На правах рукописи

Умархаджиев Салаудин Мусаевич

Исследование операторов гармонического анализа в некоторых нестандартных пространствах функций

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2019

Работа выполнена в отделе физико-математических и химических наук Академии наук Чеченской Республики

Научный консультант: **Самко Стефан Григорьевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Степанов Владимир Дмитриевич**
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, ФГБУН Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН, главный научный сотрудник

Гольдман Михаил Львович
доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», профессор Математического института им. С. М. Никольского

Ляхов Лев Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», профессор кафедры математического и прикладного анализа

Ведущая организация: **ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН,** г. Новосибирск

Защита состоится 26 апреля 2019 года в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 Южного федерального университета, по адресу: г. Ростов-на-Дону, улица Мильчакова, 8а, ауд. 211

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 21-ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу:
https://hub.sfedu.ru/diss/announcement/bc033813-190e-4364-b908-c28bd31e57ce/

Автореферат разослан «_____» _______________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кряквин В.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена исследованию операторов гармонического анализа и, более общо, некоторых классов интегральных операторов в так называемых гранд-пространствах Лебега. В последние десятилетия интенсивно развивается теория так называемых нестандартных банаховых пространств функций и теория операторов в них. Среди таких пространств – пространства с переменными параметрами, т. е. с параметрами, которые могут меняться от точки к точке, а также указанные гранд-пространства. Многие исследования в теории пространств Лебега с переменными показателями за последнюю пару десятилетий подытожены в монографиях [7, 8] и для нестандартных пространств вообще – в двухтомной монографии [23, 24], где, в частности, можно найти изложение ряда результатов по теории операторов в гранд-пространствах, полученных в различных математических школах. Отметим, что некоторые результаты диссертации нашли отражение во втором томе этой монографии.

Степень разработанности темы исследования. Основным мотивом введения гранд-пространств была их эффективность в приложениях. Так в работах [12, 15] была показана, что локальная интегрируемость якобиана отображения из Ω гарантируется принадлежностью производных компонент отображения гранд-пространству Лебега. Более того с использованием гранд-пространств удается существенно улучшить результаты для ряда задач для уравнений в частных производных см., например, [13]. Появление этих работ послужило толчком бурному развитию гранд-пространств и с ассоциированных с ними (известных под названием small Lebesgue spaces) и теории операторов в них. Укажем, в частности, работы C. Capone, G. Di Fratto, A. Fiorenza, L. Greco, B. Gupta, T. Iwaniec, P. Jain, G. E. Karadzhov, V. Kokilashvili, P. Koskela, M. Krbec, A. Mercaldo, A. Meskhi, M. Milman, H. Rafeiro, J. M. Rakotoson, S. G. Samko, C. Sbordone, X. Zhong, см. библиографические ссылки в книге [24]. Все эти исследования относятся к случаю, когда множество Ω имеет конечную меру.

Отметим, что важный для самих гранд-пространств результат об описании гранд-пространств Лебега в терминах перестановок функции был получен в работе A. Fiorenza, G. E. Karadzhov [10].

Гранд-пространства продолжают привлекать интерес исследователей в связи с различными приложениями: эти пространства оказались подходящими в различных приложениях в теории уравнений с частными производными, в вариационных задачах, они используются при изучении максимальных функций, в теории экстраполяции и т. д.

Цели и задачи диссертационной работы: В связи с тем, что известный раннее способ построения гранд-пространств Лебега, приводивший к расширению самого пространства Лебега, был возможен только в случае множества конечной меры, первоочередная задача исследования диссертации состояла в нахождении новых методов построения гранд-пространств на множествах бесконечной меры. Эта проблема была решена с помощью введения специальным образом весовой функции, названной нами грандизатором. Решение этой задачи позволило ставить вопрос об исследовании свойств классических операторов гармонического анализа во введенных гранд-пространствах, что и являлось основной целью исследования диссертации.

Научная новизна. В диссертации впервые введены гранд-пространства Лебега на множествах бесконечной меры: трудности в определении таких пространств, связанных с бесконечной мерой, были преодолены за счет предложенного в диссертации метода грандизаторов. Все исследования ряда операторов гармонического анализа в этих пространствах являются новыми. В частности, отметим новизну следующих результатов: достаточные условия и необходимые условия на грандизатор для ограниченности интегральных операторов с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега, а также двусторонние оценки гранд-норм таких операторов; весовая ограниченность максимального оператора Харди–Литтлвуда и теорема Соболева для потенциала Рисса в гранд-пространствах Лебега на $\mathbb{R}^n$; ограниченность в гранд-пространствах последовательностей дискретных аналогов операторов гармонического анализа, введение дискретного аналога известного класса Лизоркина пробных функций и доказательство его плотности в рамках гранд-пространств последовательностей.

Отметим также новизну результата о регуляризации многомерных интегральных уравнений первого рода с ядром типа потенциала в гранд-пространствах Лебега на $\mathbb{R}^n$ и оценок роста функций из пространства Бергмана аналитических функций в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$, связанных с гранд-пространствами Лебега, при приближении к границе.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер и способствует развитию теории операторов в нестандартных функциональных пространствах. Результаты, полученные в диссертации, могут представлять интерес не только для специалистов в функциональном анализе и теории операторов, на которых она прежде всего рассчитана, но также, например, и в уравнениях с частными производными, и в вариационных задачах, в ввиду открывающихся приложений новых пространств. Результаты диссертации будут полезны в научных исследованиях, проводимых в Южном федеральном университете, Южном математическом институте Владикавказского научного центра РАН, в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, в Воронежском государственном университете и в других российских и зарубежных математических центрах.

Методология и методы исследования. В диссертации используются разнообразные методы функционального анализа, среди которых первостепенную роль играют метод весовой интерполяции, метод аппроксимация единицы с помощью усреднений, выделение замкнутых сепарабельных подпространств в несепарабельных пространствах и другие.

Положения, выносимые на защиту: На защиту выносятся утверждения, полученные лично автором. Перечислим главные из них.

1. Введены понятия гранд-пространств Лебега на неограниченных множествах посредством функционального параметра, называемого грандизатором, обобщающее понятие гранд-пространства Лебега на множествах конечной меры.

2. Установлены следующие свойства гранд-пространств Лебега на неограниченных множествах в зависимости от свойств грандизаторов: соотношения между классическими пространствами и гранд-пространствами Лебега; о вложении гранд-пространств Лебега; совпадение гранд-пространств Лебега с грандизаторами из некоторых классов; шкала грандизаторов, генерирующих разные гранд-пространства Лебега; поведение нормы характеристической функции измеримых множеств в гранд-пространстве Лебега.

3. Найдены эффективные условия на грандизатор, обеспечивающие ограниченность максимального оператора Харди–Литтлвуда и для справедливости теоремы Соболева для потенциала Рисса в гранд-пространствах. Для широкого класса интегральных операторов с однородными ядрами найдены условия ограниченности в гранд-пространствах, включающие в ряде случаев и необходимые условия ограниченности.

4. Получено описание пространства риссовых потенциалов функций из гранд-пространства Лебега; дано обобщение этого результата на случай когда гранд-пространство заменено общим банаховом пространством с некоторыми априорными свойствами.

5. Введены и изучены гранд-пространства последовательностей. Доказана ограниченность в них дискретных операторов свертки, операторов с однородными ядрами, в частности, операторов Харди и преобразования Гильберта, сингулярного оператора Гильберта, максимального сингулярного оператора Гильберта и максимального оператора Харди–Литтлвуда, обобщенных операторов Харди и оператора дробного интегрирования. Получены также весовые результаты.

6. Доказана весовая интерполяционная теорема для пары пространств Ле-

бега–Морри, введено гранд-пространство Морри с грандизатором и доказана теорема об ограниченности потенциала Рисса из гранд-пространства Лебега в гранд-пространство Морри.

7. Многомерное интегральное уравнение первого рода с ядром типа потенциала в пространствах Лебега с переменным показателем сведено к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

8. В качестве приложения теории гранд-пространств для некоторого класса грандизаторов обосновано существование решения однородного дифференциального уравнения четного порядка с постоянными вещественными коэффициентами в гранд-пространстве Соболева и получены оценки роста при приближении к границе в гранд-пространстве Бергмана аналитических функций и ассоциированном с ним пространстве на верхней полуплоскости.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на 25 международных конференциях, проходивших в России, Португалии, Греции, Грузии, Испании, Норвегии, Турции.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 23 печатных работах [A1–A23], из них 9 статей [A1, A2, A5, A7–A12] – в научных изданиях, включенных в перечень ведущих рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ, и 14 статей [A1, A2, A5, A11–A23] – в журналах, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science, Scopus, zbMATH .

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Из 23 опубликованных работ 15 [A4–A14, A19–A23] выполнены лично автором, без соавторов. 8 работ [A1, A2, A13–A18] выполнены в соавторстве.

В совместной статье [A1] Лемма 1 и Теорема 3 принадлежат С. М. Умархаджиеву, Лемма 2 и Теорема 4 – С. Г. Самко.

В совместной статье [A2] Лемма 3.1, Теорема 4.2, Теорема 4.7 и Теорема

4.9 принадлежат С. М. Умархаджиеву, Лемма 3.3, Лемма 4.5, Теорема 4.8 и Теорема 5.1 – С. Г. Самко, а Лемма 4.5 и Теорема 4.8 – обоим соавторам в равной мере.

В совместной статье [A13] Теорема 3.7, Теорема 5.5, Теорема 6.1 и Теорема 6.2 принадлежат С. М. Умархаджиеву, Теорема 4.1, Теорема 5.4 и Теорема 5.5 – С. Г. Самко, а Лемма 5.1, Теорема 4.3, Теорема 5.5, и Теорема 5.6 – У. Рафейро.

В совместной работе [A14] Теорема 3 принадлежит С. М. Умархаджиеву, а Лемма – С. Г. Самко.

В совместной статье [A15] Лемма 1, Лемма 3, Лемма 6, Теорема 2.1, Теорема 6.1, принадлежат С. М. Умархаджиеву, Лемма 2, Лемма 4, Лемма 5, Теорема 5.1 и Теорема 5.2 – С. Г. Самко.

В совместной статье [A16] Следствие принадлежит С. М. Умархаджиеву, а раздел Правки – С. Г. Самко.

В совместной статье [A17] раздел 3 принадлежит С. М. Умархаджиеву, а раздел 4 – С. Г. Самко.

В совместной работе разделы 2, 4 и 6 принадлежат С. М. Умархаджиеву, а разделы 3, 5 и 7 – С. Г. Самко.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав и библиографии. Общий объем диссертации 225 страниц, из них 202 страницы текста. Библиография включает 168 наименований на 18 страницах.

Содержание работы

В первой главе решаются задачи по достижению основной цели диссертации – расширение понятия гранд-пространства Лебега на неограниченные множества. Этот вопрос был впервые рассмотрен в работах [A15, A16].

Гранд-пространства Лебега были впервые введены в 1992 году в работе T. Iwaniec, C. Sbordone [15] и в несколько более общем виде в [13], как пространства, являющиеся расширением классических пространств Лебега. По определению работы [13] гранд-пространства $L^{p),\theta}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, состоят из функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L^{p),\theta}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon^{\theta} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} . \qquad (1)$$

Это определение естественно работает в случае множеств Ω с конечной мерой и в этом случае пространство $L^{p),\theta}(\Omega)$ является ещё бо́льшим расширением классического пространства Лебега $L^p(\Omega)$, чем слабое пространство Лебега $WL^p(\Omega)$, как показано в [15] и [12] (вложение $WL^p(\Omega) \subset L^{p),\theta}(\Omega)$ доказано в [15], а строгость этого вложения – в [12]).

Определение нормы в гранд-пространстве равенством (1) основывается на предположении, что функция f должна быть интегрируема в степени $p - \varepsilon$ для всех $0 < \varepsilon < p - 1$. Поэтому в случае множеств Ω с бесконечной мерой определение (1) приводит не к расширению самого пространства $L^p(\Omega)$, а к расширению пересечения

$$\bigcap_{1<s<p} L^s(\Omega).$$

Вводимые таким образом пространства соприкасаются с пространствами, рассматривавшимися в работе [29].

Чтобы получить расширение самого пространства $L^p(\Omega)$ в [A15, A16] была предложена идея введения в интеграл в норме (1) малой степени $(1 + |x|)^{-\lambda\varepsilon}$ степенной функции, "подправляющей" поведение подынтегральной функции на бесконечности:

$$L^{p),\theta}_{\lambda}(\Omega, \langle x\rangle^{-\lambda}) : = \left\{ f : \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\theta p} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p (1 + x^2)^{-\frac{\lambda\varepsilon}{2}} \, dx < \infty \right\}, \ \theta > 0.$$

В более общем виде эта идея была развита в работе [A5], где обобщение состояло не только в рассмотрении весовых гранд-пространств, но и в замене малой степени степенной функции на малую степень произвольного веса, независимого, вообще говоря, от веса пространства. Именно мы вводим гранд-пространство $L_a^{p),\theta}(\Omega, w)$, определяемое нормой

$$\|f\|_{L_a^{p),\theta}(\Omega,w)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^\theta \left(\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} w(x) a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

т. е. осуществляется не только возмущение параметра p, но веса w. Здесь w и a – произвольные весовые функции на Ω. Функция w служит весом гранд-пространства. Функцию $a(x)$, определяющую возмущение $a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}}$, мы называем *грандизатором.*

Допущение дополнительного функционального параметра a делает теорию гранд-пространств на неограниченных множествах весьма содержательной в том отношении, что многие результаты в этих пространствах зависят от выбора грандизатора. Ответ на первый возникающий вопрос – когда классическое пространство $L^p(\Omega, w)$ вложено в так введенное пространство $L_a^{p),\theta}(\Omega, w)$ – формулируется очень просто: тогда и только тогда, когда $a \in L^1(\Omega, w)$. Пространства $L_a^{p),\theta}(\Omega, w)$ могут оказаться совпадающими с точностью до эквивалентности норм при различных грандизаторах, например, в случае степенного грандизатора $a(x) = (1 + |x|)^{-\lambda}$, $\lambda > n$, пространство $L_a^{p),\theta}(\Omega, w)$ не зависит от λ. В случае экспоненциально убывающего на бесконечности грандизатора гранд-пространство может содержать многочлены, что не имеет место в случае степенных грандизаторов.

Гранд-пространства Лебега несепарабельны как в случае множества Ω конечной меры, так и в случае бесконечной меры каков бы ни был грандизатор a: замыкание множества "хороших" функций по норме гранд-пространства не совпадает со всем пространством, являясь в нём замкнутым подпространством. Это замыкание в теории гранд-пространств известно под названием *vanishing grand space.* Мы рассматриваем его в невесовом случае. В случае пространств с произвольным интегрируемым грандизатором мы обозначаем его через $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\Omega)$

и вводим как подпространство функций в $L_a^{p),\theta}(\Omega)$ таких, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^\theta\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^{\frac{\varepsilon}{p}})}=0.$$

Справедлива следующая цепочка непрерывных вложений:

$$L^p(\Omega,w)\hookrightarrow \mathring{L}_a^{p),\theta}(\Omega,w)\hookrightarrow L_a^{p),\theta}(\Omega,w)\hookrightarrow L_a^{p),\theta_1}(\Omega,w)\hookrightarrow L^{p-\varepsilon}(\Omega,wa^{\frac{\varepsilon}{p}}),$$

$1<p<\infty$, $0<\theta<\theta_1<\infty$, $0<\varepsilon<p-1$, где первое – в предположении, что $a\in L^1(\Omega,w)$.

Вложение $L_b^{p),\theta}(\Omega)\hookrightarrow L_a^{p),\theta}(\Omega)$, $\theta>0$, очевидно, если $a(x)\le C\,b(x)$, $x\in\Omega$. Следующая теорема дает нетривиальное условие такого вложения.

Теорема 1.4.1. *Пусть a и b – веса на Ω. Если существует $s>1$ такое, что*

$$\sup_{0<\delta<\frac{s-1}{p'}}\left\{\int\limits_\Omega a(x)^{s-\delta}b(x)^{1-s+\delta}dx\right\}^{\frac{\delta s}{p(s-\delta)(s^2-\delta(s-1))}}<\infty,$$

то $L_b^{p),\theta}(\Omega)\hookrightarrow L_a^{p),\theta}(\Omega),\ \theta>0$.

Следствие 1.4.2. *Если $b\in L^1(\Omega)$, то для этого вложения $L_b^{p),\theta}(\Omega)\hookrightarrow L_a^{p),\theta}(\Omega)$ достаточно, чтобы*

$$\int\limits_\Omega\left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^s b(x)dx<\infty,\quad s>1.$$

Различные грандизаторы a и b определяют, вообще говоря, различные гранд-пространства $L_a^{p),\theta}(\Omega,w)$ и $L_b^{p),\theta}(\Omega,w)$. А два произвольных степенных грандизатора генерируют одно и то же гранд-пространство, если оба грандизатора принадлежат L^1. Даже в шкале степенных грандизаторов допущение неинтегрируемых грандизаторов уже приводит к меньшим гранд-пространствам. Так

$$f_0(x)=\frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n}{p}}}\in L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n),\ \theta\ge\frac1p,\ \text{с}\ a(x)=\frac{1}{(1+|x|)^\gamma},\ \gamma>n,$$

$$f_0(x)\notin L_b^{p),\theta}(\mathbb{R}^n),\ \theta\ge\frac1p,\ \text{с}\ b(x)=\frac{1}{(1+|x|)^\lambda},\ \lambda\le n.$$

В приведенной ниже таблице указаны примеры пар грандизаторов, порождающих несовпадающие гранд-пространства и примеры функций, подтверждающих строгость вложения этих гранд-пространств.

table1

$a(x)$	$b(x)$	Примеры
$e^{-\lvert x\rvert}$, $\theta \geq \frac{1}{p}$	$\frac{1}{(1+\lvert x\rvert)^{\lambda}}$, $\lambda > n$	1
$\frac{1}{(1+\lvert x\rvert)^{\gamma}}$, $\gamma > n$, $\theta \geq \frac{1}{p}$	$\frac{(\ln(e+\lvert x\rvert)^{-\mu}}{(1+\lvert x\rvert)^{n}}$, $\mu > n$	$\frac{(\ln(e+\lvert x\rvert)^{-\nu}}{(1+\lvert x\rvert)^{\frac{n}{p}}}$, $0 \leq \nu < \frac{n}{p}$
$\frac{(\ln(e+\lvert x\rvert))^{-\mu}}{(1+\lvert x\rvert)^{n}}$, $\mu > n$, $\theta \geq \frac{1}{p}$	$\frac{(\ln\ln(e^2+\lvert x\rvert))^{-\nu}}{(1+\lvert x\rvert)^{n}\ln(e+\lvert x\rvert)}$, $\nu > n$	$\frac{(\ln(e+\lvert x\rvert))^{-\frac{n}{p}}}{(1+\lvert x\rvert)^{\frac{n}{p}}}$
$e^{-\lvert x\rvert^{\alpha}}$	$e^{-\lvert x\rvert^{\beta}}$	$e^{-\lvert x\rvert^{\gamma}}$, $\frac{\beta-n}{p} < \gamma < \frac{\alpha-n}{p}$
$e^{-\lvert x\rvert^{\alpha}}$, $\alpha > 0$	$\frac{1}{(1+\lvert x\rvert)^{\beta}}$, $\beta > n$	$e^{-\lvert x\rvert^{\gamma}}$, $-\frac{n}{p} < \gamma < \frac{\alpha-n}{p}$, $\alpha > \beta$

После исследования природы самих гранд-пространств, построенных с помощью грандизатора, основной задачей становится получение условий ограниченности классических операторов гармонического анализа в этих пространствах. **Во второй главе** получены достаточные условия на грандизатор для ограниченности максимального оператора Харди–Литтлвуда, операторов Кальдерона–Зигмунда, потенциала Рисса, операторов Харди, интегральных операторов с однородными ядрами и др. при указанном выше естественном предположении, что $a \in L^1(\Omega)$. Ниже приведены некоторые из перечисленных выше утверждений.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, a *– вес в* $\mathbb{R}^n$ *и существует* *число* $\nu > 0$ *такое, что*

$$a^{\nu} \in A_{\infty}.$$

Тогда для любого $\delta_0 \in (0, p-1)$ *существует константа* C_{δ_0} *такая, что для максимального оператора Харди–Литтлвуда*

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

справедлива оценка

$$\|Mf\|_{L^{p-\delta}(\Omega, a^{\frac{\delta}{p}})} \leq C_{\delta_0} \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega, a^{\frac{\delta}{p}})}$$

для всех $\delta \in (0, \delta_0)$.

Если, кроме того, $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *то оператор* M *ограничен в* $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ *и в* $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ *и*

$$a \in G(\mathbb{R}^n) := \{a : \ a \in L^1(\mathbb{R}^n), \ \exists \nu > 0 : \ a^{\nu} \in A_{\infty}\}.$$

Тогда линейный оператор Кальдерона-Зигмунда

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy,$$

ограничен в $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ *и в* $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.5.2. *Если* $a \in G(\mathbb{R}^n)$, *то множество* $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *плотно в гранд-пространстве* $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.5.2. *Если* $a \in G(\mathbb{R}^n)$, *то класс Лизоркина* Φ *плотен в гранд-пространстве* $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Получаемые в диссертации результаты об ограниченности операторов различных классов зависят не только от параметров p, θ и веса w, но и от выбора грандизатора a. В ряде случаев, например, для интегральных операторов с однородными ядрами, в частности, для операторов Харди зависимость от грандизатора весьма содержательна.

Используемый нами метод введения гранд-пространств по всему евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ с помощью грандизаторов позволяет рассмотреть такие типичные для гармонического анализа в $\mathbb{R}^n$ как теоремы о Фурье-мультипликаторах. Доказана

Теорема 2.6.3. *Пусть $a \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$ и $w \in A_p$. Каждое из условий Михлина и Марцинкевича достаточно, чтобы оператор T_m, порожденный мультипликатором $m(x)$, был ограничен в гранд-пространстве $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n, w)$, $\theta > 0$, при условии, что существует $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ такой, что $wa^{\frac{\varepsilon_0}{p}} \in A_{p-\varepsilon_0}$.*

В случае $w \equiv 1$ достаточно, чтобы существовало $\nu > 0$ такое, что $a^\nu \in A_\infty$.

Как известно, в анализе большую роль играют интегральные операторы по $\mathbb{R}^n$, ядра которых однородны степени $-n$ и инвариантны относительно вращений (последнее при $n \geq 2$), см., например, [18]. В одномерном случае типичными примерами являются опереторы Харди и операторы Гильберта на полуоси, а в многомерном случае – их многомерные аналоги, а также модифицированные потенциалы Рисса с ядром $|x|^{-n}|x-y|^{\alpha-n}$ или $|y|^{-n}|x-y|^{-\alpha-n}$, $0 < \alpha < n$. Мы исследуем вопрос об ограниченности такого класса операторов в зависимости от выбора грандизатора. Особо выделяется естественный для этого случая выбор однородного грандизатора, т. е. $a(x) = |x|^{-\lambda}$, хотя такой выбор и стоит особняком в развиваемом нами подходе, т.к. такой грандизатор не интегрируем по $\mathbb{R}^n$. Мы начинаем изучение таких операторов в диссертации с весовых операторов Харди со степенными весами, поскольку в этом случае результаты для них в гранд-пространствах можно получить с большей информацией, чем в общем случае. Мы рассматриваем как классические операторы Харди функций одной переменной на положительной полуоси:

$$H^\alpha f(x) := x^{\alpha-1} \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t^\alpha} dt, \quad \mathcal{H}^\beta f(x) := x^\beta \int\limits_x^\infty \frac{f(t)}{t^{1+\beta}} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

так и их многомерные аналоги с интегрированием по шару $|y| \leq |x|$ или его внешности:

$$H_n^\alpha f(x) := |x|^{\alpha-n} \int\limits_{|y|<|x|} \frac{f(y)}{|y|^\alpha} dy, \quad \mathcal{H}_n^\beta f(x) := |x|^\beta \int\limits_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^{n+\beta}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

при $n \geq 2$.

Операторам Харди в классических пространствах Лебега посвящена обширная литература, сошлемся на книги [9, 14, 19, 26, 28] и, например, на статьи [27, 33, 34], где можно найти и другие ссылки. Операторы Харди в гранд-пространствах в естественной постановке, т.е. на $\mathbb{R}_+$ или в $\mathbb{R}^n$, раннее не исследовались.

Мы находим условия на грандизатор $a(x)$, при которых операторы Харди ограничены в гранд-пространствах $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, и получаем оценку сверху для точной константы в неравенствах Харди в зависимости от грандизатора $a(x)$. В случае степенного грандизатора $a(x) = |x|^{-\lambda}$ мы даем двусторонние оценки для нормы операторов Харди. При специальном выборе грандизатора $a(x) = |x|^{-n}$ показано, что эта точная константа совпадает с точной константой для классических пространств Лебега. Аналогичные результаты получены для так называемых операторов Харди по направлению и смешанных операторов Харди. Ниже результаты для случая $n = 1$.

Теорема 2.7.5. *Пусть $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ и a – неотрицательная функция на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию $a(x) \in L^1(\delta, N)$.*

Условия

$$c_\alpha(a) := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_1^\infty t^{\alpha+\frac{1}{p-\varepsilon}-2} a_*(t)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dt < \infty,$$

$$d_\beta(a) := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \int\limits_0^1 t^{\beta+\frac{1}{p-\varepsilon}-1} a_*(t)^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\, dt < \infty,$$

где $a_*(t) = \sup_{x>0} \frac{a(xt)}{a(x)}$, достаточны для ограниченности операторов H^α и $\mathcal{H}^\beta$ соответственно в гранд-пространстве $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)$ и

$$\|H^\alpha\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} \leq c_\alpha(a), \quad \|\mathcal{H}^\beta\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} \leq d_\beta(a).$$

Если $\alpha \geq \frac{1}{p'}$, то оператор H^α не ограничен ни в каком гранд-пространстве $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)$ с грандизатором a, интегрируемым в окрестности $(0,\tau)$ начала координат, $\tau > 0$. Аналогично, если $a \in L^1(N,\infty)$ при каком нибудь $N > 0$, то условие $\beta > -\frac{1}{p}$ необходимо для ограниченности оператора $\mathcal{H}^\beta$ в $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)$. При этом

$$\frac{1}{\frac{1}{p'} - \alpha} \leq \|H^\alpha\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)}, \quad \alpha < \frac{1}{p'},$$

$$\frac{1}{\frac{1}{p} + \beta} \leq \|\mathcal{H}^\beta\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)}, \quad \beta > -\frac{1}{p}.$$

Если $\alpha < \frac{1}{p'}$ и $x^\gamma a(x)$ не возрастает в случае оператора H^α и $\beta > -\frac{1}{p}$ и $x^\lambda a(x)$ не убывает в случае оператора $\mathcal{H}^\beta$ при некоторых $\gamma > \alpha p'$ и *$\lambda < (\beta+1)p'$,* то

$$\|H^\alpha\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\frac{\min\{\gamma,1\}}{p'} - \alpha},$$

$$\|\mathcal{H}^\beta\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\beta + 1 - \frac{\max\{\lambda,1\}}{p'}}.$$

Следствие 2.7.6. *Пусть $a(x) = x^{-\gamma}(1+x)^{-\mu}$, где $\mu \geq 0$ и $\gamma < 1$ в случае оператора H^α и $\gamma + \mu > 1$ в случае оператора $\mathcal{H}^\beta$. Тогда условия $\alpha < \frac{1}{p'}$ и $\beta > -\frac{1}{p}$ необходимы для ограниченности операторов H^α и $\mathcal{H}^\beta$ соответственно в гранд-пространстве $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)$ и справедливы оценки*

$$\frac{1}{\frac{1}{p'} - \alpha} \leq \|H^\alpha\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\frac{\gamma}{p'} - \alpha}, \tag{2}$$ 45

$$\frac{1}{\frac{1}{p} + \beta} \leq \|\mathcal{H}^\beta\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\beta + 1 - \frac{\gamma+\mu}{p'}} \tag{3}$$ 46

в случаях $\alpha p' < \gamma < 1$ и $1 < \gamma + \mu < (1+\beta)p'$ соответственно.

Следствие 2.7.7. *Пусть $a(x) = e^{-x}$. Оператор H^α ограничен в $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)$, если $\alpha < \frac{1}{p'}$.*

Теорема 2.7.8. *Пусть* $a(x) = x^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Условие* $\alpha < \frac{\min\{1,\lambda\}}{p'}$ *достаточно, а условие* $\alpha < \frac{\max\{1,\lambda\}}{p'}$ *необходимо для ограниченности оператора* H^α *в гранд-пространстве* $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)$, *и при этих условиях*

$$\frac{1}{\frac{\max\{1,\lambda\}}{p'} - \alpha} \leq \|H^\alpha\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\frac{\min\{1,\lambda\}}{p'} - \alpha}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ *оператор* H^α *ограничен в гранд-пространстве* $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha < \frac{1}{p'}$, *при этом* $\|H^\alpha\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} = \frac{1}{\frac{1}{p'} - \alpha}$.

Теорема 2.7.8. *Пусть* $a(x) = x^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Условие* $\beta > -\frac{\min\{1,\lambda\}}{p}$ *достаточно, а условие* $\beta > -\frac{\max\{1,\lambda\}}{p}$ *необходимо для ограниченности оператора* $\mathcal{H}^\beta$ *в гранд-пространстве* $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)$, *и при этих условиях*

$$\frac{1}{1 - \frac{\min\{1,\lambda\}}{p'} + \beta} \leq \|\mathcal{H}^\beta\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{1 - \frac{\max\{1,\lambda\}}{p'} + \beta}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ *оператор* $\mathcal{H}^\beta$ *ограничен в гранд-пространстве* $L_a^{p)}(\mathbb{R}_+)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta > -\frac{1}{p}$, *при этом* $\|\mathcal{H}^\beta\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}_+)} = \frac{1}{\frac{1}{p} + \beta}$.

Аналогичные результаты удается получить и в общем случае интегральных операторов с однородными ядрами. Особо выделен случай радиальных ядер. В этом случае удается при использовании радиальных грандизаторов получить двусторонние оценки для норм $\|Kf\|_{L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)}$ через некоторые радиальные гранд-нормы сферических средних

$$\mathcal{F}(r) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int\limits_{S^{n-1}} f(r\sigma)d\sigma$$

функции f, что является более сильным утверждением, чем оценка через гранд-норму самой функции f. Полученные результаты применены к интегральным операторам типа Гильберта и дробного интегрирования.

Одной из центральных задач диссертации является проведённое **в третьей главе** исследование потенциалов Рисса

$$I^\alpha \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x-y)\varphi(y)dy, \quad \alpha > 0, \tag{4}$$

PR

где риссово ядро $k_\alpha(x)$ определяется, равенством

$$k_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, 6, \ldots; \\ |x|^{\alpha-n} \ln \frac{1}{|x|}, & \alpha - n = 0, 2, 4, 6, \ldots, \end{cases}$$

здесь $\gamma_n(\alpha)$ – известная нормировочная константа, см., например, [37]. В случае $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, мы доказываем аналог теоремы Соболева для гранд-простраств $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ в предположении, что грандизатор принадлежит классу $G(\mathbb{R}^n)$. Известно, что представимость функций f риссовым потенциалом с плотностью из классического пространства Лебега описывается в терминах сходимости усеченных гиперсингулярных интегралов функции f. В связи с решением подобной задачи для гранд-пространства $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ естественным образом возникает задача доказательства плотности в $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ известного класса Лизоркина Φ, инвариантного относительно риссова дробного интегро-дифференцирования. Эта задача решается для грандизаторов $a \in G(\mathbb{R}^n)$. Мы доказываем также плотность в $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Эта доказываемая нами плотность позволяет получить результат о том, что гиперсингулярный интеграл порядка α является левым обратным оператором для потенциала Рисса функций из пространства $\mathring{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, если грандизатор $a \in G(\mathbb{R}^n)$ и получить описание образа $I^\alpha(\mathring{L}_a^{p),\theta})$, $\alpha > 0$, в терминах сходимости гиперсингулярных интегралов по норме гранд-пространства Лебега $L_a^{p),\theta}$). В случае когда потенциал Рисса трактуется в смысле распределений, т.е. в случае $\alpha \geq \frac{n}{p}$, описание образа дается в терминах принадлежности конечных разностей распределения f рассматриваемому гранд-пространству. В этом случае рассматриваются только те грандизаторы, для которых гранд-пространство Лебега инвариантно относительно сдвига. Такая инвариантность обеспечивается "привязанностью" грандизатора только к бесконечности, что фактически не уменьшает общность исследования гранд-пространств по $\mathbb{R}^n$, т.к. идея введения грандизатора в определение гранд-пространства Лебега состоит в том, чтобы получаемое пространство $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ было бы шире классического пространства Лебега $L^p(\mathbb{R}^n)$ не только локально, но и глобально.

В связи с решением этой задачи для гранд-пространств предлагается некоторый общий подход для описания распределений $f \in \Phi'$, являющихся риссовыми потенциалами функций на $\mathbb{R}^n$ из произвольного банахова пространства функций X, удовлетворяющего одному или нескольким из следующих априорных свойств:

(S_1) Пространство X обладает свойством решетки: если $\varphi \in X$ и $|\psi(x)| \leq |\varphi(x)|$, $x \in \mathbb{R}^n$, то $\psi \in X$ и $\|\psi\|_X \leq \|\varphi\|_X$.

(S_2) Пространство X не содержит многочлен.

(S_3) Максимальный оператор $M\varphi(x) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |\varphi(y)| dy$ ограничен в X.

(S_4) Операторы

$$K_\varepsilon \varphi := \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} k\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \varphi(y) dy$$

с ядром $k(x)$, удовлетворяющим условиям $|k(x)| \leq \mathcal{K}(|x|)$, где $\mathcal{K}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{K}(r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, убывает, являются аппроксимацией единицы: $\lim_{\varepsilon \to 0} \|K_\varepsilon \varphi - \varphi\|_X = 0$ для всех $\varphi \in X$.

(S_5) Пространство X', ассоциированное с X, содержит класс Φ'.

В четвёртой главе исследуются дискретные гранд-пространства $\ell^{p),\theta}(\mathbb{Z}^{\ltimes})$ и дискретные операторы типа свертки и другие операторы в этих пространствах. Такие гранд-пространства последовательностей ранее не изучались. Они были введены в работе [A13], 2018. Пространство $\ell^{p),\theta}(\mathbb{Z}^{\ltimes})$ последовательностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$, определяется нормой

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^{p),\theta}(\mathbb{Z}^{\ltimes})} := \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^\theta \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^{\ltimes}} |x_k|^{p(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} = \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^\theta \|\mathbf{x}\|_{\ell^{p(1+\varepsilon)}(\mathbb{Z}^{\ltimes})}.$$

Его подпространство $\mathring{\ell}^{p),\theta}(\mathbb{Z}^n)$ последовательностей, удовлетворяющих условию $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\theta p} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |x_k|^{p(1+\varepsilon)} = 0$ обозначается $\mathring{\ell}^{p),\theta}(\mathbb{Z}^n)$.

На основе интерполяции в классических пространствах последовательностей доказана общая теорема об ограниченности сублинейных операторов в гранд-пространствах последовательностей. Эта общая теорема применяется для доказательства ограниченности в гранд-пространствах $\ell^{p),\theta}$ дискретных операторов свертки, операторов с однородными ядрами, в частности, операторов Харди и преобразования Гильберта, сингулярного оператора Гильберта, максимального сингулярного оператора Гильберта и максимального оператора Харди–Литтлвуда. Также доказано, что дискретные обобщенные операторы Харди и оператор дробного интегрирования I^{α} ограничены из пространства $\ell^{p),\theta}$, $\theta > 0$, в пространство $\ell^{q),\theta}$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

Вводится дискретный аналог континуального класса Φ Лизоркина и с помощью дискретных сверточных аппроксимаций единичного оператора доказана плотность этого множества в пространствах $\ell^p(\mathbb{Z})$ и $\mathring{\ell}^{p),\theta}(\mathbb{Z})$, $\theta > 0$. Доказано, что дискретные операторы дифференцирования и интегрирования взаимно обратны в рамках пространств $\ell^p(\mathbb{Z})$ и $\mathring{\ell}^{p),\theta}(\mathbb{Z})$.

Получены также весовые результаты: если $\mathbf{w}^p \in A_p$ (дискретный аналог класса Макенхаупта), то оператор $\mathbf{w}T\frac{1}{\mathbf{w}}$ ограничен в гранд-пространствах последовательностей $\ell^{p),\theta}(\mathbb{Z})$ и $\mathring{\ell}^{p),\theta}(\mathbb{Z})$, где T – один из опраторов Гильберта и максимальный оператора Гильберта.

Наряду с гранд-пространствами Лебега в диссертации (**пятая глава**) рассматриваются пространства Морри, гранд-пространства Морри и пространства Лебега с переменным показателем.

Классические пространства Морри хорошо известны, см., например, книги [11, 25]. Гранд-пространства Морри исследовались в работах [20–22, 30–32, 36]. Мы вводим понятие весового гранд-пространства Морри в более общей форме $\mathcal{L}^{p),\lambda}_{a,\nu}(\Omega, w)$ с "грандизацией" по обоим параметрам p и λ и по весу. Грандизация по весу осуществляется, как и случае гранд-пространств Лебега, возмущением веса малой степенью грандизатора:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p),\lambda}_{a,\nu}(\Omega,w)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p-\varepsilon,\lambda-\nu\varepsilon}(\Omega,wa^{\frac{\varepsilon}{p}})},$$

где $1 < p < \infty$, $0 \le \lambda < 1$ и $\nu \in \left(-\frac{1-\lambda}{p-1} < \nu \le \frac{\lambda}{p-1}\right)$.

Для изучения свойств гранд-пространств Морри и действия сублинейных операторов мы доказываем интерполяционную теорему в случае пар весовых пространств Лебега и Морри, которая является обобщением соответствующей невесовой теоремы, доказанной в [6]. Доказано, что если грандизатор $a \in \mathcal{L}^{1,\lambda-\nu p}(\Omega, w)$, то имеет место вложение

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, w) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p),\lambda}_{a,\nu}(\Omega, w),\ \theta > 0.$$

Получены условия на 1) вес $w \in A(p, q)$ и 2) грандизатор $a \in L^1(\mathbb{R}^n, w)$ и $a^\delta \in A(p-\delta, q_\delta)$ для некоторого $\delta \in (0, p-1)$, где $\frac{1}{q_\delta} = \frac{1}{p-\delta} - \frac{\alpha}{n}$, обеспечивающие ограниченность потенциала Рисса I^α из гранд-пространства Лебега $L^{p)}_a(\mathbb{R}^n, w)$ в гранд-пространство Морри $\mathcal{L}^{q),\alpha p}_{a,\alpha}(\mathbb{R}^n, w)$ $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Здесь $A(p, q)$ – известный класс Макенхаупта–Уидена.

Исследования в диссертации, связанные с пространствами Лебега с переменным показателем относятся к регуляризации интегральных уравнений первого рода

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{c(x,y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \varphi(y)dy \ = \ f(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \alpha < 1,$$

с ядром типа потенциала. Под регуляризацией понимается сведение уравнения первого рода к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В рассматриваемом случае регуляризатором служит гиперсингулярный оператор $\mathbb{D}^\alpha$ порядка α. Такая регуляризация в классических пространствах Лебега $L^p(\mathbb{R}^n)$ была осуществлена ранее, см. [3–5]. Мы решаем аналогичную задачу в пространствах $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Это потребовало существенных усилий в связи с тем, что пространства $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ не инвариантны относительно сдвига, функции в этих пространствах не являются $p(x)$-непрерывными в среднем, теорема Юнга для сверток не имеет места. В такой ситуации решающим оказался факт односторонней интерполяции свойства компактности из пространств L^p с постоянным p в пространства $L^{p(\cdot)}$, установленный в работе [35]. При известных в анализе с переменными показателями локальном логарифмическом условии на модуль непрерывности функции $p(x)$ и ее логарифмической стабилизации на бесконечности нами показано, что гиперсингулярный интеграл является регуляризатором для этого уравнения в пространстве $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, т.е. рассматриваемое уравнение первого рода приводится к уравнению второго рода $\varphi + \mathbf{A}\varphi = \mathbb{D}^\alpha f$ с оператором $\mathbf{A}$ компактным в пространстве $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при надлежащих предположениях относительно дробной гладкости функции $c(x,y)$ (глобальное условие Гельдера порядка $\lambda > \alpha$ функции $c(x,y)$ по переменной x равномерно относительно y).

В качестве приложения теории гранд-пространств **в шестой главе** мы исследуем решение уравнения $P_m(D)u = f$, где $P_m(D)$ – эллиптический ($P_m(x') \neq 0,\ x' \in S^{n-1}$,) однородный дифференциальный оператор порядка m с постоянными вещественными коэффициентами. Существование решения этого уравнения в классическом пространстве Соболева общеизвестно и является следствием теоремы Соболева для потенциала Рисса и свойств операторов Кальдерона–Зигмунда.

Мы обосновываем существование решения уравнения $P_m(D)u = f$ в гранд-пространстве Соболева для некоторого класса грандизаторов. Использование понятия грандизаторов играет при этом существенную роль, поскольку позволяет, в частности, иметь в гранд-пространстве Лебега плотность хороших функций, например, основных функций из класса Лизоркина. Наш интерес к решениям в гранд-пространствах Соболева определяется тем фактом, что гранд-пространства Соболева являются, вообще говоря, бо́льшим расширением пространства Соболева, чем пространство Соболева, построенное на основе слабых пространств Лебега (в случае ограниченных областей слова "вообще говоря"можно опустить, а для неограниченных областей это зависит от выбора грандизатора, но всегда верно локально).

Основываясь на полученных нами результатах о действии оператора типа потенциала в гранд-пространствах Лебега с грандизаторами класса G, мы показываем, что потенциал, являющийся сверткой функции f с фундаментальным решением оператора $P_m(D)$, служит решением уравнения $P_m(D)u = f$ в обобщенном гранд-пространстве Соболева при правой части из надлежащего гранд-пространства Лебега.

Отметим также, что мы получаем некоторые явные формулы в терминах интегрирования по единичной сфере для указанного фундаментального решения, являющиеся, насколько нам известно, новыми.

В виде второго примера приложения гранд-пространств на неограниченных множествах мы рассматриваем задачу оценки роста аналитических функций из гранд-пространства Бергмана на полуплоскости при приближении к границе.

В последнее время проявляется интерес к исследованию проекторов Бергмана и получению подобных оценок для различных более сложных функциональных пространств, см., например, [1, 16, 17]. В частности, в работе [2] рассматривались гранд-пространства Бергмана $\mathcal{A}^{p),\theta}(\mathbb{D})$ аналитических функций на диске $\mathbb{D} = \{z : \ |z| < 1\}$, принадлежащих гранд-пространству Лебега $L^{p),\theta}(\mathbb{D})$, где возникает зависимость оценки роста и от параметра θ.

Мы получаем оценки роста при приближении к границе $y = 0$ в гранд-пространстве аналитических функций и ассоциированном с ним пространстве в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$, где уже приходится использовать понятие грандизатора. В этом случае оценки роста содержат также весовую меру диска $\mathbb{D}(z, y)$, порожденную грандизатором.

Список публикаций

A1. Самко С. Г., Умархаджиев С. М. О регуляризации одного многомерного интегрального уравнения в пространствах Лебега с переменным показателем // Мат. заметки. — 2013. — Т. 93, № 4. — С. 575–585. — (Перевод на англ.: On the Regularization of a Multidimensional Integral Equation in Lebesgue Spaces with Variable Exponent. Math. Notes. (93)4, pp. 583–592, 2013).

A2. Самко С. Г., Умарханджиев С. М. Об описании пространства риссовых потенциалов функций из банаховых пространств с некоторыми априорными свойствами // Владикавказский матем. журнал. — 2018. — Т. 20, № 2. — С. 95–108

A3. Умарханджиев С. М. Об ограниченности одного интегрального оператора в пространствах Лебега с переменным показателем // Изв. Чеченского государственного педагогического института. — 2009. — Т. 1. — С. 193–196.

A4. Умарханджиев С. М. Ограниченность линейных операторов в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Вестник Академии наук Чеченской Республики. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 5–9.

A5. Умарханджиев С. М. Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Известия вузов. Математика. — 2014. — Т. 4. — С. 42–51. — (Перевод на англ.: Generalization of the notion of grand Lebesgue space. Russian Mathematics (Iz. VUZ), (58)4, pp. 35–43, 2014).

A6. Умарханджиев С. М. Ограниченность сублинейных операторов в обобщенных гранд-пространствах Лебега // Вестник Академии наук Чеченской Республики. — 2014. — Т. 23, № 2. — С. 5–8.

A7. Умарханджиев С. М. Ограниченность потенциала Рисса в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Владикавказский матем. журнал. — 2014. — Т. 16, № 2. — С. 62–68.

A8. Умарханджиев С. М. Ограниченность максимального оператора в гранд-пространствах Лебега на R^n. // Изв. вузов. Сев. Кавк. регион. Ест. н. —

2016. — Т. 1. — С. 35–38.

A9. Умархаджиев С. М. Односторонние интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега // Владикавказский матем. журнал. — 2017. — Т. 19, № 3. — С. 70–82.

A10. Умархаджиев С. М. Операторы Харди по направлению и смешанные операторы Харди функций многих переменных в гранд-пространствах Лебега // Вестник Академии наук Чеченской Республики. — 2017. — Т. 34, № 1. — С. 5–18.

A11. Умархаджиев С. М. Интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, № 5. — С. 775–788. — (Перевод на англ.: Integral operators with homogeneous kernels25 in grand Lebesgue spaces. Math. Notes. (102)5, pp. 710–721, 2017).

A12. Умархаджиев С. М. Описание пространства риссовых потенциалов функций из гранд-пространства Лебега на R^n. // Матем. заметки. — 2018. — Т. 104, № 3. — С. 467–480. — (Перевод на англ.: Characterization the space of Riesz potentials of functions from grand Lebesgue space on R?. Math. Notes. 3(104):467–480, 2018).

A13. Rafeiro H., Samko S., Umarkhadzhiev S. Grand Lebesgue sequence spaces // Georgian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 25, no. 2. – P. 291–303.

A14. Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M. Regularization of multidimensional integral equations of the 1st kind in variable exponent spaces // ICNAAM 2010: Intern. Conf. Numer. Anal. Appl. Math. – AIP Confer. Proc., 2010. – Vol. 1281. – P. 506–508.

A15. Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M. On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. Math. – 2011. – Vol. 1, no. 1. – P. 67–84.

A16. Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M. On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum // Azerb. J. Math. – 2011. – Vol. 1, no. 2. – P. 143–144.

A17. Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M. Riesz fractional integrals in grand Lebesgue spaces // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2016. – Vol. 19, no. 3. – P. 608–624.

A18. Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M. On grand Lebesgue spaces on sets of infinite measure // Mathematische Nachrichten. – 2017. – Vol. 290, no. 5– 6. – P. 913–919.

A19. Umarkhadzhiev S. M. Hardy operator in grand Lebesgue spaces // Proceedings of the Annual Hawaii International Conference on System Sciences. – Hawaii, 2011. – P. 15–19.

A20. Umarkhadzhiev S. M. Riesz–Thorin–Stein–Weiss Interpolation Theorem in a Lebesgue–Morrey Setting // Advances in Harmonic Analysis and Operator26 Theory / Ed. by Alexandre Almeida, Luis Castro, Frank-Olme Speck. – Vol. 229. – Basel : Springer Basel, 2013. – P. 387–392.

A21. Umarkhadzhiev S. M. Hardy–Littlewood maximal operator in generalized grand Lebesgue spaces // AIP Conference Proceedings. – 2014. – Vol. 1637. – P. 1137–1142.

A22. Umarkhadzhiev S. M. The boundedness of the Riesz potential operator from generalized grand Lebesgue spaces to generalized grand Morrey spaces. // Operator theory, operator algebras and applications. – Basel: Birkhauser/ Springer, 2014. – P. 363–373.

A23. Umarkhadzhiev S. M. One-dimensional and multidimensional Hardy operators in grand Lebesgue spaces // Azerb. J. Math. – 2017. – Vol. 7, no. 2. – P. 132–152

Цитированная литература

SamMZ16ru 1. Карапетянц А. Н., Самко С. Г. Пространства типа Бергмана–Мори со смешанной нормой на единичном диске // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 1. — С. 47–57.

SamMZ18ru 2. Карапетянц А. Н., Самко С. Г. О гранд-пространствах и малых пространствах Бергмана // Матем. заметки. — 2018. — Т. 104, № 3. — С. 439–446.

UmDep3165 3. Самко С. Г., Умархаджиев С. М. Описание пространства $I^{\alpha}(L^p)$ риссовых потенциалов в терминах производных порядка $[\alpha]$. — Деп. в ВИНИТИ. — 1980. — no. 3165-80.

589ru 4. Самко С. Г., Умархаджиев С. М. Приложения гиперсингулярных интегралов к многомерным интегральным уравнениям первого рода // Труды МИАН. — 1985. — Т. 172. — С. 299–312.

UmDissK 5. Умархаджиев С. М. Исследование многомерных операторов типа потенциала с непрерывными и разрывными характеристиками. — Канд. диссертация. Ростовский госуниверситет. — 1982.

73za 6. Campanato S., Murthy M. K. V. Una generalizzazione del teorema di Riesz–Thorin // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). — 1965. — Vol. 19. — P. 87–100.

CrFi 7. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. — Birkhauser, 2013.

DHHR 8. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017 / — Berlin : Springer–Verlag, 2011.

145a 9. Edmunds D. E., Kokilashvili V., Meskhi A. Bounded and compact integral operators. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002. — Vol. 543 of Mathematics and its Applications. — P. xvi+643.

163b 10. Fiorenza A., Karadzhov G. E. Grand and small Lebesgue spaces and their analogs // Journal for Analysis and its Applications. — 2004. — Vol. 23, no. 4. — P. 657–681.

187a 11. Giaquinta M. Multiple integrals in the calculus of variations and non-linear elliptic systems. — Princeton Univ. Press, 1983.

216z 12. Greco L. A remark on the equality $det\, Df = Det\, Df$ // Diff. Integr. Eq. — 1993. — Vol. 6, no. 5. — P. 1089–1100.

216a 13. Greco L., Iwaniec T., Sbordone C. Inverting the p-harmonic operator // Manuscripta Math. — 1997. — Vol. 92. — P. 249–258.

224 14. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. Inequalities. — Cambridge University Press: Cambridge, 1934. — 324 pages.

243a 15. Iwaniec T., Sbordone C. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal. — 1992. — Vol. 119. — P. 129–143.

KRS18 16. Karapetiants A. N., Rafeiro H., Samko S. G. Boundedness of the Bergman projection and some properties of Bergman type spaces // Complex Anal. Oper. Theory. — 2018. — (online).

ASamJMS17 17. Karapetiants A. N., Samko S. G. On boundedness of Bergman projection operators in banach spaces of holomorphic functions in half-plane and harmonic functions in half-space // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 226, no. 4. — P. 344–354.

297a 18. Karapetiants N. K., Samko S. G. Equations with Involutive Operators. — Birkhäuser, Boston, 2001. — P. 427 pages.

317ze 19. Kokilashvili V., Meskhi A., Persson L.-E. Weighted norm inequalities for integral transforms with productkernels. — Nova Science Publishers, New York, 2010.

KokMR2 20. Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H. Estimates for nondivergence elliptic equations with vmo coefficients in generalized grand morrey spaces // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — Vol. 59, no. 8. — P. 1169–1184.

KokMR 21. Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H. Riesz type potential operators in generalized grand Morrey spaces // Georgian Math. J. — 2013. — Vol. 20, no. 1. — P. 43–64.

KokMR_StM 22. Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H. Boundedness of commutators of singular and potential operators in generalized grand Morrey spaces and some applications // Studia Mathematica. — 2013. — Vol. 217. — P. 159–178.

317zg1 23. Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S. Integral Operators in Nonstandard Function Spaces. Vol. 1. Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces / — Birkhäuser, 2015.

317zg2 24. Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S. Integral Operators in Nonstandard Function Spaces. Vol. 2: Variable exponent Hölder, Morrey–Campanato and Grand Spaces / — Birkhäuser, 2016.

348a 25. Kufner A., John O., Fučik S. Function Spaces. — Noordhoff International Publishing, 1977. — 454 + XV pages.

348aa 26. Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy Inequality - About its History and Some Related Results. — Pilsen, 2007.

348az 27. Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The prehistory of the Hardy inequality // Amer. Math. Monthly. — 2006. — Vol. 113. — P. 715–732.

348ab 28. Kufner A., Persson L.-E. Weighted inequalities of Hardy type. — River Edge, NJ : World Scientific Publishing Co. Inc., 2003. — P. xviii+357.

357ad 29. Liflyand I. R., Ostrovsky E., Sirota L. Structural properties of Bilateral Grand Lebesque Spaces // Turk. J. Math. — 2010. — Vol. 34, no. 11. — P. 207–219.

389a 30. Meskhi A. Maximal functions and singular integrals in Morrey spaces associated with grand Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2009. — Vol. 151. — P. 139–143.

Meskhi1 31. Meskhi A. Integral operators in maximal functions, potentials and singular integrals in Grand Morrey spaces // Complex Variables and Elliptic Equations. Doi. 10. 1080/17476933. 2010. 534793, 2011, 1–19. — 2011.

Ieskhi2011 32. Meskhi A. Maximal functions, potentials and singular integrals in grand Morrey spaces // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2011. — Vol. 56, no. 10–11. — P. 1003–1019.

PerSam 33. Persson E.-L., Samko S. G. A note on the best constants in some Hardy inequalities // J. Math. Inequal. — 2015. — Vol. 9, no. 2. — P. 437–447.

PerShSt 34. Persson E.-L., Shambilova G. E., Stepanov V. D. Hardy-type inequalities on the weighted cones of quasi-concave functions // Banach J. Math. Anal. — 2015. — Vol. 9, no. 2. — P. 21–34.

503a 35. Rabinovich V. S., Samko S. G. Boundedness and Fredholmness of pseudodifferentialoperators in variable exponent spaces // Integr. Eq. Oper. Theory. — 2008. — Vol. 60, no. 4. — P. 507–537.

Raf1 36. Rafeiro H. A note on boundedness of operators in grand grand morrey spaces // Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory / Ed. by Alexandre Almeida, Luís Castro, Frank-Olme Speck. — Vol. 229. — Basel : Springer Basel, 2013. — P. 349–356.

580 37. Samko S. G. Hypersingular Integrals and their Applications. — London-New-York: Taylor & Francis, Series ”*Analytical Methods and Special Functions*” vol. 5, 2002. — 358 + xvii pages.