Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Южный федеральный университет»

На правах рукописи

ИШМЕЕВ Марат Рашидович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЗАДАЧ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук Левенштам В. Б.

Ростов-на-Дону — 2019

Оглавление

Введение

Асимптотические методы для построения решений дифференциальных уравнений стали особенно актуальны в XVIII веке в связи с попытками исследователей применить ньютоновскую теорию гравитации для описания движения планет и сравнить предсказания теории с результатами наблюдений. На раннем этапе развития асимптотических методов, в первой половине XVIII века, теория возмущений не отличалась фундаментальностью и сводилась к численному вычислению приращений координаты и скорости, что привело к созданию астрономических таблиц (см. работу К. А. Уилсона [1]). Развитие асимптотических методов во второй половине XVIII века связано с работами А. К. Клеро, Ж. Л. Лагранжа и П.-С. Лапласа, привнесших в теорию возмущений новые идеи. Подробнее история развития асимптотических методов в XVIII веке изложена в монографии Я. А. Сандерса, Ф. Верхульста, Дж. Мёрдока [2].

В том виде, в котором она была развита Клеро, Лагранжем и Лапласом, теория возмущений с начала XIX века использовалась как набор формальных методов. Следы этой теории можно найти во многих книгах XIX и XX века по небесной механике и динамике. Многие асимптотические методы, оказавшиеся весьма эффективными в небесной механике, затем были перенесены в квантовую механику. В этой связи часто отмечают книгу М. Борна [3].

Одним из важных асимптотических методов, предпосылки к возникновению которого появились в работах по небесной механике, является метод усреденения. К. Ф. Гаусс и Ж. Л. Лагранж использовали идеи метода при исследовании эволюции планетных орбит под влиянием взаимного притяжения планет, Л. Эйлер — при изучении движения Луны и т. д.. В начале 20-х годов XX-го века метод усреднения был вновь открыт голландским инженером Б. Ван-дер-Полем. Он его использовал для приближённого решения физических задач. Метод использовался интуитивно, без обоснования. Следует отметить, что в это время уже были созданы методы Ляпунова-Пуанкаре исследования периодических решений дифференциальных уравнений. Первые математические обоснования метода были сделаны для уравнений достаточно частного вида: в 1928 году П. Фату и

1934 году Л. И. Мантельштамом и Н. Д. Папалекси.

В 1928г. П. Фату привел первое доказательство асимптотической корректности метода усреднения [4]. Он получил оценки порядка $O(\omega^{-1})$ для периодических по времени правых частей, где ω — большая частота колебаний. Для этого Фату применил итерационную процедуру Пикара - Линделефа. Доказательство, главным образом, основано на принципе сжатых отображений.

Методы Ляпунова-Пуанкаре были применены к систематическому исследованию нелинейных колебаний, начиная с 1929 г. советской школой физиков, связанной с именами прежде всего Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова, А. А. Витта. В частности, Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси [5, 6] получили схожие с Фату результаты. Важной вехой считается развитие и обоснование метода усреднения в случае почти периодических векторных полей, связанное с именами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [7].

В 30-е годы Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов создают новый раздел теории дифференциальных уравнений — нелинейную механику. Метод усреднения занимает в нём центральное место. Основные теоремы классической теории метода усреднения доказаны Боголюбовым (см. [7]) для систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \omega t),$$

где вектор-функция $f(x, \tau)$ обладает средним по τ:

$$F(x) = \lim_{N \to \infty} \int_0^N F(x, \tau) d\tau;$$

ω — большой параметр. Суть метода усреднения состоит в замене какой-либо задачи для систем такого вида соответствующей задачей для более простого уравнения

$$\frac{dy}{dt} = F(y),$$

которое называют усреднённым. Обоснование метода заключается в доказательстве асимптотической близости при $\omega \to \infty$ решений этих задач. Далее метод усреднения развивается до асимптотического метода, позволяющего построить полную асимптотику решения.

Многие результаты классической теории на данный момент перенесены на различные широкие классы уравнений (см., например, работы [8, 9]). И. Б. Симоненко перенёс ряд классических конечномерных результатов на некоторые классы параболических и абстрактных параболических уравнений ([10]).

Важно отметить, что исследователи использовали идеи метода усреднения при изучении различных физических явлений, связанных с высокочастотными вибрациями. Например, математический маятник, точка подвеса которого совершает вынужденные высокочастотные колебания, вызывает интерес исследователей уже более ста лет. Оказывается его верхнее положение может при некоторых условиях стать устойчивым ([11, 12, 13]). Впервые физическое объяснение явления предложил академик Пётр Леонидович Капица в 1951 году. Соответствующая система получила название «Маятник Капицы». Математическая модель этого физического явления представлена дифференциальным уравнением с большим высокочастотным слагаемым (т.е. пропорциональным определённой положительной степени частоты). Данная модель изучалась непосредственно, т.к. не было общего подхода для изучения подобных уравнений. В статье В. Н. Челомея [14] показано, что высокочастотные сжатия-растяжения балки могут стабилизировать ее прямоугольную форму. В работе С. М. Зеньковской и И. Б. Симоненко [15] были выведены усредненные уравнения конвекции жидкости в контейнере, совершающем высокочастотные вертикальные колебания. С помощью этих уравнений в [15] было установлено, что указанные колебания стабилизируют состояние относительного покоя жидкости, а при достаточной интенсивности вибраций они даже могут предотвратить конвекцию при сколь угодно большом градиенте температуры.

Отметим работу Д. Р. Смита [16], посвященную задачам о сингулярных возмущениях. Д. Р. Смит, в основном рассматривает, различные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и активно применяет метод усреднения и метод многих масштабов для построения приближенных решений. Кроме того Д. Р. Смит применяет метод многих переменных для решения задач с погранслоем.

В совместной работе Я. А. Сандерса, Ф. Верхульста, Дж. Мёрдока [2] изложены основы теорий метода усреднения и нормальных форм для динамических систем. Исследуются вопросы бифуркаций, аттракторов и инвариантных многообразий. В монографии представлено большое количество примеров с иллюстрациями и диаграммами: от самых простых до более сложных, имеющих практическую значимость.

В. Ш. Бурд занимается вопросами теории метода усреднения на бесконечном интервале и приложениям метода к задачам теории колебаний (см., например, [17, 18]). В частности рассматриваются вопросы усреднения нелинейных уравнений, высшие приближения, бифуркации, устойчивость и резонансные явления.

В. И. Юдович также занимался асимптотическим анализом широкого класса задач, описанного выше типа. Например, в большой посмертной работе [19] для этих задач им построены предельные задачи, которые затем были глубоко изучены. Также В. И. Юдович установил многие важные физические эффекты высокочастотных вибраций. При этом приведена общая схема обоснования асимптотических методов решения подобных задач. В. И. Юдович подчёркивал важность развития дальнейшей систематической теории метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми.

Под влиянием лекций В. И. Юдовича В. Б. Левенштам с учениками приступил к развитию теории метода усреднения для уравнений с указанной спецификой. К настоящему времени ими построены, в частности см. [20, 21, 22], усреднённые для различных эволюционных уравнений (обыкновенных и с частными производными) и обоснован метод усреднения, а также предложены и обоснованы эффективные алгоритмы построения полных асимптотик решений.

Монография французского ученого Э. Санчеса-Паленсии [23] также посвящена теории усреднения уравнений с частными производными. Однако, здесь, в отличие от предыдущих работ, процесс усреднения осуществляется не по временной, а по набору пространственных переменных — такую процедуру называют методом гомогенизации. Теория усреднения в [23] используется для описания явлений в резко неоднородных средах, в частности в композитных материалах. Э. Санчес-Паленсия наряду с теоретическими вопросами рассматривал важные прикладные проблемы: усреднение в задачах теории упругости и гидродинамики, в перфорированных средах. Кроме того, Э. Санчес-Паленсия изучал вопросы теории сингулярных возмущений операторов и их спектров, а также вопросы дифракции и задачи рассеяния. Список работ по теории гомогенизации весьма обширен (см., например, работы В. В. Жикова, С. М. Козлова и О. А. Олейник, Н. С. Бахвалова и Г. П. Панасенко, М. Ш. Бирмана, Т. А. Суслиной, С. Е. Пастуховой и др.). Однако, в данной диссертации вопросы теории гомогенизации рассматриваться не будут.

Представленные в первой главе результаты берут начало от работы В. Б. Левенштама [24]. В [24] построена и обоснована полная асимптотика периодического решения для системы дифференциальных уравнений вида

$$x^{(n)} = f_0(x, \omega t) + \omega^{n/2} f_1(x, \omega t), \quad \omega \gg 1, \quad n \in N \tag{0.1}$$

в окрестности невырожденного стационарного решения соответствующей усреднённой системы уравнений. Первая глава посвящена асимптотическому анализу задач о периодических и ограниченных решениях систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка n, содержащих осциллирующие по времени с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, пропорциональные степеням ω^d, где $d \leqslant \frac{n}{2}$, зависящие от младших производных неизвестной функции . При этом предполагается, что при $d > 0$ среднее каждого такого большого слагаемого по времени равно нулю.

Скажем несколько подробнее. В диссертации для задач о периодических и об ограниченных решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка n с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными степеням частоты осцилляций вплоть до $\frac{n}{2}$, зависящими от младших производных неизвестной функции

а) обоснован метод усреднения;

б) исследованы вопросы устойчивости и неустойчивости (по Ляпунову) решений;

в) предложен и обоснован алгоритм построения полных асимптотик решений;

г) применен подход Богаевского-Повзнера (см. [25]) к построению предельной задачи.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными степеням частоты осцилляций вплоть до α, в случае задачи Коши получены условия отсутствия первого перестроечного показателя на участке $\alpha \in (0, 1)$.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными степеням частоты осцилляций вплоть до второй, построены предельные уравнения с помощью подхода Богаевского-Повзнера.

Перейдем к изложению основных результатов главы по параграфам. В первом параграфе рассматривается задача о периодических решениях системы уравнений

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t) + \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^{j} f_{2j}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([n/2]-j)}, \omega t). \tag{0.2}$$

Здесь n, m — натуральные числа, ω — большой параметр, G — область в R^m, $l > 0$. Вектор-функции $f_{2j-1}(z_0, z_1, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau)$ и $f_{2j}(z_0, z_1, \ldots, z_{[n/2]-j}, \tau)$, которые заданы на множествах $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{[(n+1)/2]-j+1} \times R$ и $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{[n/2]-j+1} \times R$ соответственно, непрерывны и принимают значения в R^m. Предположим, что указанные вектор-функции обладают непрерывными производными

$$\frac{\partial f_0}{\partial z_{i,k}}, \quad \frac{\partial^r f_{2j-1}}{\partial z_{i_1,k_1}^{r_1} \ldots \partial z_{i_q,k_q}^{r_q}}, r = 1, \ldots, max(2, n - [(n+1)/2] + j),$$
$$\frac{\partial^r f_{2j}}{\partial z_{i_1,k_1}^{r_1} \ldots \partial z_{i_q,k_q}^{r_q}}, r = 1, \ldots, max(2, n - [n/2] + j),$$

которые удовлетворяют равномерному условию Липшица по $z_{i,k}$, $i = 0, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, m$. Пусть, кроме того, они l-периодичны по τ, причем среднее всех вектор-функций по этой переменной, кроме, быть может, f_0, равно нулю.

Наряду с возмущенным уравнением (0.2), рассмотрим уравнение

$$\Psi(y, \dot{y}, \ldots, y^{([n/2])}) = 0, \tag{0.3}$$

которое будем называть усредненным. Здесь

$$\Psi(z_0, \ldots, z_{[n/2]}) = \Big\langle f_0(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) + \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0, \tau)\varphi_n(z_0, \tau) + \\ + \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0, z_1, \tau)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}(z_0, \tau) + \cdots + \\ + \frac{\partial f_1}{\partial z_{[(n+1)/2]-1}}(z_0, \ldots, z_{[(n+1)/2]-1}, \tau)\frac{\partial^{[(n+1)/2]-1}\varphi_n}{\partial \tau^{[(n+1)/2]-1}}(z_0, \tau)\Big\rangle,$$

при n — нечетном;

$$\Psi(z_0,\dots,z_{[n/2]}) = \Big\langle f_0(z_0,\dots,z_{[n/2]} + \tfrac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}(z_0,\tau),\tau) + \tfrac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\varphi_n(z_0,\tau) +$$
$$+\tfrac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)\tfrac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau)+\dots+$$
$$+\tfrac{\partial f_2}{\partial z_{[n/2]-1}}(z_0,\dots,z_{[n/2]-1},\tau)\tfrac{\partial^{[n/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]-1}}(z_0,\tau)\Big\rangle,$$

при n — четном. Угловые скобки означают интегральное среднее l-периодической функции:

$$\langle f(x,\tau)\rangle = \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x,\tau)d\tau.$$

Символом $\varphi_n(z_0,\tau)$ обозначено l-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n\varphi_n}{\partial\tau^n}(z_0,\tau) = f_n(z_0,\tau)$. Предположим, что существует стационарное решение усредненного уравнения $y_0 \in G$, такое что $\varphi_n(y_0,\tau) \in G \quad \forall\tau\in R$, а $\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}(y_0,0,\dots,0)$ — невырожденная матрица. Обозначим через A квадратную матрицу порядка mn с первой наддиагональю (E, ..., E), блоками $\frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(y_0,0,\dots,0)$ в нижней строке и остальными нулевыми блоками.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 0.1. *1. Существуют такие положительные числа ω_0 и r_0, что при $\omega>\omega_0$ уравнение (0.2) имеет единственное в шаре $\|x-y_0\|_{C^k(R)}\leqslant r_0$ $l\omega^{-1}$-периодическое решение x_ω и при этом $\lim\limits_{\omega\to\infty}\|x_\omega-y_0\|_{C^k(R)}=0$, где $k=[(n-1)/2]$.*
2. Если собственные значения матрицы A лежат в открытой левой комплексной полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво.
3. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A лежит в открытой правой комплексной полуплоскости, то решение x_ω неустойчиво.

Определения экспоненциальной устойчивости и неустойчивости даны ниже, в теореме 0.3.

При дополнительном предположении, что вектор-функции f_{2j-1}, f_{2j} имеют непрерывные производные по $z_0,z_1,\dots,z_{[(n+1)/2]-j}$, $z_0,z_1,\dots,z_{[n/2]-j}$ соответственно любого порядка, частичные суммы асимптотики ищутся в виде

$$x_\omega(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\omega^{-i/2}u_i + \sum_{i=n}^{\infty}\omega^{-i/2}[u_i+v_i(\omega t)]. \tag{0.4}$$

где $u_i \in R^m$, $v_i(\tau)$ — периодические функции со значениями в R^m, с нулевым средним.

Получен следующий результат.

Теорема 0.2. *Для любого $s = 0, 1, \ldots$ найдутся такие положительные числа c_s, ω_s, что при $\omega > \omega_s$, справедлива оценка*

$$\|x_\omega - x_{\omega,s}\|_{C^k(R)} \leqslant c_s \omega^{-(s+1)/2}, \tag{0.5}$$

где $k = [(n-1)/2]$. Построение приближения $x_{\omega,s}$ при известном векторе y_0 сводится к нахождению l-периодических с нулевым средним решений s уравнений вида $\frac{d^n y}{d\tau^n} = q(\tau)$, где $q(\tau)$ — известные l-периодические с нулевым средним вектор-функции и к решению s систем линейных алгебраических уравнений с единой невырожденной основной матрицей $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ и известными свободными членами.

В конце параграфа приведен иллюстративный пример.

Во втором параграфе мы продолжаем исследование задачи (0.2), при условии, что правая часть является условно периодической, а именно, в §2 рассмотрена задача об ограниченных решениях для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t) + \\ + \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^j f_{2j}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([n/2]-j)}, \omega t) \end{gathered} \tag{0.6}$$

с условно периодической по $\tau = \omega t$ правой частью:

$$f_j(z_0, \ldots, z_r, \tau) = \sum_{k=1}^{p} [c_{jk1}(z_0, \ldots, z_r) cos(\alpha_k \tau) + c_{jk2}(z_0, \ldots, z_r) sin(\alpha_k \tau)]. \tag{0.7}$$

Здесь α_k, $k = 1, \ldots, p$, — произвольные неотрицательные числа. Напомним, что условно периодической называется почти периодическая функция с конечным частотным базисом. Под частотным базисом понимается рационально независимый набор чисел, в виде целочисленной комбинации которых можно представить любой показатель Фурье почти периодической функции.

Пусть n, m, p — натуральные числа, ω — большой параметр, G — область в R^m. Здесь вектор-функции $c_{jki}(z_0,\ldots,z_r)$ со значениями в R^m заданы и непрерывны на множествах $\underbrace{G\times\cdots\times G}_{r+1}$. Предположим, что указанные вектор-функции обладают непрерывными производными

$$\frac{\partial c_{0ki}}{\partial z_{i,l}},\quad \frac{\partial^r c_{2j-1,ki}}{\partial z^{r_1}_{i_1,l_1}\ldots\partial z^{r_q}_{i_q,l_q}}, r=1,\ldots,max(2,n-[(n+1)/2]+j),$$
$$\frac{\partial^r c_{2j,ki}}{\partial z^{r_1}_{i_1,l_1}\ldots\partial z^{r_q}_{i_q,l_q}}, r=1,\ldots,max(2,n-[n/2]+j),$$

которые удовлетворяют равномерному условию Липшица по $z_{i,l}$, $i=0,\ldots,r$, $l=1,\ldots,m$. Пусть, кроме того, $f_j, j\neq 0$ обладают нулевым средним по τ (т.е. $c_{jk1}=0$ для всех $j\neq 0$, если $\alpha_k=0$).

Наряду с возмущенным уравнением (0.6), рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}=\Psi(y,\dot y,\ldots,y^{([n/2])}), \tag{0.8}$$

которое будем называть усредненным. Здесь

$$\Psi(z_0,\ldots,z_{[n/2]})=\Big\langle f_0(z_0,\ldots,z_{[n/2]},\tau)+\frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\varphi_n(z_0,\tau)+$$
$$+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)\frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau)+\cdots+$$
$$+\frac{\partial f_1}{\partial z_{[(n+1)/2]-1}}(z_0,\ldots,z_{[(n+1)/2]-1},\tau)\frac{\partial^{[(n+1)/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[(n+1)/2]-1}}(z_0,\tau)\Big\rangle,$$

при n — нечетном;

$$\Psi(z_0,\ldots,z_{[n/2]})=\Big\langle f_0(z_0,\ldots,z_{[n/2]}+\frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}(z_0,\tau),\tau)+$$
$$+\frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\varphi_n(z_0,\tau)+\frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)\frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau)+\cdots+$$
$$+\frac{\partial f_2}{\partial z_{[n/2]-1}}(z_0,\ldots,z_{[n/2]-1},\tau)\frac{\partial^{[n/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]-1}}(z_0,\tau)\Big\rangle,$$

при n — четном. Угловые скобки означают интегральное среднее почти периодической функции:

$$\langle f(x,\tau)\rangle=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x,\tau)d\tau.$$

Символом $\varphi_n(z_0,\tau)$ обозначено условно периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n\varphi_n}{\partial\tau^n}(z_0,\tau)=f_n(z_0,\tau)$. Предположим, что существует стационарное решение усредненного уравнения $y_0\in G$, такое что $\frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}(y_0,\tau)\in G\quad\forall\tau\in R$, и кроме того уравнение

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}+\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial z_1}+\cdots+\lambda^{[n/2]}\frac{\partial\Psi}{\partial z_{[n/2]}}-\lambda^nE\right|\Bigg|_{(y_0,0,\ldots,0)}=0 \tag{0.9}$$

не имеет чисто мнимых корней.

Справедливы следующие результаты

Теорема 0.3. *Существуют такие положительные числа ω_0 и r_0, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения:*
1. Уравнение (0.6) имеет единственное в шаре $\|x - y_0\|_{C^k(R)} \leqslant r_0$ ограниченное решение x_ω, при этом оно является условно периодическим, его частотный базис содержится в частотном базисе f_j, и справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{\omega\to\infty} \|x_\omega - y_0\|_{C^k(R)} = 0$, где $k = [(n-1)/2]$.
2. Если все решения уравнения (0.9) лежат в открытой левой комплексной полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво. Это означает, что при некотором $\delta > 0$ для каждого $\omega > \omega_0$ найдется пара чисел r_1, c, таких, что при любом $t_0 \in R$ и любом векторе $a = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in R^{mn}$, удовлетворяющих условию

$$|a_0 - x_\omega(t_0)| < r_1$$

задача Коши для уравнения (0.6) с начальным условием

$$x(t_0) = a_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = a_1, \ldots, \quad \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = a_{n-1}$$

имеет при $t \geqslant t_0$ единственное решение $\hat{x}(t)$, и при этом справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j x_\omega(t)}{dt^j} - \frac{d^j \hat{x}(t)}{dt^j} \right| \leqslant c e^{-\delta(t-t_0)} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j x_\omega(t_0)}{dt^j} - \frac{d^j \hat{x}(t_0)}{dt^j} \right|, \quad t \geqslant t_0.$$

3. Если хотя бы одно решение уравнения (0.9) лежит в открытой правой комплексной полуплоскости, то решение x_ω неустойчиво. Это означает, что для каждого $\omega > \omega_0$ найдется $\varepsilon > 0$, последовательность векторов $a^s = (a^s_0, \ldots, a^s_{n-1}) \in R^{mn}$, $a^s_j \to \frac{d^j x_\omega(0)}{dt^j}$ и последовательность положительных чисел t_s такие, что задача Коши для уравнения (0.6) с начальным условием

$$x(t_0) = a^s_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = a^s_1, \ldots, \quad \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = a^s_{n-1}$$

разрешима на участке $t \in [0, t_s]$, и для ее решения $x^s(t)$ справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j x_\omega(t_s)}{dt^j} - \frac{d^j x^s(t_s)}{dt^j} \right| > \varepsilon, \quad s = 1, 2, \ldots$$

При дополнительном предположении о гладкости коэффициентов в правой части, частичные суммы асимптотики будем искать в виде

$$x_\omega(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{\infty} \omega^{-i/2} [u_i + v_i(\omega t)], \tag{0.10}$$

где $u_i \in R^m$, $v_i(\tau)$ — условно периодические функции со значениями в R^m, с нулевым средним.

Теорема 0.4. *Для любого $s = 0, 1, \ldots$ найдутся такие положительные числа c_s, ω_s, что при $\omega > \omega_s$, справедлива оценка*

$$\|x_\omega - x_{\omega,s}\|_{C^k(R)} \leqslant c_s \omega^{-(s+1)/2},$$

где $k = [(n-1)/2]$. Построение приближения $x_{\omega,s}$ при известном векторе y_0 сводится к нахождению условно периодических с нулевым средним решений s уравнений вида $\frac{d^n y}{d\tau^n} = q(\tau)$, где $q(\tau)$ — известные условно периодические с нулевым средним вектор-функции вида (0.7) и к решению s систем линейных алгебраических уравнений с единой невырожденной основной матрицей
$\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ и известными свободными членами.

Третий параграф посвящен условиям повышения первого перестроечного показателя. Рассмотрена задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \omega t) + \omega^\alpha \varphi(x, t, \omega t), \quad t \in [0, T], \tag{0.11}$$

$$x(0) = x_0. \tag{0.12}$$

Пусть N — натуральное, l и T — положительные числа; D — область пространства R^N, $\alpha \in (0, 1)$, ω — большой параметр, $x_0 \in D$. Пусть вектор-функции $f(x, t, \tau)$, $\varphi(x, t, \tau)$ определены на множестве $G \equiv D \times [0, T] \times [0, +\infty]$ и l-периодичны по τ, причём среднее вектор-функции $\varphi(x, t, \tau)$ по τ равно 0:

$$\langle \varphi(x, t, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x, t, \tau) d\tau = 0.$$

Предположим ещё, что эти вектор-функции бесконечно дифференцируемы по x, а $\varphi(x, t, \tau)$ ещё и по t, и производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f(x, t, \tau), \quad \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \varphi(x, t, \tau), \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i + k = 0, 1, \ldots$$

непрерывны на множестве G.

Первым перестроечным показателем задачи (0.11), (0.12) называется такое значение показателя $\alpha = \alpha_0$ степени ω^α, что при возрастании α на участке $[0, \alpha_0]$ главный член асимптотики решения задачи может измениться лишь при $\alpha = \alpha_0$ [20]. Понятие перестроечного показателя было введено В. И. Юдовичем [19]. Он определял его как значение параметра α, при переходе через которое вид асимптотики решительно меняется. В [20] было показано, что в общем случае первым перестроечным показателем этой задачи является $\alpha = 1/2$, а при некоторых дополнительных условиях $\alpha = \frac{k+1}{k+2}$, где k — натуральное. В третьем параграфе эти условия уточняются, т.е. приводятся реккурентные соотношения для коэффициентов, определяющих первый перестроечный показатель.

Далее рассмотрен скалярный случай и доказан, сформулированный в монографии [20], следующий результат

Теорема 0.5. *Задача (0.11), (0.12) для функции φ вида*

$$\varphi(x,t,\tau) = \varphi_1(x,t)\varphi_2(t,\tau),$$

где φ_1, φ_2 — бесконечно дифференцируемы по t, φ_1 еще и по x, все производные непрерывны на множестве G, а φ_2 — l-периодична по τ с нулевым средним, не имеет первого перестроечного показателя на участке $\alpha \in (0,1)$.

Также получены следующие результаты. Рассмотрим класс функций вида

$$\varphi(x,t,\tau) = \sum_{j=1}^{p} a_j(x,t) cos\left(\frac{2\pi}{l} n_j \tau\right) + \sum_{j=1}^{q} b_j(x,t) sin\left(\frac{2\pi}{l} m_j \tau\right),$$

где $a_j(x,t)$, $b_j(x,t)$ — бесконечно дифференцируемые по x и по t функции; $n_j = n_{0j} 2^{r_0}$, $m_j = m_{0j} 2^{r_j}$, n_{0j}, m_{0j} — нечётны, а r_0, $r_j \in Z_+$, $r_j > r_0$. Обозначим этот класс через $X(r_0)$.

Теорема 0.6. *Пусть $\varphi(x,t,\tau) \in X(r_0)$, $r_0 \in Z_+$, тогда задача (0.11), (0.12) не имеет первого перестроечного показателя на участке $\alpha \in (0,1)$.*

Рассмотрим множество функций вида

$$\varphi(x,t,\tau) = a(x,t)p(\tau) + b(x,t)q(\tau), \tag{0.13}$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$ — бесконечно дифференцируемые по x и по t функции, у которых все корни изолированы $\forall t$; $p(\tau)$, $q(\tau)$ — l-периодические тригонометрические полиномы.

Теорема 0.7. *Если $\varphi(x,t,\tau)$ имеет вид (0.13), то задача (0.11), (0.12) не имеет первого перестроечного показателя на участке $\alpha \in (0,1)$ при любых $p(\tau)$, $q(\tau)$ таких, что $\varphi \notin X(r_0)$ $\forall r_0 \in Z_+$, тогда и только тогда, когда $\varphi(x,t,\tau) = \varphi_1(x,t)\varphi_2(\tau)$.*

Заключает первую главу §4. Здесь сначала рассмотрена задача

$$x^{(n)} = f_0(x,\omega t) + \omega^{\frac{n}{2}} f_1(x,\omega t).$$

Для нее представлен подход Богаевского-Повзнера вывода предельной, а затем рассмотрена задача, у которой значение показателя степени большого параметра ω превышает первый перестроечный показатель:

$$x^{(3)} = f_0(x,\omega t) + \omega^2 f_1(x,\omega t).$$

Для последней задачи выведена предельная

$$\dot{x_1} = z_2,$$

$$\dot{z_2} = z_3 - \left\langle 2\tfrac{\partial\varphi_2(x_1,\omega t)}{\partial x_1}\varphi_2(x_1,\omega t)\right\rangle,$$

$$\dot{z_3} = \left\langle (z_2+\varphi_2(x_1,\omega t))^2\tfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}\right\rangle + \\ + \left\langle -\left(\tfrac{\partial\varphi_2(x_1,\omega t)}{\partial x_1}\right)^2(z_2+\varphi_2(x_1,\omega t)) + f_0(x_1,\omega t)\right\rangle.$$

Важно отметить, что методика замен Крылова-Боголюбова в этом случае не приводит нас к построению предельной задачи. Действительно, здесь после первой классической замены новое большое слагаемое порядка ω может иметь ненулевое среднее.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [26, 27].

Вторая глава посвящена развитию теории асимптотического интегрирования эволюционных линейных задач, среди коэффициентов которых имеются осциллирующие с высокой частотой, а старший операторный коэффициент предельной стационарной задачи вырожден. Эта теория развивается, начиная с работы В. Б. Левенштама 2011 г., в развитии участвуют его непосредственные ученики и некоторые другие исследователи. Так в работах [28, 29] построена и обоснована полная асимптотика периодического по времени решения нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами (частота $\omega \gg 1$), когда старший коэффициент предельной стационарной системы имеет простое нулевое собственное значение. В магистерской диссертации Л. К. Нгуена в 2012 г. рассматривается возмущённая нормальная система того же вида, что в [28, 29], однако предельная стационарная задача имеет нулевое собственное значение произвольной конечной кратности. Результаты [28, 29], относящиеся к построению формальных асимптотик, перенесены в [30] на случай скалярных линейных параболических задач. В работе [31] формальные асимптотики, построенные в [30], обоснованы в том случае, когда собственная функция, отвечающая нулевому собственному значению старшего операторного коэффициента A задачи, не имеет присоединенных функций относительно построенной в [30] пары операторов A, B, для краткости мы их называем иногда обобщенными присоединенными функциями. В данной главе, как и в [28] – [31], существенно используются идеи важной работы М. И. Вишика, Л. А. Люстерника [32], где исследуются возмущения стационарных линейных вырожденных задач.

Отметим также работы Л. И. Сазонова [33, 34, 35], в которых рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с ограниченными и неограниченными быстро осциллирующими операторными коэффициентами в банаховых пространствах в случае произвольного (в частности кратного) вырождения:

$$\frac{du}{dt} + Au + \omega^{-1}Bu + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} e^{ik\omega t}M_k u = \sum_{|k|\geqslant 0} e^{ik\omega t}f_k, \quad \omega \gg 1,$$

где A — генератор аналитической полугруппы, B и M_k — ограниченные операторы со специальными свойствами.

Для задачи о периодических по времени решениях систем линейных уравнений в частных производных с быстро осциллирующими слагаемыми и с оператором Стокса в главной части, где старший операторный коэффициент A вырожден, разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики, при этом рассмотрены три случая:

а) собственная вектор-функция a_0, отвечающая простому собственному значению $\lambda = 0$ старшего операторного коэффициента A, не имеет присоединенных вектор-функций относительно соответствующей пары операторов A, B;

б) собственная вектор-функция a_0, отвечающая простому собственному значению $\lambda = 0$ старшего операторного коэффициента A, имеет одну присоединенную вектор-функцию a_1 относительно пары операторов A, B и не имеет присоединенных вектор-функций относительно тройки операторов A, B, C;

в) собственное значение $\lambda = 0$ старшего операторного коэффициента A является n-кратным, ему отвечает набор из s, $1 \leqslant s \leqslant n$, линейно независимых собственных вектор-функций a_1, a_2, ... , a_s, и каждая собственная вектор-функция, отвечающая нулевому собственному значению, не имеет присоединенных вектор-функций относительно соответствующей пары операторов A, B.

Во второй главе рассматривается задача о периодических решениях для линейного дифференциального уравнения в частных производных с оператором Стокса в главной части следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \Delta u + D(x)u + \frac{1}{\omega} C_0(x)u + \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} (M_k(x)u + d_k(x))\, e^{ik\omega t} + d_0(x), \tag{0.14}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{0.15}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{0.16}$$

Пусть Ω — ограниченная область в R^3 со сколь угодно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \in N$, $\omega \gg 1$. В бесконечном цилиндре $Q = \Omega \times R$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$-периодических по времени t решениях системы уравнений (0.14–0.16). Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in R$, $u = u(x,t)$ — неизвестная вещественная трехмерная функция,

$$D(x)u = \int\limits_{\Omega} B_0(x,y)u(y)dy + B_1(x)u,$$

$B_0(x,y)$, $B_1(x)$, $C(x)$, $M_k(x)$ и $d_0(x)$, $d_k(x)$ — известные бесконечно гладкие матрицы-функции и вектор-функции соответственно, причем $D(x)$, $C(x)$ и $d_0(x)$ — вещественные, а $M_k(x)$, $d_k(x)$ комплексно сопряжены с $M_{-k}(x)$,

$d_{-k}(x)$ соответственно. Символ Δ, используемый обычно в скалярном случае, отождествляется здесь с матричным выражением (формальным произведением) ΔE, где E — единичная матрица третьего порядка.

Символом $S_2(\Omega)$ будем обозначать замыкание по норме $L_2(\Omega)$ множества непрерывно дифференцируемых вещественных вектор-функций u, имеющих на $\partial\Omega$ равную нулю нормальную компоненту и удовлетворяющих условию $\operatorname{div} u = 0$, т. е. соленоидальных. Символом Π обозначим известный ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $S_2(\Omega)$ (см. [39], [40]).

Введем теперь действующий в $S_2(\Omega)$ оператор $A = \Pi(\Delta + D(x))$ с областью определения

$$D(A) = \left\{u \in S_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\right\} \equiv H_0^2$$

и дифференциальные выражения

$$B = \Pi C_0(x) + \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} \frac{\Pi M_k(x) \Pi M_{-k}(x)}{ik},$$

$$C = \sum_{1 \leqslant |k|,|l|,|s| \leqslant m, k+l+s=0} \tfrac{\Pi M_k \Pi M_l \Pi M_s}{(is)s(s+l)} + \\ + \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} \tfrac{\Pi M_k(x) \Pi(\Delta + D) \Pi M_{-k}(x)}{(ik)^2},$$

С целью использования в работе метода пограничного слоя мы переходим в некоторой окрестности Ω_0 границы $\partial\Omega$ области Ω к криволинейным координатам следующим образом. Через каждую точку $x \in \partial\Omega$ проведем внутреннюю нормаль, причем окрестность Ω_0 будем считать настолько малой, что нормали в ней не пересекаются. В окрестности Ω_0 положим $x = (\psi_1, \psi_2, r)$, где r — расстояние от x до границы $\partial\Omega$ по нормали, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — координаты соответствующей точки границы. Далее проводим замену $\rho = r\sqrt{\omega}$.

В §1 предполагается, что $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A. Пусть соответствующая ему собственная вектор-функция $a_0(x)$ не имеет присоединенных вектор-функций относительно пары операторов A, B, т. е. задача

$$Av(x) = -Ba_0(x), \tag{0.17}$$

$$v(x)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{0.18}$$

не имеет классических решений. Согласно альтернативе Фредгольма, последнее равносильно соотношению $(Ba_0(x), b_0(x)) \neq 0$, где $b_0(x)$ — ненулевое решение уравнения $A^*z(x) = 0$, A^* — оператор сопряженный к A. Здесь и далее символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в комплексном пространстве $L^2(\Omega)$.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи (0.14)-(0.16) в этом случае будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_\omega(x,t) = \omega c_{-2} a_0(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [u_k(x) + v_k(\psi, \rho) + \\ + c_k a_0(x) + y_k(x, \omega t) + z_k(\psi, \rho, \omega t)], \end{aligned} \tag{0.19}$$

$$p_\omega(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [p_k(x) + \omega^{\frac{1}{2}} s_{k-1}(\psi, \rho) + \omega m_{k-2}(x, \omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} n_{k-1}(\psi, \rho, \omega t)]. \tag{0.20}$$

Здесь u_k, y_k, p_k, m_k — регулярные, а v_k, z_k, s_k, n_k — погранслойные вектор-функции [32], причем y_k, z_k, n_k являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним.

В §2 предполагается, что $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A. Пусть соответствующая ему собственная вектор-функция $a_0(x)$ имеет присоединенную в смысле Вишика-Люстерника вектор-функцию $a_1(x)$ относительно пары операторов A, B и не имеет присоединенных вектор-функций относительно тройки операторов A, B, C, т. е. справедливо равенство

$$Aa_1(x) = -Ba_0(x), \tag{0.21}$$

а задача

$$Av(x) = -Ba_1(x) - Ca_0(x) \tag{0.22}$$

не имеет классических решений. Последнее, согласно альтернативе Фредгольма, равносильно условию $(Ba_1(x) + Ca_0(x), b_0(x)) \neq 0$, где $b_0(x)$ — ненулевое решение уравнения $A^*z(x) = 0$, A^* — оператор, сопряженный с A.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи

(0.14)-(0.16) будем искать в виде

$$u_\omega(x,t) = \omega^2 c_{-4}a_0(x) + \omega^{3/2}h_{-4}a_0(x) + \sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-k}[u_{2k+1}(x) + v_{2k+1}(\psi,\rho) + \\ + c_{k-2}a_0(x) + c_{k-3}a_1(x) + y_{2k+1}(x,\omega t) + z_{2k+1}(\psi,\rho,\omega t)] + \\ + \sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-\frac{2k+1}{2}}[u_{2k+2}(x) + v_{2k+2}(\psi,\rho) + \\ + h_{k-2}a_0(x) + h_{k-3}a_1(x) + y_{2k+2}(x,\omega t) + z_{2k+2}(\psi,\rho,\omega t)], \tag{0.23}$$

$$p_\omega(x) = \sum_{k=-2}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}[p_{k+1}(x) + \omega^{\frac{1}{2}}s_k(\psi,\rho) + \omega m_{k-1}(x,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}}n_k(\psi,\rho,\omega t)], \tag{0.24}$$

где y_k, z_k, m_k и n_k 2π-периодические по τ вектор-функции с нулевым средним. Вектор-функции u_k, y_k, p_k, m_k называют регулярными, а v_k, z_k, s_k, n_k погранслойными.

В §3 предполагается, $\lambda = 0$ — n-кратное ($n \in N$) собственное значение оператора A, которому отвечает набор из s, $1 \leqslant s \leqslant n$, линейно независимых собственных вектор-функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... , $a_s(x)$. Будем предполагать, что ни одна собственная вектор-функция $a(x)$ оператора A, отвечающая нулевому собственному значению, не имеет присоединенных вектор-функций относительно пары операторов A, B, т. е. задача

$$Av(x) = -Ba(x), \tag{0.25}$$

$$v(x)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{0.26}$$

не имеет классических решений. Согласно альтернативе Фредгольма, из этого следует что

$$\det P \neq 0, \quad P = (Ba_i(x), b_j(x))|_{i,j=1}^n, \tag{0.27}$$

где $b_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, s$ — линейно независимые решения уравнения $A^*z(x) = 0$. Здесь A^* — сопряженный к A оператор.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи (0.14)-(0.16) будем искать в виде

$$u_\omega(x,t) = \omega\sum_{j=1}^{s}c_{-2}^j a_j(x) + \sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}[u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + \\ + \sum_{j=1}^{s}c_k^j a_j(x) + y_k(x,\omega t) + z_k(\psi,\rho,\omega t)], \tag{0.28}$$

$$p_\omega(x)=\sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}[p_k(x)+\omega^{\frac12}s_{k-1}(\psi,\rho)+\omega m_{k-2}(x,\omega t)+\omega^{\frac12}n_{k-1}(\psi,\rho,\omega t)]. \tag{0.29}$$

Здесь u_k, y_k, p_k, m_k — регулярные, а v_k, z_k, s_k, n_k — погранслойные вектор-функции, причем y_k, z_k, n_k являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним.

Формулировке теоремы предпошлем следующие обозначения. Задачей (A) назовем задачу Дирихле в $\bar\Omega$ вида

$$\begin{cases} (\Delta+D)u(x)+\nabla p(x)=G(x),\\ \operatorname{div}u(x)=0,\\ (u(x),a_0(x))=0,\\ u(x)|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

где $G\in C^\infty(\bar\Omega)$, $(G,b_0)=0$. Задачей (B) — задачу Неймана в $\bar\Omega$

$$\begin{cases} \Delta q(x)=G(x),\\ \frac{\partial q(x)}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

где $\int\limits_\Omega G(x)dx=0$. Задачей (C) — задачу о 2π-периодических по τ решениях

$$\begin{cases} \frac{\partial y(\tau)}{\partial\tau}=G(x)e^{il\tau},\\ \langle y(\tau)\rangle=0,\end{cases}$$

где l — целое число. Задачей (D) — задачу на луче $\rho\geqslant0$ вида

$$\begin{cases} ikz(\rho)=\frac{\partial^2 z(\rho)}{\partial\rho^2}+g(\rho),\\ z(\rho)|_{\rho=0}=c,\\ z(\rho)|_{\rho\to\infty}=0,\end{cases}$$

где k — ненулевое целое число, $g(\rho)=g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0\in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma>0$, c — вещественное число. Задачей (E) — задачу на луче $\rho\geq0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial\rho^2}=g(\rho),\\ v(\rho)|_{\rho\to\infty}=0,\end{cases}$$

где $g(\rho)=g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0\in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma>0$. Задачей (F) — задачу на луче $\rho\geq0$

$$\begin{cases} \frac{\partial s(\rho)}{\partial\rho}=g(\rho),\\ s(\rho)|_{\rho\to\infty}=0,\end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0 \rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. В перечисленных задачах G, g — известные вектор-функции указанного типа. Очевидно, задачи (A) - (F) однозначно разрешимы, если в случае задачи (A) единственность p понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Символами u_ω^n и p_ω^n обозначим частичные суммы асимптотик, формально заменив ∞ на n и $2(n+1)$ соответственно; символом $C_{x,t}^{l,l/2}$, где $l \geqslant 0$ обозначим обычные гельдеровы пространства вектор-функций заданных в цилиндре $\Omega \times R$.

Теорема 0.8. *Существует такое число ω_0, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения. 1. Задача (0.14)-(0.16) имеет единственное $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое по t решение $(u_\omega(x,t), p_\omega(x,t))$, которое является вещественным и бесконечно дифференцируемым. 2. Построение вектор-функций u_ω^n, p_ω^n при каждом $n \geqslant -1$ сводится к решению конечного числа задач вида (A) - (F). 3. Для любого $l \geqslant 0$ и любого целого $n \geqslant -1$ справедливы оценки*

$$\|u_\omega - u_\omega^n\|_{C_{x,t}^{l,l/2}} \leqslant c_{n,l}\omega^{-(n+1)+l/2},$$

$$\|\nabla p_\omega - \nabla p_\omega^n\|_{C_{x,t}^{l,l/2}} \leqslant d_{n,l}\omega^{-n+l/2},$$

где $c_{n,l}$, $d_{n,l} = const > 0$.

Результаты второй главы были опубликованы в работах [36, 37, 38].

Выше мы упоминали цикл работ [33, 34, 35] Л. И. Сазонова. Поскольку эти работы предшествовали нашей работе [38], в которой содержится теорема 0.8 для кратного случая, приведем здесь их краткое сравнение. Результаты [33, 34, 35], относящиеся к существованию и единственности периодического решения, носят существенно более общий характер, так как там A — произвольный генератор аналитической полугруппы в банаховом пространстве, но с другой стороны для рассматриваемой в [38] системы уравнений в частных производных с оператором Стокса в главной части нами получены более глубокие результаты, конкретнее, в [38] разработан и обоснован, базирующийся на методе пограничного слоя, эффективный алгоритм построения полных асимптотик решений в гёльдеровых нормах.

В приложении рассмотрены некоторые базовые понятия и определения нелинейной теории возмущений по монографии В. Н. Богаевского, А. Я. Повзнера [25].

Основные результаты диссертации были опубликованы в работах [21], [26, 27], [36, 37, 38] и [41, 42, 43, 44, 45]. Работы [26, 27] опубликованы в журнале, который входит в перечень журналов, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Работы [26, 27] индексированы в РИНЦ. Работы [36, 37, 38] опубликованы в журналах, которые входят в международные метрические базы, рекомендованные ВАК Минобрнауки РФ: работы [36, 37, 38] индексированы в Scopus. В совместной с В. Б. Левенштамом монографии [21] первая глава, относящаяся к результатам диссертации, написана автором. Работы [36, 37, 38] опубликованы в соавторстве с научным руководителем. В них В. Б. Левенштаму принадлежит постановка задачи и общий план исследования. Полученные результаты принадлежат автору.

Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» в п. Ласпи (2011 г.) и г. Судак (2013 г.), на Международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» в г. Ростов-на-Дону (2015 г., 2018 г.), на Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» в с. Цей (2015 г., 2017 г.), на студенческой научной конференции «Неделя науки» Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ в г. Ростов-на-Дону (2010-2012 гг.), на семинаре «Асимптотические методы в нелинейном анализе» кафедры алгебры и дискретной математики Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ в г. Ростов-на-Дону (2011 г.), на Общегородском семинаре им. А. М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН в г. Уфа (2018 г.), на семинаре «Асимптотические методы в математической физике» в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского в г. Москва (2019 г.) и на Межвузовском научном семинаре по качественной теории дифференциальных уравнениий на базе кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова в г. Москва (2019 г.).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Валерию Борисовичу Левенштаму за руководство работой.

Глава I. Обыкновенные дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми

Перейдём к описанию содержания главы. В §1 рассмотрена задача о построении с обоснованием полных асимптотик периодических решениях для более широкого нежели

$$x^{(n)} = f_0(x, \omega t) + \omega^{n/2} f_1(x, \omega t), \quad \omega \gg 1. \tag{0.1}$$

класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Конкретнее, в отличие от [24] здесь нелинейные слагаемые могут зависеть от младших производных неизвестной функции:

$$\begin{aligned} x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t) + \\ + \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^j f_{2j}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([n/2]-j)}, \omega t), \quad \omega \gg 1. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Основные результаты этого параграфа состоят в построении и обосновании полной асимптотики решения, а также исследовании вопросов устойчивости и неустойчивости в метрике C этого решения по Ляпунову. При этом используется методика замен типа Крылова-Боголюбова «избавления» от больших слагаемых; также применяется аппарат неявных функций.

§2 примыкает к §1 и посвящен построению и обоснованию полной асимптотики некоторого ограниченного решения для системы нелинейных дифференциальных уравнений вида (0.2) с условно периодической по $\tau = \omega t$ правой частью:

$$f_j(z_0, \ldots, z_r, \tau) = \sum_{k=1}^{p} [c_{jk1}(z_0, \ldots, z_r) cos(\alpha_k \tau) + c_{jk2}(z_0, \ldots, z_r) sin(\alpha_k \tau)].$$

Здесь α_k, $k = 1, \ldots, p$, — произвольные неотрицательные числа. Напомним, что условно периодической называется почти периодическая функция с конечным частотным базисом. Под частотным базисом понимается рационально независимый набор чисел, в виде целочисленной комбинации которых можно представить любой показатель Фурье почти периодической функции. В §2 исследуются также вопросы устойчивости и неустойчивости по Ляпунову указанного решения. Как и в §1, исходная система приводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка без больших слагаемых. Для исследования поведения решений этой системы применяются известные теоремы о виде ограниченных решений (см., например, [46]). Затем доказывается условная периодичность решения с применением классической теории условно периодических функций.

В §3 продолжено исследование В. Б. Левенштама ([20], глава 4, §1), восходящее к работам В. И. Юдовича [19]. Рассматривается задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \omega^\alpha \varphi(x,t,\omega t), \quad t \in [0,T], \tag{0.3}$$

$$x(0) = x_0. \tag{0.4}$$

Здесь $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$ удовлетворяют определённым условиям гладкости и периодичности, ω — большой параметр, α и T — положительны. Отметим, что если при возрастании α на участке $[0,\alpha_0]$ главный член асимптотики решения задачи может измениться лишь при $\alpha = \alpha_0$, то α_0 называется первым перестроечным показателем. Термин был впервые введён В. И. Юдовичем (см. [19]). В [20] было показано, что в общем случае первым перестроечным показателем этой задачи является $\alpha = 1/2$, а при некоторых дополнительных условиях $\alpha = \frac{k+1}{k+2}$, где k — натуральное. В п.1 §3 настоящей работы эти условия уточняются, т.е. приводятся реккурентные соотношения для коэффициентов, определяющих первый перестроечный показатель. В п.2 §3 описаны некоторые классы функций $\varphi(x,t,\tau)$ в скалярном случае, для которых задача Коши (0.3), (0.4) не имеет первого перестроечного показателя на интервале $(0,1)$. Установлено, что в определённом смысле эти классы достаточно содержательны.

В §4 для задачи, рассмотренной в [24], продемонстрирован иной метод вывода предельной задачи: использована методика, предложенная в монографии В. Н. Богаевского, А. Я. Повзнера [25]. В п. 1 предложен способ построения асимптотики для (0.1), основанный на методах нелинейной теории возмущений. В п. 2 для уравнения со значением параметра, превышающим первый перестроечный показатель, с помощью данного подхода строится предельное уравнение.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [26, 27].

§1. Уравнения произвольного порядка с периодическими слагаемыми

1°. Обоснование метода усреднения. Формулировка

В этом параграфе будем рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}(x, \dot{x}, \dots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t) + \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^{j} f_{2j}(x, \dot{x}, \dots, x^{([n/2]-j)}, \omega t). \tag{1.1}$$

Здесь n, m — натуральные числа, ω — большой параметр, G — область в R^m, $l > 0$. Вектор-функции $f_{2j-1}(z_0, z_1, \dots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau)$ и $f_{2j}(z_0, z_1, \dots, z_{[n/2]-j}, \tau)$, которые заданы на множествах $\underbrace{G \times \dots \times G}_{[(n+1)/2]-j+1} \times R$ и $\underbrace{G \times \dots \times G}_{[n/2]-j+1} \times R$ соответственно, непрерывны и принимают значения в R^m. Предположим, что указанные вектор-функции обладают непрерывными производными

$$\frac{\partial f_0}{\partial z_{i,k}}, \quad \frac{\partial^r f_{2j-1}}{\partial z_{i_1,k_1}^{r_1} \dots \partial z_{i_q,k_q}^{r_q}}, r = 1, \dots, max(2, n - [(n+1)/2] + j),$$
$$\frac{\partial^r f_{2j}}{\partial z_{i_1,k_1}^{r_1} \dots \partial z_{i_q,k_q}^{r_q}}, r = 1, \dots, max(2, n - [n/2] + j),$$

которые удовлетворяют равномерному условию Липшица по $z_{i,k}$, $i = 0, \dots, r$, $k = 1, \dots, m$. Пусть, кроме того, они l-периодичны по τ, причем среднее всех вектор-функций по этой переменной, кроме, быть может, f_0, равно нулю. Наряду с возмущенным уравнением (1.1), рассмотрим уравнение

$$\Psi(y, \dot{y}, \dots, y^{([n/2])}) = 0, \tag{1.2}$$

которое будем называть усредненным. Здесь

$$\Psi(z_0, \dots, z_{[n/2]}) = \Big\langle f_0(z_0, \dots, z_{[n/2]}, \tau) + \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0, \tau)\varphi_n(z_0, \tau) + \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0, z_1, \tau)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}(z_0, \tau) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial z_{[(n+1)/2]-1}}(z_0, \dots, z_{[(n+1)/2]-1}, \tau)\frac{\partial^{[(n+1)/2]-1}\varphi_n}{\partial \tau^{[(n+1)/2]-1}}(z_0, \tau)\Big\rangle,$$

при n — нечетном;

$$\Psi(z_0, \dots, z_{[n/2]}) = \Big\langle f_0(z_0, \dots, z_{[n/2]} + \frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]}}(z_0, \tau), \tau) + \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0, \tau)\varphi_n(z_0, \tau) + \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0, z_1, \tau)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}(z_0, \tau) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial z_{[n/2]-1}}(z_0, \dots, z_{[n/2]-1}, \tau)\frac{\partial^{[n/2]-1}\varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]-1}}(z_0, \tau)\Big\rangle,$$

при n — четном. Угловые скобки означают интегральное среднее l-периодической функции:

$$\langle f(x,\tau)\rangle = \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x,\tau)d\tau.$$

Символом $\varphi_n(z_0,\tau)$ обозначено l-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n\varphi_n}{\partial\tau^n}(z_0,\tau) = f_n(z_0,\tau)$. Предположим, что существует стационарное решение усредненного уравнения $y_0 \in G$, такое что $\varphi_n(y_0,\tau) \in G \quad \forall\tau \in R$, а $\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}(y_0,0,\ldots,0)$ — невырожденная матрица. Обозначим через A квадратную матрицу порядка mn с первой наддиагональю (E, …, E), блоками $\frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(y_0,0,\ldots,0)$ в нижней строке и остальными нулевыми блоками.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *1. Существуют такие положительные числа ω_0 и r_0, что при $\omega > \omega_0$ уравнение (1.1) имеет единственное в шаре $\|x-y_0\|_{C^k(R)} \leqslant r_0$ $l\omega^{-1}$-периодическое решение x_ω и при этом $\lim\limits_{\omega\to\infty}\|x_\omega - y_0\|_{C^k(R)} = 0$, где $k = [(n-1)/2]$.*
2. Если собственные значения матрицы A лежат в открытой левой комплексной полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво.
3. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A лежит в открытой правой комплексной полуплоскости, то решение x_ω не устойчиво.

Определения экспоненциальной устойчивости и неустойчивости даны далее, в теореме 2.1 второго параграфа.

2°. Обоснование метода усреднения. Доказательство

Доказательство теоремы проведем в 3 этапа.
1. Произведем в уравнении (1.1) замену типа Крылова-Боголюбова

$$x = x_1 + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-1}(x_1,\omega t) + \omega^{-n/2}\varphi_n(x_1,\omega t) \equiv x_1 + \varphi_\omega \tag{1.3}$$

Здесь и ниже через $\varphi_j(z_0,z_1,\ldots,z_r,\tau)$ мы обозначаем l-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n\varphi_j}{\partial\tau^n}(z_0,z_1,\ldots,z_r,\tau) = f_j(z_0,z_1,\ldots,z_r,\tau)$. Будем пользоваться соотношением

$$\frac{\partial^n\varphi_j}{\partial t^n}(x_1(t),\dot{x}_1(t),\ldots,x_1^{(r)}(t),\omega t) =$$
$$= \sum_{i=0}^n \omega^{n-i}C_n^i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\frac{\partial^{n-i}}{\partial\tau^{n-i}}\varphi_j(x_1(t),\dot{x}_1(t),\ldots,x_1^{(r)}(t),\tau)\Big|_{\tau=\omega t}.$$

Для всех f_j в случае нечетного n, и для всех f_j, кроме f_0, в случае четного n применим формулы

$$
\begin{gathered}
f_j\left(x_1+\varphi_\omega,\dot x_1+\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(r)}+\tfrac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r},\omega t\right)=f_j(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(r)},\omega t)+\\
+\int\limits_0^1\tfrac{\partial f_j}{\partial z_0}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(r)}+\theta\tfrac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r},\omega t\right)d\theta\varphi_\omega+\\
+\int\limits_0^1\tfrac{\partial f_j}{\partial z_1}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(r)}+\theta\tfrac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r},\omega t\right)d\theta\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t}+\dots+\\
+\int\limits_0^1\tfrac{\partial\ f_j}{\partial z_r}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(r)}+\theta\tfrac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r},\omega t\right)d\theta\tfrac{\partial^r\varphi_\omega}{\partial t^r}.
\end{gathered}
$$

Аналогичные формулы используем для слагаемых в правых частях последних представлений, которые имеют порядок $O(1)$ при $\omega\to\infty$. Для f_0 в случае четного n воспользуемся представлением

$$
\begin{gathered}
f_0\left(x_1+\varphi_\omega,\dot x_1+\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(p)}+\tfrac{\partial^p\varphi_\omega}{\partial t^p},\omega t\right)=\\
=f_0(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(p)}+\omega^{-n/2}\tfrac{\partial^p\varphi_n}{\partial t^p},\omega t)+\\
+\int\limits_0^1\tfrac{\partial f_0}{\partial z_0}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(p)}+\right.\\
\left.+\omega^{-n/2}\tfrac{\partial^p\varphi_n}{\partial t^p}+\theta\omega^{-(n+1)/2}\tfrac{\partial^p\varphi_{n-1}}{\partial t^p},\omega t\right)d\theta\varphi_\omega+\\
+\int\limits_0^1\tfrac{\partial f_0}{\partial z_1}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(p)}+\right.\\
\left.+\omega^{-n/2}\tfrac{\partial^p\varphi_n}{\partial t^p}+\theta\omega^{-(n+1)/2}\tfrac{\partial^p\varphi_{n-1}}{\partial t^p},\omega t\right)d\theta\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t}+\dots+\\
+\int\limits_0^1\tfrac{\partial f_0}{\partial z_r}\left(x_1+\theta\varphi_\omega,\dot x_1+\theta\tfrac{\partial\varphi_\omega}{\partial t},\dots,x_1^{(p)}+\right.\\
\left.+\omega^{-n/2}\tfrac{\partial^p\varphi_n}{\partial t^p}+\theta\omega^{-(n+1)/2}\tfrac{\partial^p\varphi_{n-1}}{\partial t^p},\omega t\right)d\theta\omega^{-(n+1)/2}\tfrac{\partial^p\varphi_{n-1}}{\partial t^p},
\end{gathered}
$$

где $p=[n/2]$. В результате получим

$$
\begin{gathered}
x_1^{(n)}=\psi(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(p)},\omega t)+\gamma_1(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(k)},\omega t)+\\
+\beta_1(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{(p)},\omega t,\omega)+\\
+\omega^{n/2-1}g_{12}(x_1,\omega t)\dot x_1+\omega^{n/2-3/2}g_{13}(x_1,\omega t)\dot x_1+\\
+\sum_{i=4}^{n}\omega^{n/2-i/2}[h_{1i}(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{([i/2]-1)},\omega t)+g_{1i}(x_1,\omega t)x_1^{([i/2])}]+\\
+\sum_{i=n+1}^{2n}\omega^{n/2-i/2}[h_{1i}(x_1,\dot x_1,\dots,x_1^{([i/2]-1)},\omega t)+g_{1i}(x_1,\omega t)x_1^{([i/2])}],
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

где в случае нечетного n

$$
\begin{gathered}
\psi(z_0,\dots,z_{[n/2]})=f_0(z_0,\dots,z_{[n/2]},\tau)+\tfrac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\varphi_n(z_0,\tau)+\\
+\tfrac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)\tfrac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau)+\dots+\tfrac{\partial f_1}{\partial z_{[(n+1)/2]-1}}(z_0,\dots,z_{[(n+1)/2]-1},\tau)\tfrac{\partial^{[(n+1)/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[(n+1)/2]-1}}(z_0,\tau),
\end{gathered}
$$

а в случае четного n

$$\psi(z_0,\ldots,z_{[n/2]}) = f_0(z_0,\ldots,z_{[n/2]} + \tfrac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}(z_0,\tau),\tau) + \tfrac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0,\tau)\varphi_n(z_0,\tau) +$$
$$+\tfrac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0,z_1,\tau)\tfrac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}(z_0,\tau) + \cdots +$$
$$+\tfrac{\partial f_2}{\partial z_{[n/2]-1}}(z_0,\ldots,z_{[n/2]-1},\tau)\tfrac{\partial^{[n/2]-1}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]-1}}(z_0,\tau),$$

$$g_{12}(z_0,\tau) = \frac{\partial^n\varphi_n}{\partial z_0\partial\tau^{n-1}}(z_0,\tau),$$

$$g_{13}(z_0,\tau) = \frac{\partial^n\varphi_{n-1}}{\partial z_0\partial\tau^{n-1}}(z_0,\tau).$$

Здесь компоненты вектор-функций $h_{1i}(z_0,z_1,\ldots,z_{[i/2]-1},\tau)$ являются полиномами по компонетам $z_1,\ldots,z_{[i/2]-1}$, коэффициенты которых, также как и компоненты матриц $g_{1i}(z_0,\tau)$ и вектор-функции $\beta_1(z_0,z_1,\ldots,z_p,\tau,\omega)$ непрерывны, удовлетворяют равномерному условию Липшица по $z_{i,k}$ и l-периодичны по τ. Кроме того, справедливы равенства $\langle g_{1i}\rangle = \langle h_{1i}\rangle = 0$. И компоненты вектор-функций h_{1i} не содержат произведений каких-либо компонент векторов z_{j_1}, z_{j_2} при $j_1 + j_2 > n$. Слагаемое β_1 имеет порядок $\omega^{-1/2}$ при $\omega\to\infty$, а вид вектор-функции $\gamma_1(z_0,z_1,\ldots,z_p,\tau)$ после этого очевиден. Перепишем это уравнение в виде системы

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = y_1 \\
y_1^{(n-1)} = \psi(x_1,\dot{x}_1,\ldots,x_1^{(p)},\omega t) + \gamma_1(x_1,y_1,\ldots,y_1^{(k-1)},\omega t) + \\
+\beta_1(x_1,y_1,\ldots,y_1^{(p-1)},\omega t,\omega) + \\
+\omega^{n/2-1}g_{12}(x_1,\omega t)y_1 + \omega^{n/2-1}g_{13}(x_1,\omega t)y_1 + \\
+\sum_{i=4}^{n}\omega^{n/2-i/2}[h_{1i}(x_1,y_1,\ldots,y_1^{([i/2]-2)},\omega t) + g_{1i}(x_1,\omega t)y_1^{([i/2]-1)}] + \\
+\sum_{i=n+1}^{2n}\omega^{n/2-i/2}[h_{1i}(x_1,y_1,\ldots,y_1^{([i/2]-2)},\omega t) + g_{1i}(x_1,\omega t)y_1^{([i/2]-1)}].
\end{gathered} \tag{1.5}$$

В системе (1.5) произведем замену переменных

$$\begin{gathered}
x_1 = x_1, y_1 = x_2 + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-3}(x_1,x_2,\omega t) + \omega^{-n/2}\varphi_{n-2}(x_1,x_2,\omega t) + \\
+\omega^{-(n+1)/2}\xi_3(x_1,x_2,\omega t) + \omega^{-n/2}\xi_2(x_1,x_2,\omega t),
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где $\xi_2(x_1,x_2,\tau)$ является l-периодическим по τ с нулевым средним решением уравнения $\frac{\partial^{n-1}\xi_2(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau^{n-1}} = g_{12}(x_1,\tau)x_2$, а $\xi_3(x_1,x_2,\tau)$ — $\frac{\partial^{n-1}\xi_3(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau^{n-1}} = g_{13}(x_1,\tau)x_2$ В результате этой замены в системе (1.5) будет уничтожено слагаемое, пропорциональное наивысшей степени ω, т.е. $\omega^{n/2-1}$. Наивысшей степенью ω в преобразованной системе станет $\omega^{n/2-2}$. Слагаемое с таким коэффициентом уничтожается на следующем шаге путем аналогичных преобразований. Повторяя преобразования описанного выше типа $k+1$ раз, от уравнения (1.1) придем к системе уравнений вида

$$\begin{gathered}
\dot{x}_j = x_{j+1} + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-2j-1}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t) + \\
+\omega^{-n/2}\varphi_{n-2j}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t) + \\
+\omega^{-(n+1)/2}\xi_{2j+1}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t) + \omega^{-n/2}\xi_{2j}(x_1,\dots,x_{j+1},\omega t), \\
j = 1,\dots,k \\
x_{k+1}^{(n-k)} = \psi(x_1,\dots,x_{k+1}^{(p-k)},\omega t) + \beta(x_1,\dots,x_{k+1}^{(p-k)},\omega t,\omega) + \\
+\chi_0(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t) + B_0(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t)\dot{x}_{k+1} + \\
+\chi(x_1,\dots,x_{k+1},\dot{x}_{k+1},\omega t,\omega) + \\
+\sum_{i=2}^{n-k-1} A_i(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t,\omega)x_{k+1}^{(i)} + \omega^{-n/2}C(x_1,\dots,x_{k+1},\omega t)x_{k+1}^{(n-k)}.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь $\xi_i(x_1,\dots,x_i) = \xi_{io}(x_1,\dots,x_{i-1}) + \xi_{i1}(x_1,\dots,x_{i-1})x_i$, $\varphi_0 \equiv 0$, при нечетном n элементы χ_0, B_0 являются нулевыми, а χ имеет вид

$$\chi(x_1,\dots,x_{k+1},z_{k+1},\tau,\omega) = \chi_1(x_1,\dots,x_{k+1},\tau,\omega) + A_1(x_1,\dots,x_{k+1},\tau,\omega)z_{k+1}.$$

Отметим, что $\chi_0(x_1,\dots,x_{k+1},\tau), \chi(x_1,\dots,x_{k+1},z_{k+1},\tau,\omega), \chi_1(x_1,\dots,x_{k+1},\tau,\omega)$ — вектор-функции порядка m, а $B_0(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)$, $A_i(x_1,\dots,x_{k+1},\tau,\omega)$, $C(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)$ — квадратные матрицы-функции порядка m. Компоненты матриц A_i, а также вектор-функций χ_0, χ, χ_1, ξ_i являются полиномами относительно компонент x_s и $x_s, z_{k+1}, s \geqslant 2$ соответственно, причем коэффициенты этих полиномов, как компоненты матриц B_0, C и вектор-функций β, φ_i, непрерывны, удовлетворяют равномерному условию Липшица по $x_{i,k}$ и l-периодичны по τ. Кроме того, указанные коэффициенты или компоненты элементов β, χ, χ_1, A_i являются бесконечно малыми при $\omega \to \infty$ равномерно относительно своих переменных, а элементы ξ_i, φ_i, χ_0, B_0, C имеют нулевые средние по τ.

2. Разрешив последнее уравнение системы (1.7) относительно старшей производной, перепишем ее в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dz}{dt} = f(z,\omega t) + \alpha(z,\omega t,\omega), \tag{1.8}$$

где

$$\begin{gathered}
z = (x_1,\dots,x_n)^T, \\
f(z,\tau) = (x_2,\dots,x_{n-1},[E - \omega^{-n/2}C(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)]^{-1}(\psi(x_1,\dots,x_{p+1},\tau) + \\
+\chi_0(x_1,\dots,x_{k+1},\tau) + B_0(x_1,\dots,x_{k+1},\tau)x_{k+2}))^T,
\end{gathered}$$

а выражение $\alpha(z, \tau, \omega)$ после этого очевидно. Напомним, что мы рассматриваем задачу о $l\omega^{-1}$-периодических решениях системы (1.1), а потому и такую же задачу для системы (1.8). Наряду с возмущенной системой (1.8), рассмотрим усредненную систему

$$\frac{dw}{dt} = F(w), \tag{1.9}$$

где

$$w = (w_1, \dots, w_n)^T,\ F(w) = (w_2, \dots, w_{n-1}, \Psi(w_1, \dots, w_{p+1}))^T.$$

Очевидно, система (1.9) имеет стационарное решение $w^0 = (y_0, 0, \dots, 0)$, причем это решение не вырождено, так как матрица $\frac{dF}{dw}(w^0)$, с первой наддиагональю (E, …, E), блоками $\frac{\partial\Psi}{\partial z_i}(y_0, 0, \dots, 0)$ в нижней строке и остальными нулевыми блоками, очевидно, обратима.

Лемма 1.1. *Пусть $\mu \in (0,1)$. Тогда существуют положительные числа r_1, ω_1 такие, что при $\omega > \omega_1$ система (1.8) в шаре $\|z - w^0\|_{C^\mu(R)} \leqslant r_1$ имеет единственное $l\omega^{-1}$-периодическое решение z_ω и при этом справедливо соотношение $\lim\limits_{\omega\to\infty} \|z_\omega - w^0\|_{C^\mu(R)} = 0$.*

Здесь $C^\mu(R)$ — обычное гельдерово пространство заданных на оси $t \in R$ вектор-функций со значениями в R^{mn}. Лемма доказана в работе В. Б. Левенштама [20] (гл. 3, лемма 1.3).

3. Из леммы 1.1, с учетом вытекающего из (1.3) равенства

$$x_\omega = z_{\omega 1} + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-1}(z_{\omega 1}, \omega t) + \omega^{-n/2}\varphi_n(z_{\omega 1}, \omega t) \tag{1.10}$$

следует существование такого $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ уравнение (1.1) имеет $l\omega^{-1}$-периодическое решение x_ω, для которого выполняется, указанное в теореме предельное соотношение.

Осталось доказать утверждение о локальной единственности решения x_ω. Для этого достаточно показать, что для тройки чисел μ, r_1, ω_1 фигурирующих в лемме 1.1, найдется такая пара чисел $r_0, \omega_0 \geqslant \omega_1$, что при $\omega \geqslant \omega_0$ каждому решению x_ω уравненения (1.1) удовлетворяющему неравенству

$$\|x_\omega - y_0\|_{C^k(R)} \equiv \sum_{i=0}^{k} \|\frac{d^i}{dt^i}[x_\omega(t) - y_0]\|_{C(R)} \leqslant r_0, \tag{1.11}$$

отвечает решения v_ω уравнения (1.8) такое, что

$$\|z_\omega - w^0\|_{C^\mu(R)} \leqslant r_1. \tag{1.12}$$

Из соотношений (1.3), первых k равенств (1.7) и соотношения (1.11) легко видеть, что

$$\lim_{r_0\to 0,\omega\to\infty} = \sum_{i=1}^{k+1} \|z_{\omega i} - w_i^0\|_{C(R)}. \tag{1.13}$$

Рассмотрим теперь последнее уравнение системы (1.7), в котором $x_i = z_i$. Покажем, что поскольку $z_{\omega i}, i = 1, \ldots, k+1$ - равномерно относительно $\omega \geqslant \omega_0$ ограниченные $l\omega^{-1}$-периодические вектор-функции, то найдется не зависящая от ω постоянная , при которой выполняется оценка

$$\sum_{i=k+1}^{n} \|\dot z_{\omega i}\|_{C(R)} = \sum_{i=1}^{n-k} \|z_{\omega,k+1}^{(i)}\|_{C(R)} \leqslant c. \tag{1.14}$$

При этом воспользуемся следующим вспомогательным результатом.

Пусть r — натуральное число, M — произвольное множество и для каждого $\sigma \in M$ задано число $l_\sigma > 0$. Для дифференциального уравнения

$$x^{(r)} + A_{1\sigma}(t)x^{(r-1)} + \cdots + A_{r\sigma}x = f_\sigma(t), \tag{1.15}$$

где $A_{i\sigma}(t)$ — квадратные матрицы-функции, а $f_\sigma(t)$ — вектор-функция, непрерывные и l_σ-периодические, справедливо следующее утверждение (см. [20], гл. 5, лемма 3.1).

Лемма 1.2. *Пусть существует такое число c_0, что при каждом $\sigma \in M$ уравнение (1.15) имеет l_σ-периодическое решение $x_\sigma(t)$, и выполнены неравенства*

$$\|A_{i\sigma}\|_{C(R)} \leqslant c_0, \|f_\sigma\|_{C(R)} \leqslant c_0, \|x_\sigma\|_{C(R)} \leqslant c_0.$$

Тогда найдется такое число c_1, что при всех $\sigma \in M$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=0}^{r} \|x_\sigma^{(i)}\|_{C(R)} \leqslant c_1.$$

Рассмотрим последнее уравнение системы (1.7) сначала при нечетном n. В этом случае указанное уравнение можно переписать в виде

$$x_{k+1}^{(n-k)} + \sum_{i=1}^{n-k-1} A_{i\omega}(t)x_{k+1}^{(i)} = f_\omega(t), \tag{1.16}$$

где

$$A_{i\omega}(t) = -[E-\omega^{-n/2}C(x_1(t),\dots,x_{k+1}(t),\omega t)]^{-1}A_i(x_1(t),\dots,x_{k+1}(t),\omega t,\omega),$$
$$f_\omega(t) = [E-\omega^{-n/2}C(x_1(t),\dots,x_{k+1}(t),\omega t)]^{-1}[\psi(x_1(t),\dots,x_{k+1}(t),\omega t)+$$
$$\beta(x_1(t),\dots,x_{k+1}(t),\omega t,\omega)+\chi_1(x_1(t),\dots,x_{k+1}(t),\omega t,\omega)].$$

Применяя лемму 1.2 к уравнению (1.16), получаем неравенство (1.14) в случае нечетных n. При четных n оценка (1.14) выводится аналогично. Действительно, в этом случае вектор-функция $\dot{x}_{k+1}$ равномерно относительно $\omega \geqslant \omega_0$ ограничена, а потому возможная нелинейность относительно этой производной слагаемых ψ, β, χ уравнения (1.7) не препятствует применению леммы 1.2. Так что при четных n мы по-прежнему ее применяем к уравнению (1.16), в котором f_ω содержит дополнительное слагаемое $[E-\omega^{-n/2}C]^{-1}[\chi_0+\chi]$, элементы ψ, β зависят от $\dot{x}_{k+1}$ и A_1 заменено на B_0. Из соотношений (1.13), (1.14) и известного мультипликативного неравенства

$$\|\eta\|_{C^\mu(R)} \leqslant (2\|\eta\|_{C(R)})^{1-\mu}(\|\eta\|_{C^1(R)})^\mu, \eta \in C^1(R),$$

вытекает соотношение

$$\lim_{r_0\to 0,\omega\to\infty} \|z_\omega - w^0\|_{C^\mu(R)} = 0,$$

из которого в свою очередь следует неравенство (1.12). Утверждения 2, 3 доказываются в следующем параграфе.

3°. **Построение полной асимптотики**

Продолжим рассмотрение системы (1.1). Дополнительно будем предполагать, что вектор-функции f_j имеют непрерывные производные по $z_0, z_1, \dots, z_{[n/2]}$ любого порядка. Асимптотику периодического решения x_ω, о котором говорится в теореме 1.1, будем искать в виде

$$x_\omega(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\omega^{-i/2}u_i + \sum_{i=n}^{\infty}\omega^{-i/2}[u_i+v_i(\omega t)], \tag{1.17}$$

где $u_i \in R^m$, $v_i(\tau)$ — l-периодические функции со значениями в R^m, с нулевым средним. Для нахождения коэффициентов асимптотики подставим ряд (1.17) в (1.1), разложим вектор-функции f_j, $j \geqslant 0$ в случае нечетного n, и f_j, $j > 0$, в случае четного n в ряды Тейлора по переменным z_i с центром $w_j^0 = (y_0, 0, \dots, 0)$. Разложим f_0 в случае четного n в ряд Тейлора по переменным $z_0, z_1, \dots, z_{[n/2]}$ с центром $w_0^0 = (y_0, 0, \dots, 0, \frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}})$. После этого приравняем коэффициенты в обеих частях полученного равенства при одинаковых степенях ω. Обозначим через $A(f_j, -q/2)$ слагаемые при $\omega^{-q/2}$, получающиеся при разложении вектор-функции f_j. Заметим, что для $A(f_j, -q/2)$ справедливо представление

$$A(f_j, -q/2) = \sum \frac{1}{k_{0,1,1}!...k_{0,1,m}!...k_{r,j+q+2r,1}!...k_{r,j+q+2r,m}!}$$
$$\frac{\partial^{i_{0,1}+\dots+i_{r,j+q+2r}} f_j(w_j^0,\omega t)}{\partial z_{0,1}^{k_{0,1,1}+\dots+k_{0,j+q,1}}...\partial z_{0,m}^{k_{0,1,m}+\dots+k_{0,j+q,m}}...\partial z_{r,0}^{k_{r,n,0}+\dots+k_{r,j+q+2r,0}}...\partial z_{r,m}^{k_{r,n,m}+\dots+k_{r,j+q+2r,m}}} \tag{1.18}$$
$$u_1^{i_{0,1}} \dots u_{n-1}^{i_{0,n-1}} (u_n + v_n)^{i_{0,n}} \dots (u_{j+q} + v_{j+q})^{i_{0,j+q}} \dots v_n^{(r)i_{r,n}} \dots v_{j+q}^{(r)i_{r,j+q+2r}},$$

где $i_{0,1}, \dots, i_{r,j+q+2r}, k_{0,1,1}, \dots, k_{0,1,m}, \dots, k_{r,j+q+2r,1}, \dots, k_{r,j+q+2r,m} \in Z_+$ — индексы суммирования, связанные соотношениями

$$\begin{gathered} i_{0,1} + \dots + (n-1)i_{0,n-1} + ni_{0,n} + \dots + (j+q)i_{0,j+q} + \\ + \dots + (n-2r)i_{r,n} + \dots + (j+q)i_{r,j+q+2r} = j+q, \\ k_{0,1,1} + \dots + k_{0,1,m} = i_{0,1}, \\ \dots, \\ k_{r,j+q+2r,1} + \dots + k_{r,j+q+2r,m} = i_{r,j+q+2r}, \end{gathered}$$

а $i_{n,n/2} = 0$ при четном n. Итак, приравнивая коэффициенты при $\omega^{(n-i)/2}$, получим

$$v_{n+i}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} A(f_j, -(i+j-n)/2) \tag{1.19}$$

Пользуясь формулами (1.18), (1.19), выведем уравнения для коэффициентов при положительных степенях ω. Средние от их правых частей равны нулю. Решая задачи о нахождении l-периодических с нулевым средним решений уравнений вида $\frac{\partial^n y}{d\tau} = g(\tau)$, где $g(\tau)$ — известная l-периодическая с нулевым средним вектор-функция, найдем v_n и вид v_j, $j = n+1, \dots, 2n-1$:

$$v_n = \varphi_n(y_0, \tau),$$

$$v_j = \upsilon(y_0, \tau) u_{j-n} + C_j(u_1, \dots, u_{j-n-1}, y_0, \tau), \tag{1.20}$$

где $\upsilon(z_0, \tau) = \frac{\partial \varphi_n(z_0,\tau)}{\partial z_0}$, $C_j(u_1, \dots, u_{j-n-1}, y_0, \tau)$ — известные вектор-функции с нулевым средним по τ. Действуя аналогично, придем к уравнению для коэффициентов при ω^0. Учитывая при этом, что y_0 — решение (1.2), найдем:

$$v_{2n} = \upsilon(y_0, \tau) u_n + C_{2n}(u_1, \dots, u_{n-1}, y_0, \tau),$$

где $C_{2n}(u_1, \ldots, u_{2n-1}, y_0, \tau)$ — известная вектор-функция с нулевым средним по τ. Тем же способом получим уравнение для коэффициентов при $\omega^{-1/2}$. Потребуем теперь чтобы среднее от правой его части равнялось нулю. Подставив v_{n+1} и перенеся известные в правую часть, получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)u_1 = a,$$

где a — известный вектор R^m. Определив из этой системы линейных алгебраических уравнений с невырожденной основной матрицей $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ вектор u_1, найдем из (1.20) v_{n+1}. Теперь определим:

$$v_{2n+1} = v(y_0, \tau)u_{n+1} + C_{2n+1}(u_1, \ldots, u_n, y_0, \tau),$$

где $C_{2n+1}(u_1, \ldots, u_{2n}, y_0, \tau)$ — известная вектор-функция с нулевым средним по τ. С помощью метода математической индукции легко доказать возможность нахождения описанным выше образом любых коэффициентов ряда (1.17).

4°. **Обоснование асимптотики**

Обозначим

$$x_{\omega,s}(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{s} \omega^{-i/2}u_i + \sum_{i=n}^{s+n-1} \omega^{-i/2}v_i(\omega t).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Для любого $s = 0, 1, \ldots$ найдутся такие положительные числа c_s, ω_s, что при $\omega > \omega_s$, справедлива оценка*

$$\|x_\omega - x_{\omega,s}\|_{C^k(R)} \leqslant c_s \omega^{-(s+1)/2}, \tag{1.21}$$

где $k = [(n-1)/2]$. Построение приближения $x_{\omega,s}$ при известном векторе y_0 сводится к нахождению l-периодических с нулевым средним решений s уравнений вида $\frac{d^n y}{d\tau^n} = q(\tau)$, где $q(\tau)$ — известные l-периодические с нулевым средним вектор-функции и к решению s систем линейных алгебраических уравнений с единой невырожденной основной матрицей $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ и известными свободными членами.

Введем обозначение

$$y_{\omega,s}(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{s+n} \omega^{-i/2}u_i + \sum_{i=n}^{s+2n} \omega^{-i/2}v_i(\omega t).$$

Из проведенных в этом параграфе рассуждений следует равенство

$$
\begin{aligned}
y^{(n)}_{\omega,s} = &\sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}(y_{\omega,s}, \dot y_{\omega,s}, \dots, y^{([(n+1)/2]-j)}_{\omega,s}, \omega t)+ \\
&\sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^{j} f_{2j}(y_{\omega,s}, \dot y_{\omega,s}, \dots, y^{([n/2]-j)}_{\omega,s}, \omega t) + \gamma_s(t,\omega),
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

где вектор-функция $\gamma_s(t,\omega)$ равномерно относительно $t \in R$ удовлетворяет соотношению $|\zeta_s| = O(\omega^{-(s+1)/2})$. Полагая $z = x_\omega - y_{\omega,s}$ и вычитая из уравнения (1.1) уравнение (1.22) получим равенство

$$
\begin{aligned}
z^{(n)} = &\sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \Bigg[\omega^{(2j-1)/2} \sum_{i=0}^{[(n+1)/2]-j} \int_0^1 \tfrac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_i}(y_{\omega,s}+\theta z, \dot y_{\omega,s}+\theta \dot z, \dots, \\
&\quad y^{([(n+1)/2]-j)}_{\omega,s} + \theta z^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t) d\theta z^{(i)} \Bigg] \\
&+ \sum_{j=0}^{[n/2]} \Bigg[\omega^{j} \sum_{i=0}^{[n/2]-j} \int_0^1 \tfrac{\partial f_{2j}}{\partial z_i}(y_{\omega,s}+\theta z, \dot y_{\omega,s}+\theta \dot z, \dots, \\
&\quad y^{([n/2]-j)}_{\omega,s} + \theta z^{([n/2]-j)}, \omega t) d\theta z_i \Bigg] - \gamma_s(t,\omega).
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

Преобразуем правую часть уравнения (1.23). Для простоты изложения продемонстрируем преобразование одного из слагаемых в правой части (1.23).

$$
\begin{gathered}
\omega^{n/2} \int_0^1 \tfrac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_{\omega,s}+\theta z, \omega t) d\theta z = \omega^{n/2} \int_0^1 \tfrac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0+\theta z, \omega t) d\theta z + \\
+\omega^{n/2} \int_0^1 d\theta \int_0^1 \tfrac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0 + \theta z + \theta_1(y_{\omega,s}-y_0), \omega t) d\theta_1 (y_{\omega,s}-y_0) z = \\
\omega^{n/2} \tfrac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0, \omega t) z + \tfrac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0,\omega t) v_n + r_n(z),
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
r_n(z) = \omega^{n/2} \int_0^1 d\theta \int_0^1 \tfrac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0 + \theta_1 \theta z, \omega t) d\theta_1 z^2 + \\
+\omega^{n/2} \int_0^1 d\theta \int_0^1 \tfrac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0 + \theta z + \theta_1(y_{\omega,s}-y_0), \omega t) d\theta_1 \\
\left(\sum_{i=1}^{s+n} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n+1}^{s+2n} \omega^{-i/2} v_i(\omega t) \right) z + \\
+ \int_0^1 d\theta \int_0^1 d\theta_1 \int_0^1 \tfrac{\partial^3 f_n}{\partial z_0^3}(y_0 + \theta_2(\theta z + \theta_1(y_{\omega,s}-y_0))) d\theta_2 (\theta z + \theta_1(y_{\omega,s}-y_0)) v_n z.
\end{gathered}
$$

В результате получим уравнение

$$
\begin{gathered}
z^{(n)} = g(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t) + \\
+ \sum_{j=1}^{[n/2]} \left[\omega^{(2j-1)/2} \sum_{i=0}^{[n/2]-j} \frac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t) z^{(i)} \right] + \\
+ \sum_{j=1}^{[(n-1)/2]} \left[\omega^{j} \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]-j} \frac{\partial f_{2j}}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t) z^{(i)} \right] + \\
+ \sum_{j=1}^{n-1} \omega^{(n-j)/2} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]} h_{ji}(u_1, \ldots, u_{j-2i}, \omega t) z^{(i)} \\
+ + \omega^{n/2} N(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, \omega t, \omega) + M(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, \omega t, \omega) - \gamma_s(t, \omega),
\end{gathered}
\tag{1.24}
$$

где в случае нечетного n

$$
\begin{gathered}
g(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) = \frac{\partial f_0}{\partial z_0}(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) z + \cdots + \\
+ \omega^{(2j-1)/2} \frac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_{[(n+1)/2]-j}}(z_0, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau) z^{([(n+1)/2]-j)} + \\
+ \frac{\partial^2 f_{2j-1}}{\partial z_{([(n+1)/2]-j)} \partial z_0}(z_0, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau) v_n^{([(n+1)/2]-j)} z + \cdots + \\
+ \omega^{n/2} \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0, \omega t) z + \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0, \omega t) v_n(\omega t) z + \\
+ \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{\partial f_0}{\partial z_i}(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) z^{(i)} + \\
+ \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-j} \frac{\partial^2 f_{2j-1}}{\partial z_{[(n+1)/2]-j} \partial z_i}(z_0, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau) v_n^{([(n+1)/2]-j)}(\tau) z^{(i)},
\end{gathered}
$$

в случае четного n

$$
\begin{gathered}
g(z_0, \ldots, z_{[n/2]}, \tau) = \frac{\partial f_0}{\partial z_0}(z_0, \ldots, z_{[n/2]} + v_n^{([n/2])}(\tau), \tau) z + \\
+ \frac{\partial f_0}{\partial z_{[n/2]}}(z_0, \ldots, z_{[n/2]} + v_n^{([n/2])}(\tau), \tau) z^{([n/2])} + \cdots + \\
+ \omega^{j} \frac{\partial f_{2j}}{\partial z_{[n/2]-j}}(z_0, \ldots, z_{[n/2]-j}, \tau) z^{([n/2]-j)} + \\
+ \frac{\partial^2 f_{2j}}{\partial z_{([n/2]-j)} \partial z_0}(z_0, \ldots, z_{[n/2]-j}, \tau) v_n^{([n/2]-j)} z + \cdots + \\
+ \omega^{n/2} \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0, \omega t) z + \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_0^2}(y_0, \omega t) v_n(\omega t) z + \\
+ \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{\partial f_0}{\partial z_i}(z_0, \ldots, z_{[n/2] + v_n^{([n/2])}(\tau)}, \tau) z^{(i)} + \\
+ \sum_{j=1}^{[n/2]} \sum_{i=1}^{[n/2]-j} \frac{\partial^2 f_{2j}}{\partial z_{[n/2]-j} \partial z_i}(z_0, \ldots, z_{[n/2]-j}, \tau) v_n^{([(n+1)/2]-j)}(\tau) z^{(i)}.
\end{gathered}
$$

Здесь компоненты вектор-функции $h_{ji}(u_1, \ldots, u_{j-2i}, \tau)$ являются полиномами относительно компонент $u_1, \ldots, u_{j-2i}$ с непрерывными, l-периодическими с нулевым средним коэффициентами. Компоненты вектор-функций $N(z_0,\dots,z_{[n/2]},\tau,\omega)$ и $M(z_0,\dots,z_{[n/2]},\tau,\omega)$ являются полиномами не выше второй степени относительно компонент переменных $z_0,\dots,z_{[n/2]}$ с непрерывными, l-периодическими по τ и равномерно ограниченными относительно $|z_i|<1$ и $\omega>1$ коэффициентами. Отметим что N содержит лишь слагаемые второй степени. В уравнении (1.24) наивысшей степенью ω является $\omega^{n/2}$. Для уничтожения линейных слагаемых с таким коэффициентом проведем в этом уравнении замену переменных

$$z=x_1+\omega^{-n/2}\chi_1(\omega t)x_1+\sum_{j=1}^{n-1}\omega^{-(n+j)/2}\zeta_{1j}(\omega t)x_1\equiv x_1+\omega^{-n/2}\kappa_1(\omega t,\omega)x_1, \tag{1.25}$$

где матрица-функция $\chi_1(\tau)$ является l-периодическим с нулевым средним решением уравнения $\chi_1^{(n)}=\frac{\partial f_n}{\partial z_0}(y_0,\tau)$, а $\zeta_{1j}(\tau)$ — $\zeta_{1j}^{(n)}=\frac{\partial f_{n-j}}{\partial z_0}(y_0,0,\dots,0,\tau)+h_{j0}(u_1,\dots,u_{j-2i},\tau)$. Таким образом $\chi_1(\tau)=\frac{\partial\varphi_n}{\partial z_0}(y_0,\tau)$. В итоге придем к уравнению

$$\begin{gathered}
x_1^{(n)}=\tfrac{\partial\psi}{\partial z_0}(y_0,0,\dots,0,\omega t)x_1+\tfrac{\partial\psi}{\partial z_1}(y_0,0,\dots,0,\omega t)\dot{x}_1+\dots+\\
+\tfrac{\partial\psi}{\partial z_{[n/2]}}(y_0,0,\dots,0,\omega t)x_1^{([n/2])}+\\
+\sum_{j=1}^{[n/2]}\left[\omega^{(2j-1)/2}\sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-j}\tfrac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_i}(y_0,0,\dots,0,\omega t)x_1^{(i)}\right]+\\
+\sum_{j=1}^{[(n-1)/2]}\left[\omega^{j}\sum_{i=1}^{[n/2]-j}\tfrac{\partial f_{2j}}{\partial z_i}(y_0,0,\dots,0,\omega t)x_1^{(i)}\right]+\\
+\sum_{j=1}^{n-3}\omega^{(n-j)/2}\sum_{i=1}^{[(j-1)/2]}h_{ji}(u_1,\dots,u_{j-2i},\omega t)x_1^{(i)}+\\
\sum_{i=2}^{n}\omega^{(n-i)/2}c_{1i}(\omega t)x_1^{([i/2])}+\sum_{i=n+1}^{2n}d_{1i}(\omega t,\omega)x_1^{([i/2])}+\\
+\omega^{n/2}N_1(z,\dot{z},\dots,z^{([n/2])},x_1,\dot{x}_1,\dots,x_1^{([n/2])},\omega t,\omega)+\\
+M_1(z,\dot{z},\dots,z^{([n/2])},x_1,\dot{x}_1,\dots,x_1^{([n/2])},\omega t,\omega)+\\
+\omega^{-1/2}P_1(z,\dot{z},\dots,z^{([n/2])},x_1,\dot{x}_1,\dots,x_1^{([n/2])},\omega t,\omega)-\gamma_s(t,\omega).
\end{gathered}\tag{1.26}$$

Здесь матрицы-функции $c_{1i}(\tau)$ и $d_{1i}(\tau,\omega)$ непрерывны и l-периодичны по τ, причем $\langle c_{1i}\rangle=0$, а d_{1i} — бесконечно малые при $\omega\to\infty$ равномерно относительно $\tau\in R$. Компоненты вектор-функций $N_1(z_0,\dots,z_{2[n/2]+1},\tau,\omega)$, $M_1(z_0,\dots,z_{2[n/2]+1},\tau,\omega)$ и $P_1(z_0,\dots,z_{2[n/2]+1},\tau,\omega)$ являются полиномами не выше второй степени относительно компонент переменных $z_{[n/2]},\dots,z_{2[n/2]+1}$ с непрерывными, l-периодическими по τ и равномерно ограниченными относительно $|z_i| < 1, i = 0, \ldots, [n/2]$ и $\omega > 1$ коэффициентами. Отметим что N_1 содержит лишь слагаемые второй степени. Перепишем уравнение (1.26) в виде системы

$$
\begin{gathered}
\dot{x}_1 = y_1 \\
y_1^{(n-1)} = \frac{\partial\psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)x_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z_1}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)y_1 + \cdots + \\
+\frac{\partial\psi}{\partial z_{[n/2]}}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)y_1^{([n/2]-1)} + \\
+\sum_{j=1}^{[n/2]}\left[\omega^{(2j-1)/2}\sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-j}\frac{\partial f_{2j-1}}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)y_1^{(i-1)}\right] + \\
\sum_{j=1}^{[(n-1)/2]}\left[\omega^{j}\sum_{i=1}^{[n/2]-j}\frac{\partial f_{2j}}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)y_1^{(i-1)}\right] + \\
+\sum_{j=1}^{n-3}\omega^{(n-j)/2} + \sum_{i=1}^{[(j-1)/2]}h_{ji}(u_1, \ldots, u_{j-2i}, \omega t)y_1^{(i-1)} + \\
+\sum_{i=2}^{n}\omega^{(n-i)/2}c_{1i}(\omega t)y_1^{([i/2]-1)} + \sum_{i=n+1}^{2n}d_{1i}(\omega t, \omega)y_1^{([i/2]-1)} + \\
+\omega^{n/2}N_1(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, y_1, \ldots, y_1^{([n/2]-1)}, \omega t, \omega) + \\
+M_1(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, y_1, \ldots, y_1^{([n/2]-1)}, \omega t, \omega) + \\
+\omega^{-1/2}P_1(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, y_1, \ldots, y_1^{([n/2]-1)}, \omega t, \omega) - \gamma_s(t, \omega).
\end{gathered}
$$

В этой системе наивысшей степенью ω в линейных слагаемых является $\omega^{n/2-1}$. Для избавления от соответствующих больших слагаемых вновь проведем замену переменных

$$
\begin{gathered}
x_1 = x_1, \\
y_1 = x_2 + \sum_{j=0}^{n-3}\omega^{-(n+j)/2}\zeta_{2j}(\omega t)x_2 + \omega^{-n/2}\eta_2(\omega t)x_2 \equiv x_2 + \omega^{-n/2}\kappa_2(\omega t, \omega)x_2,
\end{gathered}
$$

где матрица-функция $\zeta_{2j}(\tau)$ является l-периодическим с нулевым средним решением уравнения $\zeta_{2j}^{(n-1)} = \frac{\partial f_{n-j-2}}{\partial z_1}(y_0, 0, \ldots, 0, \tau) + h_{j1}(u_1, \ldots, u_{j+2i}, \tau)$, а $\eta_2(\tau) - \eta_2^{(n-1)} = c_{12}(\tau)$, $h_{01} \equiv 0$. Повторяя описанные выше преобразования k+1 раз, от системы (1.23) перейдем к системе уравнений

$$
\begin{gathered}
\dot{x}_j = x_{j+1} + \omega^{-n/2}\kappa_{j+1}(\omega t, \omega)x_{j+1}, j = 1, \ldots, k, \\
x_{k+1}^{(n-k)} = \frac{\partial\psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)x_1 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial z_{[n/2]}}(y_0, 0, \ldots, 0, \omega t)x_{k+1}^{([n/2]-[(n-1)/2])} + \\
+\lambda_0(\omega t)\dot{x}_{k+1} + \\
+\sum_{i=1}^{n-k}d_{k+1,i}(\omega t, \omega)x_{k+1}^{(i)} + \\
+\omega^{n/2}N_{j+1}(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_{k+1}^{([n/2]-[(n-1)/2])}, \omega t, \omega) + \\
+M_{j+1}(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_{k+1}^{([n/2]-[(n-1)/2])}, \omega t, \omega) + \\
+\omega^{-1/2}P_{j+1}(z, \dot{z}, \ldots, z^{([n/2])}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_{k+1}^{([n/2]-[(n-1)/2])}, \omega t, \omega) - \gamma_s(t, \omega).
\end{gathered}
$$

$$(1.27)$$

Здесь матрицы-функции $\kappa_j(\tau,\omega)$, $\lambda_0(\tau)$ непрерывны и l-периодичны с нулевым средним по τ, κ_j также равномерно ограниченны относительно $\omega>1$, а λ_0 при нечетных n нулевая. Элементы $d_{k+1,i}$, N_{k+1}, M_{k+1} и P_{k+1} аналогичны элементам d_{1i}, N_1, M_1 и P_1 соответственно. Вектор-функция z считается известной. Систему (1.27) перепишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешив ее относительно старшей производной

$$\dot{u}=Gu+f(u,t,\omega), \tag{1.28}$$

где $u=(x_1,\ldots,x_n)^T$, $G=[E-d_{k+1,n-i}(\omega t,\omega)]^{-1}\frac{dF}{dw}(w^0)$ (см п. 2), а выражение f после этого очевидно. Пусть $T_0>0$ такое число, что $e^{\lambda_i T_0}\neq 1$, где λ_i — собственные числа G. Мы воспользовались тем, что при достаточно больших ω $\lambda_i\neq 0$. Положим $t_\omega=[T_0 l^{-1}\omega]l\omega^{-1}$. Согласно [Красносельский, 1, с. 34], всякое t_ω-периодическое решение уравнения (1.28) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} u(t)=[E-e^{t_\omega G}]^{-1}\int\limits_0^{t_\omega} e^{(t_\omega+t-\tau)G}f(u(\tau),\tau,\omega)d\tau+\\ +\int\limits_0^{t} e^{(t-\tau)G}f(u(\tau),\tau,\omega)d\tau\equiv[R(u,\omega)](t). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Для $\mu\in(0,1)$ определим величину $r_\omega=2\|R(0,\omega)\|_{C^\mu(0,T_0)}$. Можно доказать, что при достаточно больших ω оператор $R(u,\omega)$ в шаре V_w : $\|u\|_{C^\mu(0,T_0)}\leqslant r_w$ является сжатием. Этот факт является следствием соотношений

$$\begin{gathered} \|R(u_2,\omega)-R(u_1,\omega)\|_{C^\mu(0,T_0)}\leqslant\tfrac{1}{2}\|u_2-u_1\|_{C^\mu(0,T_0)}, u_1,u_2\in V_\omega,\omega\gg 1,\\ \|R(0,\omega)\|_{C^\mu(0,T_0)}=O(\omega^{-(s+1)/2}),\omega\to\infty, \end{gathered}$$

на доказательстве которых мы не останавливаемся. Из принципа сжатых отображений следует существование единственного в шаре V_ω t_ω-периодического решения, а значит, как легко убедиться, и $l\omega^{-1}$-периодического решения $u_\omega(t)$. Причем это решение подчинено оценке

$$\|u_\omega\|_{C^\mu(R)}\leqslant c_{s1}\omega^{-(s+1)/2}. \tag{1.30}$$

Вспомним, что $z=x_\omega-y_{\omega,s}$. Из (1.25) и установленной в теореме 1.1 локальной единственности решения x_ω уравнения (1.1) вытекает соотношение

$$x_\omega-y_{\omega,s}=u_{\omega1}+\omega^{-n/2}\kappa_1(\omega t,\omega)u_{\omega1},$$

из последнего соотношения, первых k уравнений системы (1.27) и оценки (1.30) следует
$$\|x_\omega - y_{\omega,s}\|_{C^k(R)} \leqslant c_{s2}\omega^{-(s+1)/2}.$$
Учитывая, что
$$y_{\omega,s}(t) - x_{\omega,s}(t) = \omega^{-(s+1)/2}\sum_{i=s+1}^{s+n}\omega^{(s+1-i)/2}u_i + \omega^{-(s+n)/2}\sum_{i=s+n}^{s+2n}\omega^{(s+n-i)/2}v_i(\omega t),$$
делаем вывод, что последняя оценка справедлива и при замене $y_{\omega,s}$ на $x_{\omega,s}$.

5°. **Пример**

Приведём иллюстративный пример. Рассмотрим уравнение следующего вида (нелинейное уравнение движения маятника с трением)
$$x^{(2)} = -\frac{g}{l}\sin(x) - \frac{k}{l}\dot{x} + \omega\frac{A}{l}\sin(x)\cos(\omega t),$$
где k — неотрицательное, а A, g, l — положительные числа. Соответствующее предельное уравнение имеет вид
$$y^{(2)} = \Psi(y, \dot{y}),$$
где
$$\Psi(y, y_1) = -\frac{1}{2l^2}(2gl\sin(y) + 2kly_1 + A^2\sin(y)\cos(y)).$$
Последнее при $A^2 \neq 2gl$, $k \neq 0$ имеет невырожденное решение $y_0 = \pi$, причём при $A^2 > gl$ все собственные числа матрицы
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y}(y_0, 0) & \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}(y_0, 0) \end{pmatrix}$$
лежат в открытой левой комплексной полуплоскости. Данное уравнение удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1. Поэтому исходная система имеет единственное 2π-периодическое решение в малой окрестности y_0 и это решение устойчиво по Ляпунову.

§2. Уравнения произвольного порядка с условно периодическими слагаемыми

1°. Обоснование метода усреднения. Формулировка

Рассмотрим
$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]}\omega^{(2j-1)/2}f_{2j-1}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t) + \\ + \sum_{j=0}^{[n/2]}\omega^j f_{2j}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([n/2]-j)}, \omega t) \tag{2.1}$$

с условно периодической по $\tau = \omega t$ правой частью:

$$f_j(z_0, \dots, z_r, \tau) = \sum_{k=1}^{p} [c_{jk1}(z_0, \dots, z_r) cos(\alpha_k \tau) + c_{jk2}(z_0, \dots, z_r) sin(\alpha_k \tau)]. \tag{2.2}$$

Здесь α_k, $k = 1, \dots, p$, — произвольные неотрицательные числа. Напомним, что условно периодической называется почти периодическая функция с конечным частотным базисом. Под частотным базисом понимается рационально независимый набор чисел, в виде целочисленной комбинации которых можно представить любой показатель Фурье почти периодической функции.

Пусть n, m, p — натуральные числа, ω — большой параметр, G — область в R^m. Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.1). Здесь вектор-функции $c_{jki}(z_0, \dots, z_r)$ со значениями в R^m заданы и непрерывны на множествах $\underbrace{G \times \dots \times G}_{r+1}$. Предположим, что указанные вектор-функции обладают непрерывными производными

$$\frac{\partial c_{0ki}}{\partial z_{i,s}}, \quad \frac{\partial^r c_{2j-1,ki}}{\partial z_{i_1,s_1}^{r_1} \dots \partial z_{i_q,s_q}^{r_q}}, r = 1, \dots, max(2, n - [(n+1)/2] + j),$$
$$\frac{\partial^r c_{2j,ki}}{\partial z_{i_1,s_1}^{r_1} \dots \partial z_{i_q,s_q}^{r_q}}, r = 1, \dots, max(2, n - [n/2] + j),$$

которые удовлетворяют равномерному условию Липшица по z_i, $i = 0, \dots, r$, $s = 1, \dots, m$. Пусть, кроме того, f_j, $j \neq 0$ обладают нулевым средним по τ (т.е. $c_{jk1} = 0$ для всех $j \neq 0$, если $\alpha_k = 0$).

Мы рассматриваем задачу об ограниченных решениях уравнения (2.1).

Наряду с возмущенным уравнением (2.1), рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = \Psi(y, \dot{y}, \dots, y^{([n/2])}), \tag{2.3}$$

которое будем называть усредненным. Здесь

$$\Psi(z_0, \dots, z_{[n/2]}) = \Big\langle f_0(z_0, \dots, z_{[n/2]}, \tau) + \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0, \tau)\varphi_n(z_0, \tau) +$$
$$+ \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0, z_1, \tau)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}(z_0, \tau) + \dots +$$
$$+ \frac{\partial f_1}{\partial z_{[(n+1)/2]-1}}(z_0, \dots, z_{[(n+1)/2]-1}, \tau)\frac{\partial^{[(n+1)/2]-1}\varphi_n}{\partial \tau^{[(n+1)/2]-1}}(z_0, \tau) \Big\rangle,$$

при n — нечетном;

$$\Psi(z_0, \dots, z_{[n/2]}) = \Big\langle f_0(z_0, \dots, z_{[n/2]} + \frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]}}(z_0, \tau), \tau) +$$
$$+ \frac{\partial f_n}{\partial z_0}(z_0, \tau)\varphi_n(z_0, \tau) + \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1}(z_0, z_1, \tau)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau}(z_0, \tau) + \dots +$$
$$+ \frac{\partial f_2}{\partial z_{[n/2]-1}}(z_0, \dots, z_{[n/2]-1}, \tau)\frac{\partial^{[n/2]-1}\varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]-1}}(z_0, \tau) \Big\rangle,$$

при n — четном. Угловые скобки означают интегральное среднее почти периодической функции:

$$\langle f(x,\tau)\rangle = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x,\tau)d\tau.$$

Символом $\varphi_n(z_0,\tau)$ обозначено условно периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n\varphi_n}{\partial\tau^n}(z_0,\tau) = f_n(z_0,\tau)$. Предположим, что существует стационарное решение усредненного уравнения $y_0\in G$, такое что $\frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}}(y_0,\tau)\in G \quad \forall\tau\in R$, и кроме того уравнение

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}+\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial z_1}+\dots+\lambda^{[n/2]}\frac{\partial\Psi}{\partial z_{[n/2]}}-\lambda^n E\right|\Bigg|_{(y_0,0,\dots,0)} = 0 \tag{2.4}$$

не имеет чисто мнимых корней.

Имеет место следующий результат.

Теорема 2.1. *Существуют такие положительные числа ω_0 и r_0, что при $\omega>\omega_0$ справедливы следующие утверждения:*
1. Уравнение (2.1) имеет единственное в шаре $\|x-y_0\|_{C^k(R)}\leqslant r_0$ ограниченное решение x_ω, при этом оно является условно периодическим, его частотный базис содержится в частотном базисе f_j, и справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{\omega\to\infty}\|x_\omega-y_0\|_{C^k(R)}=0$, где $k=[(n-1)/2]$.
2. Если все решения уравнения (2.4) лежат в открытой левой комплексной полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво. Это означает, что при некотором $\delta>0$ для каждого $\omega>\omega_0$ найдется пара чисел r_1, c, таких, что при любом $t_0\in R$ и любом векторе $a=(a_0,\dots,a_{n-1})\in R^{mn}$, удовлетворяющих условию

$$|a_0-x_\omega(t_0)|<r_1$$

задача Коши для уравнения (2.1) с начальным условием

$$x(t_0)=a_0,\quad \frac{dx(t_0)}{dt}=a_1,\dots,\quad \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}}=a_{n-1}$$

имеет при $t\geqslant t_0$ единственное решение $\hat{x}(t)$, и при этом справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{d^jx_\omega(t)}{dt^j}-\frac{d^j\hat{x}(t)}{dt^j}\right|\leqslant ce^{-\delta(t-t_0)}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{d^jx_\omega(t_0)}{dt^j}-\frac{d^j\hat{x}(t_0)}{dt^j}\right|,\quad t\geqslant t_0.$$

3. Если хотя бы одно решение уравнения (2.4) лежит в открытой правой комплексной полуплоскости, то решение x_ω неустойчиво. Это означает, что для каждого $\omega > \omega_0$ найдется $\varepsilon > 0$, последовательность векторов $a^s = (a_0^s, \ldots, a_{n-1}^s) \in R^{mn}$, $a_j^s \to \frac{d^j x_\omega(0)}{dt^j}$ и последовательность положительных чисел t_s такие, что задача Коши для уравнения (2.1) с начальным условием

$$x(t_0) = a_0^s, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = a_1^s, \ldots, \quad \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = a_{n-1}^s$$

разрешима на участке $t \in [0, t_s]$, и для ее решения $x^s(t)$ справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j x_\omega(t_s)}{dt^j} - \frac{d^j x^s(t_s)}{dt^j} \right| > \varepsilon, \quad s = 1, 2, \ldots$$

2°. Обоснование метода усреднения. Доказательство

Как и в предыдущем параграфе серией замен Крылова-Боголюбова придем от уравнения (2.1) к системе без больших слагаемых

$$\begin{gathered} x = x_1 + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-1}(x_1, \omega t) + \omega^{-n/2}\varphi_n(x_1, \omega t) \\ \dot{x}_j = x_{j+1} + \omega^{-(n+1)/2}\varphi_{n-2j-1}(x_1, \ldots, x_{j+1}, \omega t) + \\ +\omega^{-n/2}\varphi_{n-2j}(x_1, \ldots, x_{j+1}, \omega t) + \omega^{-(n+1)/2}\xi_{2j+1}(x_1, \ldots, x_{j+1}, \omega t) + \\ +\omega^{-n/2}\xi_{2j}(x_1, \ldots, x_{j+1}, \omega t), j = 1, \ldots, k \\ x_{k+1}^{(n-k)} = \psi(x_1, \ldots, x_{k+1}^{(p-k)}, \omega t) + \beta(x_1, \ldots, x_{k+1}^{(p-k)}, \omega t, \omega) + \\ +\chi_0(x_1, \ldots, x_{k+1}, \omega t) + B_0(x_1, \ldots, x_{k+1}, \omega t)\dot{x}_{k+1} + \\ +\chi(x_1, \ldots, x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}, \omega t, \omega) + \\ + \sum_{i=2}^{n-k-1} A_i(x_1, \ldots, x_{k+1}, \omega t, \omega)x_{k+1}^{(i)} + \omega^{-n/2}C(x_1, \ldots, x_{k+1}, \omega t)x_{k+1}^{(n-k)}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь $\xi_i(x_1, \ldots, x_i) = \xi_{io}(x_1, \ldots, x_{i-1}) + \xi_{i1}(x_1, \ldots, x_{i-1})x_i$, $\varphi_0 \equiv 0$, при нечетном n элементы χ_0, B_0 являются нулевыми, а χ имеет вид

$$\chi(x_1, \ldots, x_{k+1}, z_{k+1}, \tau, \omega) = \chi_1(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau, \omega) + A_1(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau, \omega)z_{k+1}.$$

Отметим, что $\chi_0(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau)$, $\chi(x_1, \ldots, x_{k+1}, z_{k+1}, \tau, \omega)$, $\chi_1(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau, \omega)$ — вектор-функции порядка m, а $B_0(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau)$, $A_i(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau, \omega)$, $C(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau)$ — квадратные матрицы-функции порядка m. Компоненты матриц A_i, а также вектор-функций $\chi_0, \chi, \chi_1, \xi_i$ являются полиномами относительно компонент x_s и $x_s, z_{k+1}, s \geqslant 2$ соответственно, причем коэффициенты этих полиномов, как компоненты матриц

B_0, C и вектор-функций β, φ_i, непрерывны, удовлетворяют равномерному условию Липшица по $x_{i,l}$ и условно периодичны по τ со вложенным в частотный базис f_j частотным базисом. Кроме того, указанные коэффициенты или компоненты элементов β, χ, χ_1, A_i являются бесконечно малыми при $\omega \to \infty$ равномерно относительно своих переменных, а элементы $\xi_i, \varphi_i, \chi_0, B_0, C$ имеют нулевые средние по τ.

Разрешив последнее уравнение системы (2.5) относительно старшей производной, перепишем ее в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dz}{dt} = f(z, \omega t) + \alpha(z, \omega t, \omega), \tag{2.6}$$

где

$$z = (x_1, \ldots, x_n)^T,$$
$$f(z,\tau) = (x_2, \ldots, x_{n-1}, [E - \omega^{-n/2} C(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau)]^{-1} (\psi(x_1, \ldots, x_{p+1}, \tau) +$$
$$+ \chi_0(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau) + B_0(x_1, \ldots, x_{k+1}, \tau) x_{k+2}))^T,$$

а выражение $\alpha(z, \tau, \omega)$ после этого очевидно. Наряду с возмущенной системой (2.6), рассмотрим усредненную систему

$$\frac{dw}{dt} = F(w), \tag{2.7}$$

где

$$w = (w_1, \ldots, w_n)^T,\ F(w) = (w_2, \ldots, w_{n-1}, \Psi(w_1, \ldots, w_{p+1}))^T.$$

Очевидно, система (2.7) имеет стационарное решение $w^0 = (y_0, 0, \ldots, 0)$, причем матрица $\frac{dF}{dw}(w^0)$ не содержит чисто мнимых собственных чисел, т.к. уравнение (2.4) не имеет чисто мнимых корней.

Лемма 2.1. *Пусть $\mu \in (0,1)$. Тогда существуют положительные числа r_1, ω_1 такие, что при $\omega > \omega_1$ справедливы следующие утверждения:*
1. Система (2.7) в шаре $\|z - w^0\|_{C^\mu(R)} \leqslant r_1$ имеет единственное ограниченное решение z_ω, при этом оно является условно периодическим, его частотный базис содержится в частотном базисе $f + \alpha$, и справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{\omega\to\infty} \|z_\omega - w^0\|_{C^\mu(R)} = 0$.
2. Если спектр матрицы $\frac{dF}{dw}(w^0)$ лежит в открытой левой комплексной полуплоскости, то решение z_ω экспоненциально устойчиво относительно ω и начальных условий.

3. Если спектр матрицы $\frac{dF}{dw}(w^0)$ содержит хотя бы одну точку открытой правой комплексной полуплоскости, то решение z_ω неустойчиво.

Здесь $C^\mu(R)$ — обычное гельдерово пространство заданных на оси $t \in R$ вектор-функций со значениями в R^{mn}.

Заменой $z = v + w^0$ уравнение (2.6) приведем к виду

$$\frac{dv}{dt} - Av = f(v + w^0, \omega t) + \alpha(v + w^0, \omega t, \omega) - Av \equiv R(v, \omega t, \omega), \qquad (2.8)$$

где $A = \frac{dF}{dw}(w^0)$. В силу отсутствия точек мнимой оси в спектре матрицы A система (2.8) эквивалентна интегральному уравнению (см., например, [47])

$$v(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)R(v, \omega s, \omega)ds \equiv [T(v, \omega)](t).$$

Здесь

$$G = \begin{cases} -Sdiag\left(e^{tJ_+}, 0\right)S^{-1}, & t < 0, \\ Sdiag\left(0, e^{tJ_-}\right)S^{-1}, & t > 0, \end{cases}$$

где S — невырожденная матрица такая, что

$$A = Sdiag(J_-, J_+)S^{-1},$$

а $J_\mp$ — матрицы жордановой формы, характеристические числа которых лежат в левой и, соответственно, правой открытой комплексной полуплоскости. Введем в рассмотрение отображение $M : C^\mu(R) \times (0, +\infty] \to C^\mu(R)$ такое, что $M(v, \omega) = T(v, \omega)$ при $\omega < +\infty$ и

$$M(v, +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[\langle f(v + w^0, s)\rangle - Av]ds.$$

Отображение $M(v, \omega)$ и его производная Фреше $(D_v M)(v, \omega)$ непрерывны в точке $(0, +\infty)$, при этом $M(0, +\infty) = 0$ и $(D_v M)(0, +\infty) = 0$ — нуль-операторы. Применяя теорему о неявных отображениях получим справедливость утверждения леммы для ограниченного решения. Покажем его почти периодичность. Пусть τ — ϵ-почти период вектор-функции $f + \alpha$. Имеем

$$\begin{gathered}|v(t+\tau)-v(t)| = \\ = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t+\tau-s)R(v,\omega s,\omega)ds - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)R(v,\omega s,\omega)ds\right| = \\ = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[R(v(s+\tau),\omega(s+\tau),\omega) - R(v(s),\omega s,\omega)]ds\right| = \\ = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau)) - f(w^0+v(s),\omega s) - Av(s+\tau)+\right. \\ \left.+Av(s)+\alpha(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau),\omega)-\alpha(w^0+v(s),\omega s,\omega)]ds\right| \leqslant \\ \leqslant I_1+I_2+I_3.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Т.к. τ — ϵ-почти период $f+\alpha$ и в силу свойств функции Грина G

$$\begin{gathered}I_1 = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau)) - f(w^0+v(s+\tau),\omega s)+\right. \\ \left.+\alpha(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau),\omega)-\alpha(w^0+v(s+\tau),\omega s,\omega)]ds\right| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|G(t-s)\|ds\ \sup_{s\in R}|f(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau))+ \\ +\alpha(w^0+v(s+\tau),\omega(s+\tau),\omega) - f(w^0+v(s+\tau),\omega s)- \\ -\alpha(w^0+v(s+\tau),\omega s,\omega)| \leqslant \tfrac{4c\epsilon}{\gamma},\end{gathered} \tag{2.10}$$

где c — const, γ — минимальная по модулю вещественная часть точек спектра, найдется ω_0 такое, что для $\forall\omega>\omega_0$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}I_2 = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(w^0+v(s+\tau),\omega s) - f(w^0+v(s),\omega s) - Av(s+\tau)+\right. \\ \left.+Av(s)]ds\right| \leqslant \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(w^0+v(s+\tau),\omega s) - f(w^0+v(s),\omega s)-\right. \\ \left.-F(w^0+v(s+\tau))+F(w^0+v(s))]ds\right| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|G(t-s)\|ds \\ \sup_{s\in R}|F(w^0+v(s+\tau))-F(w^0+v(s))-Av(s+\tau)+Av(s)| \leqslant \\ \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\int\limits_0^1\left[\tfrac{\partial f}{\partial z}(w^0+v(s)+\theta(v(s+\tau)-v(s)),\omega s)-\right.\right. \\ \left.\left.-\tfrac{dF}{dw}(w^0+v(s)+\theta(v(s+\tau)-v(s)))\right]d\theta(v(s+\tau)-v(s))ds\right| + \\ +\tfrac{2c}{\gamma}\sup_{s\in R}|[\tfrac{dF}{dw}(w^0+v(s))-A](v(s+\tau)-v(s))+O((v(s+\tau)-v(s))^2)| \leqslant \\ \leqslant \tfrac{1}{8}\sup_{s\in R}|v(s+\tau)-v(s)| + \tfrac{1}{8}\sup_{s\in R}|v(s+\tau)-v(s)| = \\ = \tfrac{1}{4}\sup_{s\in R}|v(s+\tau)-v(s)|,\end{gathered}$$

$$(2.11)$$

$$I_3 = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[\alpha(w^0 + v(s+\tau), \omega s, \omega) - \alpha(w^0 + v(s), \omega s, \omega)]ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-s)\| ds \; sup_{s\in R} |\alpha(w^0 + v(s+\tau), \omega s, \omega) - \alpha(w^0 + v(s), \omega s, \omega)| \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{2c}{\gamma} \sup_{s\in R} |\tfrac{\partial \alpha}{\partial z}(w^0 + v(s), \omega s, \omega)(v(s+\tau) - v(s)) + O((v(s+\tau) - v(s))^2)| \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{4} \sup_{s\in R} |v(s+\tau) - v(s)|. \tag{2.12}$$

Учитывая формулы (2.9)-(2.12), получим

$$\sup_{t\in R} |v(t+\tau) - v(t)| \leqslant \frac{4c\epsilon}{\gamma} + \frac{1}{2} \sup_{t\in R} |v(t+\tau) - v(t)|$$

$$\sup_{t\in R} |v(t+\tau) - v(t)| \leqslant \frac{8c\epsilon}{\gamma}$$

Значит τ — $\frac{8c\epsilon}{\gamma}$-почти период v, а в силу произвольности ϵ получаем почти периодичность v.

Пусть теперь $\{t_m\}$ — $f+\alpha$-возвращающая последовательность, т.е.

$$\sup_{t\in R} |f(v, \omega(t+t_m)) + \alpha(v, \omega(t+t_m), \omega) -$$
$$- f(v, \omega t) - \alpha(v, \omega t, \omega)| \leqslant \epsilon_m \to 0, \quad m \to \infty,$$

Также как описано выше легко показать

$$\sup_{t\in R} |v(t+\tau) - v(t)| \leqslant \frac{8c\epsilon_m}{\gamma} \to 0, \quad m \to \infty,$$

т.е. t_m — v-возвращающая последовательность, поэтому, как известно, частотный базис v вложен в частотный базис $f+\alpha$.

Таким образом утверждение 1 доказано. Утверждения 2, 3 доказываются аналогично лемме 1.8 (см. [20], гл. 3).

Из леммы 2.1, с учетом вытекающего из первого уравнения (2.5) равенства

$$x_\omega = z_{\omega 1} + \omega^{-(n+1)/2} \varphi_{n-1}(z_{\omega 1}, \omega t) + \omega^{-n/2} \varphi_n(z_{\omega 1}, \omega t) \tag{2.13}$$

следует существование такого $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ уравнение (2.1) имеет ограниченное решение x_ω, оно является условно периодическим с указанным в теореме базисом частот, и для него выполняется указанное в теореме предельное соотношение. Его единственность доказывается как и в предыдущем параграфе, с учетом того, что используемая там лемма 1.2 верна для уравнений с ограниченными коэффициентами.

3°. **Исследование устойчивости**

Докажем теперь 2, 3. Перепишем теперь (2.6) в виде системы уравнений, у которой в левой части стоит неизвестная x и ее производные, а в правой — x_j. Применяя теорему о неявных функциях к первым $k+1$ уравнениям системы, получаем, что существуют такие положительные числа ρ_0, ρ_1, ω_0, что при $\omega > \omega_0$ каждому решению ω уравнения (2.1), удовлетворяющему условию $|x(t)| \leqslant \rho_0$ отвечает единственное решение z(t) системы (2.6), удовлетворяющее условию $|z_t(t)| \leqslant \rho_1$. При этом существуют такие положительные величины $c_1(\omega)$ и $c_2(\omega)$, что для любых решений x^1 и x^2 уравнения (2.1) и соответствующих им решений z_1 и z_2 системы (2.6) выполняются оценки

$$c_1(\omega)|z_2(t) - z_1(t)| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j}{dt^j}[x^2 - x^1] \right| \leqslant c_2(\omega)|z_2(t) - z_1(t)|.$$

Таким образом утверждения 2, 3 теоремы являются следствиями утверждений 2, 3 сформулированной выше леммы. Утверждения 2, 3 для теоремы 1.1 из §1 доказываются аналогично с использованием леммы 1.8 (см. [20], гл. 3).

4°. **Построение полной асимптотики**

Продолжим рассмотрение системы (2.1). Дополнительно будем предполагать, что вектор-функции f_j имеют непрерывные производные по $z_0, z_1, \ldots, z_{[n/2]}$ любого порядка. Асимптотику условно периодического решения x_ω, о котором говорится в теореме 2.1, будем искать в виде

$$x_\omega(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{\infty} \omega^{-i/2}[u_i + v_i(\omega t)], \tag{2.14}$$

где $u_i \in R^m$, $v_i(\tau)$ — условно периодические функции со значениями в R^m, с нулевым средним. Для нахождения коэффициентов асимптотики подставим ряд (2.14) в (2.1), разложим вектор-функции f_j, $j \geqslant 0$ в случае нечетного n, и f_j, $j > 0$, в случае четного n в ряды Тейлора по переменным z_i с центром $w_j^0 = (y_0, 0, \ldots, 0)$. Разложим f_0 в случае четного n в ряд Тейлора по переменным $z_0, z_1, \dots, z_{[n/2]}$ с центром $w_0^0 = (y_0, 0, \dots, 0, \frac{\partial^{[n/2]}\varphi_n}{\partial\tau^{[n/2]}})$. После этого приравняем коэффициенты в обеих частях полученного равенства при одинаковых степенях ω. Более подробно процесс построения описан в предыдущем параграфе. Обозначим

$$x_{\omega,s}(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{s} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{s+n-1} \omega^{-i/2} v_i(\omega t).$$

5°. **Обоснование асимптотики**

Справедлив следующий результат.

Теорема 2.2. *Для любого $s = 0, 1, \dots$ найдутся такие положительные числа c_s, ω_s, что при $\omega > \omega_s$, справедлива оценка*

$$\|x_\omega - x_{\omega,s}\|_{C^k(R)} \leqslant c_s \omega^{-(s+1)/2},$$

где $k = [(n-1)/2]$. Построение приближения $x_{\omega,s}$ при известном векторе y_0 сводится к нахождению условно периодических с нулевым средним решений s уравнений вида $\frac{d^n y}{d\tau^n} = q(\tau)$, где $q(\tau)$ — известные условно периодические с нулевым средним вектор-функции вида (2.2) и к решению s систем линейных алгебраических уравнений с единой невырожденной основной матрицей
$\frac{\partial\Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \dots, 0)$ и известными свободными членами.

Доказательство практически полностью повторяет приведенное в предыдущем параграфе доказательство теоремы 1.2. Отличие в том, что теперь мы разыскиваем ограниченное решение системы

$$\dot{u} = Gu + f(u, t, \omega),$$

А для него при достаточно больших ω, как мы уже видели в §1, справедливо представление

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(t-s) f(u(s), s, \omega) ds \equiv [R(u,\omega)](t).$$

Здесь

$$G^* = \begin{cases} -S diag\left(e^{tJ_+}, 0\right) S^{-1}, & t < 0, \\ S diag\left(0, e^{tJ_-}\right) S^{-1}, & t > 0, \end{cases}$$

где S — невырожденная матрица такая, что

$$G = Sdiag(J_-, J_+)S^{-1},$$

а $J_\mp$ — матрицы жордановой формы, характеристические числа которых лежат в левой и, соответственно, правой открытой комплексной полуплоскости.

Оператор $R(u, \omega)$ обладает всеми необходимыми для продолжения доказательства свойствами.

§3. Условия повышения первого перестроечного показателя для нелинейного уравнения первого порядка

1°. **Постановка задачи и основные формулы**

Рассмотрим задачу Коши для нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \omega t) + \omega^\alpha \varphi(x, t, \omega t), \quad t \in [0, T], \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3.2}$$

Пусть N — натуральное, l и T — положительные числа, D — область пространства R^N, $\alpha \in (0, 1)$, ω — большой параметр, $x_0 \in D$. Пусть вектор-функции $f(x, t, \tau)$, $\varphi(x, t, \tau)$ определены на множестве $G \equiv D \times [0, T] \times [0, +\infty]$ и l-периодичны по τ, причём среднее вектор-функции $\varphi(x, t, \tau)$ по τ равно 0:

$$\langle \varphi(x, t, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{l} \int\limits_0^l \varphi(x, t, \tau) d\tau = 0.$$

Предположим ещё, что эти вектор-функции бесконечно дифференцируемы по x, а $\varphi(x, t, \tau)$ ещё и по t, и производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f(x, t, \tau), \quad \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \varphi(x, t, \tau), \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i + k = 0, 1, \ldots$$

непрерывны на множестве G.

Первым перестроечным показателем задачи (3.1), (3.2) называется такое значение показателя $\alpha = \alpha_0$ степени ω^α, что при возрастании α на участке $[0, \alpha_0]$ главный член асимптотики решения задачи может измениться лишь при $\alpha = \alpha_0$ [20]. Понятие перестроечного показателя было введено В. И.

Юдовичем [19]. Он определял его как значение параметра α, при переходе через которое вид асимптотики решительно меняется.

Обозначим $A_{00}(x,t,\tau)=\varphi(x,t,\tau)$, $B_0(x,t,\tau)$ — l-периодическое с нулевым средним решение задачи

$$\frac{\partial B_0(x,t,\tau)}{\partial\tau}=A_{00}(x,t,\tau).$$

В задаче (3.1), (3.2) проведём замену переменных Крылова-Боголюбова

$$x=x_1+\omega^{\alpha-1}B_0(x_1,t,\omega t)$$

В результате замены и формального разложения $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ в ряды Тейлора по первой переменной придём к задаче

$$\frac{dx_1}{dt}=f(x_1,t,\omega t)+\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{(k+1)\alpha-k}A_{1k}(x_1,t,\omega t)+\ldots,\tag{3.3}$$

$$x_1(0)=x_0+\ldots,\tag{3.4}$$

где

$$A_{1k}(x,t,\tau)=\sum_{k_1+\cdots+k_m=k}\frac{1}{k_1!\ldots k_m!}\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}}A_{00}(x,t,\tau)\left[B_0(x,t,\tau)\right]^k,\tag{3.5}$$

а многоточием обозначены слагаемые, пропорциональные заведомо отрицательным степеням ω. При $\alpha\leqslant 1/2$ к задаче (3.3), (3.4) можно применить классическию теорию усреднения. В этом случае легко видеть, что первый перестроечный показатель задачи равен $1/2$.

Предположим теперь, что дополнительно к сделанным предложениям выполнено равенство

$$A_{110}(x,t)\equiv\langle A_{11}(x,t,\tau)\rangle=0.\tag{3.6}$$

Проведём замену переменных

$$x_1=x_2+\omega^{2(\alpha-1)}B_1(x_2,t,\omega t),$$

где $B_1(x,t,\tau)$ — l-периодическое с нулевым средним решение задачи

$$\frac{\partial B_1(x,t,\tau)}{\partial\tau}=A_{11}(x,t,\tau).$$

В результате придём к задаче вида

$$\frac{dx_2}{dt}=f(x_2,t,\omega t)+\sum_{k=2}^{\infty}\omega^{(k+1)\alpha-k}A_{2k}(x_2,t,\omega t)+\ldots,$$

$$x_2(0) = x_0 + \dots,$$

где

$$A_{2k}(x,t,\tau) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j} \frac{1}{j_1!\dots j_m!} \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\dots x_m^{j_m}} A_{1,k-2j}(x,t,\tau)\left[B_1(x,t,\tau)\right]^j,$$

а многоточие имеет тот же смысл, что и в задаче (3.3), (3.4). Отсюда уже легко видеть, что в предположении (3.6) первый перестроечный показатель задачи (3.1), (3.2) равен 2/3.

Продолжая процесс, предположим наконец

$$A_{n-1,n-1,0}(x,t) \equiv \langle A_{n-1,n-1}(x,t,\tau)\rangle = 0. \tag{3.7}$$

После замены переменных

$$x_{n-1} = x_n + \omega^{2(\alpha-1)} B_{n-1}(x_n,t,\omega t),$$

где $B_{n-1}(x,t,\tau)$ — l-периодическое с нулевым средним решение задачи

$$\frac{\partial B_{n-1}(x,t,\tau)}{\partial \tau} = A_{n-1,n-1}(x,t,\tau),$$

придём к задаче вида

$$\frac{dx_n}{dt} = f(x_n,t,\omega t) + \sum_{k=n}^{\infty} \omega^{(k+1)\alpha-k} A_{nk}(x_n,t,\omega t) + \dots,$$

$$x_n(0) = x_0 + \dots,$$

где

$$A_{nk}(x,t,\tau) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-n+1}{n}\right]} \sum_{j_1+\dots+j_m=j} \frac{1}{j_1!\dots j_m!} \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\dots x_m^{j_m}} A_{n-1,k-nj}(x,t,\tau)\left[B_{n-1}(x,t,\tau)\right]^j, \tag{3.8}$$

а многоточие имеет тот же смысл, что и в задаче (3.3), (3.4). Итак, если выполнено n-1 равенство типа (3.6), (3.7): $A_{ii0}(x,t) = 0$, $i = 1,\dots,n-1$, то первый перестроечный показатель задачи (3.1), (3.2) равен $\frac{n}{n+1}$ (этот факт отмечен в [20]). При этом вектор-функции $A_{ii}(x,t,\tau)$ выражаются через вектор-функцию $\varphi(x,t,\tau)$ по формулам (3.5), (3.8).

2°. **Условия отсутствия первого перестроечного показателя**

1. Для простоты далее будем рассматривать скалярную задачу (3.1), (3.2) из п. 1. Справедлива следующая теорема

Теорема 3.1. *Задача (3.1), (3.2) для функции φ вида*

$$\varphi(x,t,\tau)=\varphi_1(x,t)\varphi_2(t,\tau),$$

где φ_1, φ_2 — бесконечно дифференцируемы по t, φ_1 еще и по x, все производные непрерывны на множестве G, а φ_2 — l-периодична по τ с нулевым средним, не имеет первого перестроечного показателя на участке $\alpha\in(0,1)$.

Замечу, что этот результат без доказательства ранее был сформулирован в [20]. Для доказательства теоремы достаточно показать $A_{ii0}(x,t)=0$ $\forall i\in N$. Отметим для начала простой факт:

$$\int f(\tau)\left(\int f(\tau)d\tau\right)^k d\tau=\frac{1}{k+1}\left(\int f(\tau)d\tau\right)^{k+1}+C,\quad C=const, \tag{3.9}$$

где $f(\tau)$ — непрерывная функция. Теперь учитывая структуру $\varphi(x,t,\tau)$ и (3.9) получаем $A_{110}(x,t)=0$, а $A_{1k}(x,t)$, согласно формуле (3.5), имеют такую же структуру, что и $\varphi(x,t,\tau)$. Из формул (3.8) и (3.9) следует что $A_{2k}(x,t)$ имеют структуру вида

$$A_{2k}=\sum_i a_i(x,t)\varphi_2(t,\tau)\left(\int\varphi_2(t,\tau)d\tau\right)^{q_i}, \tag{3.10}$$

где $q_i\geqslant 0$, значит $A_{220}(x,t)=0$. Предположим, что $A_{n-1,k}(x,t)$ имеют структуру (3.10), снова воспользуемся (3.8) и (3.9) и получим, что и $A_{n,k}(x,t)$ имеют структуру (3.10). Значит $A_{nn0}(x,t)=0$, и теорема доказана.

Рассмотрим класс функций вида

$$\varphi(x,t,\tau)=\sum_{j=1}^{p}a_j(x,t)cos\left(\frac{2\pi}{l}n_j\tau\right)+\sum_{j=1}^{q}b_j(x,t)sin\left(\frac{2\pi}{l}m_j\tau\right),$$

где $a_j(x,t)$, $b_j(x,t)$ — бесконечно дифференцируемые по x и по t функции; $n_j=n_{0j}2^{r_0}$, n_{0j} — нечётно, $r_0\in Z_+$; $m_j=m_{0j}2^{r_j}$, m_{0j} — нечётно, а $r_j\in Z_+$, $r_j>r_0$. Обозначим этот класс через $X(r_0)$. Справедлива

Лемма 3.1. *Пусть $\varphi(x,t,\tau)\in X(r_0)$, тогда $\forall k\in Z_+$*

$$g(x,t,\tau)\equiv\varphi(x,t,\tau)\left(\int\varphi(x,t,\tau)d\tau\right)^k\in X(r_0).$$

Значком $\int$ здесь обозначено l-периодическое с нулевым средним решение уравнения

$$\frac{\partial \psi(x,t,\tau)}{\partial \tau} = \varphi(x,t,\tau).$$

Действительно, получить $cos\left(\frac{2\pi}{l}\gamma\tau\right)$, $\gamma \in Z_+$ в разложении $g(x,t,\tau)$ мы можем двумя способами: взяв чётное число синусов из второй скобки и косинус из первой, взяв нечётное число синусов из второй скобки и синус из первой. В первом случае

$$\gamma = \alpha_i \pm \alpha_{i_1} \pm \dots \pm \alpha_{i_{2l}} \pm \beta_{j_1} \pm \dots \pm \beta_{j_m} = \gamma_0 2^{r_0},$$

где γ_0 — нечётно. Во втором

$$\gamma = \beta_i \pm \alpha_{i_1} \pm \dots \pm \alpha_{i_{2l+1}} \pm \beta_{j_1} \pm \dots \pm \beta_{j_m} = \gamma_0 2^{r_0},$$

где γ_0 — нечётно. Аналогично для $sin\left(\frac{2\pi}{l}\delta\tau\right)$ в разложении $g(x,t,\tau)$ имеем

$$\delta = \beta_i \pm \alpha_{i_1} \pm \dots \pm \alpha_{i_{2l}} \pm \beta_{j_1} \pm \dots \pm \beta_{j_m} = \delta_0 2^{q},$$

где δ_0 — нечётно, $q > r_0$, либо

$$\delta = \alpha_i \pm \alpha_{i_1} \pm \dots \pm \alpha_{i_{2l+1}} \pm \beta_{j_1} \pm \dots \pm \beta_{j_m} = \delta_0 2^{q},$$

где δ_0 — нечётно, $q > r_0$. Следовательно $g(x,t,\tau) \in X(r_0)$.

Теорема 3.2. *Пусть при каком-то неотрицательном r_0 $\varphi(x,t,\tau) \in X(r_0)$, тогда задача (3.1), (3.2) не имеет первого перестроечного показателя на участке $\alpha \in (0,1)$.*

Доказательство теоремы следует из структуры A_{ii}, указанной в теореме 3.1, и леммы 3.1.

2. Рассмотрим множество функций вида

$$\varphi(x,t,\tau) = a(x,t)p(\tau) + b(x,t)q(\tau), \tag{3.11}$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$ — бесконечно дифференцируемые по x и по t функции, у которых все корни изолированы $\forall t$; $p(\tau)$, $q(\tau)$ — l-периодические тригонометрические полиномы.

Теорема 3.3. *Если $\varphi(x,t,\tau)$ имеет вид (3.11), то задача (3.1), (3.2) не имеет первого перестроечного показателя на участке $\alpha \in (0,1)$ при любых $p(\tau)$, $q(\tau)$ таких, что $\varphi \notin X(r_0)$ $\forall r_0 \in Z_+$, тогда и только тогда, когда $\varphi(x,t,\tau) = \varphi_1(x,t)\varphi_2(\tau)$.*

Требуется доказать лишь необходимость. Выберем $p(\tau) = cos\left(\frac{2\pi}{l}\tau\right)$, $q(\tau) = sin\left(\frac{2\pi}{l}\tau\right)$. Воспользуемся формулами (3.5), (3.6) и придём для любого t к равенству

$$\frac{da(x,t)}{dx}b(x,t) = \frac{db(x,t)}{dx}a(x,t).$$

Для всех x, таких что $b(x,t) \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a(x,t)}{b(x,t)}\right) = 0,$$

отсюда

$$a(x,t) = cb(x,t).$$

Для остальных x последнее получается по непрерывности, значит

$$\varphi(x,t,\tau) = b(x,t)(cp(\tau) + q(\tau)).$$

§4. Применение теории возмущений Богаевского-Повзнера

Некоторые основные моменты, связанные с нелинейной теорией возмущений, изложены в Приложении.

1°. **Усреднение нелинейного уравнения произвольного порядка**

Приведём здесь ещё один способ построения предельной задачи для (1.1). Рассмотрим задачу более частного вида, чем (1.1)

$$x^{(n)} = f_0(x,\omega t) + \omega^{\frac{n}{2}} f_1(x,\omega t).$$

Здесь n — натуральное число, l — положительное, ω — большой параметр. $f_0(x,\tau)$, $f_1(x,\tau)$ заданы на R^2, достаточно гладкие и l - периодичны по τ, кроме того

$$\langle f_1(x,\tau)\rangle \equiv \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x,\tau)d\tau = 0.$$

Перепишем её в виде автономной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x_1} = x_2,$$

$$\cdots,$$

$$\dot{x_{n-1}} = x_n,$$

$$\dot{x_n} = f_0(x_1, \tau) + \omega^{\frac{n}{2}} f_1(x_1, \tau),$$

$$\dot{\tau} = \omega.$$

Сделаем замену $\epsilon = \frac{1}{\omega^{n/2}}$ и система примет вид

$$\epsilon^n \dot{x_1} = \epsilon^n x_2,$$

$$\cdots,$$

$$\epsilon^n \dot{x_{n-1}} = \epsilon^n x_n,$$

$$\epsilon^n \dot{x_n} = f_1(x_1, \tau) + \epsilon^n f_0(x_1, \tau),$$

$$\epsilon^n \dot{\tau} = \epsilon^{n-2}$$

Запишем дифференциальный оператор первого порядка для которого данная система является характеристической

$$X = f_n(x_1, \tau)\frac{\partial}{\partial x_n} + \epsilon^{n-2}\frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon^n \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + f_0(x_1, \tau)\frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Далее, применяя подход изложенный в [25], в частности нелинейное срезающее преобразование, построим новый дифференциальный оператор первого порядка

$$Y = \epsilon^{n-2}\tfrac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon^n \Big(x_2 \tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \tfrac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \\ \Big\langle f_0(x_1, \tau) + \tfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, \tau)\varphi_n(x_1, \tau) \Big\rangle \tfrac{\partial}{\partial x_n} \Big) + \ldots,$$

где φ_n — l - периодическое с нулевым средним решение уравнения

$$\frac{\partial^n}{\partial \tau^n}\varphi(x_1, \tau) = f_n(x_1, \tau).$$

Построенная для него характеристическая система совпадает с предельной системой для исходного уравнения:

$$y^{(n)} = \left\langle f_0(y,\tau) + \frac{\partial f_n}{\partial y}(y,\tau)\varphi_n(y,\tau) \right\rangle.$$

2°. Усреднение нелинейного уравнения с параметром большим первого перестроечного показателя

В §3 мы установили, что в общем случае, первым перестроечным показателем для задачи первого порядка (3.1), (3.2) при $n = 1$ является $\alpha = \frac{1}{2}$; аналогично, легко показать, что для задачи n-го порядка первый перестроечный показатель равен $\alpha = \frac{n}{2}$.

Мы можем применить описанный выше способ для построения предельной задачи для уравнения

$$x^{(n)} = f_0(x,\omega t) + \omega^{\frac{n+1}{2}} f_1(x,\omega t). \tag{4.1}$$

Здесь l — положительное, ω — большой параметр. $f(x,\tau)$, $g(x,\tau)$ заданы на R^2, достаточно гладкие и l - периодичны по τ, кроме того

$$\langle g(x,\tau)\rangle \equiv \frac{1}{l}\int\limits_0^l g(x,\tau)d\tau = 0.$$

Отметим что уравнение (4.1) существенно отличается от (1.1) наличием слагаемого пропорционального $\omega^{\frac{n+1}{2}}$, т. е. параметр α этой задачи больше первого перестроечного показателя. Для простоты рассмотрим случай $n = 3$:

$$x^{(3)} = f_0(x,\omega t) + \omega^2 f_1(x,\omega t).$$

Перепишем уравнение в виде автономной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x_1} = x_2,$$

$$\dot{x_2} = x_3,$$

$$\dot{x_3} = f_0(x_1,\tau) + \omega^2 f_1(x_1,\tau),$$

$$\dot{\tau} = \omega.$$

Сделаем замену $\epsilon = \frac{1}{\omega}$ и система примет вид

$$\epsilon^2 \dot{x}_1 = \epsilon^2 x_2,$$

$$\epsilon^2 \dot{x}_2 = \epsilon^2 x_3,$$

$$\epsilon^2 \dot{x}_3 = f_1(x_1, \tau) + \epsilon^2 f_0(x_1, \tau),$$

$$\epsilon^2 \dot{\tau} = \epsilon.$$

Запишем дифференциальный оператор первого порядка для которого данная система является характеристической

$$X = f_1(x_1, \tau)\frac{\partial}{\partial x_3} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon^2 \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_0(x_1, \tau)\frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Проведя замену переменных

$$y_3 = x_3 - \frac{1}{\epsilon}\varphi_1(x_1, \tau),$$

где $\varphi_1(x_1, \tau)$ — l-периодическое с нулевым средним по τ решение задачи

$$\frac{d}{d\tau} v(x_1, \tau) = f_1(x_1, \tau),$$

получим оператор

$$X = \epsilon \left(\tfrac{\partial}{\partial \tau} + \varphi(x_1, \tau)\tfrac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \tfrac{\partial \varphi_1(x_1,\tau)}{\partial x_1}\tfrac{\partial}{\partial y_3} \right) + \\ + \epsilon^2 \left(x_2 \tfrac{\partial}{\partial x_1} + y_3 \tfrac{\partial}{\partial x_2} + f_0(x_1, \tau)\tfrac{\partial}{\partial y_3} \right).$$

На следующем заменим переменные

$$z_2 = x_2 - \varphi_2(x_1, \tau),$$

где $\varphi_2(x_1, \tau)$ — l-периодическое с нулевым средним по τ решение задачи

$$\frac{d}{d\tau} v(x_1, \tau) = \varphi_1(x_1, \tau)$$

и

$$z_3 = y_3 + x_2 \frac{\partial \varphi_2(x_1, \tau)}{\partial x_1} - \psi_1(x_1, \tau),$$

где $\psi_1(x_1, \tau)$ — l-периодическое с нулевым средним по τ решение задачи

$$\frac{d}{d\tau} v(x_1, \tau) = \varphi_1(x_1, \tau)\frac{\partial \varphi_2(x_1, \tau)}{\partial x_1}.$$

Оператор X примет вид

$$X = \epsilon\frac{\partial}{\partial\tau} + \epsilon^2\left(\left(z_2+\varphi_2(x_1,\tau)\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \right.$$

$$+\left(z_3+\psi_1(x_1,\tau)-2\tfrac{\partial\varphi_2(x_1,\tau)}{\partial x_1}\left(z_2+\varphi_2(x_1,\tau)\right)\right)\frac{\partial}{\partial z_2}+$$

$$+\left(\left(z_2+\varphi_2(x_1,\tau)\right)^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(z_3+\psi_1(x_1,\tau)-\tfrac{\partial\varphi_2(x_1,\tau)}{\partial x_1}\left(z_2+\varphi_2(x_1,\tau)\right)\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+f_0(x_1,\tau)\right)\frac{\partial}{\partial z_3}\right).$$

Далее, преобразуем его, используя в качестве ведущего оператор $X_0 = \epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}$

$$Y = \epsilon\frac{\partial}{\partial\tau} + \epsilon^2\left(z_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \right.$$

$$+\left(z_3-\left\langle 2\tfrac{\partial\varphi_2(x_1,\tau)}{\partial x_1}\varphi_2(x_1,\tau)\right\rangle\right)\frac{\partial}{\partial z_2}+$$

$$+\left\langle\left(z_2+\varphi_2(x_1,\tau)\right)^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}-\right.$$

$$\left.\left.-\left(\tfrac{\partial\varphi_2(x_1,\tau)}{\partial x_1}\right)^2\left(z_2+\varphi_2(x_1,\tau)\right)+f_0(x_1,\tau)\right\rangle\frac{\partial}{\partial z_3}\right).$$

Построенная для него характеристическая система имеет вид

$$\dot{x_1} = z_2,$$

$$\dot{z_2} = z_3 - \left\langle 2\tfrac{\partial\varphi_2(x_1,\omega t)}{\partial x_1}\varphi_2(x_1,\omega t)\right\rangle,$$

$$\dot{z_3} = \left\langle\left(z_2+\varphi_2(x_1,\omega t)\right)^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}-\right.$$

$$\left.-\left(\tfrac{\partial\varphi_2(x_1,\omega t)}{\partial x_1}\right)^2\left(z_2+\varphi_2(x_1,\omega t)\right)+f_0(x_1,\omega t)\right\rangle.$$

Таким образом, следующее уравнение является предельным для исходного

$$y^{(3)} = \left\langle f_0(y,\omega t)-\left(\tfrac{\partial\varphi_2(y,\omega t)}{\partial y}\right)^2\left(\dot{y}+\varphi_2(y,\omega t)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\left(\dot{y}+\varphi_2(y,\omega t)\right)^2\right\rangle.$$

Отметим, что методика замен Крылова-Боголюбова в этом случае не приводит нас к построению предельной задачи. Действительно, здесь после первой классической замены новое большое слагаемое порядка ω может иметь ненулевое среднее.

Глава II. Дифференциальные уравнения в частных производных с оператором Стокса в главной части и вырождением

В данной главе рассматривается задача о периодических по времени решениях для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с оператором Стокса в главной части следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla p=\Delta u+D(x)u+\frac{1}{\omega}C_0(x)u+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\left(M_k(x)u+d_k(x)\right)e^{ik\omega t}+d_0(x), \tag{0.1}$$

$$\operatorname{div} u=0 \tag{0.2}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega}=0. \tag{0.3}$$

Здесь ω — большой параметр. В §1-§3 построена и обоснована асимптотика такого решения при различных типах вырождения. В §1 собственная вектор-функция a_0, отвечающая простому собственному значению $\lambda=0$ старшего операторного коэффициента A, не имеет присоединенных вектор-функций относительно соответствующей пары операторов A, B. В §2 собственная вектор-функция a_0, отвечающая простому собственному значению $\lambda=0$ старшего операторного коэффициента A, имеет одну присоединенную вектор-функцию a_1 относительно пары операторов A, B и не имеет присоединенных вектор-функций относительно тройки операторов A, B, C. В §3 собственное значение $\lambda=0$ старшего операторного коэффициента A является n-кратным, ему отвечает набор из s, $1\leqslant s\leqslant n$, линейно независимых собственных вектор-функций a_1, a_2, ..., a_s, и каждая собственная вектор-функция, отвечающая нулевому собственному значению, не имеет присоединенных вектор-функций относительно соответствующей пары операторов A, B. Доказательство основных результатов главы в каждом параграфе содержит подробное описание базирующегося на методе пограничного слоя [49] эффективного алгоритма построения полной формальной асимптотики и обоснование этой асимптотики. Схема обоснования включает следующие этапы: замены переменных типа классической замены Крылова-Боголюбова (такие замены использовались ранее в [50] –

[52]); спектральный анализ полученного в результате замены стационарного операторного коэффициента (используется теория Като-Реллиха [53]); разложение основного пространства H^0 в прямую сумму одномерного собственного подпространства оператора A_ω, отвечающего собственному вектору $\lambda_\omega \to 0$, и некоторого его дополнения; проектирование полученных в результате указанных замен переменных уравнений на эти подпространства; переход от системы дифференциальных уравнений с малым периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ к системе интегральных уравнений, используя формулу Грина задачи с кратным периодом $T_\omega = O(1)$, $\omega \to \infty$ (см, например [51, 52]); исследование полученных интегральных уравнений с помощью теории полугрупп и дробных степеней операторов [54]. Результаты данной главы опубликованы в работах [36, 37, 38].

§1. Случай простого собственного значения и отсутствия обобщенных присоединенных вектор-функций

1°. Формулировка основного результата

Пусть Ω — ограниченная область в R^3 со сколь угодно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \in N$, $\omega \gg 1$. В бесконечном цилиндре $Q = \Omega \times R$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$-периодических по времени t решениях системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \Delta u + D(x)u + \frac{1}{\omega}C(x)u + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \left(M_k(x)u + d_k(x)\right) e^{ik\omega t} + d_0(x), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{1.2}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in R$, $u = u(x,t)$ — неизвестная вещественная трехмерная функция,

$$D(x)u = \int\limits_\Omega B_0(x,y)u(y)dy + B_1(x)u,$$

$B_0(x,y)$, $B_1(x)$, $C(x)$, $M_k(x)$ и $d_0(x)$, $d_k(x)$ — известные бесконечно гладкие матрицы-функции и вектор-функции соответственно, причем $D(x)$, $C(x)$ и $d_0(x)$ — вещественные, а $M_k(x)$, $d_k(x)$ комплексно сопряжены с $M_{-k}(x)$,

$d_{-k}(x)$ соответственно. Символ Δ, используемый обычно в скалярном случае, отождествляется здесь с матричным выражением (формальным произведением) ΔE, где E — единичная матрица третьего порядка.

Отметим, что в задаче (1.1)–(1.3) и других задачах данной диссертации с оператором Стокса в главной части функция p (давление) определена с точностью до не зависящего от x слагаемого. В связи с этим, говоря о решении такой задачи, под его компонентой p мы понимаем любую из функций указанного семейства. Единственность такой компоненты понимается тоже с точностью до аддитивной, не зависящей от x функции.

Символом $S_2(\Omega)$ будем обозначать замыкание по норме $L_2(\Omega)$ множества непрерывно дифференцируемых вещественных вектор-функций u, имеющих на $\partial\Omega$ равную нулю нормальную компоненту и удовлетворяющих условию $\operatorname{div} u = 0$, т. е. соленоидальных. Символом Π обозначим известный ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $S_2(\Omega)$ (см. [39], [40]).

Введем теперь, действующий в $S_2(\Omega)$, оператор $A = \Pi(\Delta + D(x))$ с областью определения

$$D(A) = \left\{u \in S_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

и выражение

$$B = \Pi C(x) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \frac{\Pi M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik}.$$

Предположим, что $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A. Пусть соответствующая ему собственная вектор-функция $a_0(x)$ не имеет присоединенных вектор-функций относительно пары операторов A, B [32], т. е. задача

$$Av(x) = -Ba_0(x), \tag{1.4}$$

$$v(x)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.5}$$

не имеет классических решений. Согласно альтернативе Фредгольма, последнее равносильно соотношению $(Ba_0(x), b_0(x)) \neq 0$, где $b_0(x)$ — ненулевое решение уравнения $A^*z(x) = 0$, A^* — оператор сопряженный к A. Здесь и далее символом $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в комплексном пространстве $L^2(\Omega)$.

Замечание 1.1. *Отметим один случай слагаемого D, при котором спектр оператора A имеет простое нулевое собственное значение. За-*

метим, что при $D = 0$ спектр оператора A в $S_2(\Omega)$ состоит из дискретного набора вещественных собственных значений, которые являются, вообще говоря, кратными [39], [40]. Пусть μ_0 — какое-либо собственное значение, которому отвечает ортонормированный набор собственных вектор-функций: $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что при $Du = \delta(u, e_1)e_1$ оператор $\Pi(\Delta + D - (\mu_0 + \delta)\mu_0 I)$ имеет простое нулевое собственное значение.

Действительно, оператор $\Pi(\Delta+D)$ имеет собственное значение $\mu_1 = \mu_0+\delta$, которому отвечает собственная вектор-функция e_1. Будем искать собственные вектор-функции, отвечающие μ_1 в виде $u = ce_1 + u_0$, где $(u_0, e_1) = 0$. Для нахождения u_0 получаем уравнение $\Pi(\Delta + D)u_0 = \mu_1 u_0$, и если выбрать δ таким, что $\mu_1 \notin \sigma(\Pi\Delta)$, то $u_0 = 0$ и e_1 является единственным.

К тому же задача $\Pi(\Delta+D)v = \mu_1 v+e_1$ неразрешима, т. к. представив v в виде $v = ce_1 + v_0$, где $(v_0, e_1) = 0$, умножив скалярно обе части задачи на e_1 и использовав самосопряженность оператора $\Pi(\Delta+D)$, мы получим противоречие, т. е. e_1 не имеет присоединенных вектор-функций.

С целью использования в дальнейшем метода пограничного слоя [49] перейдем в некоторой окрестности Ω_0 границы $\partial\Omega$ области Ω к криволинейным координатам следующим образом. Через каждую точку $x \in \partial\Omega$ проведем внутреннюю нормаль, причем окрестность Ω_0 будем считать настолько малой, что нормали в ней не пересекаются. В окрестности Ω_0 положим $x = (\psi_1, \psi_2, r)$, где r расстояние от x до границы $\partial\Omega$ по нормали, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — координаты соответствующей точки границы. Проведем теперь замену $\rho = r\sqrt{\omega}$.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи (1.1)-(1.3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_\omega(x,t) = \omega c_{-2} a_0(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + \\ + c_k a_0(x) + y_k(x,\omega t) + z_k(\psi,\rho,\omega t)], \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$p_\omega(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [p_k(x) + \omega^{\frac{1}{2}} s_{k-1}(\psi,\rho) + \omega m_{k-2}(x,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} n_{k-1}(\psi,\rho,\omega t)]. \tag{1.7}$$

Здесь u_k, y_k, p_k, m_k — регулярные, а v_k, z_k, s_k, n_k — погранслойные вектор-функции (см. [49]), причем y_k, z_k, n_k являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним, т. е.

$$\langle y_k\rangle(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} y_k(x,\tau)d\tau = 0,$$
$$\langle z_k\rangle(\psi,\rho) = 0.$$

Погранслойные функции вначале определяются при $x \in \Omega_0$, а затем продолжаются нулем во внутрь области Ω и умножаются на соответствующую срезающую бесконечно дифференцируемую в Ω функцию.

Формулировке основного результата работы предпошлем ряд обозначений. Задачей (A) назовем задачу Дирихле в $\bar{\Omega}$ вида

$$\begin{cases} (\Delta + D)u(x) + \nabla p(x) = G(x), \\ \operatorname{div} u(x) = 0, \\ (u(x), b_0(x)) = 0, \\ (\Pi G(x), b_0(x)) = 0, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $G \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $(G, b_0) = 0$. Задачей (B) — задачу Неймана в $\bar{\Omega}$

$$\begin{cases} \Delta m(x) = G(x), \\ \frac{\partial m(x)}{\partial n}(0) = 0, \end{cases}$$

где $\int\limits_\Omega G(x)dx = 0$. Задачей (C) — задачу о 2π-периодических по τ решениях

$$\begin{cases} \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} = G(x)e^{il\tau}, \\ \langle y(\tau)\rangle = 0, \end{cases}$$

где l — целое число. Задачей (D) — задачу на луче $\rho \geqslant 0$ вида

$$\begin{cases} ikz(\rho) = \frac{\partial^2 z(\rho)}{\partial \rho^2} + g(\rho), \\ z(\rho)|_{\rho=0} = c, \\ z(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где k — ненулевое целое число, $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$, c — вещественное число. Задачей (E) — задачу на луче $\rho \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial \rho^2} = g(\rho), \\ v(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. Задачей (F) — задачу на луче $\rho \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial s(\rho)}{\partial\rho} = g(\rho), \\ s(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. В перечисленных задачах G, g — известные вектор-функции указанного типа. Очевидно, задачи (A) - (F) однозначно разрешимы, если в случае задачи (A) единственность p понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Символами u_ω^n и p_ω^n обозначим частичные суммы рядов (1.6) и (1.7), формально заменив в (1.6) и (1.7) ∞ на n и $2(n+1)$ соответственно; символом $C_{x,t}^{l,l/2}$, где $l \geqslant 0$ обозначим обычные гельдеровы пространства вектор-функций заданных в цилиндре $\Omega \times R$.

Теорема 1.1. *Существует такое число ω_0, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения. 1. Задача (1.1)-(1.3) имеет единственное $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое по t решение $(u_\omega(x,t), p_\omega(x,t))$, которое является вещественным и бесконечно дифференцируемым. 2. Построение вектор-функций u_ω^n, p_ω^n при каждом $n \geqslant -1$ сводится к решению конечного числа задач вида (A) - (F). 3. Для любого $l \geqslant 0$ и любого целого $n \geqslant -1$ справедливы оценки*

$$\|u_\omega - u_\omega^n\|_{C_{x,t}^{l,l/2}} \leqslant c_{n,l}\omega^{-(n+1)+l/2},$$
$$\|\nabla p_\omega - \nabla p_\omega^n\|_{C_{x,t}^{l,l/2}} \leqslant d_{n,l}\omega^{-n+l/2},$$

где $c_{n,l}$, $d_{n,l} = const > 0$.

2°. Построение асимптотики

Воспользуемся известными (см., например, [55], [56]) соотношениями для операторов Δ, ∇, div в криволинейных координатах (ψ_1, ψ_2, r), и, положив $\rho = r\sqrt{\omega}$, придем к разложениям:

$$(\Delta + D)u = \sum_{k=-2}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} L_k(\psi,\rho)u, \tag{1.8}$$

(символ Δ здесь отождествляется с матричным выражением (формальным произведением) ΔE, где E — единичная матрица третьего порядка),

$$\operatorname{div} u = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \frac{\partial u^{(3)}}{\partial\rho} - \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [D_{k,1}(\psi,\rho)u^{(1)} + D_{k,2}(\psi,\rho)u^{(2)} + D_{k,3}(\psi,\rho)u^{(3)}],$$

$$(1.9)$$

$$\nabla p = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} P_k(\psi, \rho) p. \tag{1.10}$$

Здесь $P_{-1}(\psi, \rho)p = \left(0, 0, \frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^T$, $L_{-2}(\psi, \rho)u = \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \rho^2}, 0\right)^T$, а остальные P_k, L_k, $D_{j,k}$ — интегро-дифференциальные выражения относительно (ψ, ρ) с равномерно ограниченными относительно (ψ, ρ) коэффициентами, $u^{(i)}$, $i = 1, 2, 3,$ — i-ая криволинейная координата вектора u.

Действительно,

$$\begin{gathered}
D_0 u \equiv \int\limits_{\Omega_0} B_0(x, y) u(\varphi^{-1}(y)) dy = \\
= \int\limits_{\Omega_{0,1}} B_0(\varphi(\psi, r), \varphi(\psi_y, r_y)) u(\psi_y, r_y) |J(\psi_y, r_y)| d\psi_y dr_y = \\
= \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\limits_{\Omega_{0,2}} B_0(\varphi(\psi, \tfrac{\rho}{\sqrt{\omega}}), \varphi(\psi_y, \tfrac{\rho_y}{\sqrt{\omega}})) u(\psi_y, \tfrac{\rho_y}{\sqrt{\omega}}) |J(\psi_y, \tfrac{\rho_y}{\sqrt{\omega}})| d\psi_y d\rho_y \equiv \\
\equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\limits_{\Omega_{0,2}} S(\psi, \tfrac{\rho}{\sqrt{\omega}}, \psi_y, \tfrac{\rho_y}{\sqrt{\omega}}) u(\psi_y, \tfrac{\rho_y}{\sqrt{\omega}}) d\psi_y d\rho_y,
\end{gathered} \tag{1.11}$$

где φ - гладкое взаимнооднозначное отображение криволинейных координат в исходные, J — матрица Якоби отображения φ по переменным (ψ_1, ψ_2, r), а $\Omega_{0,1}$, $\Omega_{0,2}$ — отображения области Ω_0 после замены переменных. Разложим S в ряд Тейлора в окрестности 0 при $\omega \to \infty$ по последней переменной, подставим разложение в (1.11) и получим:

$$\begin{gathered}
D_0 u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{\omega^{(j+1)/2}} \int\limits_{\partial\Omega} S_j(\psi, \tfrac{\rho}{\sqrt{\omega}}, \psi_y, 0) d\psi_y \int\limits_0^{\varepsilon\sqrt{\omega}} \rho_y^j d\rho_y = \\
= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{(j+1)}}{(j+1)!} \int\limits_{\partial\Omega} S_j(\psi, \tfrac{\rho}{\sqrt{\omega}}, \psi_y, 0) d\psi_y \equiv S'(\psi, \tfrac{\rho}{\sqrt{\omega}}),
\end{gathered} \tag{1.12}$$

где $S_j(\psi, r, \psi_y, r_y) = \frac{\partial^j}{\partial r_y^j}(S(\psi, r, \psi_y, r_y) u(\psi_y, r_y))$. Разложим S' в ряд Тейлора в окрестности 0 при $\omega \to \infty$ по последней переменной и подставим разложение в (1.12):

$$D_0 u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\rho^k}{\omega^{k/2}} S'_k(\psi, 0),$$

где $S'_k(\psi, r) = \frac{\partial^k}{\partial r^k} S'(\psi, r)$, таким образом мы доказали справедливость разложения (1.8).

Подставим ряды (1.6) и (1.7) в уравнения (1.1), (1.2) и граничное условие (1.3), сделав предварительно замену переменной $\tau = \omega t$:

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{\frac{2-k}{2}} \left(\tfrac{\partial y_k(x,\tau)}{\partial \tau} + \tfrac{\partial z_k(\psi,\rho,\tau)}{\partial \tau}\right) +$$
$$+ \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \nabla[p_k(x) + \omega^{\frac{1}{2}} s_{k-1}(\psi,\rho) + \omega m_{k-2}(x,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} n_{k-1}(\psi,\rho,\omega t)] =$$
$$= \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} (\Delta + D(x))(u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + y_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau)) +$$
$$+ c_{-2} C(x) a_0(x) +$$
$$+ \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k+2}{2}} C(x)(u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + c_k a_0(x) + y_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau)) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant |k| \leqslant m} \Bigg(\omega c_{-2} M_k a_0(x) + \sum_{i=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{i}{2}} M_k[u_i(x) + v_i(\psi,\rho) +$$
$$+ c_i a_0(x) + y_i(x,\tau) + z_i(\psi,\rho,\tau)] + d_k(x)\Bigg) e^{ik\tau} + d_0(x), \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \operatorname{div}[u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + \\ + c_k a_0(x) + y_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau)] = 0, \end{gathered} \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + \\ + c_k a_0(x) + y_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau)]|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{1.15}$$

В равенствах (1.13)-(1.15) с учетом представлений (1.8)-(1.10) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω отдельно для регулярных и погранслойных функций. Получим бесконечную последовательность задач. Выпишем первые из них. Из уравнений (1.9), (1.14) для погранслойных функций получим

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial \rho} = 0, \\ z_{-1}^{(3)}|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho)}{\partial \rho} = 0, \\ v_{-1}^{(3)}|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

так что $z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) \equiv 0$, $v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho) \equiv 0$. Из уравнений (1.13)-(1.14) для регулярных функций находим

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{-1}(x,\tau)}{\partial \tau} + \nabla m_{-3}(x,\tau) = 0, \\ \operatorname{div} y_{-1} = 0, \\ y_{-1n}|_{\partial\Omega} = -z_{-1}^{(3)}|_{\partial\Omega}|_{\rho=0} = 0, \\ \langle y_{-1} \rangle = \langle m_{-3} \rangle = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Нижним индексом n мы обозначаем проекцию вектора на внутреннюю нормаль к $\partial\Omega$. Положим $y_{-1} = 0$, $m_{-3} = 0$. Для погранслойных функций имеем:

$$\frac{\partial z_{-1}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = L_{-2}(\psi,\rho)(z_{-1}(\psi,\rho,\tau) + v_{-1}(\psi,\rho)) - P_{-1}(s_{-2}(\psi,\rho) + n_{-2}(\psi,\rho,\tau)),$$
$$\langle z_{-1}\rangle = \langle n_{-2}\rangle = 0.$$

Применяя к последнему равенству операцию усреднения и учитывая граничные условия, получим следующие четыре задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau), \\ \langle z_{-1}^{(i)}\rangle = 0, \\ z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho=0} = -y_{-1}^{(i)} = 0, \\ z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2, \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v_{-1}^{(i)}(\psi,\rho) = 0, \\ v_{-1}^{(i)}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2, \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} s_{-2}(\psi,\rho) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho) = 0, \\ s_{-2}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} n_{-2}(\psi,\rho,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau} z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) = 0, \\ \langle n_{-2}\rangle = 0, \\ n_{-2}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Из соотношений (1.17)-(1.20) находим $z_{-1}^{(1,2)} \equiv 0$, $v_{-1}^{(1,2)} \equiv 0$, $s_{-2} \equiv 0$, $n_{-2} \equiv 0$.

Приравняем коэффициенты при степени ω. Снова из уравнения (1.14) получим

$$\frac{\partial z_0^{(3)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\rho} = D_{-1,1}(\psi,\rho) z_{-1}^{(1)}(\psi,\rho,\tau) + D_{-1,2}(\psi,\rho) z_{-1}^{(2)}(\psi,\rho,\tau) +$$
$$+ D_{-1,1}(\psi,\rho) z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau),$$

$$\frac{\partial v_0^{(3)}(\psi,\rho)}{\partial\rho} = D_{-1,1}(\psi,\rho) v_{-1}^{(1)}(\psi,\rho) + D_{-1,2}(\psi,\rho) v_{-1}^{(2)}(\psi,\rho) + D_{-1,1}(\psi,\rho) v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho).$$

Откуда найдем $z_0^{(3)}(\psi,\rho,\tau)$ и $v_0^{(3)}(\psi,\rho)$. Для регулярных функций

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0(x,\tau)}{\partial\tau} + \nabla m_{-2}(x,\tau) = \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m} c_{-2} M_k a_0(x) e^{ik\tau}, \\ \operatorname{div} y_0 = 0, \\ y_{0n}|_{\partial\Omega} = -z_0^{(3)}|_{\partial\Omega}|_{\rho=0} = 0, \\ \langle y_0\rangle = \langle m_{-2}\rangle = 0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \Delta m_{-2}(x,\tau) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial y_0(x,\tau)}{\partial \tau} - c_{-2} \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m} M_k a_0(x) e^{ik\tau}\right) = 0, \\ \frac{m_{-2}(x,\tau)}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \left\{\frac{\partial y_0(x,\tau)}{\partial \tau} - c_{-2} \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m} M_k a_0(x) e^{ik\tau}\right\}_n, \\ \langle m_{-2}\rangle = 0, \end{cases} \tag{1.22}$$

где n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$. Теперь легко найдем m_{-2} из задачи (1.22) и y_0 из задачи (1.21), зависящие от коэффициента c_{-2}. При этом $y_0(x,\tau) = c_{-2} \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m} \frac{M_k}{ik} a_0(x) e^{ik\tau}$. Из основного уравнения (1.13) для погранслойных функций получим

$$\frac{\partial z_0(\psi,\rho,\tau)}{\partial \tau} = L_{-2}(\psi,\rho)[z_0(\psi,\rho,\tau) + v_0(\psi,\rho)] -$$
$$-P_{-1}(\psi,\rho)[s_{-1}(\psi,\rho) + n_{-1}(\psi,\rho,\tau)] + q_0(\psi,\rho) + q_1(\psi,\rho,\tau),$$
$$\langle z_0\rangle = \langle n_{-1}\rangle = 0,$$

где q_0, q_1 — известные погранслойные вектор-функции, причем q_1 является 2π-периодической с нулевым средним по τ. Применяя операцию усреднения и учитывая граничные условия, получим задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial z_0^{(i)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} z_0^{(i)}(\psi,\rho,\tau) + q_1(\psi,\rho,\tau), \\ \langle z_0^{(i)}\rangle = 0, \\ z_0^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho=0} = -y_0^{(i)}, \\ z_0^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2, \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} v_0^{(i)}(\psi,\rho) = q_0(\psi,\rho), \\ v_0^{(i)}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2, \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} s_{-1}(\psi,\rho) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} v_0^{(3)}(\psi,\rho), \\ s_{-1}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} n_{-1}(\psi,\rho,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} z_0^{(3)}(\psi,\rho,\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau), \\ \langle n_{-1}\rangle = 0, \\ n_{-1}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Так найдем первые две компоненты вектора z_0, зависящие от неизвестного пока коэффициента c_{-2}, а также $v_0^{(1,2)}$ и s_{-1}.

Приравняем теперь коэффициенты при $\omega^{\frac{1}{2}}$. Для регулярных функций имеем

$$\frac{\partial y_1(x,\tau)}{\partial\tau} + \nabla[p_{-1}(x) + m_{-1}(x,\tau)] =$$
$$= (\Delta + D)u_{-1}(x) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} M_k(u_{-1}(x) + c_{-1}a_0(x))e^{ik\tau},$$

применим операцию усреднения, получим задачу для u_{-1}

$$\begin{cases} (\Delta + D)u_{-1}(x) = \nabla p_{-1}(x), \\ \operatorname{div} u_{-1}(x) = 0, \\ (u_{-1}(x), b_0(x)) = 0, \\ u_{-1}(x)|_{\partial\Omega} = v_{-1}|_{\rho=0} = 0. \end{cases}$$

К задачам для последовательного нахождения z_1^3, v_1^3, m_{-1}, y_1, $z_1^{(1,2)}$, $v_3^{(1,2)}$, s_0 и n_0 вернемся после нахождения неизвестного коэффициента c_{-2}.

Теперь приравняем коэффициенты при ω^0

$$\frac{\partial y_2(x,\tau)}{\partial\tau} + \nabla[p_0(x) + m_0(x,\tau)] = (\Delta + D)(u_0(x) + y_0(x,\tau)) + c_{-2}(C(x)+$$
$$+ \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \frac{M_k(x)M_{-k}(x)}{ik})a_0(x)+$$
$$+ \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} (M_k(u_0(x) + c_0a_0(x) + y_0(x,\tau)) + d_k)e^{ik\tau} + d_0(x),$$

применим операцию усреднения

$$\begin{cases} -(\Delta + D)u_0(x) + \nabla p_0(x) = c_{-2}(C(x) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \frac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik})a_0(x) + d_0(x), \\ \operatorname{div} u_0(x) = 0, \\ (u_0(x), b_0(x)) = 0, \\ u_0(x)|_{\partial\Omega} = v_0(\psi, 0). \end{cases}$$

Избавимся от неоднородности в граничном условии, подействуем проектором Вейля, и в качестве условия разрешимости для этой задачи получим

$$(c_{-2}(C(x) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \frac{M_k(x)M_{-k}(x)}{ik})a_0(x) + f_0(x), b_0(x)) = 0,$$

$$c_{-2} = -\frac{(f_0(x), b_0(x))}{((C(x) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \frac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik})a_0(x), b_0(x))}.$$

Здесь $f_0(x)$ — известная вектор-функция. Возвращаясь к задаче (1.23), однозначно находим m_{-2}, y_0, $z_0^{(1,2)}$. Теперь можно вернуться к нерешенным на предыдущем шаге задачам (см. выше). Продолжим этот процесс.

Допустим известны все коэффициенты вплоть до $y_{j-5}(x,\tau)$, $u_{j-5}(x)$, $z^{(1,2)}_{j-5}(\psi,\rho,\tau)$, $z^3_{j-4}(\psi,\rho,\tau)$, $v_{j-4}(\psi,\rho)$, $p_{j-5}(x)$, $m_{j-7}(x,\tau)$, $s_{j-4}(\psi,\rho)$, $n_{j-4}(\psi,\rho,\tau)$, c_{j-5} включительно. Причем y_{j-4}, m_{j-6}, $z^{(1,2)}_{j-4}$ зависят от неизвестного пока коэффициента c_{j-6}. На j-м шаге, приравняв коэффициенты при $\omega^{-\frac{j-4}{2}}$, для регулярных функций получим

$$\frac{\partial y_{j-3}(x,\tau)}{\partial\tau}+\nabla[p_{j-4}(x)+m_{j-4}(x,\tau)]=(\Delta+D)(u_{j-4}(x)+y_{j-4}(x,\tau))+$$
$$+C(x)(u_{j-6}(x)+y_{j-6}(x,\tau))+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}M_k(u_{j-4}(x)+y_{j-4}(x)+c_{j-4}a_0(x))e^{ik\tau},$$

применим операцию усреднения, избавимся от неоднородности в граничных условиях и получим задачу для u_{j-4}

$$\begin{cases} -(\Delta+D)u_{j-4}(x)+\nabla p_0(x)=c_{j-6}(C(x)+\sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik})a_0(x)+f(x),\\ \operatorname{div}u_{j-4}(x)=0,\\ (u_{j-4}(x),b_0(x))=0,\\ u_{j-4}(x)|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}$$

Подействуем проектором Вейля, и в качестве условия разрешимости для этой задачи получим

$$(c_{j-6}(C(x)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik})a_0(x)+f(x),b_0(x))=0,$$

$$c_{j-6}=-\frac{(f(x),q_0(x))}{((C(x)+\sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik})a_0(x),b_0(x))}.$$

Теперь однозначно находим y_{j-4}, m_{j-6}, $z^{(1,2)}_{j-4}$. Следующим шагом, как и показано выше, последовательно найдем $z^{(3)}_{j-3}$, $v^{(3)}_{j-3}$, m_{j-5}, y_{j-3}, $z^{(1,2)}_{j-3}$, $v^{(1,2)}_{j-3}$, s_{j-4}, n_{j-4}. Причем m_{j-5}, y_{j-3}, $z^{(1,2)}_{j-3}$ зависят от неизвестного пока коэффициента c_{j-5}. Для погранслойных функций из основного уравнения (1.13) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial z_{j-2}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau}+\sum_{i=-1}^{j-4}P_i(\psi,\rho)[s_{j-4-i}(\psi,\rho)+n_{j-4-i}(\psi,\rho,\tau)]=\\ =\sum_{i=-2}^{j-4}L_i(\psi,\rho)[z_{j-4-i}(\psi,\rho,\tau)+v_{j-4-1}(\psi,\rho)],\\ \langle z_{j-2}\rangle=\langle n_{j-3}\rangle=0,\end{gathered}\tag{1.27}$$

т. е.

$$\frac{\partial z_{j-2}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau}=L_{-2}(\psi,\rho)[z_{j-2}(\psi,\rho,\tau)+v_{j-2}(\psi,\rho)]-$$
$$-P_{-1}(\psi,\rho)[s_{j-3}(\psi,\rho)+n_{j-3}(\psi,\rho,\tau)]+q_0(\psi,\rho,c_{j-5})+q_1(\psi,\rho,\tau,c_{j-5}),$$
$$\langle z_{j-2}\rangle=\langle n_{j-3}\rangle=0,$$

где q_0, q_1 — известные вектор-функции, причем q_1 является 2π-периодической с нулевым средним по τ. Применяя операцию усреднения и учитывая граничные условия получим задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial z^{(i)}_{j-2}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z^{(i)}_{j-2}(\psi,\rho,\tau) + q_1(\psi,\rho,\tau,c_{j-5}), \\ \langle z^{(i)}_{j-2}\rangle = 0, \\ z^{(i)}_{j-2}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho=0} = -y^{(i)}_{j-2}, \\ z^{(i)}_{j-2}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2, \end{cases} \tag{1.28}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v^{(i)}_{j-2}(\psi,\rho) = q_0(\psi,\rho,c_{j-5}), \\ v^{(i)}_{j-2}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2, \end{cases} \tag{1.29}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} s_{j-3}(\psi,\rho) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v^{(3)}_{j-2}(\psi,\rho), \\ s_{j-3}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} n_{j-3}(\psi,\rho,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z^{(3)}_{j-2}(\psi,\rho,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau} z^{(3)}_{-1}(\psi,\rho,\tau), \\ \langle n_{j-3}\rangle = 0, \\ n_{j-3}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

К этим задачам вернемся после нахождения неизвестного коэффициента c_{j-5}.

3°. **Обоснование основного утверждения и асимптотики**

Вначале напомним известные вспомогательные результаты (см., например, [40], [54]). При этом символом $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в H^0.

Оператор A замкнут и существуют такие положительные числа a, c, что при $Re\lambda \geqslant a$ справедлива оценка (см. [57])

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant c(1+|\lambda|). \tag{1.32}$$

Из этой оценки следует, что A порождает в H^0 аналитическую полугруппу e^{tA}, $t \geqslant 0$ и для любых $T>0$, $\mu \in (0,1)$ найдется постоянная c, при которой для всех $u \in H^0$ выполняются неравенства

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i} e^{tA} u\| \leqslant ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|, \|e^{tA}\frac{\partial}{\partial x_i} u\| \leqslant ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|, \quad t \in [0,T], \tag{1.33}$$

$$\begin{gathered} \|\tfrac{\partial^k}{\partial x_i^k}(e^{t_2 A} - e^{t_1 A})u\| \leqslant ct_1^{-\mu-\frac{k}{2}}(t_2-t_1)^\mu \|u\|, \\ i = 1,2,3, \quad k = 0,1, \quad 0 < t_1 < t_2 \leqslant T. \end{gathered} \tag{1.34}$$

В этом пункте докажем утверждения 1 и 3 теоремы. От задачи (1.1)-(1.3) перейдем к ее естественной операторной трактовке. В связи с этим, подействовав на уравнение (1.1) проектором Π, получим уравнение в H^0:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_{\omega 1} u + \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} (G_k u + \eta_k) e^{ik\omega t} + \eta_0. \tag{1.35}$$

Здесь $A_{\omega 1} u \equiv \left(A + \frac{1}{\omega} \Pi C\right) u$, $u \in D(A_{\omega 1}) = H_0^2$, $G_k u \equiv \Pi M_k u$, $u \in H^0$, $\eta_k = \Pi d_k$. В уравнении (1.35) сделаем замену переменных типа классической замены Крылова-Боголюбова [8]:

$$u = v + \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} (ik\omega I - A_{\omega 1})^{-1} G_k v e^{ik\omega t}.$$

Не останавливаясь на громоздких выкладках, отметим, что в результате указанных замен мы придем к уравнению вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_\omega v + Y(\omega t, \omega) v + r(\omega t, \omega), \tag{1.36}$$

где

$$A_\omega = A + \frac{1}{\omega} B + \frac{1}{\omega^2} \Phi(\omega).$$

Здесь $Y(\tau, \omega) a$, при $a \in H_0^2$ имеет нулевое среднее по τ, а Φ — оператор в H^0 с областью определения $D(\Phi) = H_0^2$, такой что $A^{-1}\Phi$ продолжается по непрерывности до ограниченного оператора в H^0. При этом $\Phi : H_0^2 \to H^0$ и $A^{-1}\Phi : H^0 \to H^0$ ограничены равномерно относительно $\omega \gg 1$.

Из теоремы Като-Реллиха [10, гл. XII] с учетом (1.36) следует, что в комплексной плоскости найдется окружность Γ_0 с центром в нуле достаточно малого радиуса, такая что внутри нее существует единственная точка λ_ω спектра A_ω, являющаяся простым собственным значением, которому отвечает собственная функция a_ω. При этом λ_ω и a_ω аналитичны по $\mu = \omega^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \lambda_\omega &= \omega^{-1}\lambda_1 + \omega^{-2}\lambda_2 + \ldots, \\ a_\omega &= a_0 + \omega^{-1} a_1 + \ldots. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Отсюда легко находим

$$\lambda_1 = \frac{(Aa_1 + Ba_0, z_0)}{(a_0, z_0)} \neq 0. \tag{1.38}$$

Введем спектральные проекторы:

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} (\lambda I - A_\omega)^{-1} d\lambda,\ Q_\omega = I - P_\omega,\ \omega \gg 1. \tag{1.39}$$

Пусть A_∞ — сужение оператора A на подпространство $Q_\infty H^0$, где оператор Q_∞ получен с помощью формулы (1.39) заменой в последней A_ω на A. Пусть число $T_0 > 0$ удовлетворяет условию $e^{\lambda T_0} \neq 1$, $\lambda \in \sigma(A_\infty)$ и пусть $T_\omega = \left[T_0 \dfrac{\omega}{2\pi}\right] \dfrac{2\pi}{\omega}$.

В силу (1.38) имеем

$$\left|\left|(e^{T_\omega A_\omega} - I)^{-1} P_\omega\right|\right| = O(\omega^{-1}),\ \left|\left|(e^{T_\omega A_\omega} - I)^{-1} Q_\omega\right|\right| = O(1),\ \omega \to \infty. \quad (1.40)$$

Возвращаясь к уравнению (1.36), заметим, что для доказательства существования и единственности $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодического решения этого уравнения достаточно доказать указанные результаты для задачи о T_ω — периодических его решениях.

Пусть вектор $z_\omega \in H_0^2$ удовлетворяет условиям

$$A_\omega^* z_\omega = \overline{\lambda_\omega} z_\omega,\ \ (a_\omega, z_\omega) = 1.$$

Тогда

$$P_\omega u = (u, z_\omega) a_\omega,\ \ Q_\omega u = u - (u, z_\omega) a_\omega.$$

Проектируя (1.36) на подпространства $P_\omega H^0 \equiv l_\omega$, $Q_\omega H^0 \equiv M_\omega$, придем к системе

$$\frac{\partial \xi(t)}{\partial t} - \lambda_\omega \xi(t) = \left[\gamma_\omega\left(\xi(t), w(t)\right) + d_\omega\right], \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} - A_\omega w(t) = \left[\Gamma_\omega\left(\xi(t), w(t)\right) + D_\omega\right], \quad (1.42)$$

где $z = z_1 + w$, $z_1 = P_\omega z = (z, z_\omega) a_\omega = \xi(t) a_\omega$, $w = Q_\omega z$, $d_\omega = P_\omega r$, $D_\omega = Q_\omega r$,

$$\gamma_\omega(\xi, w) = P_\omega Y_2(\omega t, \omega)(\xi a_\omega + w),$$

$$\Gamma_\omega(\xi, w) = Q_\omega Y_2(\omega t, \omega)(\xi a_\omega + w),\ D_\omega = Q_\omega z(\omega t).$$

От задачи о T_ω — периодических по времени t решениях системы (1.41), (1.42) перейдем к эквивалентной ей (в случае классических решений) системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \xi(t) = \left(1 - e^{\lambda_\omega T_\omega}\right)^{-1} \int_0^{T_\omega} e^{\lambda_\omega (T_\omega + t - s)} \left[\Gamma_\omega^{(1)}\left(\xi(t), w(t)\right) + d_\omega\right] ds + \\ + \int_0^t e^{\lambda_\omega (t-s)} \left[\Gamma_\omega^{(1)}\left(\xi(t), w(t)\right) + d_\omega\right] ds = A^{(1)}\theta + c_\omega, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$w(t) = \left(I - e^{A_\omega T_\omega}\right)^{-1} \int\limits_0^{T_\omega} e^{A_\omega (T_\omega + t - s)} \left[\Gamma_\omega \left(\xi(t), w(t)\right) + D_\omega\right] ds +$$
$$+ \int\limits_0^t e^{A(t-s)} \left[\Gamma_\omega \left(\xi(t), w(t)\right) + D_\omega\right] ds = A^{(2)}\theta + C_\omega, \tag{1.44}$$

$$\theta = (\xi(t), w(t)).$$

Пусть $\mu \in [0,1]$. Символом $C_{\mu,0}\left([0,T_\omega], H^0\right) \equiv C_{\mu,0}$ обозначим банахово пространство определенных на отрезке $[0,T_\omega]$ вектор-функций $\theta = (\xi, w)$, $\xi(t) \in C$, $w(t) \in M_\omega$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\theta(0) = \theta(T_\omega),\ ||\theta||_{C_{\mu,0}([0,T_\omega],H^0)} = ||\xi||_{C_\mu([0,T_\omega],C)} + ||w||_{C_\mu([0,T_\omega],H^0)} < \infty,$$

(здесь C_μ — стандартное обозначение гельдерова пространства ($\mu \neq 0$) и пространства непрерывных ($C_0 \equiv C$) вектор-функции).

При достаточно больших ω оператор $\overline{A}_\omega = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{pmatrix}$ действует в пространстве $C_{\mu,0}$, $\mu \in (0,1]$, и выполнено неравенство

$$||\overline{A}_\omega|| < \frac{1}{2}. \tag{1.45}$$

При доказательстве используется многократно применявшаяся В. Б. Левенштамом методика (см., например, [52]), базирующаяся на теории полугрупп и дробных степеней оператора [54]. В частности используются оценки (1.33), (1.34) с заменой A на A_ω; при этом в силу (1.32) константу c можно выбрать не зависящей от ω.

В силу неравенства (1.45) при $\omega \gg 1$ существует единственное решение $\theta \in C_{\mu,0}([0,T_\omega], H^0)$ системы (1.43), (1.44). Используя (1.43), (1.44), уточняем гладкость θ, а затем, учитывая связь (замена переменных) вектор-функции $z = \xi(t)a_\omega + w(t)$ с вектор-функцией u, устанавливаем, что $u \in C_{\mu,0}([0,T_\omega], H^2) \cap C_{\mu,0}([0,T_\omega], H_0^1)$. Продолжив последнюю T_ω-периодическим образом на всю ось $t \in R$, получаем искомое решение уравнения (1.35), по которому восстанавливаем решение (u,p) задачи (1.1)-(1.3). Это решение в силу единственности и вещественности данных задачи является вещественным. Его бесконечная дифференцируемость устанавливается путем многократного применения известной теоремы [58]. Справедливость условий согласования сколь угодно высокого порядка следует при этом из условия периодичности решения по времени.

Наметим теперь путь доказательства утверждения 3 теоремы. Легко видеть, что достаточно установить часть этого утверждения, относящуюся к компоненте u решения (u, p).

В силу алгоритма построения вектор-функции (u^k_ω, p^k_ω) разность $w^k = u_\omega - u^k_\omega$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_{\omega 1} w + \sum_{1\leqslant |k|\leqslant m} G_k w e^{ik\omega t} + z^k_\omega(x, \omega t), \tag{1.46}$$

где

$$\|z^k_\omega\| \leqslant c_k \omega^{-k+1-l/2}. \tag{1.47}$$

Проведя в задаче (1.46) две замены переменных типа замены Крылова-Боголюбова, и, вообще, действуя по аналогии с доказательством утверждения 1, установим, опираясь на неравенство типа (1.45) и оценку (1.47), указанные в п. 3 оценки.

§2. Случай простого собственного значения и одной обобщенной присоединенной вектор-функции

1°. **Формулировка основного результата**

Пусть Ω — ограниченная область в R^3 со сколь угодно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \in N$, $\omega \gg 1$. В бесконечном цилиндре $Q = \Omega \times R$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$-периодических по времени t решениях системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \Delta u + D(x)u + \frac{1}{\omega} C_0(x) u + \sum_{1\leqslant |k|\leqslant m} \left(M_k(x)u + d_k(x)\right) e^{ik\omega t} + d_0(x), \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{2.2}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in R$, $u = u(x, t)$ — неизвестная вещественная трехмерная функция,

$$D(x)u = \int\limits_\Omega B_0(x, y) u(y) dy + B_1(x) u,$$

$B_0(x,y)$, $B_1(x)$, $C_0(x)$, $M_k(x)$ и $d_0(x)$, $d_k(x)$ — известные сколь угодно гладкие по x матрицы-функции и вектор-функции соответственно, причем все производные по x матрицы $B_0(x,y)$ непрерывны по совокупности переменных $(x,y)\in\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$. Предположим еще, что $B_0(x,y)$, $B_1(x)$, $C_0(x)$ и $d_0(x)$ — вещественные, а $M_k(x)$ и $d_k(x)$ комплексно сопряжены с $M_{-k}(x)$ и $d_{-k}(x)$ соответственно.

Символом $S_2(\Omega)\equiv H^0$ будем обозначать замыкание по норме $L_2(\Omega)$ множества непрерывно дифференцируемых трехмерных вектор-функций u, имеющих на $\partial\Omega$ равную нулю нормальную компоненту и удовлетворяющих условию $\operatorname{div}u=0$, т. е. соленоидальных. Символом Π обозначим известный ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $S_2(\Omega)$ (см. [39], [40]).

Введем теперь действующий в $S_2(\Omega)$ оператор $A=\Pi(\Delta+D(x))$ с областью определения

$$D(A)=\left\{u\in S_2(\Omega)\cap W_2^2(\Omega),\quad u|_{\partial\Omega}=0\right\}\equiv H_0^2$$

и дифференциальные выражения

$$B=\Pi C_0(x)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{\Pi M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik},$$

$$C=\sum_{1\leqslant|k|,|l|,|s|\leqslant m,k+l+s=0}\frac{\Pi M_k\Pi M_l\Pi M_s}{(is)s(s+l)}+ \\ +\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{\Pi M_k(x)\Pi(\Delta+D)\Pi M_{-k}(x)}{(ik)^2},$$

Предположим, что $\lambda=0$ — простое собственное значение оператора A. Пусть соответствующая ему собственная вектор-функция $a_0(x)$ имеет присоединенную в смысле Вишика-Люстерника вектор-функцию $a_1(x)$ относительно пары операторов A, B и не имеет присоединенных вектор-функций относительно тройки операторов A, B, C, т. е. справедливо равенство

$$Aa_1(x)=-Ba_0(x), \tag{2.4}$$

а задача

$$Av(x)=-Ba_1(x)-Ca_0(x) \tag{2.5}$$

не имеет классических решений. Последнее, согласно альтернативе Фредгольма, равносильно условию $(Ba_1(x)+Ca_0(x),b_0(x))\neq 0$, где $b_0(x)$ —

ненулевое решение уравнения $A^*z(x)=0$, A^* — оператор, сопряженный с A.

С целью использования в дальнейшем метода пограничного слоя [49] перейдем в некоторой окрестности Ω_0 границы $\partial\Omega$ области Ω к криволинейным координатам следующим образом. Через каждую точку $x\in\partial\Omega$ проведем внутреннюю нормаль, причем окрестность Ω_0 будем считать настолько малой, что нормали в ней не пересекаются. В окрестности Ω_0 положим $x=(\psi_1,\psi_2,r)$, где r — расстояние от x до границы $\partial\Omega$ по нормали, $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ — координаты соответствующей точки границы. Проведем теперь замену $\rho=r\sqrt{\omega}$.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи (2.1)-(2.3) будем искать в виде

$$\begin{gathered}u_\omega(x,t)=\omega^2c_{-4}a_0(x)+\omega^{3/2}h_{-4}a_0(x)+\sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-k}[u_{2k+1}(x)+v_{2k+1}(\psi,\rho)+\\+c_{k-2}a_0(x)+c_{k-3}a_1(x)+y_{2k+1}(x,\omega t)+z_{2k+1}(\psi,\rho,\omega t)]+\\+\sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-\frac{2k+1}{2}}[u_{2k+2}(x)+v_{2k+2}(\psi,\rho)+\\+h_{k-2}a_0(x)+h_{k-3}a_1(x)+y_{2k+2}(x,\omega t)+z_{2k+2}(\psi,\rho,\omega t)],\end{gathered}\tag{2.6}$$

$$p_\omega(x)=\sum_{k=-2}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}[p_{k+1}(x)+\omega^{\frac12}s_k(\psi,\rho)+\omega m_{k-1}(x,\omega t)+\omega^{\frac12}n_k(\psi,\rho,\omega t)],\tag{2.7}$$

где y_k, z_k, m_k и n_k 2π-периодические по τ вектор-функции с нулевым средним, т. е.

$$\langle y_k\rangle(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y_k(x,\tau)d\tau=0,$$
$$\langle z_k\rangle(\psi,\rho)=0.$$

Вектор-функции u_k, y_k, p_k, m_k называют регулярными, а v_k, z_k, s_k, n_k погранслойными (терминология [49]). Погранслойные функции вначале определяются при $x\in\Omega_0$, а затем продолжаются нулем вовнутрь области Ω и умножаются на соответствующую срезающую бесконечно дифференцируемую в Ω функцию [49].

Формулировке теоремы предпошлем следующие обозначения. Задачей

(A) назовем задачу Дирихле в $\bar{\Omega}$ вида

$$\begin{cases} (\Delta + D)u(x) + \nabla p(x) = G(x), \\ \operatorname{div} u(x) = 0, \\ (u(x), b_0(x)) = 0, \\ (\Pi G(x), b_0(x)) = 0, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $G \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $(G, b_0) = 0$. Задачей (B) — задачу Неймана в $\bar{\Omega}$

$$\begin{cases} \Delta m(x) = G(x), \\ \frac{\partial m(x)}{\partial n}(0) = 0, \end{cases}$$

где $\int\limits_{\Omega} G(x)dx = 0$. Задачей (C) — задачу о 2π-периодических по τ решениях

$$\begin{cases} \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} = G(x)e^{il\tau}, \\ \langle y(\tau) \rangle = 0, \end{cases}$$

где l — целое число. Задачей (D) — задачу на луче $\rho \geqslant 0$ вида

$$\begin{cases} ikz(\rho) = \frac{\partial^2 z(\rho)}{\partial \rho^2} + g(\rho), \\ z(\rho)|_{\rho=0} = c, \\ z(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где k — ненулевое целое число, $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$, c — вещественное число. Задачей (E) — задачу на луче $\rho \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial \rho^2} = g(\rho), \\ v(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. Задачей (F) — задачу на луче $\rho \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial s(\rho)}{\partial \rho} = g(\rho), \\ s(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. В перечисленных задачах G, g — известные вектор-функции указанного типа. Очевидно, задачи (A) - (F) однозначно разрешимы, если в случае задачи (A) единственность p понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Символами u_ω^n и p_ω^n обозначим частичные суммы рядов (2.6) и (2.7), формально заменив в (2.6) и (2.7) ∞ на n и $2(n+1)$ соответственно; символом $C_{x,t}^{l,l/2}$, где $l \geqslant 0$ обозначим обычные гельдеровы пространства вектор-функций заданных в цилиндре $\Omega \times R$.

Теорема 2.1. *Существует такое число ω_0, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения. 1. Задача (2.1)-(2.3) имеет единственное (см. замечание 2.1) $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое по t решение $(u_\omega(x,t), p_\omega(x,t))$, которое является вещественным и бесконечно дифференцируемым. 2. Построение вектор-функций u_ω^n, p_ω^n при каждом $n \geqslant -1$ сводится к решению конечного числа задач вида (A) - (F). 3. Для любого $l \geqslant 0$ и любого целого $n \geqslant -1$ справедливы оценки*

$$\|u_\omega - u_\omega^n\|_{C_{x,t}^{l,l/2}} \leqslant c_{n,l}\omega^{-(n+1)+l/2},$$

$$\|\nabla p_\omega - \nabla p_\omega^n\|_{C_{x,t}^{l,l/2}} \leqslant d_{n,l}\omega^{-n+l/2},$$

где $c_{n,l}$, $d_{n,l} = const > 0$.

2°. Построение асимптотики

Воспользовавшись известными (см., например, [55], [56]) представлениями операторов Δ, ∇, div в криволинейных координатах (ψ, r), и, положив $\rho = r\sqrt{\omega}$, придем к разложениям:

$$(\Delta + D)u = \sum_{k=-2}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} L_k(\psi, \rho)u, \tag{2.8}$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \frac{\partial u^{(3)}}{\partial \rho} - \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [D_{k,1}(\psi,\rho)u^{(1)} + D_{k,2}(\psi,\rho)u^{(2)} + D_{k,3}(\psi,\rho)u^{(3)}], \tag{2.9}$$

$$\nabla p = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} P_k(\psi, \rho)p. \tag{2.10}$$

Здесь $P_{-1}(\psi,\rho)p = \left(0, 0, \frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^T$, $L_{-2}(\psi,\rho)u = \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \rho^2}, 0\right)^T$, а остальные P_k, $D_{k,j}$ — дифференциальные, а L_k — интегро-дифференциальные выражения относительно (ψ, ρ) с равномерно ограниченными относительно (ψ, ρ) коэффициентами, $u^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, — i-ая криволинейная координата вектора u.

Подставим ряды (2.6) и (2.7) в уравнения (2.1), (2.2) и граничное условие (2.3), сделав предварительно замену переменной $\tau = \omega t$. В равенствах (2.1)-(2.3) с учетом представлений (2.8)-(2.10) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω отдельно для регулярных и погранслойных функций. Получим бесконечную последовательность задач. Выпишем первые из них. Из уравнений (2.2), (2.9) для погранслойных функций получим

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial \rho} = 0, \\ z_{-1}^{(3)}|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho)}{\partial \rho} = 0, \\ v_{-1}^{(3)}|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

так что $z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) \equiv 0$, $v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho) \equiv 0$. Из уравнений (2.1)-(2.2) для регулярных функций при ω^2 находим

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{-1}(x,\tau)}{\partial \tau} + \nabla m_{-3}(x,\tau) = \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m} c_{-4} M_k a_0(x) e^{ik\tau}, \\ \operatorname{div} y_{-1} = 0, \\ y_{-1n}|_{\partial\Omega} = -z_{-1}^{(3)}|_{\partial\Omega}|_{\rho=0} = 0, \\ \langle y_{-1}\rangle = \langle m_{-3}\rangle = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

где n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$. Отсюда

$$\begin{cases} \Delta m_{-3}(x,\tau) = c_{-4} \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m} \operatorname{div}\left(M_k a_0(x)\right) e^{ik\tau}, \\ \frac{m_{-3}(x,\tau)}{\partial n}|_{\partial\Omega} = c_{-4} \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m} \left\{M_k a_0(x)\right\}_n |_{\partial\Omega} e^{ik\tau}, \\ \langle m_{-3}\rangle = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Из (2.12) находим

$$m_{-3}(x,\tau) = c_{-4} \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \mu_k(x) e^{ik\tau},$$

из (2.11) затем —

$$y_{-1}(x,\tau) = c_{-4} \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \nu_k(x) e^{ik\tau},$$

где μ_k и ν_k — известные функции. Для погранслойных функций имеем:

$$\frac{\partial z_{-1}(\psi,\rho,\tau)}{\partial \tau} = L_{-2}(\psi,\rho)(z_{-1}(\psi,\rho,\tau) + v_{-1}(\psi,\rho)) - P_{-1}(s_{-2}(\psi,\rho) + n_{-2}(\psi,\rho,\tau)),$$
$$\langle z_{-1}\rangle = \langle n_{-2}\rangle = 0.$$

Применяя к последнему равенству операцию усреднения и учитывая граничные условия, получим следующие четыре задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau), \\ \langle z_{-1}^{(i)}\rangle = 0, \\ z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho=0} = -y_{-1}^{(i)}|_{\rho=0}, \\ z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0, i=1,2, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v_{-1}^{(i)}(\psi,\rho) = 0, \\ v_{-1}^{(i)}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, i=1,2, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} s_{-2}(\psi,\rho) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho) = 0, \\ s_{-2}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} n_{-2}(\psi,\rho,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau} z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) = 0, \\ \langle n_{-2}\rangle = 0, \\ n_{-2}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Из соотношений (2.13)-(2.16) находим $v_{-1}^{(1,2)} \equiv 0$, $s_{-2} \equiv 0$, $n_{-2} \equiv 0$. К определению $z_{-1}^{(1,2)}$ вернемся позже, после нахождения c_{-4}.

Приравняв коэффициенты при $\omega^{3/2}$ получим аналогичный набор однозначно разрешимых задач для $z_0^{(3)}$, $v_0^{(3)}$, y_0, m_{-2}, $z_0^{(1,2)}$, $v_0^{(1,2)}$, s_{-2}, n_{-2}, зависящих от неизвестных коэффициентов c_{-4}, h_{-4}.

Приравняем теперь коэффициенты при ω. Снова из уравнения (2.2) с учетом (2.9) получим

$$\frac{\partial z_1^{(3)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\rho} = D_{-1,1}(\psi,\rho) z_0^{(1)}(\psi,\rho,\tau) +$$
$$+ D_{-1,2}(\psi,\rho) z_0^{(2)}(\psi,\rho,\tau) + D_{-1,3}(\psi,\rho) z_0^{(3)}(\psi,\rho,\tau),$$

$$\frac{\partial v_1^{(3)}(\psi,\rho)}{\partial\rho} = D_{-1,1}(\psi,\rho) v_0^{(1)}(\psi,\rho) +$$
$$+ D_{-1,2}(\psi,\rho) v_0^{(2)}(\psi,\rho) + D_{-1,3}(\psi,\rho) v_0^{(3)}(\psi,\rho).$$

Откуда найдем $z_1^{(3)}(\psi,\rho,\tau)$ и $v_1^{(3)}(\psi,\rho)$. Для регулярных функций имеем равенство

$$\frac{\partial y_1(x,\tau)}{\partial\tau} + \nabla[p_{-1}(x) + m_{-1}(x,\tau)] =$$
$$= (\Delta + D)(u_{-1}(x) + y_{-1}(x,\tau) + c_{-4}a_1(x)) + C_0 c_{-4} a_0(x) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} M_k(u_{-1}(x) + y_{-1}(x,\tau) + c_{-3}a_0(x) + c_{-4}a_1(x)) e^{ik\tau},$$

применим операцию усреднения $\langle \cdots \rangle$. В силу вытекающего из (2.11) представления и определения вектора $a_1(x)$ имеем задачу для u_{-1}

$$\begin{cases} (\Delta + D)u_{-1}(x) = \nabla p_{-1}(x), \\ \operatorname{div} u_{-1}(x) = 0, \\ (u_{-1}(x), b_0(x)) = 0, \\ u_{-1}(x)|_{\partial\Omega} = v_{-1}|_{\rho=0} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $u_{-1} = 0$, $p_{-1} = 0$. Теперь вернемся к задачам для y_1, m_{-1}, $z_1^{(1,2)}$, $v_1^{(1,2)}$, s_{-1}, n_{-1}. Они зависят от неизвестных пока коэффициентов c_{-4}, c_{-3}, h_{-4}. Приравнивая коэффициенты при $\omega^{1/2}$, получим аналогичный набор однозначно разрешимых задач для $z_2^{(3)}$, $v_2^{(3)}$, u_0, p_0, y_2, m_0, $z_2^{(1,2)}$, $v_2^{(1,2)}$, s_0, n_0, зависящих от неизвестных коэффициентов c_{-4}, h_{-4}, c_{-3}, h_{-3}.

Приравняем коэффициенты при ω^0. Из уравнения (2.2) найдем $z_3^{(3)}(\psi, \rho, \tau)$ и $v_3^{(3)}(\psi, \rho)$ как показано выше. Для регулярных функций имеем

$$\frac{\partial y_3(x,\tau)}{\partial \tau} + \nabla[p_1(x) + m_1(x,\tau)] = (\Delta + D)(u_1(x) + y_1(x,\tau) +$$
$$+ c_{-3}a_1(x)) + C_0(c_{-3}a_0(x) + c_{-4}a_1(x) + y_{-1}(x,\tau)) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} (M_k(u_1(x) + y_1(x,\tau) + c_{-2}a_0(x) + c_{-3}a_1(x)) + d_k(x))e^{ik\tau} + d_0(x).$$

Применяя операцию усреднения, получим

$$\begin{cases} -(\Delta + D)u_1(x) + \nabla p_1(x) = c_{-4}(C_0(x)a_1(x) + \\ + \sum\limits_{1 \leqslant |k| \leqslant m} \frac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik} a_0(x) + \sum\limits_{1 \leqslant |k|,|l|,|s| \leqslant m, k+l+s=0} \frac{M_k \Pi M_l \Pi M_s}{(is)s(s+l)} a_1(x) + \\ + \sum\limits_{1 \leqslant |k| \leqslant m} \frac{M_k(x)\Pi(\Delta + D)\Pi M_{-k}(x)}{(ik)^2} a_1(x)) + d_0(x), \\ \operatorname{div} u_1(x) = 0, \\ (u_1(x), b_0(x)) = 0, \\ u_1(x)|_{\partial\Omega} = -v_1|_{\rho=0}. \end{cases}$$

Избавимся от неоднородности в граничном условии. Подействуем на первое уравнение проектором Π. В качестве условия разрешимости для полученной задачи найдем

$$(c_{-4}(Ba_0(x) + Ca_1(x)) + f_0(x), b_0(x)) = 0,$$

$$c_{-4} = -\frac{(f_0(x), b_0(x))}{(Ba_0(x) + Ca_1(x), b_0(x))}.$$

Здесь $f_0(x)$ — известная вектор-функция. Возвращаясь к задачам на первом шаге, однозначно находим m_{-3}, y_{-1}, $z_{-1}^{(1,2)}$. Теперь вернемся к задачам для y_3, m_1, $z_3^{(1,2)}$, $v_3^{(1,2)}$, s_1, n_1. Они зависят от неизвестных пока коэффициентов c_{-2}, c_{-3}, h_{-3}, h_{-4}. Приравнивая коэффициенты при $\omega^{-1/2}$, получим коэффициент h_{-4} и аналогичный набор однозначно разрешимых задач для $z_4^{(3)}$, $v_4^{(3)}$, u_2, p_2, y_4, m_2, $z_4^{(1,2)}$, $v_4^{(1,2)}$, s_2, n_2, зависящих от неизвестных коэффициентов c_{-2}, h_{-2}, c_{-3}, h_{-3}. Продолжим этот процесс.

Допустим известны все коэффициенты вплоть до $y_{2j}(x,\tau)$, $u_{2j-2}(x)$, $z_{2j}(\psi,\rho,\tau)$, $v_{2j}(\psi,\rho)$, $p_{2j-2}(x)$, $m_{2j-2}(x,\tau)$, $s_{2j-2}(\psi,\rho)$, $n_{2j-2}(\psi,\rho,\tau)$, c_{j-6}, h_{j-6} включительно, $j=2,\dots$. Причем все известные коэффициенты, начиная с $y_{2j-3}(x,\tau)$, $u_{2j-5}(x)$, $z_{2j-3}(\psi,\rho,\tau)$, $v_{2j-3}(\psi,\rho)$, $p_{2j-5}(x)$, $m_{2j-5}(x,\tau)$, $s_{2j-5}(\psi,\rho)$, $n_{2j-5}(\psi,\rho,\tau)$, зависят от неизвестных пока коэффициентов c_{j-5}, h_{j-5}, c_{j-4}, h_{j-4} (первые из эти коэффициентов зависят только от c_{j-5}, следующие от пары c_{j-5}, h_{j-5} и т. д.). Приравняем коэффициенты при ω^{1-j} в уравнениях (2.1)-(2.3). Из уравнения (2.2) получим $z_{2j+1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau)$ и $v_{2j+1}^{(3)}(\psi,\rho)$ как показано выше. Для регулярных функций имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial y_{2j+1}(x,\tau)}{\partial\tau}+\nabla[p_{2j-1}(x)+m_{2j-1}(x,\tau)]=(\Delta+D)(u_{2j-1}(x)+y_{2j-1}(x,\tau)+\\+c_{j-4}a_1(x))+C_0(c_{j-5}a_0(x)+c_{j-6}a_1(x)+y_{2j-3}(x,\tau))+\\+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}(M_k(u_{2j-1}(x)+y_{2j-1}(x,\tau)+c_{j-4}a_0(x)+c_{j-5}a_1(x))+d_k(x))e^{ik\tau}+\\+f(x),\end{gathered}$$

где $f(x)$ — известная вектор-функция. Применяя операцию усреднения и учитывая определение вектора $a_1(x)$, получим

$$\left\{\begin{gathered}-(\Delta+D)u_{2j-1}(x)+\nabla p_{2j-1}(x)=c_{j-5}(C_0(x)a_1(x)+\\+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik}a_0(x)+\sum_{1\leqslant|k|,|l|,|s|\leqslant m,k+l+s=0}\frac{M_k\Pi M_l\Pi M_s}{(is)s(s+l)}a_1(x)+\\+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{M_k(x)\Pi(\Delta+D)\Pi M_{-k}(x)}{(ik)^2}a_1(x))+f(x),\\ \operatorname{div}u_{2j-1}(x)=0,\\ (u_{2j-1}(x),b_0(x))=0,\\ u_{2j-1}(x)|_{\partial\Omega}=v_{2j-1}|_{\rho=0}=0.\end{gathered}\right.$$

Избавимся от неоднородности в граничном условии, подействуем проектором Вейля, и в качестве условия разрешимости для этой задачи получим

$$(c_{j-5}(Ba_0(x)+Ca_1(x))+f_0(x),b_0(x))=0,$$

$$c_{j-5}=-\frac{(f_0(x),b_0(x))}{(Ba_0(x)+Ca_1(x),b_0(x))}.$$

Здесь $f_0(x)$ — известная вектор-функция. Теперь однозначно находим m_{2j-5}, y_{2j-3}, $z^{(1,2)}_{2j-3}$. Составим задачи для y_{2j+1}, m_{2j-1}, $z^{(1,2)}_{2j+1}$, $v^{(1,2)}_{2j+1}$, s_{2j-1}, n_{2j-1}. Они зависят от неизвестных пока коэффициентов c_{j-4}, c_{j-3}, h_{j-4}, h_{j-5}. Приравнивая коэффициенты при следующей степени, получим коэффициент h_{j-5} и аналогичный набор однозначно разрешимых задач для $z^{(3)}_{2j+2}$, $v^{(3)}_{2j+2}$, u_{2j}, p_{2j}, y_{2j+2}, m_{2j}, $z^{(1,2)}_{2j+2}$, $v^{(1,2)}_{2j+2}$, s_{2j}, n_{2j}, зависящих от неизвестных коэффициентов c_{j-3}, h_{j-3}, c_{j-4}, h_{j-4}. Таким образом формальная асимптотика задачи (2.1)-(2.3) построена.

3°. **Обоснование основного утверждения и асимптотики**

Вначале напомним известные вспомогательные результаты (см., например, [40], [54]). При этом символом $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в H^0.

Оператор A замкнут и существуют такие положительные числа a, c, что при $Re\lambda \geqslant a$ справедлива оценка (см. [57])

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant c(1+|\lambda|). \tag{2.17}$$

Из этой оценки следует, что A порождает в H^0 аналитическую полугруппу e^{tA}, $t \geqslant 0$ и для любых $T>0$, $\mu \in (0,1)$ найдется постоянная c, при которой для всех $u \in H^0$ выполняются неравенства

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i} e^{tA} u\| \leqslant ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|, \|e^{tA}\frac{\partial}{\partial x_i} u\| \leqslant ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|, \quad t \in [0,T], \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered}\|\tfrac{\partial^k}{\partial x_i^k}(e^{t_2A} - e^{t_1A})u\| \leqslant ct_1^{-\mu-\frac{k}{2}}(t_2-t_1)^{\mu}\|u\|,\\ i=1,2,3, \quad k=0,1, \quad 0<t_1<t_2\leqslant T.\end{gathered} \tag{2.19}$$

В этом пункте докажем утверждения 1 и 3 теоремы. От задачи (2.1)-(2.3) перейдем к ее естественной операторной трактовке. В связи с этим, подействовав на уравнение (2.1) проектором Π, получим уравнение в H^0:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_{\omega 1} u + \sum_{1\leqslant |k| \leqslant m} (G_k u + \eta_k)\, e^{ik\omega t} + \eta_0. \tag{2.20}$$

Здесь $A_{\omega1}u \equiv \left(A + \frac{1}{\omega}\Pi C_0\right)u$, $u \in D(A_{\omega1}) = H^2_0$, $G_k u \equiv \Pi M_k u$, $u \in H^0$, $\eta_k = \Pi d_k$. В уравнении (2.20) сделаем последовательно две замены переменных типа классической замены Крылова-Боголюбова [8]:

$$u = v + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} (ik\omega I - A_{\omega1})^{-1}\, G_k v e^{ik\omega t},$$

$$v = z - \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} (ik\omega I - A_{\omega 1})^{-2} G_k A_{\omega 1} z e^{ik\omega t} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \sum_{1\leqslant|l|\leqslant 2m} (il\omega I - A_{\omega 1})^{-1} G_{l-k} (ik\omega I - A_{\omega 1})^{-1} G_k A_{\omega 1} z e^{il\omega t},$$

где $G_s \equiv 0$ при $|s| > m$. Не останавливаясь на громоздких выкладках, отметим, что в результате указанных замен мы придем к уравнению вида

$$\frac{\partial z}{\partial t} = A_\omega z + Y(\omega t, \omega) z + r(\omega t, \omega), \tag{2.21}$$

где

$$A_\omega = A + \frac{1}{\omega} B + \frac{1}{\omega^2}\left(C + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} k^{-2} G_k G_{-k} A\right) + \frac{1}{\omega^3}\Phi(\omega).$$

Здесь $Y(\tau,\omega)a$, при $a \in H_0^2$ имеет нулевое среднее по τ, а Φ — оператор в H^0 с областью определения $D(\Phi) = H_0^2$, такой что $A^{-1}\Phi$ продолжается по непрерывности до ограниченного оператора в H^0. При этом $\Phi : H_0^2 \to H^0$ и $A^{-1}\Phi : H^0 \to H^0$ ограничены равномерно относительно $\omega \gg 1$.

Из теоремы Като-Реллиха [10, гл. XII] с учетом (2.21) следует, что в комплексной плоскости найдется окружность Γ_0 с центром в нуле достаточно малого радиуса, такая что внутри нее существует единственная точка λ_ω спектра A_ω, являющаяся простым собственным значением, которому отвечает собственная функция a_ω. При этом λ_ω и a_ω аналитичны по $\mu = \omega^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \lambda_\omega &= \omega^{-1}\lambda_1 + \omega^{-2}\lambda_2 + \ldots, \\ a_\omega &= a_0 + \omega^{-1} a_1 + \ldots. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Отсюда легко находим

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{(Ba_1 + Ca_0, z_0)}{(a_0, z_0)} \neq 0. \tag{2.23}$$

Введем спектральные проекторы:

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} (\lambda I - A_\omega)^{-1} d\lambda,\ Q_\omega = I - P_\omega,\ \omega \gg 1. \tag{2.24}$$

Пусть A_∞ — сужение оператора A на подпространство $Q_\infty H^0$, где оператор Q_∞ получен с помощью формулы (2.24) заменой в последней A_ω на A. Пусть число $T_0 > 0$ удовлетворяет условию $e^{\lambda T_0} \neq 1$, $\lambda \in \sigma(A_\infty)$ и пусть $T_\omega = \left[T_0 \dfrac{\omega}{2\pi}\right] \dfrac{2\pi}{\omega}$.

В силу (2.23) имеем

$$\left|\left|(e^{T_\omega A_\omega}-I)^{-1}P_\omega\right|\right|=O(\omega^{-2}),\ \left|\left|(e^{T_\omega A_\omega}-I)^{-1}Q_\omega\right|\right|=O(1),\ \omega\to\infty. \quad (2.25)$$

Возвращаясь к уравнению (2.21), заметим, что для доказательства существования и единственности $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодического решения этого уравнения достаточно доказать указанные результаты для задачи о T_ω — периодических его решениях.

Пусть вектор $z_\omega\in H_0^2$ удовлетворяет условиям

$$A_\omega^* z_\omega=\overline{\lambda_\omega}z_\omega,\ \ (a_\omega,z_\omega)=1.$$

Тогда

$$P_\omega u=(u,z_\omega)a_\omega,\ \ Q_\omega u=u-(u,z_\omega)a_\omega.$$

Проектируя (2.21) на подпространства $P_\omega H^0\equiv l_\omega$, $Q_\omega H^0\equiv M_\omega$, придем к системе

$$\frac{\partial\xi(t)}{\partial t}-\lambda_\omega\xi(t)=\left[\gamma_\omega\left(\xi(t),w(t)\right)+d_\omega\right], \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t}-A_\omega w(t)=\left[\Gamma_\omega\left(\xi(t),w(t)\right)+D_\omega\right], \quad (2.27)$$

где $z=z_1+w$, $z_1=P_\omega z=(z,z_\omega)a_\omega=\xi(t)a_\omega$, $w=Q_\omega z$, $d_\omega=P_\omega r$, $D_\omega=Q_\omega r$,

$$\gamma_\omega(\xi,w)=P_\omega Y_2(\omega t,\omega)(\xi a_\omega+w),$$

$$\Gamma_\omega(\xi,w)=Q_\omega Y_2(\omega t,\omega)(\xi a_\omega+w),\ D_\omega=Q_\omega z(\omega t).$$

От задачи о T_ω — периодических по времени t решениях системы (2.26), (2.27) перейдем к эквивалентной ей (в случае классических решений) системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\xi(t)=\left(1-e^{\lambda_\omega T_\omega}\right)^{-1}\int\limits_0^{T_\omega}e^{\lambda_\omega(T_\omega+t-s)}\left[\Gamma_\omega^{(1)}\left(\xi(t),w(t)\right)+d_\omega\right]ds+\\ +\int\limits_0^t e^{\lambda_\omega(t-s)}\left[\Gamma_\omega^{(1)}\left(\xi(t),w(t)\right)+d_\omega\right]ds=A^{(1)}\theta+c_\omega,\end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}w(t)=\left(I-e^{A_\omega T_\omega}\right)^{-1}\int\limits_0^{T_\omega}e^{A_\omega(T_\omega+t-s)}\left[\Gamma_\omega\left(\xi(t),w(t)\right)+D_\omega\right]ds+\\ +\int\limits_0^t e^{A(t-s)}\left[\Gamma_\omega\left(\xi(t),w(t)\right)+D_\omega\right]ds=A^{(2)}\theta+C_\omega,\end{aligned} \quad (2.29)$$

$\theta = (\xi(t), w(t))$.

Пусть $\mu \in [0,1]$. Символом $C_{\mu,0}\left([0,T_\omega],H^0\right) \equiv C_{\mu,0}$ обозначим банахово пространство определенных на отрезке $[0,T_\omega]$ вектор-функций $\theta = (\xi, w)$, $\xi(t) \in C$, $w(t) \in M_\omega$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\theta(0) = \theta(T_\omega),\ ||\theta||_{C_{\mu,0}([0,T_\omega],H^0)} = ||\xi||_{C_\mu([0,T_\omega],C)} + ||w||_{C_\mu([0,T_\omega],H^0)} < \infty,$$

(здесь C_μ — стандартное обозначение гельдерова пространства ($\mu \neq 0$) и пространства непрерывных ($C_0 \equiv C$) вектор-функции).

При достаточно больших ω оператор $\overline{A}_\omega = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{pmatrix}$ действует в пространстве $C_{\mu,0}$, $\mu \in (0,1]$, и выполнено неравенство

$$||\overline{A}_\omega|| < \frac{1}{2}. \tag{2.30}$$

На доказательстве этого неравенства мы не останавливаемся. Отметим лишь, что при этом используется многократно применявшаяся нами методика (см., например, [52]), базирующаяся на теории полугрупп и дробных степеней оператора [54]. В частности используются оценки (2.18), (2.19) с заменой A на A_ω; при этом в силу (2.17) константу c можно выбрать не зависящей от ω.

В силу неравенства (2.30) при $\omega \gg 1$ существует единственное решение $\theta \in C_{\mu,0}([0,T_\omega],H^0)$ системы (2.28), (2.29). Используя (2.28), (2.29), уточняем гладкость θ, а затем, учитывая связь (замена переменных) вектор-функции $z = \xi(t)a_\omega + w(t)$ с вектор-функцией u, устанавливаем, что $u \in C_{\mu,0}([0,T_\omega],H^2) \cap C_{\mu,0}([0,T_\omega],H_0^1)$. Продолжив последнюю T_ω-периодическим образом на всю ось $t \in R$, получаем искомое решение уравнения (2.20), по которому восстанавливаем решение (u,p) задачи (2.1)-(2.3). Это решение в силу единственности и вещественности данных задачи является вещественным. Его бесконечная дифференцируемость устанавливается путем многократного применения известной теоремы [58]. Справедливость условий согласования сколь угодно высокого порядка следует при этом из условия периодичности решения по времени.

Наметим теперь путь доказательства утверждения 3 теоремы. Легко видеть, что достаточно установить часть этого утверждения, относящуюся к компоненте u решения (u,p).

В силу алгоритма построения вектор-функции (u^k_ω, p^k_ω) разность $w^k = u_\omega - u^k_\omega$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_{\omega 1} w + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} G_k w e^{ik\omega t} + z^k_\omega(x, \omega t), \tag{2.31}$$

где

$$\|z^k_\omega\| \leqslant c_k \omega^{-k+1-l/2}. \tag{2.32}$$

Проведя в задаче (2.31) две замены переменных типа замены Крылова-Боголюбова, и, вообще, действуя по аналогии с доказательством утверждения 1, установим, опираясь на неравенство типа (2.30) и оценку (2.32), указанные в п. 3 оценки.

§3. Случай кратного собственного значения и отсутствия обобщенных присоединенных вектор-функций

1°. Формулировка основного результата

Пусть Ω — ограниченная область в R^3 со сколь угодно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \in N$, $\omega \gg 1$. В бесконечном цилиндре $Q = \Omega \times R$ рассмотрим задачу о вещественных $\frac{2\pi}{\omega}$-периодических по времени t решениях системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \Delta u + B_0(x)u + \frac{1}{\omega}C(x)u + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \left(M_k(x)u + d_k(x)\right) e^{ik\omega t} + d_0(x), \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{3.2}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.3}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in R$, $u = u(x,t)$ — неизвестная трехмерная функция, а $B_0(x)$, $C(x)$, $M_k(x)$ и $d_0(x)$, $d_k(x)$ — известные бесконечно гладкие матрицы-функции и вектор-функции соответственно, причем $B_0(x)$, $C(x)$ и $d_0(x)$ — вещественные, а $M_k(x)$, $d_k(x)$ комплексно сопряжены с $M_{-k}(x)$, $d_{-k}(x)$ соответственно.

Символом $S_2(\Omega)$ будем обозначать замыкание по норме $L_2(\Omega)$ множества непрерывно дифференцируемых комплекснозначных вектор-функций

u, имеющих на $\partial\Omega$ равную нулю нормальную компоненту и удовлетворяющих условию $\operatorname{div} u = 0$, т. е. соленоидальных. Символом Π обозначим известный ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $S_2(\Omega)$ (см. [39], [40]).

Введем теперь действующий в $S_2(\Omega)$ оператор $A = \Pi(\Delta + B_0(x))$, область определения $D(A)$ которого является замыканием по норме $W_2^2(\Omega)$ линеала гладких соленоидальных ($div(u) = 0$) вектор-функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Определим еще дифференциальное выражение

$$B = \Pi C(x) + \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} \frac{\Pi M_k(x) \Pi M_{-k}(x)}{ik}.$$

Предположим, что $\lambda = 0$ — n-кратное ($n \in N$) собственное значение оператора A, которому отвечает набор из s, $1 \leqslant s \leqslant n$, линейно независимых собственных вектор-функций: $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... , $a_s(x)$. Будем предполагать, что ни одна собственная вектор-функция $a(x)$ оператора A, отвечающая нулевому собственному значению, не имеет присоединенных вектор-функций относительно пары операторов A, B [32], т. е. задача

$$Av(x) = -Ba(x), \tag{3.4}$$

$$v(x)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.5}$$

не имеет классических решений. Согласно альтернативе Фредгольма, последнее равносильно соотношению

$$\sum_{j=1}^{s} |(Ba(x), b_j(x))| \neq 0, \tag{3.6}$$

где $b_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, — линейно независимые решения уравнения $A^* z(x) = 0$. Здесь A^* — оператор сопряженный к A. Покажем, что матрица $P \equiv \{(Ba_i(x), b_j(x))\}_{i,j=1}^{s}$ невырождена. Действительно, составим линейную комбиницию из строк матрицы P и приравняем ее к нулю:

$$\sum_{i=1}^{s} c_i (Ba_i(x), b_j(x)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.7}$$

Если набор c_1, c_2, ... , c_s нетривиален, то из уравнения (3.7) следует нарушение условия (3.6), значит линейная комбинация столбцов обращается в ноль только при тривиальном наборе коэффициентов, а матрица P невырождена.

Замечание 3.1. *Отметим, что, например, в шаре оператор Стокса имеет кратные собственные значения. Этот факт непосредственно вытекает из работ [59, 60].*

С целью использования в дальнейшем метода пограничного слоя [49] перейдем в некоторой окрестности Ω_0 границы $\partial\Omega$ области Ω к криволинейным координатам следующим образом. Через каждую точку $x \in \partial\Omega$ проведем внутреннюю нормаль, причем окрестность Ω_0 будем считать настолько малой, что нормали в ней не пересекаются. В окрестности Ω_0 положим $x = (\psi_1, \psi_2, r)$, где r расстояние от x до границы $\partial\Omega$ по нормали, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — координаты соответствующей точки границы. Проведем теперь замену $\rho = r\sqrt{\omega}$.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи (3.1)-(3.3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_\omega(x,t) = \omega \sum_{j=1}^{s} c_{-2}^{j} a_j(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + \\ + \sum_{j=1}^{s} c_k^j a_j(x) + y_k(x,\omega t) + z_k(\psi,\rho,\omega t)], \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$p_\omega(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [p_k(x) + \omega^{\frac{1}{2}} s_{k-1}(\psi,\rho) + \omega m_{k-2}(x,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} n_{k-1}(\psi,\rho,\omega t)]. \tag{3.9}$$

Здесь u_k, y_k, p_k, m_k — регулярные, а v_k, z_k, s_k, n_k — погранслойные вектор-функции (см. [49]), причем y_k, z_k, n_k являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним, т. е.

$$\langle y_k\rangle(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_k(x,\tau) d\tau = 0,$$
$$\langle z_k\rangle(\psi,\rho) = 0.$$

Погранслойные функции вначале определяются при $x \in \Omega_0$, а затем продолжаются нулем вовнутрь области Ω и умножаются на соответствующую срезающую бесконечно дифференцируемую в Ω функцию.

Формулировке основного результата параграфа предпошлем ряд обозначений.

Задачей (A) назовем задачу Дирихле в $\bar\Omega$ вида

$$\begin{cases} (\Delta + B_0)u(x) + \nabla p(x) = G(x), \\ \operatorname{div} u(x) = 0, \\ (u(x), b_0(x)) = 0, \\ (\Pi G(x), b_0(x)) = 0, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $G \in C^\infty(\bar\Omega)$, $(G, b_0) = 0$. Задачей (B) — задачу Неймана в $\bar\Omega$

$$\begin{cases} \Delta m(x) = G(x), \\ \frac{\partial m(x)}{\partial n}(0) = 0, \end{cases}$$

где $\int\limits_\Omega G(x)dx = 0$. Задачей (C) — задачу о 2π-периодических по τ решениях

$$\begin{cases} \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} = G(x)e^{il\tau}, \\ \langle y(\tau) \rangle = 0, \end{cases}$$

где l — целое число. Задачей (D) — задачу на луче $\rho \geqslant 0$ вида

$$\begin{cases} ikz(\rho) = \frac{\partial^2 z(\rho)}{\partial \rho^2} + g(\rho), \\ z(\rho)|_{\rho=0} = c, \\ z(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где k — ненулевое целое число, $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$, c — вещественное число. Задачей (E) — задачу на луче $\rho \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial \rho^2} = g(\rho), \\ v(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. Задачей (F) — задачу на луче $\rho \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial s(\rho)}{\partial \rho} = g(\rho), \\ s(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. В перечисленных задачах G, g — известные вектор-функции указанного типа. Очевидно, задачи (A) - (F) однозначно разрешимы, если в случае задачи (A) единственность p понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Далее, определим частичные суммы u^n_ω и p^n_ω рядов (3.8), (3.9), заменив формально в (3.8), (3.9) ∞ на n.

Теорема 3.1. *Существует такое число ω_0, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения. 1. Задача (3.1)-(3.3) имеет единственное $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое по t решение $(u_\omega(x,t), p_\omega(x,t))$, которое является вещественным и бесконечно дифференцируемым. 2. Построение вектор-функций u_ω^n, p_ω^n при каждом $n \geqslant -1$ сводится к решению конечного (зависящего от n) числа задач вида (A) - (F). 3. Для любого $l \geqslant 0$ и любого целого $n \geqslant -1$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|u_\omega - u_\omega^n\|_{C^{l,l/2}_{x,t}} \leqslant c_{n,l}\omega^{-(n+1)+l/2}, \\ &\|\nabla p_\omega - \nabla p_\omega^n\|_{C^{l,l/2}_{x,t}} \leqslant d_{n,l}\omega^{-n+l/2}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $c_{n,l}$, $d_{n,l} = const > 0$.

2°. Обоснование основного утверждения

Вначале напомним известные вспомогательные результаты (см., например, [40], [47], [10]). При этом символом $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в пространстве $S_2(\Omega) \equiv H^0$, а символом $Hom(B_1, B_2)$, где B_1, B_2 — банаховы пространства, — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2 с обычной операторной нормой.

Определенный в п.1 оператор A, действующий в H^0, замкнут и существуют такие положительные числа a, c, что при $Re\lambda \geqslant a$ справедлива оценка

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant c(1+|\lambda|)^{-1}.$$

Из этой оценки следует, что A порождает в H^0 аналитическую полугруппу $e^{tA} \in Hom(H^0, H^0)$, $t \geqslant 0$, и для любых $T > 0$, $\mu \in (0,1)$, найдется постоянная c, при которой для всех $u \in H^0$ выполняются неравенства

$$\left\|\frac{d}{dt}e^{tA}u\right\| \leqslant ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|, \quad t \in [0,T], \tag{3.11}$$

$$\|(e^{t_2A} - e^{t_1A})u\| \leqslant ct_1^{-\mu}(t_2-t_1)^\mu\|u\|, \quad 0 < t_1 < t_2 \leqslant T. \tag{3.12}$$

Подействуем на уравнение (3.1) проектором Π и перепишем (3.1)-(3.3) в операторной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + \frac{1}{\omega}Ku + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}(G_k u + \eta_k(x))\,e^{ik\omega t} + \eta_0(x). \tag{3.13}$$

Здесь A, $K = \Pi C(x)$ и $G_k = \Pi M_k(x)$ — линейные операторы в H^0 с областями определения

$$D(A) = \left\{u \in S_2(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

$D(K) = D(G_k) = D(A)$; $\eta_s(x) = \Pi d_s(x)$ — вектор-функции со значениями в H^0.

Утверждение теоремы 3 о существовании и единственности решения задачи (3.1)-(3.3) эквивалентно аналогичному утверждению для уравнения (3.13). С доказательства последнего мы и начнем.

В уравнении (3.13) сделаем замену переменных типа замены Крылова-Боголюбова [8]

$$u = v + \sum_{0<|k|\leqslant m} (ik\omega I - A - \omega^{-1}K)^{-1} G_k e^{ik\omega t} v \equiv v + S_\omega v.$$

Получим

$$\begin{gathered}(I + S_\omega)\tfrac{dv}{dt} + \sum_{0<|k|\leqslant m} ik\omega(ik\omega I - A - \omega^{-1}K)^{-1} G_k e^{ik\omega t} v = \\ = Av + \sum_{0<|k|\leqslant m} A(ik\omega I - A - \omega^{-1}K)^{-1} G_k e^{ik\omega t} v + \\ + \omega^{-1}Kv + \omega^{-1} \sum_{0<|k|\leqslant m} K(ik\omega I - A - \omega^{-1}K)^{-1} G_k e^{ik\omega t} v + \\ + \sum_{0<|k|\leqslant m} G_k e^{ik\omega t} v + \sum_{0\leqslant|k|,|j|\leqslant m} G_j (ik\omega I - A - \omega^{-1}K)^{-1} G_k e^{i(k+j)\omega t} v + \\ + \sum_{0\leqslant|k|\leqslant m} \eta_k(x)) e^{ik\omega t}.\end{gathered}$$

Отсюда находим

$$\begin{gathered}\tfrac{dv}{dt} = (I + S_\omega)^{-1} \left[A + \omega^{-1}K + \sum_{0<|k|\leqslant m} G_{-k}(ik\omega I - A - \omega^{-1}K)^{-1} G_k \right] v + \\ + (I + S_\omega)^{-1} \left[\sum_{0<|k|,|j|\leqslant m, k+j\neq 0} G_j (ik\omega I - A - \omega^{-1}K)^{-1} G_k e^{i(k+j)\omega t} \right] v + \\ + (I + S_\omega)^{-1} \sum_{0\leqslant|k|\leqslant m} \eta_k(x)) e^{ik\omega t}.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Перепишем (3.14) в виде

$$\frac{dv}{dt} - A_\omega v = R_\omega v + \sum_{0\leqslant|k|\leqslant m} (I + S_\omega)^{-1} \eta_k(x) e^{ik\omega t}, \tag{3.15}$$

где

$$A_\omega = A + \omega^{-1} \left(K + \sum_{0<|k|\leqslant m} \frac{1}{ik} G_{-k} G_k \right) \equiv A + \omega^{-1} B,$$

$$R_\omega = (I+S_\omega)^{-1}S_\omega \left[A+\omega^{-1}K+\sum_{0<|k|\leqslant m} G_{-k}(ik\omega I - A-\omega^{-1}K)^{-1}G_k\right]+$$
$$+(I+S_\omega)^{-1}\left[\sum_{0<|k|,|j|\leqslant m, k+j\neq 0} G_j(ik\omega I - A-\omega^{-1}K)^{-1}G_k e^{i(k+j)\omega t}\right]+$$
$$+\sum_{0<|k|\leqslant m} G_{-k}[(ik\omega I - A-\omega^{-1}K)^{-1}-(ik\omega)^{-1}]G_k.$$

Перейдем к исследованию некоторых спектральных характеристик оператора A_ω при $\omega \gg 1$.

Пусть r_1 — столь малое положительное число, что внутри окружности $\Gamma_1 = \{\lambda \in C : |\lambda| = r_1\}$ нет ненулевых собственных значений оператора A. Введем спектральные проекторы:

$$P = \int\limits_{|\lambda|=r_1} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \quad Q = I - P.$$

Отметим, что далее в этом параграфе мы будем существенно использовать матричные представления операторов, связанные с определенными парами взаимно ортогональных проекторов. Представления такого рода активно использовал Л. И. Сазонов в работах [33, 34, 35].

Воспользуемся матричным представлением оператора

$$A_\omega - \lambda I = \begin{pmatrix} P(A_\omega-\lambda I)P & PA_\omega Q \\ QA_\omega P & Q(A_\omega - \lambda I)Q \end{pmatrix} :$$
$$D(A) \subset PH^0 \times QH^0 \to PH^0 \times QH^0, \quad \lambda \in C.$$

Учитывая, что оператор $Q(A_\omega - \lambda I)Q$ при больших ω и $|\lambda| < r_1$ обратим в QH^0, введем в рассмотрение оператор

$$J = \begin{pmatrix} P & -C_{0\omega} \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

где

$$C_{0\omega} = \omega^{-1} PBQ(A_\omega - \lambda I)^{-1} Q. \tag{3.16}$$

При этом

$$J(A_\omega - \lambda I) =$$
$$= \begin{pmatrix} P(A_\omega - \lambda I)P - \omega^{-2}PBQ(A_\omega-\lambda I)^{-1}QBP & 0 \\ \omega^{-1}QBP & Q(A_\omega - \lambda I)Q \end{pmatrix} \equiv \tag{3.17}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} C_{1\omega} & 0 \\ C_{2\omega} & C_{3\omega} \end{pmatrix} \equiv C_\omega : D(A) \subset H^0 \to H^0$$

Далее учтем два следующих простых соображения. При больших ω и $|\lambda| < r_1$ оператор $J : H^0 \to H^0$ обратим, причем

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} P & C_{0\omega} \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

а оператор C_ω обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $C_{1\omega}$, причем в этом случае

$$C_\omega^{-1} = \begin{pmatrix} C_{1\omega}^{-1} & 0 \\ -C_{3\omega}^{-1} C_{2\omega} C_{1\omega}^{-1} & C_{3\omega}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

откуда в силу равенства (3.17) следует что число λ при $|\lambda| < r_1$ является собственным значением оператора A_ω при больших ω тогда и только тогда, когда оно является собственным значением конечномерного оператора $PAP + \omega^{-1}P[B - \omega^{-1}BQ(A_\omega - \lambda I)^{-1}QB]P$ в пространстве PH^0.

Теперь заметим, что уравнение $Ax = Ba$, $x \in H^0$, $a \in KerA$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} PAPx_1 = PBPa \\ QAQx_2 = QBQa, \quad x_1 \in PH^0, \quad x_2 \in QH^0, \quad x = (x_1, x_2)^T. \end{cases}$$

Поскольку второе уравнение этой системы однозначно разрешимо, то функция $a \in \operatorname{Ker} A$ не имеет присоединенных функций относительно пары операторов A, B в H^0 тогда и только тогда, когда она не имеет присоединенных функций относительно пары операторов PAP, PBP в PH^0. Таким образом, вопрос о малых собственных значениях $\lambda_{\omega j}$ оператора A_ω, $\omega \gg 1$, сведен к рассмотреному в §1 работы [61] конечномерному случаю, поэтому:

$$\lambda_{\omega j} = \varphi_j \omega^{-p_j} + o\left(\omega^{-p_j}\right), \quad j = \overline{1, s}, \quad \omega \gg 1, \quad \varphi_j \neq 0, \quad 0 < p_j \leqslant 1.$$

Как отмечалось выше, оператор A порождает аналитическую полугруппу e^{tA}, $t \geqslant 0$, а потому в комплексной плоскости C найдется острый угол $\{\lambda \in C : \arg(\lambda - \alpha_0) = \pm\theta_0\}$, где $\alpha_0 > 0$, $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ внутри которого лежит спектр оператора A. Пусть t_0 — столь малое положительное число, что при всех ненулевых $\lambda \in C$, лежащих внутри угла Γ_0, $e^{\lambda t_0} \neq 1$. Определенное выше число ω_0 будем, по-прежнему, считать достаточно большим. Введем в рассмотрение при $\omega > \omega_0$ окружность $\gamma_\omega = \{\lambda \in C : |\lambda| = r_0\omega^{-1}\}$ и число $T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}\left[t_0\frac{\omega}{2\pi}\right]$. Тогда при больших ω действующий в H^0 оператор $I - e^{T_\omega A_\omega}$ обратим и справедливо следующее представление, которое понадобится нам в дальнейшем:

$$\begin{gathered}Z_\omega(t) = (I - e^{T_\omega A_\omega})^{-1} e^{(T_\omega + t - \tau) A_\omega} = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \left(1 - e^{\lambda T_\omega}\right)^{-1} e^{\lambda(T_\omega + t - \tau)} (A_\omega - \lambda I)^{-1} d\lambda - \\ -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\omega} \left(1 - e^{\lambda T_\omega}\right)^{-1} e^{\lambda(T_\omega + t - \tau)} (A_\omega - \lambda I)^{-1} d\lambda,\end{gathered} \tag{3.20}$$

где контуры Γ_0, γ_ω ориентированы так, что при движении вдоль них спектр оператора A_ω лежит слева.

Задача о классических $2\pi\omega^{-1}$-периодических по t решениях уравнения (3.15) эквивалентна задаче о T_ω-периодических решениях этого же уравнения. Последняя же эквивалентна задаче о решениях $z \in C_\mu([0, t_0], H^0) \equiv C_\mu(H^0)$, $\mu \in (0, 1)$, уравнения

$$\begin{gathered}z(t) = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A_\omega} \left[R_\omega z(\tau) + \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant m} (I + S_\omega)^{-1} \eta_k e^{ik\omega t} \right] d\tau + \\ + \left(I - e^{T_\omega A_\omega}\right)^{-1} \int\limits_0^{T_\omega} e^{(t + T_\omega - \tau) A_\omega} \left[R_\omega z(\tau) + \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant m} (I + S_\omega)^{-1} \eta_k e^{ik\omega t} \right] d\tau = \\ = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A_\omega} R_\omega z(\tau) d\tau + \left(I - e^{T_\omega A_\omega}\right)^{-1} \int\limits_0^{T_\omega} e^{(t + T_\omega - \tau) A_\omega} R_\omega z(\tau) d\tau + \Psi_\omega(t) \equiv \\ \equiv K_{\omega 1} z + K_{\omega 2} z + \Psi_\omega \equiv K_\omega z + \Psi_\omega, \quad t \in [0, t_0].\end{gathered} \tag{3.21}$$

Рассмотрим оператор $K_\omega : C_\mu(H^0) \to C_\mu(H^0)$ при $\omega > \omega_0$. Существование и единственность решения уравнения (3.21) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Оператор $K_\omega : C_\mu(H^0) \to C_\mu(H^0)$ при $\omega > \omega_0$, где ω_0 достаточно велико, удовлетворяет оценке*

$$\|K_\omega\|_{\mathrm{Hom}(C_\mu(H^0), C_\mu(H^0))} < \frac{1}{2}. \tag{3.22}$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно установить оценки

$$\|K_{\omega i}\|_{\mathrm{Hom}(C_\mu(H^0), C_\mu(H^0))} < \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2. \tag{3.23}$$

Интегральные операторы $K_{\omega i}$, $i = 1, 2$, оцениваются аналогично, поэтому ограничимся лишь оценкой $K_{\omega 2}$, в котором дополнительно (по сравнению с

$K_{\omega 1}$) содержится операторный сомножитель $\left(I - e^{T_\omega A_\omega}\right)^{-1}$. Начнем с матричного представления резольвенты (см. (3.17)-(3.19)):

$$(A_\omega - \lambda I)^{-1} = \begin{pmatrix} C_{1\omega}^{-1} & 0 \\ -C_{3\omega}^{-1} C_{2\omega} C_{1\omega}^{-1} & C_{3\omega}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & -C_{0\omega} \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

Для $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in PH^0 \times QH^0$ находим:

$$\begin{gathered} (A_\omega - \lambda I)^{-1} x = \begin{pmatrix} C_{1\omega}^{-1} & 0 \\ -C_{3\omega}^{-1} C_{2\omega} C_{1\omega}^{-1} & C_{3\omega}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - C_{0\omega} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C_{1\omega}^{-1}(x_1 - C_{0\omega} x_2) \\ -C_{3\omega}^{-1} C_{2\omega} C_{1\omega}^{-1}(x_1 - C_{0\omega} x_2) + C_{3\omega}^{-1} x_2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Из соотношений (3.20), (3.24) следуют представления:

$$\begin{gathered} Z_\omega(t) P x = (I - e^{T_\omega A_\omega})^{-1} e^{(T_\omega + t - \tau) A_\omega} = \\ = -\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \left(1 - e^{\lambda T_\omega}\right)^{-1} e^{(\lambda T_\omega + t - \tau)} \begin{pmatrix} C_{1\omega}^{-1} x_1 \\ -C_{3\omega}^{-1} C_{2\omega} C_{1\omega}^{-1} x_1 \end{pmatrix} d\lambda - \\ -\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\omega} \left(1 - e^{\lambda T_\omega}\right)^{-1} e^{\lambda(T_\omega + t - \tau)} \begin{pmatrix} C_{1\omega}^{-1} x_1 \\ -C_{3\omega}^{-1} C_{2\omega} C_{1\omega}^{-1} x_1 \end{pmatrix} d\lambda \equiv Z_\omega^{(1)}(t) x + Z_\omega^{(2)}(t) x, \end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered} Z_\omega(t) Q x = (I - e^{T_\omega A_\omega})^{-1} e^{(T_\omega + t - \tau) A_\omega} = \\ = -\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \left(1 - e^{\lambda T_\omega}\right)^{-1} e^{\lambda(T_\omega + t - \tau)} \begin{pmatrix} -C_{1\omega}^{-1} C_{0\omega} x_2 \\ (C_{3\omega}^{-1} C_{2\omega} C_{1\omega}^{-1} C_{0\omega} + C_{3\omega}^{-1}) x_2 \end{pmatrix} d\lambda - \\ -\tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\omega} \left(1 - e^{\lambda T_\omega}\right)^{-1} e^{\lambda(T_\omega + t - \tau)} \begin{pmatrix} -C_{1\omega}^{-1} C_{0\omega} x_2 \\ (C_{3\omega}^{-1} C_{2\omega} C_{1\omega}^{-1} C_{0\omega} + C_{3\omega}^{-1}) x_2 \end{pmatrix} d\lambda \equiv \\ \equiv Z_\omega^{(3)}(t) x + Z_\omega^{(4)}(t) x, \quad t \in [0, t_0], \quad \tau \in [0, T_\omega], \end{gathered} \tag{3.26}$$

Оценка (3.23) для оператора $K_{\omega 2}$, определяемого равенством (3.21), осуществляется по хорошо разработанной в теории метода усреднения схеме (см., например, [10], [52] и формулы (3.11), (3.12)). При этом стандартным образом оценивается оператор R_ω и используются следующие две леммы.

Лемма 3.2. *При $\mu \in (0,1)$ для любых $t \in [0, t_0]$, $\tau \in [0, T_\omega]$ и $\omega > \omega_0$, где ω_0 — достаточно большое число, справедливы оценки:*

$$\|Z_\omega^{(i)}(t) x\|_{H^0} \leqslant c \|x\|_{H^0}, \quad \left\| \frac{d}{dt} Z_\omega^{(k)}(t) x \right\|_{H^0} \leqslant c \|x\|_{H^0}, \quad i = 1, 3, 4, \quad k = 1, 4;$$

$$\left\| Z_\omega^{(3)}(t_2)x - Z_\omega^{(3)}(t_1)x \right\|_{H^0} \leqslant c(T_\omega + t_1 - \tau)^{-\mu}(t_2 - t_1)^\mu, 0 < t_1 < t_2 \leqslant T_0;$$

$$\|Z_\omega^{(2)}(t)x\|_{H^0} \leqslant c\omega \|x\|_{H^0}, \quad \left\| \frac{d}{dt} Z_\omega^{(2)}(t)x \right\|_{H^0} \leqslant c\omega \|x\|_{H^0},$$

где c — не зависящая от t, ω и x постоянная.

Лемма 3.3. *При любом $t \in [t, t_0]$ и $\omega > \omega_0$, где ω_0 — достаточно большое число, справедлива оценка:*

$$\|S_\omega A_0\|_{\mathrm{Hom}(H^0, H^0)} \leqslant c_0 < \infty, \tag{3.27}$$

где c_0 — не зависящая от t, ω постоянная.

При доказательстве леммы 5 используются представления (3.25), (3.26) операторов $Z_\omega^{(i)}$, $i = \overline{1,4}$ и (3.16), (3.17) операторов $C_{k\omega}$, $k = \overline{0,3}$. Кроме того, при оценке конечномерного оператора $Z_\omega^{(2)}(t)$ используется та же, что в п. 1.4 [61], методика.

Для доказательства леммы 6, очевидно, достаточно установить оценку:

$$\|(ik\omega I - A_0)^{-1} G_k A_0\|_{\mathrm{Hom}(H^0, H^0)} \leqslant c_1, \tag{3.28}$$

где $A_0 = \Pi\Delta$, а c_1 — независящая от t, ω и k, $0 < |k| \leqslant m$, постоянная. Оцениваемый в (3.28) оператор является продолжением на H^0 одноименного оператора, определенного на линеале $D(A_0) \subset H^0$. В целях оценки введем в рассмотрение множество L_0 гладких соленоидальных финитных в Ω вектор-функций. Согласно лемме 5.2 [40] множество L_0 плотно в S_2. При этом для любых $u, v \in L_0$ имеем:

$$\big((ik\omega I - A_0)^{-1} G_k A_0 u, v\big) = -\big(\Pi\Delta u, G_k^*(ik\omega I + A_0)^{-1} v\big) \equiv$$
$$\equiv (\Delta u, c_{k\omega} + \nabla q_{k\omega}),$$

где

$$\Delta q_{k,\omega} = -\operatorname{div} c_{k\omega} v, \quad \left.\frac{\partial q_{k\omega}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\left|\big((ik\omega I - A_0)^{-1} G_k A_0 u, v\big)\right| = |(u, c_{k\omega} + \Delta(\nabla q_{k\omega}))| \leqslant c_1 \|u\|_{H^0} \|v\|_{H^0},$$

где $c_1 = const$, таким образом неравенства (3.27), (3.28) доказаны.

Из неравенства (3.22), в силу принципа сжатых отображений, следует существование единственного решения $z \in C_\mu([0, T_\omega], H^0)$ уравнения (3.21) при больших ω, т. е. $z(t)$ является слабым решением задачи (3.1)-(3.3) с начальным условием $z|_{t=0} = z(0)$. Слагаемые уравнения (3.21), содержащие $\frac{d}{dt}$ проинтегрируем по частям. После этого выберем и подставим в правую часть последовательность $\{z^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \in C_\mu([0, T_\omega], H^0 \cap W^2_{2,0}(\Omega))$, которая сходится к z по норме H^0. Здесь и далее символом $W^j_{p,0}(\Omega)$ обозначается замыкание по норме $W^j_p(\Omega)$ гладких вектор-функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$. Тогда для соответствующей последовательности $\{\bar{z}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ левых частей получим

$$\bar{z}^{(n)} \in C_\mu([0, T_\omega], H^0(\Omega) \cap W^2_{2,0}(\Omega)), \quad \|\bar{z}^{(n)} - z\|_{C_\mu([0,T_\omega],H^0(\Omega)\cap W^1_2(\Omega))} \to 0.$$

Таким образом, $z \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^0(\Omega) \cap W^1_{2,0}(\Omega))$. Из [58] теперь следует, что

$$z \in C_\mu([0, T_\omega], H^0 \cap W^2_2(\Omega)) \cap C_\mu([0, T_\omega], H^0 \cap W^1_{2,0}(\Omega)), \tag{3.29}$$

поэтому $z(t)$ удовлетворяет задаче (3.1)-(3.3) в $C_\mu([0, T_\omega], H^0)$.

Обозначим символом $C_\mu(R, B)$ обычное банахово пространство вектор-функций $z : R \to B$, удовлетворяющих равномерному условию Гельдера с показателем μ. Продолжим вектор-функцию $z(t)$ T_ω-периодическим образом на всю ось $t \in R$, оставим за продолжением прежнее обозначение. Из (3.29) следует, что

$$z \in C_\mu(R, H^0 \cap W^2_2(\Omega)) \cap C_\mu(R, H^0 \cap W^1_{2,0}(\Omega)). \tag{3.30}$$

В силу $\frac{2\pi}{\omega}$-периодичности коэффициентов исходной задачи (3.1)-(3.3) и доказанной выше единственности решения задачи (3.1)-(3.3) в смысле $C_\mu([0, T_\omega], H^0)$, $z(t)$ является единственным $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическим решением указанной задачи. Из соотношения (3.22) следует оценка при больших ω:

$$\|z\|_{C_\mu(R,H^0\cap W^1_{2,0}(\Omega))} \leqslant c \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \|\eta_k\|_{H^0}. \tag{3.31}$$

Для завершения доказательства утверждения 1 осталось установить бесконечную дифференцируемость решения $z(x, t)$: $z \in C^\infty(\bar{Q})$. Пусть $\chi(t)$, $t \in [0, 1]$, — бесконечно-дифференцируемая функция такая что $\chi(t) \neq 0$, $t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ 1, & t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Вектор-функция $v(t) = \chi(t)z(t)$, $t \in [0,1]$, очевидно, является решением задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} - A_\omega v = \chi\left(R_\omega z + \sum_{0\leqslant|k|\leqslant m}(I+S_\omega)^{-1}\eta_k e^{ik\omega t}\right) + \frac{d\chi}{dt}z,\\ v(0)=0.\end{gathered} \tag{3.32}$$

Поскольку коэффициенты левой части (3.32) и граница $\partial\Omega$ бесконечно дифференцируемы, а также для этой задачи выполнены условия согласования сколь угодно высокого порядка, то будем к ней применять теорему 2 из [58]. В силу $\frac{2\pi}{\omega}$-периодичности вектор-функции $z(x,t)$ по t получим тогда, что $z \in C^\infty(\overline{Q})$.

3°. **Построение и обоснование асимптотики**

Воспользуемся известными (см., например, [55], [56]) соотношениями для операторов Δ, ∇, div в криволинейных координатах (ψ_1, ψ_2, r) и, положив $\rho = r\sqrt{\omega}$, придем к разложениям:

$$(\Delta + B_0)u = \sum_{k=-2}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}L_k(\psi,\rho)u, \tag{3.33}$$

(символ Δ здесь отождествляется с матричным выражением (формальным произведением) ΔE, где E — единичная матрица третьего порядка),

$$\begin{gathered}\operatorname{div} u = \sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}\frac{\partial u^{(3)}}{\partial\rho} - \sum_{k=0}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}[D_{k,1}(\psi,\rho)u^{(1)} + D_{k,2}(\psi,\rho)u^{(2)}\\ +D_{k,3}(\psi,\rho)u^{(3)}],\end{gathered} \tag{3.34}$$

$$\nabla p = \sum_{k=-1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}P_k(\psi,\rho)p. \tag{3.35}$$

Здесь $P_{-1}(\psi,\rho)p = \left(0, 0, \frac{\partial p}{\partial\rho}\right)^T$, $L_{-2}(\psi,\rho)u = \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial\rho^2}, \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial\rho^2}, 0\right)^T$, а остальные P_k, L_k, $D_{j,k}$ — дифференциальные выражения относительно (ψ,ρ) с равномерно ограниченными относительно (ψ,ρ) коэффициентами, $u^{(i)}$, $i = 1,2,3$, — i-ая криволинейная координата вектора u.

Подставим ряды (3.8) и (3.9) в уравнения (3.1), (3.2) и граничное условие

(3.3), сделав предварительно замену переменной $\tau = \omega t$:

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{\frac{2-k}{2}} \left(\frac{\partial y_k(x,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial z_k(\psi,\rho,\tau)}{\partial \tau} \right) +$$
$$+ \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \nabla [p_k(x) + \omega^{\frac{1}{2}} s_{k-1}(\psi,\rho) + \omega m_{k-2}(x,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} n_{k-1}(\psi,\rho,\omega t)] =$$
$$= \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} (\Delta + B_0(x))(u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + y_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} c_{-2}^{j} C_0(x) a_j(x) +$$
$$+ \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k+2}{2}} C_0(x)(u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + \sum_{j=1}^{s} c_k^j a_j(x) + y_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau)) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} \left(\omega \sum_{j=1}^{s} c_{-2}^{j} M_k a_j(x) + \sum_{i=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{i}{2}} M_k [u_i(x) + v_i(\psi,\rho) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{s} c_i^j a_j(x) + y_i(x,\tau) + z_i(\psi,\rho,\tau)] + d_k(x) \right) e^{ik\tau} + d_0(x), \tag{3.36}$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \operatorname{div}[u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + \sum_{j=1}^{s} c_k^j a_j(x) + y_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau)] = 0, \tag{3.37}$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [u_k(x) + v_k(\psi,\rho) + \sum_{j=1}^{s} c_k^j a_j(x) + y_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau)]|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.38}$$

В равенствах (3.36)-(3.38) с учетом представлений (3.33)-(3.35) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω отдельно для регулярных и погранслойных функций. Получим бесконечную последовательность задач. Выпишем первые из них. Из уравнений (3.34), (3.37) для погранслойных функций получим

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial \rho} = 0, \\ z_{-1}^{(3)}|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho)}{\partial \rho} = 0, \\ v_{-1}^{(3)}|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

так что $z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) \equiv 0$, $v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho) \equiv 0$. Из уравнений (3.36)-(3.37) для регулярных функций находим

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{-1}(x,\tau)}{\partial \tau} + \nabla m_{-3}(x,\tau) = 0, \\ \operatorname{div} y_{-1} = 0, \\ y_{-1n}|_{\partial\Omega} = -z_{-1}^{(3)}|_{\partial\Omega}|_{\rho=0} = 0, \\ \langle y_{-1} \rangle = \langle m_{-3} \rangle = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Нижним индексом n мы обозначаем проекцию вектора на внутреннюю нормаль к $\partial\Omega$. Положим $y_{-1} = 0$, $m_{-3} = 0$. Для погранслойных функций имеем:

$$\frac{\partial z_{-1}(\psi,\rho,\tau)}{\partial \tau} = L_{-2}(\psi,\rho)(z_{-1}(\psi,\rho,\tau) + v_{-1}(\psi,\rho)) - P_{-1}(s_{-2}(\psi,\rho) + n_{-2}(\psi,\rho,\tau)),$$
$$\langle z_{-1} \rangle = \langle n_{-2} \rangle = 0.$$

Применяя к последнему равенству операцию усреднения и учитывая граничные условия, получим следующие четыре задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau), \\ \langle z_{-1}^{(i)} \rangle = 0, \\ z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho=0} = -y_{-1}^{(i)}, \\ z_{-1}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2, \end{cases} \tag{3.40}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} v_{-1}^{(i)}(\psi,\rho) = 0, \\ v_{-1}^{(i)}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2, \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} s_{-2}(\psi,\rho) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho) = 0, \\ s_{-2}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} n_{-2}(\psi,\rho,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) = 0, \\ \langle n_{-2} \rangle = 0, \\ n_{-2}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Из соотношений (3.40)-(3.43) находим $z_{-1}^{(1,2)} \equiv 0$, $v_{-1}^{(1,2)} \equiv 0$, $s_{-2} \equiv 0$, $n_{-2} \equiv 0$.

Приравняем коэффициенты при степени ω. Снова из уравнения (3.37) получим

$$\frac{\partial z_0^{(3)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial \rho} = D_{-1,1}(\psi,\rho) z_{-1}^{(1)}(\psi,\rho,\tau) + D_{-1,2}(\psi,\rho) z_{-1}^{(2)}(\psi,\rho,\tau) +$$
$$+ D_{-1,1}(\psi,\rho) z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau),$$

$$\frac{\partial v_0^{(3)}(\psi,\rho)}{\partial \rho} = D_{-1,1}(\psi,\rho) v_{-1}^{(1)}(\psi,\rho) + D_{-1,2}(\psi,\rho) v_{-1}^{(2)}(\psi,\rho) +$$
$$+ D_{-1,1}(\psi,\rho) v_{-1}^{(3)}(\psi,\rho).$$

Откуда найдем $z_0^{(3)}(\psi,\rho,\tau)$ и $v_0^{(3)}(\psi,\rho)$. Для регулярных функций

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0(x,\tau)}{\partial\tau} + \nabla m_{-2}(x,\tau) = \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m}\sum\limits_{j=1}^{s} c_{-2}^{j} M_k(x)a_j(x)e^{ik\tau}, \\ \operatorname{div} y_0 = 0, \\ y_{0n}|_{\partial\Omega} = -z_0^{(3)}|_{\partial\Omega}|_{\rho=0} = 0, \\ \langle y_0\rangle = \langle m_{-2}\rangle = 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \Delta m_{-2}(x,\tau) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial y_0(x,\tau)}{\partial\tau} - \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m}\sum\limits_{j=1}^{s} c_{-2}^{j} M_k(x)a_j(x)e^{ik\tau}\right) = 0, \\ \frac{m_{-2}(x,\tau)}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \left\{\frac{\partial y_0(x,\tau)}{\partial\tau} - \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m}\sum\limits_{l=1}^{s} c_{-2}^{l} M_k(x)a_j(x)e^{ik\tau}\right\}_n, \\ \langle m_{-2}\rangle = 0, \end{cases} \tag{3.45}$$

где n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$. Теперь легко найдем m_{-2} из задачи (3.45) и y_0 из задачи (3.44), зависящие от коэффициентов c_{-2}^{j}, $j=1,2,\ldots,s$. При этом $y_0(x,\tau) = \sum\limits_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{M_k}{ik}\sum\limits_{j=1}^{s} c_{-2}^{j}a_j(x)e^{ik\tau}$. Из основного уравнения (3.36) для погранслойных функций получим

$$\frac{\partial z_0(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = L_{-2}(\psi,\rho)[z_0(\psi,\rho,\tau) + v_0(\psi,\rho)] -$$
$$-P_{-1}(\psi,\rho)[s_{-1}(\psi,\rho) + n_{-1}(\psi,\rho,\tau)] + q_0(\psi,\rho) + q_1(\psi,\rho,\tau),$$
$$\langle z_0\rangle = \langle n_{-1}\rangle = 0,$$

где q_0, q_1 — известные погранслойные вектор-функции, причем q_1 является 2π-периодической с нулевым средним по τ. Применяя операцию усреднения и учитывая граничные условия, получим задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial z_0^{(i)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z_0^{(i)}(\psi,\rho,\tau) + q_1(\psi,\rho,\tau), \\ \langle z_0^{(i)}\rangle = 0, \\ z_0^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho=0} = -y_0^{(i)}, \\ z_0^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0, i=1,2, \end{cases} \tag{3.46}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v_0^{(i)}(\psi,\rho) = q_0(\psi,\rho), \\ v_0^{(i)}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, i=1,2, \end{cases} \tag{3.47}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} s_{-1}(\psi,\rho) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v_0^{(3)}(\psi,\rho), \\ s_{-1}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0 \end{cases} \tag{3.48}$$

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial\rho}n_{-1}(\psi,\rho,\tau)=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}z_0^{(3)}(\psi,\rho,\tau)-\frac{\partial}{\partial\tau}z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau),\\
\langle n_{-1}\rangle=0,\\
n_{-1}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty}=0.
\end{cases}
\tag{3.49}
$$

Так найдем первые две компоненты вектора z_0, зависящие от неизвестных пока коэффициентов c_{-2}^j, $j=1,2,\ldots,s$, а также $v_0^{(1,2)}$ и s_{-1}.

Приравняем теперь коэффициенты при $\omega^{\frac{1}{2}}$. Для регулярных функций имеем

$$
\frac{\partial y_1(x,\tau)}{\partial\tau}+\nabla[p_{-1}(x)+m_{-1}(x,\tau)]=
$$
$$
=(\Delta+B_0)u_{-1}(x)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}M_k(u_{-1}(x)+\sum_{j=1}^{s}c_{-1}^j a_j(x))e^{ik\tau},
$$

применим операцию усреднения, получим задачу для u_{-1}

$$
\begin{cases}
(\Delta+B_0)u_{-1}(x)=\nabla p_{-1}(x),\\
\operatorname{div}u_{-1}(x)=0,\\
(u_{-1}(x),b_j(x))=0, j=1,2,\ldots,s,\\
u_{-1}(x)|_{\partial\Omega}=v_{-1}|_{\rho=0}=0.
\end{cases}
$$

К задачам для последовательного нахождения z_1^3, v_1^3, m_{-1}, y_1, $z_1^{(1,2)}$, $v_3^{(1,2)}$, s_0 и n_0 вернемся после нахождения неизвестных коэффициентов c_{-2}^j, $j=1,2,\ldots,s$.

Теперь приравняем коэффициенты при ω^0

$$
\frac{\partial y_2(x,\tau)}{\partial\tau}+\nabla[p_0(x)+m_0(x,\tau)]=(\Delta+B_0)(u_0(x)+y_0(x,\tau))+
$$
$$
+\sum_{j=1}^{s}c_{-2}^j(C_0(x)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{M_k(x)M_{-k}(x)}{ik})a_j(x)+
$$
$$
+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}(M_k(u_0(x)+\sum_{j=1}^{s}c_0^j a_j(x)+y_0(x,\tau))+d_k)e^{ik\tau}+d_0(x),
$$

применим операцию усреднения

$$
\begin{cases}
-(\Delta+B_0)u_0(x)+\nabla p_0(x)=\\
\sum_{j=1}^{s}c_{-2}^j(C_0(x)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\frac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik})a_j(x)+d_0(x),\\
\operatorname{div}u_0(x)=0,\\
(u_0(x),b_j(x))=0, j=1,2,\ldots,s,\\
u_0(x)|_{\partial\Omega}=v_0(\psi,0).
\end{cases}
$$

Избавимся от неоднородности в граничном условии, подействуем проектором Вейля, и в качестве условия разрешимости для этой задачи получим систему линейныйх алгебраических уравнений

$$(\sum_{j=1}^{s} c_{-2}^{j}(C_0(x)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\tfrac{M_k(x)M_{-k}(x)}{ik})a_j(x),b_i(x))=-(f_0(x),b_i(x)),\\ i=1,2,\ldots,s, \tag{3.50}$$

с известным столбцом свободных членов ($f_0(x)$ — известная вектор-функция) и основной матрицей невырожденной матрицей P. Таким образом, система (3.50) однозначно разрешима. Возвращаясь к задаче (3.46), однозначно находим m_{-2}, y_0, $z_0^{(1,2)}$. Теперь можно вернуться к нерешенным на предыдущем шаге задачам (см. выше). Продолжим этот процесс.

Допустим известны все коэффициенты вплоть до $y_{j-5}(x,\tau)$, $u_{j-5}(x)$, $z_{j-5}^{(1,2)}(\psi,\rho,\tau)$, $z_{j-4}^{3}(\psi,\rho,\tau)$, $v_{j-4}(\psi,\rho)$, $p_{j-5}(x)$, $m_{j-7}(x,\tau)$, $s_{j-4}(\psi,\rho)$, $n_{j-4}(\psi,\rho,\tau)$, c_{j-5}^{l} включительно, $l=1,2,\ldots,s$. Причем y_{j-4}, m_{j-6}, $z_{j-4}^{(1,2)}$ зависят от неизвестного пока коэффициента c_{j-6}^{l}, $l=1,2,\ldots,s$. На j-м шаге, приравняв коэффициенты при $\omega^{-\frac{j-4}{2}}$, для регулярных функций получим

$$\tfrac{\partial y_{j-3}(x,\tau)}{\partial\tau}+\nabla[p_{j-4}(x)+m_{j-4}(x,\tau)]=(\Delta+B_0)(u_{j-4}(x)+y_{j-4}(x,\tau))+\\ +C_0(x)(u_{j-6}(x)+y_{j-6}(x,\tau))+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}M_k(u_{j-4}(x)+y_{j-4}(x)+\\ +\sum_{l=1}^{s}c_{j-4}^{l}a_l(x))e^{ik\tau},$$

применим операцию усреднения, избавимся от неоднородности в граничных условиях и получим задачу для u_{j-4}

$$\begin{cases} -(\Delta+B_0)u_{j-4}(x)+\nabla p_0(x)= \\ =\sum_{l=1}^{s}c_{j-6}^{l}(C_0(x)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\tfrac{M_k(x)\Pi M_{-k}(x)}{ik})a_l(x)+f(x), \\ \operatorname{div}u_{j-4}(x)=0, \\ (u_{j-4}(x),b_j(x))=0, j=1,2,\ldots,s, \\ u_{j-4}(x)|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}$$

Подействуем проектором Вейля, и в качестве условия разрешимости для этой задачи получим систему линейныйх алгебраических уравнений

$$(\sum_{l=1}^{s} c_{j-6}^{l}(C_0(x)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\tfrac{M_k(x)M_{-k}(x)}{ik})a_l(x),b_i(x))=-(f(x),b_i(x)),\\ i=1,2,\ldots,s, \tag{3.51}$$

с известным столбцом свободных членов ($f(x)$ — известная вектор-функция) и основной невырожденной матрицей вида P. Система (3.51) однозначно разрешима.Теперь однозначно находим y_{j-4}, m_{j-6}, $z_{j-4}^{(1,2)}$. Следующим шагом, как и показано выше, последовательно найдем $z_{j-3}^{(3)}$, $v_{j-3}^{(3)}$, m_{j-5}, y_{j-3}, $z_{j-3}^{(1,2)}$, $v_{j-3}^{(1,2)}$, s_{j-4}, n_{j-4}. Причем m_{j-5}, y_{j-3}, $z_{j-3}^{(1,2)}$ зависят от неизвестных пока коэффициентов c_{j-5}^{l}, $l = 1, 2, \ldots, s$. Для погранслойных функций из основного уравнения (3.36) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial z_{j-2}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} + \sum_{i=-1}^{j-4} P_i(\psi,\rho)[s_{j-4-i}(\psi,\rho) + n_{j-4-i}(\psi,\rho,\tau)] = \\ = \sum_{i=-2}^{j-4} L_i(\psi,\rho)[z_{j-4-i}(\psi,\rho,\tau) + v_{j-4-1}(\psi,\rho)], \\ \langle z_{j-2}\rangle = \langle n_{j-3}\rangle = 0,\end{gathered} \tag{3.52}$$

т. е.

$$\begin{gathered}\frac{\partial z_{j-2}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = L_{-2}(\psi,\rho)[z_{j-2}(\psi,\rho,\tau) + v_{j-2}(\psi,\rho)] - \\ -P_{-1}(\psi,\rho)[s_{j-3}(\psi,\rho) + n_{j-3}(\psi,\rho,\tau)] + q_0(\psi,\rho,c_{j-5}^1,c_{j-5}^2,\ldots,c_{j-5}^s) + \\ +q_1(\psi,\rho,\tau,c_{j-5}^1,c_{j-5}^2,\ldots,c_{j-5}^s), \\ \langle z_{j-2}\rangle = \langle n_{j-3}\rangle = 0,\end{gathered}$$

где q_0, q_1 — известные вектор-функции, причем q_1 является 2π-периодической с нулевым средним по τ. Применяя операцию усреднения и учитывая граничные условия получим задачи

$$\begin{cases}\frac{\partial z_{j-2}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z_{j-2}^{(i)}(\psi,\rho,\tau) + q_1(\psi,\rho,\tau,c_{j-5}^1,c_{j-5}^2,\ldots,c_{j-5}^s), \\ \langle z_{j-2}^{(i)}\rangle = 0, \\ z_{j-2}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho=0} = -y_{j-2}^{(i)}, \\ z_{j-2}^{(i)}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2,\end{cases} \tag{3.53}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v_{j-2}^{(i)}(\psi,\rho) = q_0(\psi,\rho,c_{j-5}^1,c_{j-5}^2,\ldots,c_{j-5}^s), \\ v_{j-2}^{(i)}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, i = 1,2,\end{cases} \tag{3.54}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\rho} s_{j-3}(\psi,\rho) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} v_{j-2}^{(3)}(\psi,\rho), \\ s_{j-3}(\psi,\rho)|_{\rho\to\infty} = 0\end{cases} \tag{3.55}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\rho} n_{j-3}(\psi,\rho,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} z_{j-2}^{(3)}(\psi,\rho,\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau} z_{-1}^{(3)}(\psi,\rho,\tau), \\ \langle n_{j-3}\rangle = 0, \\ n_{j-3}(\psi,\rho,\tau)|_{\rho\to\infty} = 0.\end{cases} \tag{3.56}$$

К этим задачам вернемся после нахождения неизвестных коэффициентов c_{j-5}^{l}, $l = 1, 2, \ldots, s$.

В заключение докажем оценки (3.10). В силу построения асимптотики частичная сумма u_ω^j удовлетворяет уравнению в операторной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(A + \frac{1}{\omega}K\right)u + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \left(G_k(x)u + \eta_k(x)\right)e^{ik\omega t} + \eta_0(x) + r_\omega^j(x,\omega t), \quad (3.57)$$

где при любом $l \geqslant 0$

$$\|r_\omega^j\|_{C^{l,\frac{l}{2}}(\bar{Q})} \leqslant c_j \omega^{-\frac{j+1-l}{2}}. \quad (3.58)$$

Из (3.13), (3.57) следует, что разность $w_\omega^j = u_\omega - u_\omega^j$ является решением уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \left(A + \frac{1}{\omega}K\right)w - \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} G_k(x)we^{ik\omega t} = -r_\omega^j(x,\omega t). \quad (3.59)$$

Из оценок (3.31), (3.58) следует неравенство

$$\|w_\omega^j\|_{C(R,L_2(\Omega))} \leqslant d_j \omega^{-\frac{j+1}{2}}. \quad (3.60)$$

Очевидно, вектор-функция $v_\omega^j = \chi(t)w_\omega^j$, $t \in [0,1]$ (определение $\chi(t)$ см. выше) является решением однородной начально-краевой задачи для уравнения

$$\tfrac{dv}{dt} - Av = \chi\left[\left(\tfrac{1}{\omega}K + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} G_k(x)e^{ik\omega t}\right)v - r_\omega^j(x,\omega t)\right] - \tfrac{d\chi}{dt}v \quad (3.61)$$

Многократно применяя к (3.61) теорему 2 [58], с учетом (3.60), выводим оценки (3.10). Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] Wilson C. A. Perturbations and solar tables from Lacaille to Delambre: the rapprochement of observation and theory // Archive for History of Exact Sciences. — 1980. — № 22. — P. 53–304.

[2] Sanders J. A., Verhulst F., Murdock J. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. — Springer-Verlag, New York, 2007.

[3] Born M. The mechanics of the atom. — London: G. Bell and Sons, 1927.

[4] Fatou P. Sur le mouvement d'un système soumis á des forces á courte période // Bull. Soc. Math. 56. — 1928. — P. 98—139.

[5] Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. — Изд-во АН СССР, 1948.

[6] Папалекси Н. Д. Собрание трудов. — Изд-во АН СССР, 1948.

[7] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1934.

[8] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

[9] Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971.

[10] Симоненко И. Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. — Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1983.

[11] Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. Ин-та строит. механики АН УССР. — 1950. — Т. 14. — С. 9–34.

[12] Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. — 1951. — Т. 21, вып. 5. — С. 588–597.

[13] Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. — 1951. — Т. 44., вып. 1. — С. 7–20.

[14] Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР. — 1956. — Т. 110, № 3. — С. 345–347.

[15] Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН. СССР. Механика жидкости и газа. — 1966. № 5. — С. 51–55.

[16] Smith D. R. Singular-Perturbation Theory. — Cambridge: Cambridge University, 1985.

[17] Burd V. Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval. — Chapman & Hall/CRC, 2007.

[18] Бурд В. Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. — Litres, 2017.

[19] Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями. Части I-III // Успехи механики. — 2006. — Т.4, № 3. — С. 26–158.

[20] Левенштам В. Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008.

[21] Левенштам В. Б., Ишмеев М. Р. Эволюционные задачи с большим параметром. Высокочастотные асимптотики. — Saarbrucken: LAP Lambert Acad. Publ., 2012.

[22] Левенштам В. Б., Хатламаджиян Г. Л. Уравнения Навье-Стокса с высокочастотными слагаемыми. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.

[23] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984. (Перевод с английского В. В. Жикова под редакцией О. А. Олейник)

[24] Левенштам В. Б. Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44. № 1. — С. 52–68.

[25] Богаевский В. Н., Повзнер А. Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. — М.: Наука, 1987.

[26] Ишмеев М. Р. Асимптотика периодического решения дифференциального уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Владикавказский математический журнал. — 2011. — Т. 13. вып. 3. — С. 21–34.

[27] Ишмеев М. Р. Асимптотика условно периодического решения дифференциального уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Владикавказский математический журнал. — 2012. — Т. 14. вып. 4. — С. 24–31.

[28] До Н. Т., Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2011. — Т. 51, № 6. — С. 1043–1055.

[29] До Н. Т., Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Дифф. уравн. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1190–1192.

[30] Гусаченко В. В., Ильичева Е. А., Левенштам В. Б. Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критическом случае // Журнал выч. мат. и мат. физ. — 2013. — Т. 53, № 7. — С. 1067–1081.

[31] Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование линейной параболической задачи с высокочастотными коэффициентами в критическом случае // Мат. заметки. — 2014. — Т. 96, № 4. — С. 522–538.

[32] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 3–80.

[33] Сазонов Л. И. О существовании периодических решений у ОДУ в банаховом пространстве с высокочастотными слагаемыми // Мат. заметки. 2016. — Т. 100, № 6. — С. 310–319.

[34] Сазонов Л. И. Высокочастотная асимптотика решений ОДУ в банаховом пространстве // Изв. РАН. Сер. матем. — 2017. — Т. 81, № 6. — С. 1234–1252.

[35] Сазонов Л. И. Периодические решения ОДУ в банаховом пространстве с высокочастотными слагаемыми // Серия матфорум, исследования по мат. анализу, дифф. уравнениям и мат. моделированию. Владикавказ. — 2015. — Т. 9. — С. 200–209.

[36] Levenshtam V. B., Ishmeev M. R. Asymptotic integration of linear system with high-frequency coefficients and Stokes operator in the main part // Asymptotic Analysis. — 2015. — Vol. 92, № 3-4. — P. 363–376.

[37] Ishmeev M. R., Levenshtam V. B. High-Frequency Asymptotics of a Solution to a Linear System with the Stokes Operator in the Principal Part // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 208, № 2. — P. 151–159. (Translated from Problemy Matematicheskogo Analiza 80, April 2015, P. 3–10)

[38] Levenshtam V. B., Ishmeev M. R. A System of Partial Differential Equations with High-Frequency Coefficients and Stokes Operator in the Main Part. Asymptotic Integration in the Case of Multiple Degeneration // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2018. — № 3. — P. 284–299.

[39] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.

[40] Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. — Изд-во РГУ, 1984.

[41] Ишмеев М. Р. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Неделя науки 2011. Сборник тезисов. — Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011.

[42] Ишмеев М. Р. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Неделя науки 2012. Сборник тезисов. — Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2012.

[43] Ишмеев М. Р. Асимптотическое интегрирование линейной эволюционной высокочастотной задачи с оператором Стокса в главной части и

вырождением // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения V. Материалы конференции. — Ростов-на-Дону, 2015.

[44] Ишмеев М. Р. Асимптотический анализ линейной высокочастотной задачи с оператором Стокса в главной части и вырождением // XII Международная научная конференция. Сборник тезисов. — Владикавказ: с. Цей, ЮМИ ВНЦ РАН, 2015.

[45] Ишмеев М. Р., Левенштам В. Б., Нгуен Л. К. Высокочастотные асимптотики периодических по времени решений систем дифференциальных уравнений с кратным вырождением // XIV Международная научная конференция. Сборник тезисов. — Владикавказ: с. Цей, ЮМИ ВНЦ РАН, 2017.

[46] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

[47] Красносельский М. А. Оператор сдвига по траектории дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.

[48] Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.

[49] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярные вырождения и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.

[50] Симоненко И. Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Матем. сборник. — 1972. — Т. 87(129), № 2. — С. 236–253.

[51] Левенштам В. Б. Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях // Сиб. мат. журнал. — 1996. — Т. 37, №5. — С. 1103–1116.

[52] Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв РАН. Сер. матем. — 2006. — Т. 70, №2. — С. 25–56.

[53] Рид М., Саймон Л. Методы современной математической физики, Том 4, Анализ операторов. — Изд. Мир, 1977.

[54] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.

[55] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть 1. — М.: Физматлит, 1963.

[56] Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование задачи о вибрационной конвекции // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, №4. — С. 523–532.

[57] Соломяк М. З. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха // ДАН СССР. — 1958. — Т. 122, №5 — С. 767–769.

[58] Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Краевые задачи математической физики. М.: Наука. — 1965. — Т. 133, № 3. — С. 3–80.

[59] Сакс Р. С. Собственные функции операторов ротора, градиента дивергенциии и Стокса. Приложения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2013. — Т. 2, №31. — С. 131–146.

[60] Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций. — Изд. ин. лит. Москва, 1949.

[61] Levenshtam V. B., Nguyen L. K., Ishmeev M. R. High-frequency asymptotics of time-periodic solutions to differential equations systems in a critical case // arXiv:1706.06055. — 2017.

Приложение. Базовые сведения нелинейной теории возмущений

Основным объектом для рассмотрения нелинейной теории возмущений являются системы дифференциальных уравнений с малым параметром вида

$$\epsilon^\alpha \frac{dx}{dt} = a_0(x) + \epsilon a_1(x) + \epsilon^2 a_2(x) + \cdots \equiv f(x, \epsilon).$$

Здесь $x(t)$ — n-мерная вектор-функция, $\alpha > 0$, ϵ — малый параметр.

1. Переход к линейной задаче. Оператор замены переменных.

Рассмотрим сначала систему без малого параметра

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{0.1}$$

и связанный с ней линейный дифференциальный оператор первого порядка с частными производными

$$X \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv (f, \nabla) \tag{0.2}$$

для которого система (0.1) является характеристической. Все рассматриваемые функции считаются достаточно гладкими и ограниченными.

Пусть $\hat{x}(t, x)$ — решение системы (0.1) с начальным условием $\hat{x}(0, x) = x \in D$. Для любой $F(x)$ в силу (0.1)

$$\frac{\partial F(\hat{x}(t, x))}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\hat{x}) \frac{\partial F(\hat{x})}{\partial \hat{x}_i}. \tag{0.3}$$

Положим $G(t, x) = F(\hat{x}(t, x))$, тогда из (0.2), (0.3) имеем

$$G(0, x) = F(x), \quad \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0} = XF(x), \quad \left.\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right|_{t=0} = X^2 F(x), \ldots$$

Суммируя ряд Маклорена для $G(t, x)$, получаемый с помощью этих формул, имеем

$$F(\hat{x}) = G(t, x) = e^{tX} F(x). \tag{0.4}$$

Если положить здесь, в частности, $F(x) = x_i$, то

$$\hat{x} = e^{tX} x. \tag{0.5}$$

Дифференцируя обе части уравнения (0.4) по t, получим уравнение для функции $G(t, x)$:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = XG \tag{0.6}$$

с начальным условием $G(0, x) = F(x)$.

Таким образом, интегрирование системы (0.1) эквивалентно интегрированию одного линейного уравнения (0.6) с частными производными.

Пусть S — некоторый оператор первого порядка. Имеет место формула

$$F(e^S x) = e^S F(x). \tag{0.7}$$

Действительно, подставив $\hat{x}$ из (0.5) в (0.4) и обозначив tX через S получим (0.7). Применим к обеим частям (0.6) оператор e^{-S} и $\frac{\partial}{\partial t}$ и в силу (0.7) получим

$$\frac{\partial H(t, x)}{\partial t} = MH(t, x), \tag{0.8}$$

где $H(t, x) = G(t, e^{-S}x)$, $M = e^{-S}Xe^S$. Из известной формулы Хаусдорфа

$$e^{-S}Xe^S = X + [X, S] + \frac{1}{2!}[[X, S], S] + \dots,$$

где $[A, B] = AB - BA$, и из формулы

$$[(a, \nabla), (b, \nabla)] = (((a, \nabla), b) - ((b, \nabla), a), \nabla)$$

следует, что M является оператором первого порядка. Значит и уравнение (0.8) — уравнение первого порядка.

Уравнение (0.8) можно рассматривать как результат замены переменных $\hat{x} = e^S x$ в уравнении (0.6) с последующим переобозначением новых переменных на $\hat{x}$.

2. Общая постановка задачи теории возмущений.

Вернёмся к исходной системе с малым параметром и перейдём от неё к уравнению в частных производных вида (0.6)

$$\epsilon^\alpha \frac{\partial G}{\partial t} = XG, \tag{0.9}$$

где

$$X = X_0 + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2 + \dots,$$

$$X_j = (a_j(x), \nabla), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Перейдем от (0.9) к уравнению вида (0.8) с помощью оператора замены переменных e^S:

$$\epsilon^{\alpha}\frac{\partial H}{\partial t} = MH, \tag{0.10}$$

где

$$M = e^{-S}Xe^{S}, \quad S = (s(x,\epsilon), \nabla),$$

и положим

$$S = \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \dots,$$

где S_j не зависят от ϵ.

Под общей задачей теории возмущений понимается задача максимального упрощения оператора $M = X_0 + \epsilon M_1 + \epsilon^2 M_2 + \dots$, а именно задача построения оператора M, для которого $[X_0, [\dots, [X_0, M_j]\dots]] = 0$. Говорят, что оператор M_j ограничен по высоте.

3. Каноническая форма оператора первого порядка.

Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ принадлежит собственному значению оператора X_0, равному $\lambda(x)$, если для всех x из D одновременно

$$(X_0 - \lambda(x))^p \varphi(x) = 0,$$

$$X_0 \lambda(x) = 0$$

при достаточно большом целом p. Если $p = 1$, то функция $\varphi(x)$ называется собственной функцией оператора X_0.

Собственная функция, принадлежащая тождественному нулю, называется инвариантом оператора X_0. Очевидно выполняется свойство

$$X_0(\omega F) = \omega X_0 F$$

и любая функция от инвариантов есть инвариант.

Пусть система функций $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_n(x)$ такова, что в области D можно перейти к новым переменным z_1, z_2, …, z_n. Такую систему назовём базисной. В новых переменных оператор Y имеет вид

$$Y = (Yz_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (Yz_2)\frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + (Yz_n)\frac{\partial}{\partial z_n},$$

где коэффициенты (Yz_i) выражены через вектор z.

Предположим теперь, что существует базисная система, составленная из собственых функций и инвариантов оператора X_0: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,…,$\varphi_k(x)$;

$\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$,…, $\omega_m(x)$ $(k+m=n)$. Предположим также что собственные значения могут быть представлены как функции только от базисных инвариантов (чтобы этого добиться часто собственные значения добавляют в базисную систему). Тогда оператор X_0 в базисных переменных примет вид

$$X_0 = \lambda_1\varphi_1\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \lambda_2\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \cdots + \lambda_k\varphi_k\frac{\partial}{\partial\varphi_k},$$

а в векторной форме

$$X_0 = (\Lambda\varphi, \nabla_\varphi),$$

где Λ — диагональная матрица с собственными значениями λ_1, λ_2,…,λ_k. Оператор, приводимый к такому виду называется диагональным.

Аналогично вводится жорданов оператор

$$X_0 = (J\varphi, \nabla_\varphi),$$

где J — жорданова матрица. Такая форма оператора первого порядка называется канонической.

4. Алгебраическая постановка задачи теории возмущений.

Пусть ведущий оператор X_0 жорданов. Тогда алгебраическая постановка задачи теории возмущений такова: найти S, так, чтобы оператор M_j переводил всякую функцию, принадлежащую собственному значению оператора X_0, в функцию принадлежащую тому же собственному значению:

$$(X_0 - \lambda(x))^p\varphi(x) = (X_0 - \lambda(x))^q M_j\varphi(x) = 0 \tag{0.11}$$

при достаточно большом q.

Приведём ряд важнейших результатов.

Теорема 0.1. *Оператор Y ограничен по высоте тогда и только тогда, когда*

$$(X_0 - \lambda(x))^p\varphi(x) = (X_0 - \lambda(x))^q Y\varphi(x) = 0$$

при достаточно большом q.

Т.е. общая постановка задачи и алгебраическая эквивалентны для жорданова оператора X_0.

Теорема 0.2. *Для решения задачи теории возмущений достаточно найти S так, чтобы свойство (0.11) имело место только для функций расширенного жорданова базиса.*

Итак, вначале от исходной системы с малым параметром переходят к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка. С помощью оператора замены переменных приводят ведущий оператор к канонической форме. И, наконец, решают общую задачу теории возмущений. Причём применяется аппарат матричной теории возмущений.

Базовые сведения нелинейной теории возмущений изложены по работе В. Н. Богаевского, А. Я. Повзнера [25].