На правах рукописи

Ишмеев Марат Рашидович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЗАДАЧ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2019

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Южный федеральный университет» на кафедре алгебры и дискретной математики.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Левенштам Валерий Борисович

Официальные оппоненты:

Калякин Леонид Анатольевич
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБНУ «Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук», г. Уфа,
главный научный сотрудник Института математики с вычислительным центром

Асташова Ирина Викторовна
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва,
профессор кафедры дифференциальных уравнений

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН», г. Москва

Защита состоится «19» июня 2019 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 по защите кандидатских и докторских диссертаций при Южном федеральном университете по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 21ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу: http://hub.sfedu.ru/media/diss/b16add29-82d9-4f02-8890-814672f2c6c1/dissertation_Ishmeev.pdf

Автореферат разослан «____» ___________ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.208.29 Кряквин В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена вопросам асимптотического анализа некоторых классов дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые. Полученные в работе результаты относятся как к нелинейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений с большими слагаемыми, так и к линейным системам дифференциальных уравнений в частных производных с оператором Стокса в главной части и вырожденным старшим операторным коэффициентом. При определенных предположениях для них разработаны с обоснованием эффективные алгоритмы построения полных асимптотик периодических решений. В случае нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений помимо задачи о периодических решениях рассмотрена и задача об условно периодических решениях, причем для этих задач исследованы также вопросы устойчивости по Ляпунову.

Интерес к рассматриваемым в диссертации задачам связан с тем, что дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые, амплитуды которых пропорциональны определенным неотрицательным степеням частоты, возникают при изучении различных физических явлений, связанных с высокочастотными вибрациями, как в классической механике (например, «Маятник Капицы»[1]), так и в гидродинамике (например, эффект подавления конвекции[2]).

Основы классической теории метода усреднения разработаны, в основном, Н.Н. Боголюбовым и Н.М. Крыловым. Их фундаментальные результаты получили дальнейшее развитие в работах целого ряда исследователей. Основные результаты современной теории усреднения (метод усреднения Крылова-Боголюбова) содержатся в известных монографиях Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского 1974 г.; Ю.А. Митропольского 1971 г.; В.М. Волосова и Б.И. Моргунова 1971 г.; А.Н. Филатова 1971 г.; В.Ф. Журавлева и Д.М. Климова 1988 г.; И.Б. Симоненко 1983 г. Важные результаты по параболическим уравнениям получены С.Д. Эйдельманом, Р.З. Хасьминским, И.Б. Симоненко,

[1]Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. — 1951. — Т. 21, вып. 5. — С. 588–597.

[2]Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН. СССР. Механика жидкости и газа. — 1966. — №5. — С. 51–55.

В.В. Жиковым, В.Б., В.И. Юдовичем, В.Б. Левенштамом и рядом других авторов. Один из общих подходов к решению задач о нелинейных возмущениях изложен в известной монографии В.Н. Богаевского, А.Я. Повзнера 1987 г. Отметим еще, что различные дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми изучались с использованием идей теории метода усреднения в работах Н.Н. Боголюбова, П.Л. Капицы, В.Н. Челомея, В.М. Волосова, И.Б. Симоненко, С.М. Зеньковской, В.И. Юдовича, В.Б. Левенштама и других авторов. Также в диссертации существенно используются результаты и методы работ М.И. Вишика, Л.А. Люстерника (1957 г., 1960 г.), в которых разработан метод пограничного слоя, а также исследуются возмущения стационарных линейных задач с вырождением.

Исследования, представленные в диссертации, поддерживались Минобрнауки РФ (14.A18.21.0356 и 8210), и Российским фондом фундаментальных исследований (12-01-00402-а).

Цели работы.

1. Для задач о периодических и условно периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка n с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными степеням частоты осциляций вплоть до $\frac{n}{2}$, зависящими от младших производных неизвестной функции, обосновать метод усреднения и разработать с обоснованием алгоритм построения полных асимптотик решений.

2. Для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными степеням частоты осцилляций вплоть до α, в случае задачи Коши получить условия отсутствия первого перестроечного показателя на участке $\alpha \in (0, 1)$.

3. Предложить и обосновать эффективный алгоритм построения полной асимптотики для задачи о периодических по времени решениях систем линейных уравнений в частных производных с быстро осциллирующими слагаемыми и с оператором Стокса в главной части, где старший стационарный операторный коэффициент вырожден.

Методы исследования. В диссертационной работе преимущественно применяются следующие методы: классические методы теории усреднения; метод многих масштабов; метод пограничного слоя Вишика–Люстерника; методы теории полугрупп и дробных степеней неограниченных операторов, а также ряд других методов функционального анализа.

Научная новизна исследования. Основные результаты работы являются новыми и заключаются в следующем.

1. Для задач о периодических и условно периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка n с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными степеням частоты осциляций вплоть до $\frac{n}{2}$, зависящими от младших производных неизвестной функции обоснован метод усреднения и разработан с обоснованием алгоритм построения полных асимптотик решений;

2. Для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными степеням частоты осцилляций вплоть до α, в случае задачи Коши получены условия отсутствия первого перестроечного показателя на участке $\alpha \in (0, 1)$.

3. Для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с быстро осциллирующими слагаемыми, пропорциональными второй степени частоты осцилляций, построены предельные уравнения с помощью подхода Богаевского-Повзнера.

4. Для задачи о периодических по времени решениях систем линейных уравнений в частных производных с быстро осциллирующими слагаемыми и с оператором Стокса в главной части, где старший операторный коэффициент A вырожден, разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики решения, при этом рассмотрены три случая:

а) собственная вектор-функция a_0, отвечающая простому собственному значению $\lambda = 0$ старшего операторного коэффициента A, не имеет присоединенных вектор-функций относительно соответствующей пары операторов A, B;

б) собственная вектор-функция a_0, отвечающая простому собственному значению $\lambda = 0$ старшего операторного коэффициента A, имеет одну присоединенную вектор-функцию a_1 относительно пары операторов A, B и не имеет присоединенных вектор-функций относительно тройки операторов A, B, C;

в) собственное значение $\lambda = 0$ старшего операторного коэффициента

A является n-кратным, и каждая собственная вектор-функция, отвечающая нулевому собственному значению, не имеет присоединенных вектор-функций относительно соответствующей пары операторов A, B.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в работе результаты можно применять при качественном анализе дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, в том числе, в теории устойчивости, а также при исследовании математических моделей, описываемых такими уравнениями. Предложенные алгоритмы, в сочетании с численными методами, могут применяться при приближенном решении таких задач.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов полученных в диссертационном исследовании обеспечивается строгостью доказательств, использующих методы теории усреднения, многих масштабов, пограничного слоя, теории полугрупп и дробных степеней операторов, функционального анализа. Выносимые на защиту положения диссертации прошли апробацию на конференциях, семинарах, рабочих совещаниях, опубликованы в рецензируемых журналах, относящихся к списку ВАК.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» в п. Ласпи (2011 г.) и г. Судак (2013 г.), на Международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» в г. Ростов-на-Дону (2015 г., 2018 г.), на Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» в с. Цей (2015 г., 2017 г.), на студенческой научной конференции «Неделя науки» Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» в г. Ростов-на-Дону (2010-2012 гг.), на семинаре «Асимптотические методы в нелинейном анализе» кафедры алгебры и дискретной математики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» в г. Ростов-на-Дону (2011 г.), на Общегородском семинаре им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром ФГБНУ «Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук» в г. Уфа (2018 г.), на семинаре «Асимптотические методы в математической физике» в ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН» в г. Москва (2019 г.) и на Межвузовском научном семинаре по качественной теории дифференциальных уравнениий на базе кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова» в г. Москва (2019 г.).

Публикации по теме исследования. Основные результаты диссертации были опубликованы в работах [1–11]. Работы [1,2] опубликованы в журнале, который входит в перечень журналов, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Работы [1,2] индексированы в РИНЦ. Работы [4–6] опубликованы в журналах, которые входят в международные метрические базы, рекомендованные ВАК Минобрнауки РФ: работы [4–6] индексированы в Scopus. В совместной с В.Б. Левенштамом монографии [3] к результатам диссертации относится первая глава; она написана автором. Работы [4–6] опубликованы в соавторстве с научным руководителем. В них В.Б. Левенштаму принадлежит постановка задачи и общий план исследования. Полученные результаты принадлежат автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы из 61 наименования и приложения. Объем работы — 121 страница машинописного текста, включая 5 страниц приложения.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение включает в себя общую характеристику работы, а также обзор содержания диссертации.

Первая глава посвящена асимптотическому анализу задач о периодических и об ограниченных решениях систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка n, содержащих осциллирующие во времени с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, пропорциональные степеням ω^d, где $d \leqslant \frac{n}{2}$. При этом предполагается, что при $d > 0$ среднее каждого такого большого слагаемого по времени равно нулю.

В §1 рассматривается задача о периодических решениях системы уравнений

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t) + \\ \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^{j} f_{2j}(x, \dot{x}, \ldots, x^{([n/2]-j)}, \omega t). \tag{1}$$

Здесь n, m — натуральные числа, ω — большой параметр, G — область в R^m, $l > 0$. Вектор-функции $f_{2j-1}(z_0, z_1, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}, \tau)$ и $f_{2j}(z_0, z_1, \ldots, z_{[n/2]-j}, \tau)$, которые заданы на множествах $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{[(n+1)/2]-j+1} \times R$ и $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{[n/2]-j+1} \times R$ соответственно, непрерывны и принимают значения в R^m. Предположим, что указанные вектор-функции обладают предписанной гладкостью и кроме того, они l-периодичны по τ, причем среднее всех вектор-функций по этой переменной, кроме, быть может, f_0, равно нулю.

Наряду с возмущенным уравнением (1), рассмотрим, так называемое, усредненное уравнение

$$y^{(n)} = \Psi(y, \dot{y}, \ldots, y^{([n/2])}),$$

правая часть которого определенным образом выражена через вектор-функции f_j, $j = 0, \ldots, n$ и φ_n, где $\varphi_n(z_0, \tau)$ — l-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения $\frac{\partial^n \varphi_n}{\partial \tau^n}(z_0, \tau) = f_n(z_0, \tau)$. Предположим, что существует стационарное решение усредненного уравнения $y_0 \in G$, такое что $\varphi_n(y_0, \tau) \in G \quad \forall \tau \in R$, а $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ — невырожденная матрица. Обозначим через A квадратную матрицу порядка mn с первой наддиагональю (E, ..., E), блоками $\frac{\partial \Psi}{\partial z_i}(y_0, 0, \ldots, 0)$ в нижней строке и остальными нулевыми блоками.

Теорема 1. *1. Существуют такие положительные числа ω_0 и r_0, что при $\omega > \omega_0$ уравнение (1) имеет единственное в шаре $\|x - y_0\|_{C^k(R)} \leqslant r_0$ $l\omega^{-1}$-периодическое решение x_ω и при этом $\lim\limits_{\omega \to \infty} \|x_\omega - y_0\|_{C^k(R)} = 0$, где $k = [(n-1)/2]$.*

2. Если собственные значения матрицы A лежат в открытой левой комплексной полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво.

3. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A лежит в открытой правой комплексной полуплоскости, то решение x_ω неустойчиво.

Определения экспоненциальной устойчивости и неустойчивости даны ниже, в теореме 3.

При дополнительном предположении, что вектор-функции f_{2j-1}, f_{2j} имеют непрерывные производные по $z_0, z_1, \ldots, z_{[(n+1)/2]-j}$, $z_0, z_1, \ldots, z_{[n/2]-j}$ соответственно любого порядка, частичные суммы асимптотики ищутся в виде

$$x_\omega(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{\infty} \omega^{-i/2} [u_i + v_i(\omega t)].$$

где $u_i \in R^m$, $v_i(\tau)$ — периодические функции со значениями в R^m, с нулевым средним.

Теорема 2. *Для любого $s = 0, 1, ...$ найдутся такие положительные числа c_s, ω_s, что при $\omega > \omega_s$, справедлива оценка*

$$\|x_\omega - x_{\omega,s}\|_{C^k(R)} \leqslant c_s \omega^{-(s+1)/2},$$

где $k = [(n-1)/2]$. Построение приближения $x_{\omega,s}$ при известном векторе y_0 сводится к нахождению l-периодических с нулевым средним решений s уравнений вида $\frac{d^n y}{d\tau^n} = q(\tau)$, где $q(\tau)$ — известные l-периодические с нулевым средним вектор-функции и к решению s систем линейных алгебраических уравнений с единой невырожденной основной матрицей $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ и известными свободными членами.

В конце параграфа приведен иллюстративный пример. Отмечу, что аналогичная задача для уравнения вида

$$x^{(n)} = f_0(x, \omega t) + \omega^{\frac{n}{2}} f_1(x, \omega t)$$

была рассмотрена В.Б. Левенштамом[3].

Второй параграф продолжает исследование задачи (1), при условии, что правая часть может быть условно периодической, а именно, в §2 рассмотрена задача об условно периодических решениях для системы нелинейных

[3]Левенштам В.Б. Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, №1 — С. 52–68.

обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
x^{(n)} = \sum_{j=1}^{[(n+1)/2]} \omega^{(2j-1)/2} f_{2j-1}(x, \dot{x}, \dots, x^{([(n+1)/2]-j)}, \omega t) + \\
+ \sum_{j=0}^{[n/2]} \omega^{j} f_{2j}(x, \dot{x}, \dots, x^{([n/2]-j)}, \omega t)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

с условно периодической по $\tau = \omega t$ правой частью:

$$
f_j(z_0, \dots, z_r, \tau) = \sum_{k=1}^{p} [c_{jk1}(z_0, \dots, z_r) cos(\alpha_k \tau) + c_{jk2}(z_0, \dots, z_r) sin(\alpha_k \tau)]. \tag{3}
$$

Здесь α_k, $k = 1, \dots, p$, — произвольные неотрицательные числа. Пусть n, m, p — натуральные числа, ω — большой параметр, G — область в R^m. Здесь вектор-функции $c_{jki}(z_0, \dots, z_r)$ со значениями в R^m заданы и непрерывны на множествах $\underbrace{G \times \dots \times G}_{r+1}$. Предположим, что указанные вектор-функции обладают предписанной гладкостью. Пусть, кроме того, $f_j, j \neq 0$ обладают нулевым средним по τ (т.е. $c_{jk1} = 0$ для всех $j \neq 0$, если $\alpha_k = 0$).

Наряду с возмущенным уравнением (2), рассмотрим усредненное уравнение

$$
y^{(n)} = \Psi(y, \dot{y}, \dots, y^{([n/2])}),
$$

Предположим, что существует стационарное решение усредненного уравнения $y_0 \in G$, такое что $\frac{\partial^{[n/2]} \varphi_n}{\partial \tau^{[n/2]}}(y_0, \tau) \in G \quad \forall \tau \in R$, и кроме того уравнение

$$
\left| \frac{\partial \Psi}{\partial z_0} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} + \dots + \lambda^{[n/2]} \frac{\partial \Psi}{\partial z_{[n/2]}} - \lambda^n E \right| \Bigg|_{(y_0, 0, \dots, 0)} = 0 \tag{4}
$$

не имеет чисто мнимых корней.

Справедливы следующие результаты

Теорема 3. *Существуют такие положительные числа ω_0 и r_0, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения:*
1. Уравнение (2) имеет единственное в шаре $\|x - y_0\|_{C^k(R)} \leqslant r_0$ ограниченное решение x_ω, при этом оно является условно периодическим, его частотный базис содержится в частотном базисе f_j, и справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{\omega \to \infty} \|x_\omega - y_0\|_{C^k(R)} = 0$, где $k = [(n-1)/2]$.
2. Если все решения уравнения (4) лежат в открытой левой комплексной

полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво. Это означает, что при некотором $\delta > 0$ для каждого $\omega > \omega_0$ найдется пара чисел r_1, c, таких, что при любом $t_0 \in R$ и любом векторе $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in R^{mn}$, удовлетворяющих условию

$$|a_0 - x_\omega(t_0)| < r_1$$

задача Коши для уравнения (2) с начальным условием

$$x(t_0) = a_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = a_1, \dots, \quad \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = a_{n-1}$$

имеет при $t \geqslant t_0$ единственное решение $\hat{x}(t)$, и при этом справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j x_\omega(t)}{dt^j} - \frac{d^j \hat{x}(t)}{dt^j} \right| \leqslant c e^{-\delta(t-t_0)} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j x_\omega(t_0)}{dt^j} - \frac{d^j \hat{x}(t_0)}{dt^j} \right|, \quad t \geqslant t_0.$$

3. Если хотя бы одно решение уравнения (4) лежит в открытой правой комплексной полуплоскости, то решение x_ω неустойчиво. Это означает, что для каждого $\omega > \omega_0$ найдется $\varepsilon > 0$, последовательность векторов $a^s = (a_0^s, \dots, a_{n-1}^s) \in R^{mn}$, $a_j^s \to \frac{d^j x_\omega(0)}{dt^j}$ и последовательность положительных чисел t_s такие, что задача Коши для уравнения (2) с начальным условием

$$x(t_0) = a_0^s, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = a_1^s, \dots, \quad \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = a_{n-1}^s$$

разрешима на участке $t \in [0, t_s]$, и для ее решения $x^s(t)$ справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{d^j x_\omega(t_s)}{dt^j} - \frac{d^j x^s(t_s)}{dt^j} \right| > \varepsilon, \quad s = 1, 2, \dots$$

При дополнительном предположении о гладкости коэффициентов в правой части, частичные суммы асимптотики будем искать в виде

$$x_\omega(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{-i/2} u_i + \sum_{i=n}^{\infty} \omega^{-i/2} [u_i + v_i(\omega t)],$$

где $u_i \in R^m$, $v_i(\tau)$ — условно периодические функции со значениями в R^m, с нулевым средним.

Теорема 4. *Для любого $s = 0, 1, ...$ найдутся такие положительные числа c_s, ω_s, что при $\omega > \omega_s$, справедлива оценка*

$$\|x_\omega - x_{\omega,s}\|_{C^k(R)} \leqslant c_s \omega^{-(s+1)/2},$$

где $k = [(n-1)/2]$. Построение приближения $x_{\omega,s}$ при известном векторе y_0 сводится к нахождению условно периодических с нулевым средним решений s уравнений вида $\frac{d^n y}{d\tau^n} = q(\tau)$, где $q(\tau)$ — известные условно периодические с нулевым средним вектор-функции вида (3) и к решению s систем линейных алгебраических уравнений с единой невырожденной основной матрицей $\frac{\partial \Psi}{\partial z_0}(y_0, 0, \ldots, 0)$ и известными свободными членами.

§3 посвящен задаче повышения первого перестроечного показателя. Рассмотрена задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \omega t) + \omega^\alpha \varphi(x, t, \omega t), \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

$$x(0) = x_0. \tag{6}$$

Пусть N — натуральное, l и T — положительные числа; D — область пространства R^N, $\alpha \in (0, 1)$, ω — большой параметр, $x_0 \in D$. Пусть вектор-функции $f(x, t, \tau)$, $\varphi(x, t, \tau)$ определены на множестве $G \equiv D \times [0, T] \times [0, +\infty]$ и l-периодичны по τ, причём среднее вектор-функции $\varphi(x, t, \tau)$ по τ равно 0. Предположим ещё, что эти вектор-функции обладают соответствующей гладкостью.

Понятие перестроечного показателя было введено В. И. Юдовичем[4]. В диссертации получены три результата о первом перестроечном покзателе для задачи (5)-(6).

Заключает первую главу §4, где речь идет о возможности применения подхода Богаевского-Повзнера при построении предельной задачи для широкого класса уравнений с большими высокочастотными слагаемыми.

Во второй главе рассматривается задача при больших значениях параметра ω о периодических решениях для линейного дифференциального урав-

[4]В. И. Юдович Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26-129. 13.

нения в частных производных с оператором Стокса в главной части следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla p=\Delta u+D(x)u+\frac{1}{\omega}C_0(x)u+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\left(M_k(x)u+d_k(x)\right)e^{ik\omega t}+d_0(x), \quad (7)$$

$$\operatorname{div} u=0 \quad (8)$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega}=0. \quad (9)$$

В §1-§3 построена и обоснована асимптотика ($\omega\gg 1$) периодического по времени решения для задачи (7)-(9) при различных типах условий.

Пусть Ω — ограниченная область в R^3 со сколь угодно гладкой границей $\partial\Omega$, $m\in N$, $\omega\gg 1$. В бесконечном цилиндре $Q=\Omega\times R$ рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$-периодических по времени t решениях системы уравнений (7–9). Здесь $x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega$, $t\in R$, $u=u(x,t)$ — неизвестная вещественная трехмерная функция,

$$D(x)u=\int\limits_{\Omega}B_0(x,y)u(y)dy+B_1(x)u,$$

$B_0(x,y)$, $B_1(x)$, $C(x)$, $M_k(x)$ и $d_0(x)$, $d_k(x)$ — известные бесконечно гладкие матрицы-функции и вектор-функции соответственно, причем $D(x)$, $C(x)$ и $d_0(x)$ — вещественные, а $M_k(x)$, $d_k(x)$ комплексно сопряжены с $M_{-k}(x)$, $d_{-k}(x)$ соответственно. Символ Δ, используемый обычно в скалярном случае, отождествляется здесь с матричным выражением (формальным произведением) ΔE, где E — единичная матрица третьего порядка.

Символом $S_2(\Omega)$ будем обозначать замыкание по норме $L_2(\Omega)$ множества непрерывно дифференцируемых вещественных вектор-функций u, имеющих на $\partial\Omega$ равную нулю нормальную компоненту и удовлетворяющих условию $\operatorname{div} u=0$, т. е. соленоидальных. Символом Π обозначим известный ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на $S_2(\Omega)$.

Введем теперь действующий в $S_2(\Omega)$ оператор $A=\Pi(\Delta+D(x))$ с областью определения

$$D(A)=\left\{u\in S_2(\Omega)\cap W_2^2(\Omega),\quad u|_{\partial\Omega}=0\right\}\equiv H_0^2$$

и дифференциальные выражения

$$B = \Pi N(x) + \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} \frac{\Pi M_k(x) \Pi M_{-k}(x)}{ik},$$

$$C = \sum_{1 \leqslant |k|,|l|,|s| \leqslant m, k+l+s=0} \frac{\Pi M_k \Pi M_l \Pi M_s}{(is)s(s+l)} + \\ + \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant m} \frac{\Pi M_k(x) \Pi(\Delta + D) \Pi M_{-k}(x)}{(ik)^2},$$

С целью использования в работе метода пограничного слоя мы переходим в некоторой окрестности Ω_0 границы $\partial\Omega$ области Ω к криволинейным координатам. Для этого через каждую точку $x \in \partial\Omega$ проведем внутреннюю нормаль, причем окрестность Ω_0 будем считать настолько малой, что нормали в ней не пересекаются. В окрестности Ω_0 положим $x = (\psi_1, \psi_2, r)$, где r — расстояние от x до границы $\partial\Omega$ по нормали, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — координаты соответствующей точки границы. Введем еще $\rho = r\sqrt{\omega}$.

В §1 предполагается, что $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A. Пусть соответствующая ему собственная вектор-функция $a_0(x)$ не имеет присоединенных вектор-функций относительно пары операторов A, B, т. е. задача

$$Av(x) = -Ba_0(x),$$

$$v(x)|_{\partial\Omega} = 0$$

не имеет классических решений. Согласно альтернативе Фредгольма, последнее равносильно соотношению $(Ba_0(x), b_0(x)) \neq 0$, где $b_0(x)$ — ненулевое решение уравнения $A^* z(x) = 0$, A^* — оператор сопряженный к A. Здесь и далее символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в комплексном пространстве $L^2(\Omega)$.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи (7)-(9) в этом случае будем искать в виде

$$u_\omega(x,t) = \omega c_{-2} a_0(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [u_k(x) + v_k(\psi, \rho) + \\ + c_k a_0(x) + y_k(x, \omega t) + z_k(\psi, \rho, \omega t)], \tag{10}$$

$$p_\omega(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [p_k(x) + \omega^{\frac{1}{2}} s_{k-1}(\psi, \rho) + \omega m_{k-2}(x, \omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} n_{k-1}(\psi, \rho, \omega t)].$$

$$(11)$$

Здесь u_k, y_k, p_k, m_k — регулярные, а v_k, z_k, s_k, n_k — погранслойные вектор-функции, причем y_k, z_k, n_k являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним.

В §2 предполагается, что $\lambda = 0$ — простое собственное значение оператора A. Пусть соответствующая ему собственная вектор-функция $a_0(x)$ имеет присоединенную в смысле Вишика-Люстерника вектор-функцию $a_1(x)$ относительно пары операторов A, B и не имеет присоединенных вектор-функций относительно тройки операторов A, B, C, т. е. справедливо равенство

$$Aa_1(x) = -Ba_0(x), \tag{12}$$

а задача

$$Av(x) = -Ba_1(x) - Ca_0(x)$$

не имеет классических решений. Последнее, согласно альтернативе Фредгольма, равносильно условию $(Ba_1(x) + Ca_0(x), b_0(x)) \neq 0$, где $b_0(x)$ — ненулевое решение уравнения $A^*z(x) = 0$, A^* — оператор, сопряженный с A.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи (7)-(9) будем искать в виде

$$\begin{gathered} u_\omega(x,t) = \omega^2 c_{-4} a_0(x) + \omega^{3/2} h_{-4} a_0(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-k} [u_{2k+1}(x) + v_{2k+1}(\psi,\rho) + \\ + c_{k-2} a_0(x) + c_{k-3} a_1(x) + y_{2k+1}(x,\omega t) + z_{2k+1}(\psi,\rho,\omega t)] + \\ + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{2k+1}{2}} [u_{2k+2}(x) + v_{2k+2}(\psi,\rho) + \\ + h_{k-2} a_0(x) + h_{k-3} a_1(x) + y_{2k+2}(x,\omega t) + z_{2k+2}(\psi,\rho,\omega t)], \end{gathered} \tag{13}$$

$$p_\omega(x) = \sum_{k=-2}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [p_{k+1}(x) + \omega^{\frac{1}{2}} s_k(\psi,\rho) + \omega m_{k-1}(x,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} n_k(\psi,\rho,\omega t)], \tag{14}$$

где y_k, z_k, m_k и n_k 2π-периодические по τ вектор-функции с нулевым средним. Вектор-функции u_k, y_k, p_k, m_k называют регулярными, а v_k, z_k, s_k, n_k — погранслойными.

В §3 предполагается, что $\lambda = 0$ — n-кратное ($n \in N$) собственное значение оператора A, причем ни одна собственная вектор-функция $a(x)$ оператора A, отвечающая нулевому собственному значению, не имеет присоединенных вектор-функций относительно пары операторов A, B, т. е. задача

$$Av(x) = -Ba(x),$$

$$v(x)|_{\partial\Omega} = 0,$$

не имеет классических решений. Согласно альтернативе Фредгольма, из этого следует что

$$\det P \neq 0, \quad P = (Ba_i(x), b_j(x))|_{i,j=1}^{n}, \tag{15}$$

где $b_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, s$ — линейно независимые решения уравнения $A^* z(x) = 0$. Здесь A^* — сопряженный к A оператор.

Асимптотику вещественного $2\pi\omega^{-1}$-периодического решения задачи (7)-(9) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_\omega(x,t) = \omega \sum_{j=1}^{s} c_{-2}^{j} a_j(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [u_k(x) + v_k(\psi, \rho) + \\ + \sum_{j=1}^{s} c_k^j a_j(x) + y_k(x, \omega t) + z_k(\psi, \rho, \omega t)], \end{aligned} \tag{16}$$

$$p_\omega(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} [p_k(x) + \omega^{\frac{1}{2}} s_{k-1}(\psi, \rho) + \omega m_{k-2}(x, \omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} n_{k-1}(\psi, \rho, \omega t)]. \tag{17}$$

Здесь u_k, y_k, p_k, m_k — регулярные, а v_k, z_k, s_k, n_k — погранслойные вектор-функции, причем y_k, z_k, n_k являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним.

Формулировке теоремы предпошлем следующие обозначения. Задачей (А) назовем задачу Дирихле в $\bar{\Omega}$ вида

$$\begin{cases} (\Delta + D)u(x) + \nabla p(x) = G(x), \\ \operatorname{div} u(x) = 0, \\ (u(x), a_0(x)) = 0, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $G \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, $(G, b_0) = 0$. Задачей (B) — задачу Неймана в $\bar{\Omega}$

$$\begin{cases} \Delta q(x) = G(x), \\ \frac{\partial q(x)}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $\int\limits_{\Omega} G(x)dx = 0$. Задачей (C) — задачу о 2π-периодических по τ решениях

$$\begin{cases} \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} = G(x)e^{il\tau}, \\ \langle y(\tau)\rangle = 0, \end{cases}$$

где l — целое число. Задачей (D) — задачу на луче $\rho \geqslant 0$ вида

$$\begin{cases} ikz(\rho) = \frac{\partial^2 z(\rho)}{\partial \rho^2} + g(\rho), \\ z(\rho)|_{\rho=0} = c, \\ z(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где k — ненулевое целое число, $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$, c — вещественное число. Задачей (E) — задачу на луче $\rho \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial \rho^2} = g(\rho), \\ v(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. Задачей (F) — задачу на луче $\rho \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial s(\rho)}{\partial \rho} = g(\rho), \\ s(\rho)|_{\rho\to\infty} = 0, \end{cases}$$

где $g(\rho) = g_0\rho^s e^{-\gamma\rho}$, $g_0 \in R^3$, s — неотрицательное целое число, $Re\gamma > 0$. В перечисленных задачах G, g — известные вектор-функции указанного типа. Очевидно, задачи (A) - (F) однозначно разрешимы, если в случае задачи (A) единственность p понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Символами u_ω^n и p_ω^n обозначим частичные суммы асимптотик, формально заменив ∞ на n и $2(n+1)$ соответственно; символом $C_{x,t}^{l,l/2}$, где $l \geqslant 0$ обозначим обычные гельдеровы пространства вектор-функций заданных в цилиндре $\Omega \times R$.

Теорема 5. *Существует такое число ω_0, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения. 1. Задача (7)-(9) имеет единственное $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое по t решение $(u_\omega(x,t), p_\omega(x,t))$, которое является вещественным и бесконечно дифференцируемым. 2. Построение вектор-функций u_ω^n,*

p^n_ω при каждом $n \geqslant -1$ сводится к решению конечного числа задач вида (A) - (F). 3. Для любого $l \geqslant 0$ и любого целого $n \geqslant -1$ справедливы оценки

$$\|u_\omega - u^n_\omega\|_{C^{l,l/2}_{x,t}} \leqslant c_{n,l}\omega^{-(n+1)+l/2},$$

$$\|\nabla p_\omega - \nabla p^n_\omega\|_{C^{l,l/2}_{x,t}} \leqslant d_{n,l}\omega^{-n+l/2},$$

где $c_{n,l}$, $d_{n,l} = const > 0$.

Подобного рода результаты для обыкновенных дифференциальных уравнений, см. например[5,6], и для дифференциальных уравнений параболического типа, см. например[7], были получены моим научным руководителем совместно с его учениками. Отметим также работы Л.И. Сазонова[8,9,10], в которых рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с ограниченными и неограниченными быстро осциллирующими операторными коэффициентами в банаховых пространствах в случае произвольного (в частности кратного) вырождения.

В приложении изложены некоторые базовые сведения нелинейной теории возмущений по монографии В.Н. Богаевского, А.Я. Повзнера 1987 г.

Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Валерию Борисовичу Левенштаму за постановку задач, постоянную поддержку и внимание к работе.

Публикации по теме диссертации.

1. Ишмеев М.Р. Асимптотика периодического решения дифференциального уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Владикавказский математический журнал. — 2011. — Т. 13. вып. 3. — С. 21–34.

[5] До Н.Т., Левенштам В.Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2011. — Т. 51, № 6. — С. 1043–1055.

[6] До Н.Т., Левенштам В.Б. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Дифф. уравн. — 2012. — Т. 48, №8. — С. 1190–1192

[7] Гусаченко В.В., Ильичева Е.А., Левенштам В.Б. Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критическом случае // Журнал выч. мат. и мат. физ. — 2013. — Т. 53, №7. — С. 1067–1081

[8] Сазонов Л.И. О существовании периодических решений у ОДУ в банаховом пространстве с высокочастотными слагаемыми // Мат. заметки. 2016. — Т. 100, № 6. — С. 310–319.

[9] Сазонов Л.И. Высокочастотная асимптотика решений ОДУ в банаховом пространстве // Изв. РАН. Сер. матем. — 2017. — Т. 81, № 6. — С. 1234–1252.

[10] Сазонов Л.И. Периодические решения ОДУ в банаховом пространстве с высокочастотными слагаемыми // Серия матфорум, исследования по мат. анализу, дифф. уравнениям и мат. моделированию. Владикавказ. — 2015. — Т. 9. — С. 200–209.

2. Ишмеев М.Р. Асимптотика условно периодического решения дифференциального уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Владикавказский математический журнал. — 2012. — Т. 14. вып. 4. — С. 24–31.

3. Левенштам В.Б., Ишмеев М.Р. Эволюционные задачи с большим параметром. Высокочастотные асимптотики. — Saarbrucken: LAP Lambert Acad. Publ., 2012.

4. Levenshtam V.B., Ishmeev M.R. Asymptotic integration of linear system with high-frequency coefficients and Stokes operator in the main part // Asymptotic Analysis. — 2015. — Vol. 92, № 3-4. — P. 363–376.

5. Ishmeev M.R., Levenshtam V.B. High-Frequency Asymptotics of a Solution to a Linear System with the Stokes Operator in the Principal Part // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 208, № 2. — P. 151–159. (Translated from Problemy Matematicheskogo Analiza 80, April 2015, P. 3–10)

6. Levenshtam V.B., Ishmeev M.R. A System of Partial Differential Equations with High-Frequency Coefficients and Stokes Operator in the Main Part. Asymptotic Integration in the Case of Multiple Degeneration // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2018. — № 3. — P. 284–299.

7. Ишмеев М.Р. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Неделя науки 2011. Сборник тезисов. — Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011.

8. Ишмеев М.Р. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми // Неделя науки 2012. Сборник тезисов. — Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2012.

9. Ишмеев М.Р. Асимптотическое интегрирование линейной эволюционной высокочастотной задачи с оператором Стокса в главной части и вырождением // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения V. Материалы конференции. — Ростов-на-Дону, 2015.

10. Ишмеев М.Р. Асимптотический анализ линейной высокочастотной задачи с оператором Стокса в главной части и вырождением // XII Международная научная конференция. Сборник тезисов. — Владикавказ: с. Цей, ЮМИ ВНЦ РАН, 2015.

11. Ишмеев М.Р., Левенштам В.Б., Нгуен Л.К. Высокочастотные асимпто-

тики периодических по времени решений систем дифференциальных уравнений с кратным вырождением // XIV Международная научная конференция. Сборник тезисов. — Владикавказ: с. Цей, ЮМИ ВНЦ РАН, 2017.