдон, 2016; Международной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование», пос. Дивноморское, 2016; Международной конференции «Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов», г. Ростов-на-Дону, 2015; Международной конференции «Inverse Days 2015», г. Лаппеенранта, Финляндия; Молодежной конференции-школе «LUT Doctoral School Conference», г. Лаппеенранта, Финляндия, 2015; Международной конференции «IMA Conference on Inverse Problems From Theory To Application», г. Кэмбридж, Великобритания, 2017.

Результаты докладывались и обсуждались на семинаре кафедры вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета, а также на семинаре Департамента математики (Case Study Seminar) Технологического университета г. Лаппеенранта, Финляндия.

Публикации. По результатам диссертации автором опубликованы 24 работы, из них 3 работы в изданиях, входящих в «Перечень ведущих научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации», утвержденный ВАК [1,2,3]. Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [4].

Личный вклад автора в работах, опубликованных в соавторстве: [1] — нахождение критических значений параметра, отвечающих колебательной и монотонной потере устойчивости нулевого равновесия при различных типах краевых условий, построение асимптотики вторичных периодических по времени решений методом Ляпунова-Шмидта; [2] — построение асимптотики вторичных стационарных решений методом Ляпунова-Шмидта, численное исследование разрушения вторичных режимов; [3] — нахождение инвариантных подпространств, построение асимптотики вторичных периодических по времени и стационарных решений на подпространствах, численное исследование эволюции вторичных режимов

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации **157** страниц текста с **21** рисунком и **6** таблицами. Список литературы содержит **141** наименование.

Содержание работы

В настоящей работе рассматривается система Фитцхью-Нагумо с диффузией и ее частные случаи. Система имеет вид:

$$v_t = \nu_1 \Delta v + \epsilon(w - \alpha v - \beta); \quad w_t = \nu_2 \Delta w - v + \mu w - w^3, \tag{1}$$

где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in \Omega$, $t > 0$ — время; $\mu \in \mathbb{R}$, α, $\beta \geq 0$, $\epsilon > 0$ — параметры реакции, $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ — коэффициенты диффузии. Предполагается, что $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, где $m = 1, 2, 3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 или прямоугольный параллелепипед.

Положив в (1) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\epsilon = 1$, получим систему Рэлея с диффузией:

$$v_t = \nu_1 \Delta v + w; \quad w_t = \nu_2 \Delta w - v + \mu w - w^3. \tag{2}$$

В одномерном случае, когда пространственная переменная меняется на интервале $x \in (0, 1)$, система Рэлея примет вид:

$$v_t = \nu_1 v_{xx} + w; \quad w_t = \nu_2 w_{xx} - v + \mu w - w^3. \tag{3}$$

Предполагается, что на границе области Ω заданы краевые условия Дирихле:

$$v|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

либо смешанные краевые условия, когда на части границы заданы краевые условия Дирихле, а на оставшейся границе — Неймана:

$$v|_{S_1} = w|_{S_1} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial n}|_{S_2} = \frac{\partial w}{\partial n}|_{S_2} = 0,\ S_1 \cup S_2 = \partial\Omega, \tag{5}$$

либо краевые условия Неймана:

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представленной работы.

В **первой главе** рассматривается система Рэлея с диффузией (2) в предположении, что $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, где $m = 1, 2, 3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 или прямоугольный параллелепипед. Предполагается, что на $\partial\Omega$ заданы краевые условия Дирихле (4) или смешанные краевые условия (5). Коэффициенты диффузии предполагаются фиксированными и удовлетворяющими условию $0 < \nu_1 \leq \nu_2$. Исследованы бифуркации тривиального (нулевого) решения системы (2), сопровождающие потерю его устойчивости. В качестве примеров приложения абстрактной схемы исследования для произвольной области Ω рассмотрены частные случаи отрезка и прямоугольника, численно исследовано разрушение вторичных решений для этих областей.

Сведем систему Рэлея с диффузией (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве H вектор-функций $\boldsymbol{u} = (v, w)$, компоненты которых принадлежат $L_2(\Omega)$. Пусть $A(\mu) : H \to H$ — линейный оператор, действующий на вектор-функцию $\boldsymbol{u} = (v, w)$, $v, w \in W_2^2(\Omega)$ по правилу:

$$\mathrm{A}(\mu)\boldsymbol{u} = -A_0\boldsymbol{u} + \mathrm{B}\boldsymbol{u} + \mu\mathrm{C}\boldsymbol{u}. \tag{7}$$

Здесь $A_0 = -\mathrm{D}\Delta$ (Δ — векторный оператор Лапласа) — самосопряженный, положительно определенный оператор в H, а операторы $B, C, D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ заданы матрицами

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Предполагается, что оператор $A(\mu)$ задан на множестве $\mathcal{D}(A_0)$ вектор-функций $\boldsymbol{u} = (v, w)$, $v, w \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям (4) или (5) соответственно.

Пусть трилинейный оператор $K(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) : H \times H \times H \to H$ действует на $\mathcal{D}(A_0)$ по правилу:

$$K(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (0, a_2 b_2 c_2)\,, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{a} = (a_1(x,t), a_2(x,t))$, $\boldsymbol{b} = (b_1(x,t), b_2(x,t))$ и $\boldsymbol{c} = (c_1(x,t), c_2(x,t))$.

По неравенству Гёльдера для оператора $K(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ справедлива оценка

$$||K(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})||_{L_2} \leq ||a_2(x,t)||_{L_6} ||b_2(x,t)||_{L_6} ||c_2(x,t)||_{L_6}, \tag{10}$$

и из теорем вложения следует, что $W_2^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ при $m < 4$; $W_2^2(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ для $q \in [1, +\infty)$ при $m = 4$ и $q \in [1, 10)$ при $m = 5$ соответственно, причем вложение вполне непрерывно. Следовательно для $m = 1, \ldots, 5$ справедливо неравенство

$$||K(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})||_{L_2} \leq M ||a_2(x,t)||_{W_2^2} ||b_2(x,t)||_{W_2^2} ||c_2(x,t)||_{W_2^2}. \tag{11}$$

Тогда систему (2) можно записать в операторном виде:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \mathrm{A}(\mu)\boldsymbol{u} - K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}); \quad \boldsymbol{u} \in H. \tag{12}$$

Через λ_k будем обозначать собственные числа скалярного оператора $-\Delta$, заданного в области Ω с соответствующими краевыми условиями на $\partial\Omega$

$$-\Delta\psi_k = \lambda_k \psi_k, \tag{13}$$

упорядоченные в порядке возрастания, причём каждое записывается столько раз, какова его кратность, ψ_k — соответственно упорядоченная ортонормирванная система собственных функций.

Для исследования устойчивости по линейному приближению нулевого решения системы Рэлея с диффузией (12) рассмотрим линейную спектральную задачу

$$\mathrm{A}(\mu)\boldsymbol{u} = \sigma \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \neq 0, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{u} \in H$. Найдем критические значения управляющего параметра μ, отвечающие монотонной и колебательной потере устойчивости нулевого решения. Пусть $\nu_1 \lambda_1 < 1$. Тогда справедлива лемма 1.

Лемма 1. *Пусть $\nu_1 \leq \nu_2$ и $\nu_1 \lambda_1 < 1$. Тогда в системе происходит колебательная потеря устойчивости нулевого решения и критическое значение параметра μ определяется по формуле*

$$\mu_{cr} = (\nu_1 + \nu_2)\lambda_1. \tag{15}$$

Оператор $A(\mu_{cr})$ имеет пару чисто мнимых простых собственных значений:

$$\sigma_{1,2}(\mu_{cr}) = \pm i\omega_0, \qquad \omega_0 = \sqrt{1 - \nu_1^2 \lambda_1^2}. \tag{16}$$

Следуя схеме метода Ляпунова-Шмидта, найдем собственную функцию $\boldsymbol{\varphi} \in H$ линейной спектральной задачи и собственную функцию $\boldsymbol{\Phi} \in H$ линейной сопряженной задачи

$$A(\mu_{cr})\boldsymbol{\varphi} - i\omega_0\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad A^*(\mu_{cr})\boldsymbol{\Phi} + i\omega_0\boldsymbol{\Phi} = 0,$$

причем $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Phi}) = 1$. Собственные функции имеют вид:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{i}{2\omega_0}\begin{pmatrix} 1 \\ \nu_1\lambda_1 + i\omega_0 \end{pmatrix}\psi_1(x), \; \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{(\nu_1\lambda_1 - i\omega_0)}\begin{pmatrix} 1 \\ -(\nu_1\lambda_1 - i\omega_0) \end{pmatrix}\psi_1(x). \tag{17}$$

Пусть теперь $\nu_1\lambda_1 > 1$. Справедлива лемма 2.

Лемма 2. *Пусть $\nu_1 \le \nu_2$ и $\nu_1\lambda_1 > 1$. Тогда в системе происходит монотонная потеря устойчивости нулевого решения и критическое значение параметра μ определяется по формуле*

$$\mu_{cr} = \frac{1}{\nu_1\lambda_1} + \nu_2\lambda_1. \tag{18}$$

причем нулевое собственное значение $\sigma = 0$ оператора $A(\mu_{cr})$ простое.

Случай $\nu_1\lambda_1 = 1$ является вырожденным (существует присоединенный вектор). Далее рассматриваются невырожденные случаи. При $\nu_1\lambda_1 > 1$ собственные функции $\boldsymbol{\varphi} \in H$ и $\boldsymbol{\Phi} \in H$ линейной спектральной задачи и линейной сопряженной задачи определяются как нетривиальные решения уравнений

$$A(\mu_{cr})\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad A^*(\mu_{cr})\boldsymbol{\Phi} = 0, \quad (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Phi}) = 1$$

и имеют вид

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{1 + \nu_1\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 \\ \nu_1\lambda_1 \end{pmatrix}\psi_1(x), \qquad \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{1 - \nu_1\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -\nu_1\lambda_1 \end{pmatrix}\psi_1(x). \tag{19}$$

Для отыскания $\frac{2\pi}{\omega}$-периодического по времени решения уравнения (12), где ω— неизвестная циклическая частота, применим метод Ляпунова-Шмидта. Введем в (12) замену времени $\tau = \omega t$, а через $\varepsilon^2 = \mu - \mu_{cr}$ обозначим надкритичность. Тогда (12) примет вид:

$$\omega\dot{\boldsymbol{u}} - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u} = \varepsilon^2 \mathrm{C}\boldsymbol{u} - K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \tag{20}$$

где точкой обозначено дифференцирование по τ. Неизвестное 2π-периодическое по τ решение $\boldsymbol{u}$ и неизвестную частоту ω будем разыскивать в виде рядов по параметру ε:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\boldsymbol{u}_i, \qquad \omega = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\omega_i, \tag{21}$$

где $\omega_0 = \sqrt{1 - \nu_1^2\lambda_1^2}$. Подставляя (21) в (20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим цепочку уравнений. Рассмотрев первые пять уравнений, придем к теореме.

Теорема 1. *Пусть $\nu_1 \le \nu_2$ и $\nu_1\lambda_1 < 1$. Тогда найдется $\mu_{cr} = (\nu_1 + \nu_2)\lambda_1$ такое, что при $\mu < \mu_{cr}$ нулевое решение системы Рэлея с диффузией (2) асимптотически устойчиво. При $\mu = \mu_{cr}$ происходит мягкая колебательная потеря устойчивости нулевого решения* *и при малых* $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_{cr}} > 0$ *существует устойчивый предельный цикл системы (2). Первые члены разложения автоколебаний в степенной ряд имеют вид:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \varepsilon\alpha_1(e^{i\omega t}\boldsymbol{\varphi} + e^{-i\omega t}\boldsymbol{\varphi}^*) + \varepsilon^3(\alpha_3(e^{i\omega t}\boldsymbol{\varphi} + e^{-i\omega t}\boldsymbol{\varphi}^*) + \boldsymbol{u}_3^p(\omega t)) + O(\varepsilon^4) \\ \omega &= \sqrt{1 - \nu_1^2\lambda_1^2} + \varepsilon^4\omega_4 + O(\varepsilon^5). \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ *определено в* (17)*, величины* α_1*,* α_3*,* ω_4 *и* $\boldsymbol{u}_3^p$ *находятся явно.*

Для $n \geq 5$, уравнение для n-го члена степенного ряда может быть записано в виде:

$$\omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_n - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_n = C\boldsymbol{u}_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1}\omega_{n-i}\dot{\boldsymbol{u}}_n - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{u}_{i_3}) \equiv \boldsymbol{f}_n, \qquad (22)$$

где $\boldsymbol{u}_n \in H$. По индукции доказываются следующие две теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\nu_1\lambda_1 < 1$*. Тогда четные члены разложения автоколебаний в степенной ряд и нечетные компоненты циклической частоты* ω *равны нулю: для всякого* $k \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{u}_{2k} = 0, \omega_{2k-1} = 0$*.*

Теорема 3. *Пусть* $\nu_1\lambda_1 < 1$*. Тогда правая часть уравнения для n-го члена разложения автоколебаний в степенной ряд* (22) *есть нечетный тригонометрический полином по времени степени n:*

$$\omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_n - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{f}_{1n}(x)e^{i\tau} + \boldsymbol{f}_{3n}(x)e^{3i\tau} + \cdots + \boldsymbol{f}_{nn}(x)e^{in\tau} + \text{к.с.}, \quad \boldsymbol{f}_{kn}(x) \in H$$

а его 2π*-периодическое решение имеет вид:*

$$u_n = \alpha_n\boldsymbol{\varphi}e^{i\tau} + \boldsymbol{w}_{1n}(x)e^{i\tau} + \cdots + \boldsymbol{w}_{nn}(x)e^{in\tau} + \text{к.с.}, \quad \boldsymbol{w}_{kn}(x) = -(A(\mu_{cr}) - ik\omega_0 I)^{-1}\boldsymbol{f}_{kn}(x)$$

Полагая в (20) $\omega = 0$, получим уравнение для нахождения стационарных решений системы (12):

$$-A(\mu_{cr})\boldsymbol{u} = \varepsilon^2\mathrm{C}\boldsymbol{u} - K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}). \qquad (23)$$

Стационарное решение $\boldsymbol{u}$ будем разыскивать в виде ряда по целым степеням ε (21).

Теорема 4. *Пусть* $\nu_1 \leq \nu_2$ *и* $\nu_1\lambda_1 > 1$*. Тогда существует* $\mu_{cr} = \frac{1}{\nu_1\lambda_1} + \nu_2\lambda_1$ *такое, что при* $\mu < \mu_{cr}$ *нулевое решение системы Рэлея с диффузией (2) асимптотически устойчиво. При* $\mu = \mu_{cr}$ *происходит мягкая монотонная потеря устойчивости нулевого решения и при малых* $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_{cr}} > 0$ *существует пара устойчивых стационарных решений системы:*

$$\boldsymbol{u} = \pm\varepsilon\alpha_1\boldsymbol{\varphi} \pm \varepsilon^3(\alpha_3\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{u}_3^p) + O(\varepsilon^4)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ *определено в* (19)*, величины* α_1*,* α_3 *и* $\boldsymbol{u}_3^p$ *находятся явно.*

Теорема 5. *Пусть* $\nu_1\lambda_1 > 1$*. Тогда четные члены разложения стационарного решения в степенной ряд равны нулю: для всякого* $k \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{u}_{2k} = 0$*.*

Во **второй главе** рассматривается система Рэлея с диффузией в случае одной пространственной переменной (3). Предполагается, что на границе отрезка $[0, 1]$ заданы краевые условия Неймана (6). Коэффициенты диффузии считаются фиксированными и удовлетворяющими условию $0 < \nu_1 \leq \nu_2$. В главе исследуется бифуркационное поведение решений системы (3) на бесконечномерных инвариантных подпространствах фазового пространства системы.

Пусть $k \in N$ фиксировано. Через Γ_k обозначим множество

$$\Gamma_k = \{k(2j-1), j \in N\}.$$

Через H_k обозначим подпространство пространства H с базисом

$$\{\boldsymbol{e_1}\psi_i\,(x)\,,\,\boldsymbol{e_2}\psi_i\,(x)\},\ i \in \Gamma_k, \tag{24}$$

где $\boldsymbol{e_1} = (1,0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0,1)$, ψ_k определены в (13). Дополнительно положим $H_0 = H$.

Теорема 6. *Подпространства H_k, $k \in \mathbb{N}$ инвариантны относительно системы Рэлея с диффузией* (3) *с краевыми условиями Неймана* (6)*.*

Рассмотрев линейную спектральную задачу (14) при $\boldsymbol{u} \in H_0 \equiv H$ получаем, что при $\mu_{cr}^{(0)} = 0$ от нуля ответвляется пространственно-однородный автоколебательный режим. Рассмотрев (14) при $\boldsymbol{u} \in H_k$, $k \in \mathbb{N}$ получим счетное множество критических значений управляющего параметра μ, при которых возникают пространственно-неоднородные автоколебательные и стационарные режимы. С учетом простоты λ_k в одномерном случае справедливы аналоги лемм 1 и 2.

Лемма 3. *Пусть $\nu_1\lambda_k < 1$. Тогда на подпространстве H_k происходит колебательная потеря устойчивости нулевого решения системы Рэлея с диффузией* (3) *и критическое значение параметра μ определяется по формуле*

$$\mu_{cr}^{(k)} = (\nu_1 + \nu_2)\lambda_k. \tag{25}$$

Оператор $A(\mu_{cr}^{(k)})$ имеет пару чисто мнимых простых собственных значений:

$$\sigma_{1,2}(\mu_{cr}^{(k)}) = \pm i\omega_0, \qquad \omega_{0k} = \sqrt{1 - \nu_1^2\lambda_k^2}. \tag{26}$$

Найдем собственную функцию $\boldsymbol{\varphi}$ линейной спектральной задачи и собственную функцию $\boldsymbol{\Phi}$ линейной сопряженной задачи

$$A(\mu_{cr}^{(k)})\boldsymbol{\varphi} - i\omega_{0k}\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad A^*(\mu_{cr}^{(k)})\boldsymbol{\Phi} + i\omega_{0k}\boldsymbol{\Phi} = 0, \quad (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Phi}) = 1.$$

Они имеют вид

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{i}{2\omega_{0k}}\begin{pmatrix} 1 \\ \nu_1\lambda_k + i\omega_{0k}\end{pmatrix}\psi_k(x),\ \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{(\nu_1\lambda_1 - i\omega_{0k})}\begin{pmatrix} 1 \\ -\nu_1\lambda_k + i\,\omega_{0k}\end{pmatrix}\psi_k\,(x)\,. \tag{27}$$

Лемма 4. *Пусть $k \neq 0$ и $\nu_1\lambda_k > 1$. Тогда на подпространстве H_k происходит монотонная потеря устойчивости нулевого решения системы Рэлея с диффузией* (3) *и критическое значение параметра μ определяется по формуле*

$$\mu_{cr}^{(k)} = \frac{1}{\nu_1\lambda_k} + \nu_2\lambda_k. \tag{28}$$

причем нулевое собственное значение $\sigma = 0$ оператора $A(\mu_{cr}^{(k)})$ простое.

Собственные функции $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ оператора $A(\mu_{cr}^{(k)})$ находятся по формулам

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{1+\nu_1\lambda_k}\begin{pmatrix} 1 \\ \nu_1\lambda_k\end{pmatrix}\psi_k(x), \quad \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{1-\nu_1\lambda_k}\begin{pmatrix} 1 \\ -\nu_1\lambda_k\end{pmatrix}\psi_k\,(x)\,. \tag{29}$$

Пусть задано $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим систему Рэлея с диффузией на инвариантном подпространстве H_k. Предположим, что выполнено условие $\nu_1\lambda_k < 1$.

Теорема 7. *Пусть система Рэлея с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве H_k, $k \geq 0$ и выполняется условие $\nu_1\lambda_k < 1$. Тогда найдется $\mu_{cr}^{(k)} = (\nu_1+\nu_2)\lambda_k$ такое, что при $\mu < \mu_{cr}^{(k)}$ нулевое решение системы Рэлея с диффузией (2) асимптотически устойчиво в H_k. При $\mu = \mu_{cr}^{(k)}$ происходит мягкая колебательная потеря устойчивости нулевого решения и при малых $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_{cr}^{(k)}} > 0$ существует устойчивый в H_k предельный цикл системы (2). Первые члены разложения автоколебаний в степенной ряд имеют вид*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} = \varepsilon\alpha_1(e^{i\omega t}\boldsymbol{\varphi} + e^{-i\omega t}\boldsymbol{\varphi}^*) + \varepsilon^3(\alpha_3(e^{i\omega t}\boldsymbol{\varphi} + e^{-i\omega t}\boldsymbol{\varphi}^*) + \boldsymbol{u}_3^p(\omega t)) + O(\varepsilon^4),\\
&\omega = \omega_0 + \varepsilon^4\omega_4 + O(\varepsilon^5).
\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ определено в (27), величины α_1, α_3, ω_4 и $\boldsymbol{u}_3^p$ явно найдены в работе.

Для $n \geq 5$, уравнение для n-го члена разложения автоколебаний в степенной ряд может быть записано в виде (22), где $\boldsymbol{u}_n \in H$. По индукции доказываются следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть система Рэлея с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве H_k, $k \geq 0$ и $\nu_1\lambda_k < 1$. Тогда четные компоненты разложения автоколебаний в степенной ряд и нечетные компоненты циклической частоты ω равны нулю: для всякого $k \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{u}_{2k} = 0$, $\omega_{2k-1} = 0$.*

Теорема 9. *Пусть система Рэлея с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве H_k, $k \in \mathbb{N}$ и $\nu_1\lambda_k < 1$. Тогда правая часть уравнения для n-го члена разложения автоколебаний в степенной ряд (22) представляет собой нечетный тригонометрический полином степени n по τ*

$$\omega_0\dot{\boldsymbol{u}}_n - A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{f}_{1n}(x)e^{i\tau} + \boldsymbol{f}_{3n}(x)e^{3i\tau} + \ldots + \boldsymbol{f}_{nn}(x)e^{in\tau} + \text{к.с.},$$

где $\boldsymbol{f}_{sn}(x) \in H_k$, причем функции $\boldsymbol{f}_{sn}(x)$ представляют собой линейные комбинации базисных функций ψ_j с индексами $j \in \Gamma_{k,n} = \{j \in \Gamma_k : j \leq kn\}$. Общее решение уравнения имеет вид:

$$u_n = \alpha_n\boldsymbol{\varphi}e^{i\tau} + \boldsymbol{w}_{1n}(x)e^{i\tau} + \ldots + \boldsymbol{w}_{nn}(x)e^{in\tau} + \text{к.с.},$$

где $\boldsymbol{w}_{sn}(x) = -(A - is\omega_0 I)^{-1}\boldsymbol{f}_{sn}(x)$, а функции $w_{sn}(x)$ есть линейные комбинации ψ_j с индексами $j \in \Gamma_{k,n}$.

Для подпространства H_0 получены результаты для n-го члена разложения объемных автоколебаний в степенной ряд.

Теорема 10. *Пусть система Рэлея с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве H_0 . Обозначим $\mathcal{A}_1 = \{m = 2s-1,\ s \geq 3\} \subset \Gamma_1$ Пусть $n \in \mathcal{A}_1$. Тогда, для уравнения при ε^n (22) справедливы соотношения*

1. *Правая часть уравнения представляет собой нечетный тригонометрический полином по времени степени n*

2. *2π-периодическое по времени решение уравнения является нечетным тригонометрическим полиномом по времени степени n*

3. *Показатели α_{n-2} и компоненты циклической частоты ω_{n-1} попеременно обращаются в ноль на элементах $n \in \mathcal{A}_1$, то есть имеет место следующая закономерность:*

- *при* $n = 5, 9, 13, \dots$ $\boldsymbol{f}_{sn} = (iR^1_{ns},\, R^2_{ns})$, *где* $R^{1,2}_{ns} \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha_{n-2} = 0$;
- *при* $n = 7, 11, 15, \dots$ $\boldsymbol{f}_{kn} = (R^1_{ns},\, iR^2_{ns})$, *где* $R^{1,2}_{ns} \in \mathbb{R}$ *и* $\omega_{n-1} = 0$.

Теперь рассмотрим систему Рэлея с диффузией на инвариантном подпространстве H_k и предположим, что выполнено условие $\nu_1\lambda_k > 1$.

Теорема 11. *Пусть система Рэлея с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве* H_k, $k \in \mathbb{N}$ *и выполняется условие* $\nu_1\lambda_k > 1$. *Тогда существует* $\mu^{(k)}_{cr} = \frac{1}{\nu_1\lambda_k} + \nu_2\lambda_k$ *такое, что при* $\mu < \mu^{(k)}_{cr}$ *нулевое решение системы Рэлея с диффузией* (2) *асимптотически устойчиво в* H_k. *При* $\mu = \mu^{(k)}_{cr}$ *происходит мягкая монотонная потеря устойчивости нулевого решения и при малых* $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu^{(k)}_{cr}} > 0$ *существует пара устойчивых стационарных решений системы. Первые члены разложения вторичных решений в степенной ряд имеют вид:*

$$\boldsymbol{u} = \pm\varepsilon\boldsymbol{a_1}\cos(\pi kx) \pm \varepsilon^3(\boldsymbol{a_3}\cos(\pi kx) + \boldsymbol{b_3}\cos(3\,\pi kx)) + O(\varepsilon^4)$$

где величины $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_3}$ *и* $\boldsymbol{b_3}$ *явно найдены в работе.*

Для $n \geq 5$, уравнение при ε^n может быть записано в виде (22) при $\omega_i = 0$ и $\boldsymbol{u}_n \in H$:

$$-A(\mu_{cr})\boldsymbol{u}_n = C\boldsymbol{u}_{n-2} - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\boldsymbol{u}_{i_1}, \boldsymbol{u}_{i_2}, \boldsymbol{u}_{i_3}) \equiv \boldsymbol{f}_n. \qquad (30)$$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 12. *Пусть система Рэлея с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве* H_k, $k \in \mathbb{N}$ *и выполняется условие* $\nu_1\lambda_k > 1$. *Тогда четные компоненты разложения вторичных стационарных решений в степенной ряд равны нулю: для всякого* $m \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{u}_{2m} = 0$.

Теорема 13. *Пусть система Рэлея с диффузией рассматривается на инвариантном подпространстве* H_k, $k \in \mathbb{N}$ *и выполняется условие* $\nu_1\lambda_k > 1$. *Тогда правая часть* $\boldsymbol{f}_n(x)$ *уравнения при* ε^n (30) *и частное решение* $\boldsymbol{u}^p_n(x)$ *этого уравнения есть линейная комбинация базисных функций* ψ_j *с индексами* $j \in \Gamma_{k,n}$.

Общий характер бифуркационного поведения решений системы Рэлея с диффузией (3) на подпространствах H_k может быть описан следующим образом. При $\mu < \mu^{(0)}_{cr} = 0$ нулевое решение системы Рэлея с диффузией устойчиво во всем пространстве $H = H_0$. При $\mu = \mu^{(0)}_{cr}$ оно теряет устойчивость и рождается устойчивый пространственно-однородный автоколебательный режим. При $\mu \leqslant \mu^{(1)}_{cr}$ нулевое решение системы (3) устойчиво в H_1. При малых $\mu > \mu^{(1)}_{cr}$ существует устойчивое в H_1 вторичное решение. Если $\nu_1\lambda_1 < 1$, то $\mu^{(1)}_{cr} = 2\nu_1\lambda_1$ и происходит бифуркация рождения цикла; если $\nu_1\lambda_1 \geqslant 1$, то $\mu^{(1)}_{cr} = \dfrac{1}{\nu_1\lambda_1} + \nu_1\lambda_1$ и рождается нетривиальное стационарное решение.

При $\mu \leqslant \mu^{(2)}_{cr}$ нулевое решение (3) устойчиво в H_2. При малых $\mu > \mu^{(2)}_{cr}$ существует устойчивое в H_2 вторичное решение, которое является нетривиальным стационарным решением или циклом в зависимости от того, превосходит ли $\nu_1\lambda_2$ единицу или нет.

Продолжая этот процесс, заключаем, что на каждом из инвариантных подпространствах H_k, $k = 1, 2, 3, \dots$ при переходе управляющего параметра μ через критическое значение $\mu^{(k)}_{cr}$ происходит ответвление вторичных решений, которые устойчивы в H_k при малых $\mu > \mu_{cr}^k$, но неустойчивы в H. Среди них может быть лишь конечное число циклов. Начиная с некоторого k_*, которое задается условием $\nu_1 \lambda_{k_*} \geqslant 1$, от нулевого равновесия ответвляются нетривиальные стационарные режимы.

Для исследования процесса разрушения вторичных решений на подпространствах H_k, $k = 1, 2$ при возрастании значений μ были проведены вычислительные эксперименты. Коэффициенты диффузии были зафиксированы равными $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$; тогда на подпространстве H_1 происходит колебательная потеря устойчивости, а на H_2 — монотонная.

Численное решение системы (2) строилось методом Галеркина для возрастающих значений $\mu = \mu_{cr}^k + \varepsilon^2$, $k = 1, 2$. Начальные условия задавались формулами для первых членов разложения вторичных периодических по времени и стационарных решений в степенные ряды. Для $\varepsilon < 0.18$ на H_1 наблюдался пространственно-неоднородный автоколебательный режим, хорошо согласующийся с полученными формулами, который при $\varepsilon \in (0.2, 0.3)$ постепенно сменялся стационарным решением. При дальнейшем увеличении ε профиль первой компоненты решения $v(x,t)$ сохранял синусоидальную форму, в то время как $w(x,t)$ асимптотически стремился к режиму меандра, причем $\max_{x \in [0,l]} |w(x,t)| \sim \varepsilon$. На подпространстве H_2 для $\mu > \mu_{cr}^{(2)}$ наблюдалось пространственно-неоднородное стационарное решение. При увеличении μ профиль первой компоненты решения $v(x,t)$ сохраняет синусоидальную форму, в то время как $w(x,t)$ асимптотически стремится к режиму меандра, причем $\max_{x \in [0,1]} |w(x,t)| \sim \varepsilon$.

Результаты главы переносятся также на другие типы краевых условий, рассматриваемые в настоящей работе. Инвариантные подпространства вводятся аналогичным способом в случае краевых условий Дирихле (4). Далее, анализ формул вторичных решений, полученных в данной главе, приводит к выводу о том, что вторичные стационарные или периодические по времени решения, удовлетворяющие условиям Неймана (6) на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяют также смешанным краевым условиям на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$: условиям Неймана в нуле и условиям Дирихле в точке $x = \frac{1}{2}$. Аналогичное утверждение справедливо для случая краевых условий Дирихле (4).

Результаты для инвариантных подпространств переносятся на случай m-мерного параллелепипеда с несоизмеримыми квадратами сторон.

Третья глава посвящена исследованию бифуркационного поведения решений системы Фитцхью-Нагумо с диффузией (1) в предположении, что $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, 3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$ или прямоугольный параллелепипед, а также $\epsilon = 1$ и $\beta = 0$. Параметр $\alpha \geq 0$ и коэффициенты диффузии ν_1, ν_2 считаются фиксированными. Предполагается, что на границе области $\partial\Omega$ заданы краевые условия Дирихле (4), либо смешанные условия (5) либо краевые условия Неймана (6).

Сведем систему (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве H. Для этого определим линейный оператор $A_\alpha(\mu) : H \to H$, действующий на вектор-функцию $\boldsymbol{u} = (v, w)$, $v, w \in W_2^2(\Omega)$ по правилу:

$$\mathrm{A}_\alpha(\mu)\boldsymbol{u} = \mathrm{D}\Delta\boldsymbol{u} + \mathrm{B}_\alpha\boldsymbol{u} + \mu\mathrm{C}\boldsymbol{u}. \tag{31}$$

Здесь операторы B_α, C и D заданы матрицами

$$\mathrm{B}_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

и в частном случае $\alpha = 0$ выражения (32) переходят в (8), а формула (31) в (7) соответственно.

В области определения оператора $A_\alpha(\mu)$, как и ранее, учитываются краевые условия. Будем предполагать, что оператор $A_\alpha(\mu)$ задан на множестве $\mathcal{D}(A_0)$ вектор-функций $\boldsymbol{u} = (v, w)$, $v, w \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющим условиям Дирихле (4) или смешанным краевым условиям (5) или на множестве $\mathcal{D}(\widetilde{A_0})$, где $\widetilde{A_0} = A_0 + I$ вектор-функций $\boldsymbol{u} = (v, w)$, $v, w \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям Неймана (6).

Для трилинейного оператора $K(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ справедливы формулы (10) и (11). Тогда систему Фитцхью-Нагумо с диффузией (1) можно записать в операторном виде:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \mathrm{A}_\alpha(\mu)\boldsymbol{u} - K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}); \quad \boldsymbol{u} \in H. \tag{33}$$

Введем функцию $F(\lambda) = \min(f_1(\lambda), f_2(\lambda))$, где

$$f_1(\lambda) = \lambda(\nu_1 + \nu_2) + \alpha; \; f_2(\lambda) = \lambda\nu_2 + \frac{1}{\lambda\nu_1 + \alpha}.$$

Тогда критическое значение параметра μ_{cr} определяется по формуле

$$\mu_{cr} = \min_{\lambda \in \{\lambda_k\}_{k=0}^{+\infty}} F(\lambda).$$

При $\nu_1 \le \nu_2$ функция $F(\lambda)$ является монотонно возрастающей и ограниченной снизу. Тогда $\mu_{cr} = F(\lambda_0)$ и результаты для этого случая аналогичны полученным в первой главе для системы Рэлея с диффузией. Для исследования случая $\nu_1 > \nu_2$ введем в рассмотрение величины $\gamma_i(\alpha)$, $i = 1, \ldots, 4$:

$$\gamma_1(\alpha) = -\frac{\alpha}{\nu_1} + \frac{2\sqrt{\nu_2}}{(\nu_1 + \nu_2)\sqrt{\nu_1}}, \quad \gamma_2(\alpha) = \lambda_{eq} = -\frac{\alpha}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_1},$$

$$\gamma_3(\alpha) = \lambda_{min} = -\frac{\alpha}{\nu_1} + \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}, \quad \gamma_4(\alpha) = -\frac{\alpha}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}$$

и отвечающие им волновые числа $k_i = k_i(\gamma_i)$, $i = 1, \ldots, 4$. Определим величины α_1, α_2, α_3 и α_4:

$$\alpha_1 = \frac{2\sqrt{\nu_1}\sqrt{\nu_2}}{\nu_1 + \nu_2}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}}, \quad \alpha_4 = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \tag{34}$$

Величины γ_i являются положительными при $\alpha < \alpha_1$, но с ростом α поочередно происходит смена знака у всех γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ (см. таблицу 1).

Таблица 1: Смена знака γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ в зависимости от α

Значения α	Значения γ_k
$\alpha \in [0, \alpha_1]$	$\gamma_k \ge 0$
$\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2]$	$\gamma_1 < 0$, $\gamma_2, \gamma_3\gamma_4 \ge 0$
$\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3]$	$\gamma_1, \gamma_2 < 0$, $\gamma_3, \gamma_4 \ge 0$
$\alpha \in (\alpha_3, \alpha_4]$	$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 < 0$, $\gamma_4 \ge 0$
$\alpha > \alpha_4$	$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 < 0$

Исследуем зависимость μ_{cr} от значений коэффициентов диффузии ν_1, ν_2 и параметра α. Для малых $\alpha \in (0, \alpha_1)$ $\gamma_k > 0$, $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда $F(\lambda) = f_1(\lambda)$ при $\lambda < \gamma_2(\alpha)$

и $F(\lambda) = f_2(\lambda)$ при $\lambda \geq \gamma_2(\alpha)$. В системе может возникать монотонная либо колебательная потеря устойчивости в зависимости от значений коэффициентов диффузии ν_1 и ν_2. Формулы для определения μ_{cr} и типа потери устойчивости, когда $\alpha \in (0, \alpha_1)$ в случае $\lambda_0 > 0$ приведены в Таблице 2. Если же $\lambda_0 = 0$, то $\mu_{cr} = \alpha$ и в системе Фитцхью-Нагумо с диффузией (1) всегда происходит колебательная потеря устойчивости нулевого решения.

Для значений $\alpha \geq \alpha_2$ колебательная неустойчивость уже не имеет места в системе (см. таблицу 3). Рассмотрим случай $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3)$. Тогда $\gamma_1 < 0, \gamma_2 \leq 0$ и $\gamma_3, \gamma_4 > 0$ и $F(\lambda) \equiv f_2(\lambda)$. Тем не менее, $F_2(\lambda)$ не является монотонной функцией. В системе возникает только монотонная потеря устойчивости, но k_0 определяется различным образом в зависимости от значений параметров. Результаты для данного случая при $\lambda_0 > 0$ приведены в Таблице 3. В случае $\lambda_0 = 0$ $\mu_{cr} = \frac{1}{\alpha}$ если $\nexists k_0 : f_2(\lambda_{k_0}) < f_2(0)$. В противном случае получаем, что $\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$.

Таблица 2: Критическое значение параметра μ_{cr} для системы Фитцхью-Нагумо с диффузией (1). Случай $\alpha \in (0, \alpha_1)$ и $\lambda_0 > 0$.

	Условие	μ_{cr}	Тип п.у.
$\nu_1 \leq \nu_2$	$\lambda_0 < \gamma_2(\alpha)$	$\mu_{cr} = \lambda_0(\nu_1+\nu_2)+\alpha$	кол.
	$\lambda_0 \geq \gamma_2(\alpha)$	$\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$	мон.
$\nu_1 > \nu_2$	$\lambda_0 < \gamma_1(\alpha)$	$\mu_{cr} = \lambda_0(\nu_1+\nu_2)+\alpha$	кол.
	$\lambda_0 = \gamma_1,\ \nexists k : \lambda_k = \gamma_3(\alpha)$	$\mu_{cr} = \lambda_0(\nu_1+\nu_2)+\alpha$	кол.
	$\gamma_1(\alpha) < \lambda_0 < \gamma_2(\alpha)$, $\forall k \in [k_2, k_4]\ f_2(\lambda_k) > f_1(\lambda_0)$	$\mu_{cr} = \lambda_0(\nu_1+\nu_2)+\alpha$	кол.
	$\gamma_1(\alpha) < \lambda_0 < \gamma_2(\alpha)$, $\nexists k \in [k_2, k_4] : \lambda_k \in (\gamma_2(\alpha), \gamma_4(\alpha))$	$\mu_{cr} = \lambda_0(\nu_1+\nu_2)+\alpha$	кол.
	$\gamma_1(\alpha) < \lambda_0 < \gamma_2(\alpha)$, $\exists k_0 : f_2(\lambda_{k_0}) < f_1(\lambda_0)$	$\mu_{cr} = \lambda_{k_0}\nu_2 + \frac{1}{\lambda_{k_0}\nu_1+\alpha}$	мон.
	$\gamma_2(\alpha) < \lambda_0 < \gamma_3(\alpha)$, $\forall k \in [k_2, k_4] : f_2(\lambda_k) > f_2(\lambda_0)$	$\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$	мон.
	$\gamma_2(\alpha) < \lambda_0 < \gamma_3(\alpha)$, $\nexists k \in [k_2, k_4] : \lambda_k \in (\gamma_2(\alpha), \gamma_4(\alpha))$	$\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$	мон.
	$\gamma_2(\alpha) < \lambda_0 < \gamma_3(\alpha)$, $\exists k_0 \in [k_2, k_4] : f_2(\lambda_{k_0}) < f_2(\lambda_0)$	$\mu_{cr} = \lambda_{k_0}\nu_2 + \frac{1}{\lambda_{k_0}\nu_1+\alpha}$	мон.
	$\lambda_0 \geq \gamma_3(\alpha)$	$\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$	мон.

Схема метода Ляпунова-Шмидта применима к случаю ограниченной области Ω, если λ_{k_0} — простое. Теперь рассмотрим одномерный случай, когда $x \in (0, l)$ и все λ_k являются простыми. Тогда, в системе Фитцхью-Нагумо (1) при $\alpha > 0$ и краевых условиях Неймана (6) может возникать монотонная потеря устойчивости нулевого решения, что невозможно в предельном случае системы Рэлея с диффузией (3) при $\alpha = 0$. Если выполняется равенство $k_0 = 0$, где $k_0 : F(\lambda_{k_0}) = \min_k F(\lambda_k)$, то от нуля ответвляется пара пространственно-однородных стационарных решений, в противном случае вторичные решения неоднородны по пространственной переменной x. Рассмотрим далее случай $k_0 > 0$. Для системы Фитцхью-Нагумо (1) справедлив аналог леммы 1 главы 1.

Лемма 5. *Рассмотрим натуральное число* $k_0 : F(\lambda_{k_0}) = \min_{\lambda \in \{\lambda_k\}_{k=0}^{+\infty}} F(\lambda)$. *Пусть* $\lambda_{k_0} > \gamma_2(\alpha)$ *и выполняется неравенство*

$$\nu_2 \neq \frac{1}{(\lambda_{k_0} + \frac{\alpha}{\nu_1})(\lambda_{k_0+1} + \frac{\alpha}{\nu_1})\nu_1}. \tag{35}$$

Тогда в системе Фитцхью-Нагумо с диффузией (1) *происходит монотонная потеря устойчивости нулевого решения и критическое значение параметра* μ *определяется по формуле*

$$\mu_{cr} = \lambda_{k_0}\nu_2 + \frac{1}{\lambda_{k_0}\nu_1 + \alpha}, \tag{36}$$

причем нулевое собственное значение $\sigma = 0$ *оператора* $A_\alpha(\mu_{cr})$ *простое.*

Таблица 3: Критическое значение параметра μ_{cr} для системы Фитцхью-Нагумо с диффузией (1). Случай $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3)$ и $\lambda_0 > 0$

	Условие	μ_{cr}	Тип п. у.
$\nu_1 \leq \nu_2$	—	$\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$	мон.
$\nu_1 > \nu_2$	$\lambda_0 < \gamma_3(\alpha)$, $\forall k \in [k_2, k_4] : f_2(\lambda_k) > f_2(\lambda_0)$	$\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$	мон.
	$\lambda_0 < \gamma_3(\alpha)$, $\nexists k \in [k_2, k_4] : \lambda_k \in (\gamma_2(\alpha), \gamma_4(\alpha))$	$\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$	мон.
	$\lambda_0 < \gamma_3(\alpha)$, $\exists k_0 \in [k_2, k_4] : f_2(k_0) \leq f_2(\lambda_0)$	$\mu_{cr} = \lambda_{k_0}\nu_2 + \frac{1}{\lambda_{k_0}\nu_1+\alpha}$	мон.
	$\lambda_0 \geq \gamma_3(\alpha)$	$\mu_{cr} = \lambda_0\nu_2 + \frac{1}{\lambda_0\nu_1+\alpha}$	мон.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 14. *Пусть выполняются условия леммы 5. Тогда найдется* $\mu_{cr} = \lambda_{k_0}\nu_2 + \frac{1}{\lambda_{k_0}\nu_1+\alpha}$ *такое, что при* $\mu < \mu_{cr}$ *нулевое решение системы Фитцхью-Нагумо с диффузией* (1) *асимптотически устойчиво. При* $\mu = \mu_{cr}$ *в системе происходит мягкая монотонная потеря устойчивости нулевого решения. При малых* $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_{cr}} > 0$ *существует пара устойчивых стационарных решений системы. Первые члены разложения вторичных стационарных решений в степенной ряд имеют вид*

$$\boldsymbol{u} = \pm\varepsilon \boldsymbol{a_1} \cos\left(\frac{\pi k_0 x}{l}\right) \pm \varepsilon^3(\boldsymbol{a_3} \cos\left(\frac{\pi k_0 x}{l}\right) + \boldsymbol{b_3} \cos\left(3\frac{\pi k_0 x}{l}\right)) + O(\varepsilon^4)$$

где величины $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_3}$ *и* $\boldsymbol{b_3}$ *находятся явно.*

Теорема 15. *Четные компоненты разложения стационарных решений в степенной ряд равны нулю: для всякого* $k \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{u}_{2k} = 0$.

Теорема 16. *В правой части уравнения для n-го члена разложения стационарных решений в степенной ряд компоненты вектор-функций* $\boldsymbol{f}_n(x)$ *представляют собой линейные комбинации базисных функций* ψ_k *с нечетными индексами* $k \geq k_0$ *не выше* nk_0.

Эволюция вторичных стационарных решений системы (1) при возрастании μ была исследована численно. Эксперименты проводились для значений параметров $\alpha = 1$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-5}$, $\mu = \mu_{cr} + \varepsilon^2$. Начальные данные задавались формулами для первых членов асимптотики вторичного стационарного решения, уравнение (1) аппроксимировалось методом прямых на равномерной сетке; численное интегрирование системы уравнений метода прямых проводилось методом Дормана-Принса. Было обнаружено, что для $\varepsilon << 1$ вторичные решения сохраняют свой профиль. При увеличении ε вторичные решения сменяются стационарными тьюринговыми структурами. При $\varepsilon > 10$ в системе наблюдается пространственно-однородный стационарный режим.

Если выполняется неравенство $\nu_1 \leq \nu_2$, то $F(\lambda)$ является монотонно возрастающей и ограниченной снизу функцией. Тогда существует единственное $\lambda = \lambda_0 = 0 : \mu_{cr} = F(\lambda_0)$. Если $\alpha < \alpha_2$, то в системе (1) происходит колебательная потеря устойчивости нулевого решения, в противном случае — монотонная. Случай $\alpha = \alpha_2$ является вырожденным. Так как $\mu_{cr} = F(\lambda_0)$, то ответвляющиеся вторичные решения являются однородными по пространственной переменной x. Рассмотрим систему (1) на подпространствах H_k (24), определенных в главе 2 для системы Рэлея с диффузией (3). Справедлива теорема 17.

Теорема 17. *Пусть $x \in (0, l)$ и $\nu_1 \leq \nu_2$. Тогда подпространства H_k, $k \in \mathbb{N}$ инвариантны относительно системы Фитцхъю-Нагумо с диффузией* (1) *с краевыми условиями Неймана* (6).

Рассмотрев линейную спектральную задачу (1) при $\boldsymbol{u} \in H_k$, $k \in \mathbb{N}$ получим счетное множество критических значений $\mu_{cr}^{(k)}$, при которых на H_k возникают пространственно-неоднородные автоколебательные и стационарные режимы. Рассмотрим систему Фитцхью-Нагумо с диффузией (1) на инвариантном подпространстве H_k при $k \in \mathbb{N}$. Применив метод Ляпунова-Шмидта, придем к теоремам.

Теорема 18. *Пусть система Фитцхъю-Нагумо с диффузией* (1) *рассматривается на инвариантном подпространстве H_k, $k \in \mathbb{N}$ и выполняется условие $\nu_1\lambda_k + \alpha < 1$. Тогда найдется $\mu_{cr}^{(k)} = (\nu_1 + \nu_2)\lambda_k + \alpha$ такое, что при $\mu < \mu_{cr}^{(k)}$ нулевое решение системы Фитцхъю-Нагумо с диффузией* (1) *асимптотически устойчиво в H_k. При $\mu = \mu_{cr}^{(k)}$ происходит мягкая колебательная потеря устойчивости нулевого решения и при малых $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_{cr}^{(k)}} > 0$ существует устойчивый в H_k предельный цикл системы* (1).

Теорема 19. *Пусть система Фитцхъю-Нагумо с диффузией* (1) *рассматривается на инвариантном подпространстве H_k, $k \in \mathbb{N}$ и выполняется условие $\nu_1\lambda_k + \alpha > 1$. Тогда существует $\mu_{cr}^{(k)} = \frac{1}{\nu_1\lambda_k + \alpha} + \nu_2\lambda_k$ такое, что при $\mu < \mu_{cr}^{(k)}$ нулевое решение системы Фитцхъю-Нагумо с диффузией* (1) *асимптотически устойчиво в H_k. При $\mu = \mu_{cr}^{(k)}$ происходит мягкая монотонная потеря устойчивости нулевого решения и при малых $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_{cr}^{(k)}} > 0$ существует пара устойчивых стационарных решений системы* (1).

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Получены явные представления в виде степенных рядов для пространственно-временных и стационарных структур в системе Рэлея с диффузией, когда $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, 3$ где Ω — ограниченная область с границей класса C^2 или прямоугольный

параллелепипед, которые образуются в результате колебательной или монотонной потери устойчивости нулевого решения при различных типах краевых условий. Показано, что происходит мягкая потеря устойчивости. С помощью построения абстрактной схемы и применения метода Ляпунова-Шмидта выведены формулы для n-го члена разложения. В случаях, когда пространственная переменная изменяется на отрезке или в прямоугольнике, изучено качественное поведение стационарных решений в зависимости от краевых условий, численно исследована эволюция стационарных режимов.

2. Исследовано бифуркационное поведение решений системы Рэлея с диффузией на бесконечномерных инвариантных подпространствах фазового пространства системы в случае одной пространственной переменной и при краевых условиях Неймана. Показано существование счетного множества критических значений управляющего параметра, при которых возникают пространственно-неоднородные автоколебательные и стационарные режимы. Явно найдены первые члены разложения вторичных решений в степенные ряды, проанализированы формулы для общего члена ряда. Показано, что на инвариантных подпространствах происходит мягкая потеря устойчивости нулевого решения. При помощи численных экспериментов установлено, что с ростом значений надкритичности вторичные автоколебательные режимы сменяются стационарными.

3. Рассмотрен частный случай системы Фитцхью-Нагумо с диффузией в $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, 3$, где Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей класса C^2 или прямоугольный параллелепипед при значении коэффициента масштабирования $\epsilon = 1$ и различных коэффициентах диффузии: $\nu_1 \neq \nu_2$. Найдены критические значения управляющего параметра μ, определена зависимость типа потери устойчивости от значений коэффициентов диффузии ν_1, ν_2. В случае одной пространственной переменной $x \in (0, l)$ при краевых условия Неймана построены первые члены разложения вторичных пространственно-неоднородных стационарных решений в степенные ряды и проведено численное исследование разрушения вторичных режимов.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Казарников А.В.* Возникновение автоколебаний в системе Рэлея с диффузией / А.В. Казарников, С.В. Ревина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». — 2016. — Т. 9. — № 2. —С. 16–28.

2. *Казарников А.В.* Асимптотика стационарных решений системы Рэлея с диффузией / А.В. Казарников, С.В. Ревина // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. — 2016. — № 191. —С. 13–19.

3. *Казарников А.В.* Бифуркации в системе Рэлея с диффузией / А.В. Казарников, С.В. Ревина // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27. — № 4. —С. 499–514.

Другие издания:

4. *Казарников А.В.* Reaction-Diffusion Solver.NET // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017661703 (дата регистрации 19.10.2017 г.).

5. *Казарников А.В.* Уравнение Рэлея при наличии диффузии / А.В. Казарников // VII Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», 28 мая – 1 июня 2012, Дивноморское, Россия. —С. 61.

6. *Казарников А.В.* Исследование периодических режимов в пространственно-распределенном уравнении Рэлея / А.В. Казарников // VIII Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», 27–31 мая 2013, Дивноморское, Россия. —С. 63.

7. *Казарников А.В.* Бифуркация рождения цикла в пространственно-распределенной системе Рэлея / А.В. Казарников, С.В. Ревина. — 2013. — 83 С. Деп. в ВИНИТИ, №242-В2013.

8. *Казарников А.В.* Численное и аналитическое исследование системы Рэлея с диффузией / А.В. Казарников // IX Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», 26–30 мая 2014, Дивноморское, Россия. —С. 73.

9. *Казарников А.В.* Бифуркация рождения цикла в пространственно распределенном уравнении Рэлея / А.В. Казарников, С.В. Ревина // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - IV», 27 апреля–1 мая 2014, Ростов-на-Дону, Россия. —С. 94–95.

10. *Казарников А.В.* Бифуркационное поведение решений системы Рэлея с диффузией в случае одной пространственной переменной / А.В. Казарников, С.В. Ревина // XVII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 14–17 октября 2014, Ростов-на-Дону, Россия. —С. 6–10.

11. *Kazarnikov A.V.* The investigation of pattern formation on Fitzhugh-Nagumo reaction-diffusion system: qualitative analysis of secondary solutions and quantitative classification of nonlinear steady states / A.V. Kazarnikov // Lappeenranta University of Technology Doctoral School conference, 10 December 2015, Lappeenranta, Finland. —P. 39.

12. *Казарников А.В.* Исследование вторичных периодических по времени режимов в системе Рэлея с диффузией в случае краевых условий Неймана / А.В. Казарников, С.В. Ревина, Х. Хаарио // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V», 26 апреля–1 мая 2015, Ростов-на-Дону, Россия. —С. 109–110.

13. Kazarnikov A.V. Numerical and asymptotical analysis of Rayleigh reaction-diffusion system / A.V. Kazarnikov, S.V. Revina, H. Haario // Fourth China-Russia Conference «Numerical algebra with applications», 26–29 June 2015, Rostov-on-Don, Russia. —P. 114–119.

14. *Казарников А.В.* Асимптотика периодических по времени решений в системе Рэлея с диффузией / А.В. Казарников, С.В. Ревина // Международная научная конференция

«Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», 12–18 июля 2015, Владикавказ, Россия. —С. 195.

15. Казарников А.В. Асимптотика периодических по времени решений в системе Рэлея с диффузией / А.В. Казарников, С.В. Ревина // Математический форум (Итоги науки. Юг России). —2016. —Т. 10. —№ 2. —С. 125-133.

16. *Kazarnikov A.V.* Numerical and asymptotical analysis of secondary stationary solutions in Rayleigh reaction-diffusion system / A.V. Kazarnikov, S.V. Revina, H. Haario // Международная научная конференция «Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов», 5–9 октября 2015, Ростов-на-Дону, Россия. —P. 8.

17. *Казарников А.В.* Исследование вторичных периодических по времени режимов в системе Рэлея с диффузией // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный - 2015», 15–25 апреля 2015, Красноярск, Россия. —С. 30–32.

18. *Kazarnikov A.V.* Secondary time-periodic and stationary solutions of Rayleigh reaction-diffusion system / A. Kazarnikov, S. Revina, H. Haario // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VI», 24–29 апреля 2016, Ростов-на-Дону, Россия. —P. 96–97.

19. *Казарников А.В.* Монотонная и колебательная неустойчивость в пространственно-распределенной системе Рэлея / А.В. Казарников, С.В. Ревина // XI Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», 23–27 мая 2016, Дивноморское, Россия. —С. 62.

20. *Казарников А.В.* Асимптотика вторичных решений в системе Рэлея с диффузией в случае монотонной и колебательной потери устойчивости / А.В. Казарников // XII региональная школа-конференция «Владикавказская молодежная математическая школа», 18–23 июля 2016, В. Фиагдон, Россия. —С. 13–14.

21. *Казарников А.В.* Бифуркации в системе Рэлея с диффузией / А.В. Казарников, С.В. Ревина // Математический форум. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. —2017. — Т. 11. —С. 121–130.

22. *Казарников А.В.* Об одном предельном случае системы распространения нервного импульса // XII Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», 29 мая –3 июня 2017, Дивноморское, Россия. —С. 59.

23. *Казарников А.В.* Численное и аналитическое исследование бифуркаций в системе Рэлея с диффузией // Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», 3–8 июля 2017, Владикавказ, Россия. —С. 149–150.

24. *Kazarnikov A.V.* Numerical and analytical investigation of pattern formation in Fitzhugh-Nagumo reaction-diffusion system / A.V. Kazarnikov, S.V. Revina, H. Haario // International Conference «IMA Conference on Inverse Problems from Theory to Application», 19–21 September 2017, Cambridge, United Kingdom.