МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ДРОНОВ АЛЕКСЕЙ КОНСТАНТИНОВИЧ

Интерполяция операторов на конусах и применение к теории базисов в пространствах Фреше

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Мелихов Сергей Николаевич

Ростов-на-Дону
2019

Оглавление

0.1 Введение

Актуальность исследования. Интерес к исследованию линейных топологических пространств обусловлен развитием в последние несколько десятилетий ряда разделов естествознания, в которых применяются функции и обобщенные функции, допускающие реализацию в виде различных классов топологических векторных пространств. Зачастую эти пространства не выходят за рамки ядерных пространств Фреше. В этой связи появляются вопросы, связанные с геометрией таких пространств, исследовать которые помогает изучение специальных последовательностей элементов (базисных, минимальных и т.д.). В частности, возникают задачи о существовании базиса в пространствах Фреше, их подпространствах, фактор-пространствах и дополняемых подпространствах.

Отметим также, что в последние 30 лет теория дополняемых подпространств различных локально выпуклых пространств с базисом интенсивно развивается. Она находит приложения в теории операторов свертки в пространствах аналитических функций при изучении проблемы существования линейного непрерывного правого обратного к оператору свертки в таких пространствах, в теории представляющих систем экспонент, в частности, в задаче о наличии линейного непрерывного правого обратного к оператору представления рядами экспонент и их обобщений элементов различных функциональных пространств (см., например, [79, 58, 72, 43, 71, 2, 1]).

Одной из важнейших задач теории базисов в локально выпуклых пространствах является нахождение критериев существования базиса в подпространствах, фактор-пространствах и дополняемых подпространствах пространств Фреше. Вопрос о наличии базиса во всяком дополняемом подпространстве ядерного пространства Фреше с базисом впервые был поставлен А. Пелчинским в 1970 году и до настоящего времени остается открытым. Поскольку в силу теоремы Дынина-Митягина всякий базис в ядерном пространстве Фреше является абсолютным, эта гипотеза эквивалентна утверждению о том, что всякое дополняемое подпространство ядерного пространства Кёте также является пространством Кёте. Эта проблема положительна решена для многих частных случаев в работах Б.С. Митягина, Г.М. Хенкина, Е. Дубинского, Д. Фогта, Й. Крона, В.П. Кондакова, А.И. Ефимова.

Для того, чтобы дать краткий обзор полученных ранее результатов в этой области, приведем некоторые определения. Пространство Кёте $l_2(a_r(n))$ (определение пространства Кёте и матрицы Кёте приведено в п. 1.3) называется пространством степенных рядов конечного (бесконечного) типа, если оно определяется матрицей вида $a_r(n) = e^{t_r \alpha_n}$, где $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность неотрицательных чисел, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, и $\{t_r\}_{r=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{r\to\infty} t_r = R, R < \infty (= \infty)$. Пространство степенных рядов называется ручным, если множество, состоящее из конечных предельных точек множества $\{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$, является ограниченным. Говорят, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством устойчивости, а соответствующее пространство степенных рядов устойчивым, если $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_n} < +\infty$. Последнее условие эквивалентно изоморфности пространства $l_2(e^{t_r \alpha_n})$ своему декартову квадрату [85].

В работах Б.С. Митягина и Г.М. Хенкина [47, 48] утверждение гипотезы Пелчинского было доказано для пространств степенных рядов конечного типа. При этом впервые был применен подход, использующий интерполяционные методы. Д. Фогтом и Е. Дубинским в [64, 83] существование базиса в каждом дополняемом подпространстве было доказано для ручных пространств степенных рядов бесконечного типа. Позднее, используя интерполяционный метод Б.С. Митягина, Й. Крон обобщил оба указанных результата в [67]. Также в [68, 69] им был получен критерий существования правильного базиса в пространствах Фреше, которые изоморфны дополняемым подпространствам ядерных пространств Фреше с правильным базисом. В [84, 85] Д. Фогт, опираясь на метод декомпозиции А. Пелчинского (см. [76]), доказал, что каждое пространство Фреше E изоморфно устойчивому пространству степенных рядов бесконечного типа $l_2(e^{t_r \alpha_n})$, если E изоморфно дополняемому подпространству в $l_2(e^{t_r \alpha_n})$ и при этом $l_2(e^{t_r \alpha_n})$ изоморфно некоторому дополняемому подпространству в E. Отметим, что в [84] утверждение было доказано для случая, когда $l_2(e^{t_r \alpha_n})$ ядерно, а в [85] это ограничение снято.

В работах [42, 41, 38, 37] А.И. Ефимова и В.П. Кондакова существование безусловного базиса в каждом дополняемом подпространстве доказано для блочных счетно-гильбертовых пространств Кёте с правильной матрицей, определяющейся последовательностью весовых функций, которые обладают свойством упорядоченности (либо обратной упорядоченности) парных композиций с обратными функциями (см. определения 1 и 2 в [38]).

Заметим, что утверждение гипотезы Пелчинского нельзя усилить, заменив ядерное пространство пространством Шварца (см. п. 1.2). Именно, в [80] Я. Таскиненом доказано, что для ядерного пространства Фреше E без базиса (пример такого пространства можно найти в [65, §21.10]) существует пространство Фреше-Шварца, дополняемое подпространство которого изоморфно E.

Таким образом, полученные ранее результаты так или иначе сводились к рассмотрению пространств Кёте с ограничениями на матрицу, являющимися достаточно жесткими и не позволяющими сделать вывод о справедливости утверждения гипотезы Пелчинского для некоторых пространств Фреше, играющих важную роль в функциональном анализе. Например, до сих пор не было известно, справедливо ли утверждение гипотезы Пелчинского для широко применяемого пространства S бесконечно дифференцируемых функций на вещественной оси, у которых все производные убывают на бесконечности быстрее любой отрицательной степени x. В диссертации приведено доказательство существования базиса в каждом дополняемом подпространстве ядерных пространств Кёте с правильной матрицей из классов (d_1) и (d_2). Классы (d_1) и (d_2), введенные М.М.Драгилевым в [16], включают в себя многие конкретные пространства Фреше. Например, пространство S изоморфно пространству Кёте с подходящей матрицей из класса (d_1), а значит, для пространства S гипотеза Пелчинского справедлива. Пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах также изоморфно пространству Кёте из (d_1), а пространство функций, аналитических в единичном круге, с той же топологией изоморфно пространству Кёте из класса (d_2). Доказательство в обоих случаях основано на комбинации классического метода «тупикового» пространства (см.[36]) и некоторых недавних результатов об интерполяции операторов, которые являются ограниченными на конусах в банаховых пространствах.

Целью диссертационной работы является доказательство существования базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте с правильной матрицей и свойством (d_1) либо (d_2). Техника доказательства опирается на интерполяционные свойства операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей.

Чтобы достичь цель диссертации, необходимо было решить следующие задачи:

- доказать интерполяционную теорему для троек конусов, вложенных в пространства числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом;

- применить полученный результат к доказательству существования базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства числовых последовательностей с правильной матрицей и свойством (d_1);

- доказать аналогичное утверждение для случая ядерного пространства с правильной матрицей и свойством (d_2).

Теоретико-методологическую основу диссертации составляют методы функционального анализа, теория интерполяции линейных операторов, ограниченных на всем банаховом пространстве либо на вложенных в них конусах. Техника доказательства существования базиса опирается на введенный Б.С. Митягиным метод «тупикового пространства».

Новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

- впервые предлагается нестандартная постановка задачи интерполяции операторов, ограниченных не на всем банаховом пространстве, а на вложенных в пространства конусах;

- доказаны теоремы об интерполяции линейных операторов, ограниченных на конусах, являющихся нижними полурешетками, в пространствах числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом;

- полученные интерполяционные теоремы успешно применены для доказательства существования базиса в дополняемых подпространствах ядерных пространств Кёте с правильной матрицей и свойствами (d_1) либо (d_2). Впервые при этом техника доказательства опирается на интерполяционные свойства не только троек банаховых пространств, но и троек вложенных в них конусов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Условия интерполяционности троек конусов в пространствах последовательностей.

2. Каждое дополняемое подпространство ядерного пространства Кёте с правильной матрицей и свойством (d_1) обладает базисом.

3. Всякое дополняемое подпространство ядерного пространства Кёте с правильной матрицей и свойством (d_2) обладает базисом.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и разработанные в ней методы могут быть полезны при изучении геометрии пространств Фреше и действующих в них операторов. Они могут быть использованы при чтении спецкурсов студентам и аспирантам по направлению подготовки «математика».

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались на Международной конференции «Современные проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - IV» (27 апреля - 1 мая 2014, г. Ростов-на-Дону, Россия), Международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (26 апреля - 1 мая 2015, г. Ростов-на-Дону, Россия), Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (12-18 июля 2015, с. Цей, Россия), Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (3-8 июля 2015, с. Цей, Россия), семинаре кафедры математического анализа (руководитель — д.ф.-м.н., профессор А.В. Абанин) Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ, семинаре кафедры алгебры и функционального анализа (руководитель — д.ф.-м.н., профессор И.В. Орлов) Таврической академии Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [28, 29, 20, 30, 31, 22]. Из них 5 входят в перечень ВАК Минобрнауки РФ, 4 — в тезисах докладов [17, 18, 19, 21].

В работах [28, 29, 30, 31, 22] В.М. Каплицкому принадлежит общий план исследования, согласно которому следовало применить интерполяционные свойства троек конусов в нормированных пространствах числовых последовательностей к доказательству существования базиса в дополняемых подпространствах ядерных пространств Фреше, обладающих правильным базисом, из классов (d_1) и (d_2).

Также В.М. Каплицким была предложена подробная схема доказательства основного результата в [29].

Диссертация содержит Введение и три главы. В параграфах 1.1-1.3 первой главы приводятся основные определения теории базисов в локально выпуклых пространствах и хорошо известные утверждения, необходимые для дальнейшего изложения. Центральное место при этом занимают понятия базиса (безусловного, абсолютного), ядерного пространства Фреше и пространства Кёте. Последние, подобно пространствам l_1 в теории банаховых пространств, являются модельным примером пространства Фреше, обладающего абсолютным базисом.

В параграфе 1.4 вводится понятие правильного базиса. Правильные базисы были введены в работе [14] М.М. Драгилева. Правильные абсолютные базисы в пространствах Фреше обладают свойствами, аналогичными свойствам степенного базиса пространств аналитических функций, и позволяют более эффективно использовать аппарат аппроксимативных размерностей.

Определение 1.8. *Базис (x_n) в пространстве Фреше X называется правильным, если существует определяющая система полунорм $(\|\cdot\|_p)$ такая, что отношение $\frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_{p+1}}$ является убывающей функцией n.*

В параграфе 1.5 вводятся классы пространств Кёте (d_1) и (d_2).

Вместе с понятием правильного базиса в статье М.М. Драгилева [14] были введены классы счетно-нормированных пространств (d_1) и (d_2). Их определение формулировалось в терминах аппроксимативной размерности и отличалось от приведенного ниже. Однако, в случае пространств Кёте с правильной матрицей определения эквиваленты. В дальнейшем в работах различных математиков (см., например, [24, 81, 63]) обозначения (d_1) и (d_2) применялись и к пространствам Кёте, удовлетворяющим условиям определения 1.9, матрица которых не предполагалась правильной. Также в работах В.П.

Захарюты, Д. Фогта и М. Дж. Вагнера были введены обобщения таких пространств Кёте на случай локально выпуклых пространств, в которых не предполагалось наличие базиса. При этом применялись обозначения DN и $\overline{\Omega}$ (либо D_1 и D_2).

Поскольку в рамках данной работы будут рассматриваться пространства Кёте с правильной матрицей, то указанная выше неопределенность, связанная с обозначениями (d_1) и (d_2), будет несущественна. При этом пространства Фреше с правильным базисом из классов DN и $\overline{\Omega}$ (D_1 и D_2) изоморфны соответственно пространствам Кёте с правильной матрицей из классов (d_1) и (d_2).

Определение 1.9. *Говорят, что пространство Кёте $l_1(a_r(n))$ с правильной матрицей принадлежит классу $(d_i), i = 1, 2,$ если выполняется условие:*

$$\exists p\ \forall q\ \exists r\ \exists c(q,r) : a_q^2(n) \leqslant c(q,r)a_p(n)a_r(n), i = 1,$$

$$\forall p\ \exists q\ \forall r\ \exists c(p,r) : a_p(n)a_r(n) \leqslant c(p,r)a_q^2(n), i = 2.$$

Во второй главе приведены вспомогательные теоремы об интерполяционных свойствах операторов, которые ограничены на конусах в банаховых пространствах сходящихся к нулю с весом числовых последовательностей. Эти теоремы имеют ключевое значение при доказательстве основного результата.

Отметим некоторые работы, посвященные изучению конусов в банаховых пространствах и свойств операторов (в том числе интерполяционных), связанных с ними. В статьях [60, 61, 59] Дж. Цедра, Дж. Мартина и Х. Колла исследуются интерполяционные свойства конусов, обладающих свойством декомпозиции, а также конусов убывающих функций. При этом терминология и постановка задачи соответствуют представленным в пп. 2.5-2.4 диссертации. Отметим также среди недавних результатов, связанных с исследованием конусов монотонных функций, работы [5, 6, 8] В.И. Буренкова, М.Л.

Гольдмана, Э.Г. Бахтигареевой и др.

Поясним, каким образом возникают конусы при решении вопроса о существовании базиса в дополняемом подпространстве пространства Фреше. Пусть $E = (E, \|\cdot\|_r)$ — ядерное пространство Фреше, топология которого задана счётным набором гильбертовых норм $\{\|\cdot\|_r\}_{r=1}^{\infty}$:

$$\|x\|_r = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x^2(n) a_r^2(n)}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

где $\{a_r(n)\}_{r=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность весов. В этом случае $E = \bigcap\limits_{r \geqslant 1} E_r$, где $E_r = l_2(a_r(n))$ — ассоциированные гильбертовы пространства. Пусть $F = P(E)$ — дополняемое подпространство в E (здесь P — непрерывный проектор в E, проектирующий E на F). Метод «тупикового» пространства опирается на следующую идею. Система элементов, которая должна быть базисом в F, строится как общий ортогональный базис двух гильбертовых пространств F_0 и F_∞ таких, что $F_\infty \subset F \subset F_0$ и F_∞ компактно и плотно вложено в F_0 (такой базис всегда существует). При этом, выбирая подходящим образом веса $a_0(n)$ и $a_\infty(n)$, всегда можно добиться того, что $F_0 \subset E_0 = l_2(a_0(n))$, $F_\infty \subset E_\infty = l_2(a_\infty(n))$, $E_\infty \subset E_r \subset E_0$ и для любого r тройка (E_0, E_∞, E_r) является интерполяционной тройкой гильбертовых пространств (см. [42]). Построенная таким образом система элементов всегда является полной минимальной системой в F, поэтому она будет базисом в F, если операторы частичных сумм P_n, которые соответствуют этой системе, будут равностепенно непрерывны. Эти операторы ограниченны на образе проектора P, однако, вообще говоря, не являются ограниченными в «крайних» пространствах, поскольку проектор P непрерывен в пространстве Фреше E, но, вообще говоря, не является непрерывным (ограниченным) оператором в «крайних» гильбертовых пространствах E_0 и E_∞. Операторы P_n, однако, оказываются ограниченными на некоторых конусах в пространствах E_0 и E_∞, которые естественным образом строятся по оператору $|P|$ (здесь $|P|$ — модуль оператора P в смысле теории векторных решеток). Возникающие конусы обладают многими хорошими дополнительными свойствами (например, они являются нижними полурешетками), которые позволяют использовать интерполяционные свойства линейных операторов, ограниченных на таких конусах, для доказательства равностепенной непрерывности семейства $\{P_n\}$.

В первых четырех параграфах второй главы изложены основные определения теории интерполяции линейных ограниченных операторов в её классической постановке. Используемая терминология соответствует принятой в [45, 51, 4].

Определение 2.3. *Тройка банаховых пространств* (E_0, E_1, E) *является интерполяционной относительно тройки* (F_0, F_1, F)*, если для любого линейного оператора* T*, непрерывно действующего из банаховой пары* (E_0, E_1) *в пару* (F_0, F_1)*, его сужение* $T|_E$ *на промежуточное пространство* E *непрерывно действует из* E *в* F*. Другими словами, из неравенств*

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, x \in E_0,$$
$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_{E_1}, x \in E_1,$$

следует неравенство

$$\|Tx\|_F \leqslant M \|x\|_E, x \in E. \tag{1}$$

Пространства E *и* F *называются интерполяционными по отношению к банаховым парам* (E_0, E_1) *и* (F_0, F_1)*.*

Существуют различные методы построения интерполяционных пространств. В диссертации используется классический вещественный интерполяционный метод, в котором построение интерполяционных опирается на применении K-функционала Петре (см. п. 2.2), определяемого следующий образом:

$$K(t;x;E_0,E_1)=\inf_{\substack{x=x_0+x_1,\\ x_0\in E_0,x_1\in E_1}}\{\|x_0\|_{E_0}+t\|x_1\|_{E_1}\},$$

где $t>0$, (E_0,E_1) — банахова пара.

Множество элементов из суммы пространств E_0+E_1 (см. п. 1.1), удовлетворяющих неравенству

$$\Phi(K(t,x;E_0,E_1))=\left(\int\limits_0^\infty (t^{-\theta}K(t,x;E_0,E_1))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

где функционал Φ действует на пространстве положительных измеримых функций по правилу:

$$\Phi(h)=\left(\int\limits_0^\infty (t^{-\theta}h(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

образует промежуточное пространство банаховой пары (E_0,E_1), которое обозначают через $K(E_0,E_1)$. Доказывается (см. п 2.2), что для любых банаховых пар (E_0,E_1) и (F_0,F_1) тройка $(E_0,E_1,K(E_0,E_1))$ интерполяционна относительно тройки $(F_0,F_1,K(F_0,F_1))$.

В следующих трех параграфах второй главы формулируется постановка задачи теории интерполяции линейных операторов, на вложенных в пространства конусах. По аналогии с классическим случаем вводятся понятия пары конусов, промежуточного конуса и тройки конусов, интерполяционных относительно некоторой банаховой тройки.

Определение 2.5. *Пусть конус $Q\subset E$ является промежуточным для пары $\overline{Q}$. Если найдется постоянная*

$$c=c(\overline{E},\overline{F},\overline{Q},E,F,Q)>0$$

такая, что для всех $T\in L(\overline{Q},\overline{F};M_0,M_1)$ справедливо неравенство

$$\|Tx\|_F\leqslant c\max\{M_0,M_1\}\|x\|_E \text{ при } x\in Q,$$

то будем говорить, что тройка конусов (Q_0, Q_1, Q) *является интерполяционной относительно* (F_0, F_1, F).

Понятие равномерного интерполяционного свойства вводится при рассмотрении не одной фиксированной интерполяционной тройки конусов, а некоторого семейства таких троек.

Определение 2.6. *Пусть семейство* $\mathcal{M} = \{Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q_\alpha\}, \alpha \in A$ *удовлетворяет условиям:*

1) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ *справедливы вложения:* $Q_0^\alpha \subset E_0, Q_1^\alpha \subset E_1$*,* $Q^\alpha \subset E$*, причем конус* Q^α *— промежуточный конус для пары* (Q_0^α, Q_1^α)*;*

2) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ *тройка конусов* $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ *является интерполяционной по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F).
В этом случае будем говорить, что семейство $\mathcal{M}$ *является интерполяционным по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F).

Определение 2.7. *Если для всех троек конусов из семейства* $\mathcal{M}$ *может быть выбрана одинаковая интерполяционная постоянная* $c = c(\overline{E}, \overline{F}, E, F)$*, то будем говорить, что* $\mathcal{M}$ *обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F).

В параграфе 2.6 приводится критерий интерполяционности троек конусов для случая интерполяционных троек, в которых промежуточные пространства получены с помощью метода вещественной интерполяции.

Теорема 2.4. *Пусть* $E = K_\Phi(E_0, E_1)$*,* $F = K_\Phi(F_0, F_1)$*. Пусть задано семейство* $\mathcal{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\}$ *троек конусов, и для любого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *конусы* Q_0^α, Q_1^α *вложены в пространства* E_0, E_1 *соответственно,* Q^α *— конус, вложенный в пространство* E *и являющийся промежуточным для пары* $\overline{Q^\alpha} = (Q_0^\alpha, Q_1^\alpha)$*. Пусть существует постоянная* $c = c(\overline{E}, \overline{F}) > 0$ *такая, что для каждого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *и каждого оператора* $T \in L(\overline{Q^\alpha}, \overline{F})$*, для которого* $\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i}$

при $x \in Q_i^\alpha$ $(i = 0, 1)$, *имеет место неравенство:*

$$K(t, Tx; \overline{F}) \leqslant c(\overline{E}, \overline{F}) \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \overline{E}), x \in Q^\alpha.$$

Тогда семейство конусов $\mathcal{M}$ *обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F).

В пп. 2.7-2.8 приводятся примеры интерполяционных троек конусов, а также пример тройки конусов, не наследующей интерполяционное свойство.

В п. 2.9 вместе с некоторыми вспомогательными утверждениями приводится основной результат главы. Двойственное утверждение формулируется в теореме 3.13.

Теорема 2.12. *Пусть* $E_i = c_0(a_i), F = c_0(b_i) (i = 0, 1), E = c_0(a), F = c_0(b)$, *причем* $E_1 \subset E \subset E_0, F_1 \subset F \subset F_0$, *и тройка* (E_0, E_1, E) *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F). *Пусть* $\mathcal{A}$ *— множество конусов в* ω^+ *такое, что для каждого конуса* $Q \in \mathcal{A}$ *выполняются условия:*

1) Q *— нижняя полурешетка в* ω;

2) $Q \cap E_1^+$ *— тотальный конус в пространстве* ω.

Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}.$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Третья глава состоит из четырех параграфов. В первом из них вводятся обозначения и совершаются некоторые предварительные преобразования, которые упрощают доказательство основных результатов. При этом используются приведенные в первой главе свойства пространств Кёте. Во втором и третьем параграфах доказываются основные результаты.

Теорема 3.1. *Пусть* E *— ядерное пространство Фреше с правильным базисом из класса* (d_1), $F \subset E$ *— дополняемое подпространство в* E. *Тогда* F *имеет абсолютный базис.*

Теорема 3.2. *Пусть E — ядерное пространство Фреше с правильным базисом из класса (d_2), $F \subset E$ — дополняемое подпространство в E. Тогда F имеет абсолютный базис.*

Одним из следствий доказанных результатов является справедливость гипотезы Бессаги для пространств из класса (d_1). Соответствующие утверждения опираются на результаты В.П. Кондакова (см. [34]) и формулируются в четвертом параграфе главы.

Автор выражает глубокую признательность В.М. Каплицкому за постоянное внимание к работе и многолетнее сотрудничество, а также С.Н. Мелихову за ряд важных замечаний, способствовавших улучшению текста, и организационную поддержку.

Глава 1

Базисы в пространствах Фреше

В этой главе содержатся основные сведения из теории базисов в локально выпуклых пространствах. Особое внимание уделяется пространствам Кёте числовых последовательностей. Те из утверждений, которые хорошо известны, приводятся без доказательства.

1.1 Базис в линейном топологическом пространстве. Основные определения

Пусть X — некоторое линейное топологическое пространства.

Определение 1.1. *Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов линейного топологического пространства X называют базисом, если для каждого вектора $x \in X$ определена единственным образом числовая последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$$

(ряд сходится в X).

Всюду далее X — локально выпуклое пространство. Всегда можно считать (см., например, [3, гл. 1, стр. 53]), что топология в X задается некоторой системой полунорм $(\|\cdot\|_\alpha), \alpha \in A$, где A — некоторое множество индексов. Система $(\|\cdot\|_\alpha), \alpha \in A$, называется определяющей. Через $x'_n, n \in \mathbb{N}$, будем обозначать коэффициентные функционалы, соответствующие базису $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в X, определяемые следующим образом:

$$x'_n(x) = \xi_n, x \in X.$$

Заметим, что коффициентные функционалы даже в случае нормированного пространства могут не являться непрерывными. Если же коэффициентные функционалы непрерывны, то базис называется шаудеровским. В пространстве Фреше всякий базис является шаудеровским (см., например, [16, гл. 1, стр. 9]).

Базис $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в локально выпуклом пространстве X называется безусловным, если для любой перестановки $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для всякого $x \in X$ имеет место представление

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x'_{\sigma(n)}(x)\ x_{\sigma(n)}$$

(ряд сходится в X).

Базис $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в локально выпуклом пространстве X с определяющей системой полунорм $\|\cdot\|_\alpha, \alpha \in A$, называют абсолютным, если для всех $\alpha \in A$ и всех $x \in X$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x'_n(x)| \|x_n\|_\alpha < +\infty. \tag{1.1}$$

Если в топологическом пространстве существует базис, то естественным образом возникает вопрос о его единственности в том или ином смысле.

Определение 1.2. *Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — базисы линейного топологического пространства X. Базис $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называют эквива-*

лентным базису $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, если существует автоморфизм (изоморфизм на себя)* $T : X \to X$ *такой, что* $Tx_n = y_n, n \in \mathbb{N}$*.*

В конечномерном пространства все базисы эквивалентны. Однако, в бесконечномерном случае даже для нормированных пространств это не так. Например, если $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — базис в нормированном пространстве E, то, очевидно, $(nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ также является базисом в E, но, как несложно видеть, они эквивалентными не являются. В этой связи вводят понятие предэквивалентных базисов.

Определение 1.3. *Базисы* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *линейного топологического пространства называется предэквивалентными, если найдется такая последовательность чисел* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, что базисы* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(\lambda_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *эквивалентны.*

Существуют также пространства, в которых некоторые не являющиеся предэквивалентными базисы становятся предэквивалентными при перестановке элементов одного из них (см., например, [16, § 1, стр. 5]). В этой связи вводится следующее понятие.

Определение 1.4. *Базисы* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *линейного топологического пространства называется квазиэквивалентными, если найдутся такая последовательность чисел* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и такая перестановка (биекция) натурального ряда* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, что базисы* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $(\lambda_{\sigma(n)} y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *эквивалентны.*

1.2 Ядерные локально выпуклые пространства

Пусть E и F — некоторые нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|_F$ соответственно. Введем понятие ядерного отображения между E и F.

Определение 1.5. *Линейный оператор $T : E \to F$ называется ядерным, если существуют последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в F и $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в E' (сопряженное к E) такие, что*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x) f_n, x \in E, \tag{1.2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e'_n\|_{E'} \|f_n\|_F < +\infty,$$

где $\|e'_n\|_{E'} = \sup\{|e'_n(x)| : x \in E, \|x\|_E \leqslant 1\}$.

Пусть E — локально выпуклое пространство с определяющей системой полунорм $(\|\cdot\|_\alpha), \alpha \in A$. Множество $N_\alpha = \{x \in E : \|x\|_\alpha = 0\}$ является замкнутым подпространством в E, и потому для каждого α может быть определено фактор-пространство E/N_α. Отображение $i_\alpha : E \to E_\alpha$, ставящее каждому $x \in E$ класс смежности $x + N_\alpha \in E/N_\alpha$ называется каноническим. В фактор пространстве E/N_α определим норму $\|\cdot\|'_\alpha$ следующим образом: $\|i_\alpha(x)\|'_\alpha = \inf\limits_{h\in N_\alpha} \|x+h\|_\alpha$, где $i_\alpha(x) = x + N_\alpha \in E/N_\alpha, x \in E$. Пополнение $E/N_\alpha, \alpha \in A$, по $\|\cdot\|'_\alpha$ обозначим через E_α и будем называть ассоциированным банаховым пространством. Пусть в локально выпуклом пространстве E имеются полунормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ такие, что $\|x\|_\alpha \leqslant \|x\|_\beta$ для всех $x \in E$, то $N_\alpha \supset N_\beta$. Тогда отображение, ставящее в соответствие классу смежности $\overline{x}_\beta \in E/N_\beta$ класс смежности $\overline{x}_\beta + N_\alpha \in E/N_\alpha$, может быть по непрерывности продолжено до канонического отображения $i^\alpha_\beta : E_\beta \to E_\alpha$.

Определение 1.6. *Линейное топологическое пространство E с определяющей системой преднорм $(\|\cdot\|_\alpha), \alpha \in A$, называют ядерным, если для всякой полунормы $\|\cdot\|_\alpha$ найдется полунорма $\|\cdot\|_\beta$ такая, что отображение $i^\alpha_\beta : E_\beta \to E_\alpha$ ядерно.*

Замечание 1.1. *Если в определении 1.6 заменить ядерные отображения на предкомпактные, то получим определение пространства*

Шварца. Поскольку ядерное отображение является предкомпактным (см., например, [49, гл. 3, с. 81]), всякое ядерное пространство является пространством Шварца.

Ниже (см. теорему 1.2) будет сформулирован критерий ядерности для пространств Кёте, которые являются основным объектом исследования диссертации.

Предложение 1.1. *[70, гл. 28, стр. 347] Всякое замкнутое подпространство ядерного пространства является ядерным.*

1.3 Пространства Кёте

Пространством Фреше E называется полное метризуемое локально выпуклое пространство. Метризуемость эквивалентна существованию счетной фундаментальной системы полунорм $(\|\cdot\|_p), p \in \mathbb{N}$, определяющей топологию в E (см. [70], гл. 25, стр. 294). Системы полунорм $(\|\cdot\|_p)$ и $(\|\cdot\|'_p)$ в пространстве E называются эквивалентными, если они задают одну и ту же топологию на E. Систему полунорм $(\|\cdot\|_p)$ в E называют возрастающей, если $\|x\|_{p_1} \leqslant \|x\|_{p_2}$ для всех $x \in E$ и $p_1 < p_2$. От системы полунорм $(\|\cdot\|_p)$ всегда можно перейти к эквивалентной возрастающей системе $(\|\cdot\|'_p)$, определяемой следующим образом:

$$\|x\|'_p = \max_{1 \leqslant n \leqslant p} \|x\|_n, x \in E.$$

Поэтому всюду в дальнейшем будем считать, что топология пространства E порождается возрастающей системой полунорм $(\|\cdot\|_p)$.

Одним из важнейших представителей пространств Фреше являются пространства Кёте. Они играют особую роль при изучении базисов в пространствах Фреше, поскольку каждое пространство Фреше с абсолютным базисом изоморфно некоторому пространству Кёте.

Определение 1.7. *Матрицу* $(a_r(n)), r, n \in \mathbb{N}$, *называют матрицей Кёте, если* $0 < a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n)$ *для всех* n *и* r. *Пространством Кёте* $l_p(a_r(n)), 1 \leqslant p < \infty$, *определяемым матрицей Кёте* $(a_r(n))$, *называют линейное пространство числовых последовательностей*

$$\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{C} : \|x\|_r := \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p a_r^p(n)} < \infty, r \in \mathbb{N}\}$$

с топологией, порождаемой системой полунорм $(\|\cdot\|_r)$.

Пространством Кёте $l_\infty(a_r(n))$ *называют линейное пространство числовых последовательностей*

$$\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{C} : \|x\|_r := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| a_r(n) < \infty, r \in \mathbb{N}\}$$

с топологией, порождаемой системой полунорм $(\|\cdot\|_\infty)$.

Пространством Кёте $c_0(a_r(n))$ *называется подпространство пространства* $l_\infty(a_r(n))$ *последовательностей* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *таких, что*

$$\lim_{n\to\infty} x_n a_r(n) = 0$$

для всех r.

Пусть $l_p(a_r), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $c_0(a_r)$ — ассоциированные банаховы пространства пространств $l_p(a_r(n)), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $c_0(a_r(n))$ соответственно. Несложно видеть, что

$$l_p(a_r) = \{x \in \omega : \|x\|_r = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p a_r^p(n)} < \infty\}, p \in [1; \infty),$$

$$l_\infty(a_r) = \{x \in \omega : \|x\|_r = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| a_r(n) < \infty\},$$

$$c_0(a_r) = \{x \in l_\infty(a_r) : \lim_{n\to\infty} |x_n| a_r(n) = 0\}.$$

Отметим, что $l_1(a_r(n))$ обладает абсолютным базисом, а именно так называемым базисом ортов $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, определяемым следующим образом:

$$e_n = (\delta_{kn})_{k=1}^{\infty} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n, \\ 1, & \text{если } k = n. \end{cases}$$

Базис ортов в пространстве Кёте называют каноническим.

С другой стороны, пространство каждое Фреше с абсолютным базисом изоморфно некоторому пространству Кёте.

Теорема 1.1. *[70, гл. 27, стр. 341] Всякое пространство Фреше E с определяющей системой норм $(\|\cdot\|_r)$, обладающее абсолютным базисом $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, изоморфно пространству Кёте $l_1(\|e_n\|_r)$.*

Определение 1.8. *Матрицы Кёте $(a_r(n))$ и $(b_r(n))$ называются эквивалентными, если выполняются условия:*

$$\forall r \ \exists s, C(r,s) > 0 \ \forall n : a_r(n) \leqslant C(r,s) b_s(n), \tag{1.3}$$

$$\forall s \ \exists r, C(s,r) > 0 \ \forall n : b_s(n) \leqslant C(s,r) a_r(n). \tag{1.4}$$

В дальнейшем часто будут применяться приводимые ниже утверждения.

Предложение 1.2. *[15] Пространства Кёте, определяемые эквивалентными матрицами, совпадают.*

Следствие 1.1. *Пусть матрица $(b_r(n))$ получена из матрицы Кёте $(a_r(n))$ умножением всех строк на элементы последовательности $\{\alpha(r)\}_{r=1}^{\infty}, \alpha(r) > 0$:*

$$b_r(n) = \alpha(r) a_r(n).$$

Тогда пространства $l_1(a_r(n))$ и $l_1(b_r(n))$ совпадают.

Следствие 1.2. *Пусть* $(a_r(n))$ *и* $(b_r(n))$ *— матрицы Кёте такие, что*

$$b_r(n) = a_{\sigma(r)}(n),$$

где $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *— строго возрастающая функция, действующая в множестве натуральных чисел. Тогда пространства* $l_1(a_r(n))$ *и* $l_1(b_r(n))$ *совпадают.*

Предложение 1.3. *Пусть* $l_1(a_r(n))$ *— пространство Кёте с определяющей системой норм* $\|\cdot\|_r$ *и* T *— непрерывный линейный оператор в* $l_1(a_r(n))$. *Тогда существует матрица* $(b_r(n))$, *которая эквивалентна матрице* $(a_r(n))$ *и обладает свойством:*

$$\forall r : \|Tx\|'_r \leqslant C_r \|x\|'_{r+1},$$

где $\|\cdot\|'_r$ *— определяющая система норм пространства* $l_1(b_r(n))$.

Предложение 1.4. *Пусть матрица* $(b_r(n))$ *получена из матрицы* $(a_r(n))$ *умножением элементов каждой строки на элементы* $\{\lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *некоторой последовательности положительных чисел:*

$$b_r(n) = \lambda(n) a_r(n).$$

Тогда пространства Кёте $l_1(a_r(n))$ *и* $l_1(b_r(n))$ *изоморфны.*

Приведем некоторые примеры пространств Фреше, изоморфных пространствам Кёте. Через $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ обозначим пространство функций, аналитических в области $\mathcal{D}$ с топологией равномерной сходимости на вложенных в $\mathcal{D}$ компактных множествах.

Предложение 1.5. *[39, гл. 2, с. 146] Пространство целых функций* $\mathcal{A}(\mathcal{D}), \mathcal{D} = \mathbb{C}$, *изоморфно пространству Кёте* $l_1(r^n), r, n \in \mathbb{N}$. *Пространство аналитических в единичном круге функций* $\mathcal{A}(\mathcal{D}), \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, *изоморфно пространству Кёте* $l_1((1 - \frac{1}{r})^n), r, n \in \mathbb{N}$.

В работе будут рассматриваться ядерные пространства Фреше с базисом. В силу теоремы Дынина-Митягина (см. [46]) всякий базис в ядерном пространстве Фреше является абсолютным. Следовательно, всякое ядерное пространство Фреше с базисом изоморфно некоторому пространству Кёте. Приведем удобный критерий ядерности пространства Кёте.

Теорема 1.2. *[46]*

Следующие утверждения эквиваленты.

1) пространство Кёте $l_1(a_r(n))$ ядерно;

2) для всякого $p \in \mathbb{N}$ найдется $q = q(p) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_p(n)}{a_q(n)} < +\infty. \tag{1.5}$$

Используя следствие 1.2, можно сформулировать этот критерий в более удобной форме.

Следствие 1.3. *Ядерное пространство Кёте может быть определено с помощью матрицы $(a_r(n))$, обладающей свойством:*

$$\forall r : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} < \infty. \tag{1.6}$$

Теорема 1.3. *[70, гл. 28, стр. 355] Ядерное пространство Кёте $l_1(a_r(n))$ совпадает с каждым из пространств $l_p(a_r(n)), 1 < p \leqslant \infty$, и $c_0(a_r(n))$.*

Замечание 1.2. *Пусть $\{\|\cdot\|\}_{r=1}^{\infty}$ и $\{|\cdot|\}_{r=1}^{\infty}$ — нормы в ассоциированных банаховых пространствах $l_2(a_r)$ и $c_0(a_r)$ пространств Кёте $l_2(a_r(n))$ и $c_0(a_r(n))$ соответственно. Из предложения* 1.3 *следует, что системы норм $\{\|\cdot\|\}_{r=1}^{\infty}$ и $\{|\cdot|\}_{r=1}^{\infty}$ задают в ядерном пространстве $l_1(a_r(n))$ эквивалентные системы норм. При подходящем выборе матрицы Кёте также имеют место непрерывные вложения ассоциированных банаховых пространств:*

$$l_2(a_1) \subset c_0(a_1) \subset l_2(a_2) \subset c_0(a_2) \subset ... \subset l_2(a_r) \subset c_0(a_r) \subset ...$$

Действительно, если матрица $(a_r(n))$ выбрана, как в следствии 1.3, то последнее утверждение следует из неравенств

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_r(n)|x(n)| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_r^2(n)x^2(n)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \sup_{n\in\mathbb{N}} a_{r+1}(n)|x(n)|.$$

1.4 Правильные базисы в ядерных пространствах Фреше

Правильные базисы локально выпуклых пространств были введены М.М. Драгилевом в [14]. Они обобщали свойства степенного базиса в пространствах аналитических функций и позволяли эффективно использовать аппарат аппроксимативных размерностей. Основные результаты диссертации будут доказаны в предположении, что базис рассматриваемого ядерного пространства Фреше правильный. Это позволит использовать интерполяционные свойства ассоциированных банаховых пространств, также специальным образом построенных «тупиковых» банаховых пространств.

Определение 1.9. *Базис $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в пространстве Фреше X называется правильным, если существует определяющая система преднорм $(\|\cdot\|_p)$ такая, что отношение $\frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_{p+1}}$ является убывающей функцией n.*

Теорема 1.4. *[14] Изоморфное отображение, действующее между пространствами Фреше, правильные базисы переводит в правильные.*

Утверждение этой теоремы немедленно следует из определения правильного базиса.

Определение 1.10. *Матрица Кёте* $(a_r(n))$ *называется правильной, если*

$$\frac{a_r(n+1)}{a_{r+1}(n+1)} \leqslant \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)}$$

для всех n, r.

Предложение 1.6. *Всякое пространство Фреше с правильным абсолютным базисом изоморфно пространству Кёте с правильной матрицей.*

1.5 Классы пространств Драгилева (d_1) и (d_2)

Наряду с понятием правильного базиса в статье М.М. Драгилева [14] были введены классы (d_1) и (d_2) счетно-нормированных пространств. При этом для пространств Кёте с правильной матрицей определение М.М. Драгилева эквивалентно представленному ниже определению 1.11. В дальнейшем в работах других математиков (см., например, [81], [24], [63]) через (d_1) и (d_2) обозначались пространства Кёте, удовлетворяющие условиям (3.3) и (3.4), матрица которых не предполагалась правильной. Также в работах В.П. Захарюты, Д. Фогта и М. Дж. Вагнера были введены обобщения таких пространств Кёте на случай локально выпуклых пространств, не предполагающие наличие базиса. При этом применялись обозначения DN и $\overline{\Omega}$ (либо D_1 и D_2).

Поскольку в рамках данной работы будут рассматриваться пространства Кёте с правильной матрицей, то неопределенность, связанная с использованием обозначений (d_1) и (d_2) будет несущественна. При этом, как несложно видеть, пространства Фреше с правильным абсолютным базисом из классов DN и $\overline{\Omega}$ (D_1 и D_2) изоморфны соответственно пространствам Кёте с правильной матрицей из классов (d_1) и (d_2).

Определение 1.11. *Говорят, что пространство Кёте $l_1(a_r(n))$ матрицей принадлежит классу $(d_i), i = 1, 2$, если выполняется условие:*

$$\exists p \; \forall q \; \exists r \; \exists c(q,r) : a_q^2(n) \leqslant c(q,r)a_p(n)a_r(n), i = 1, \tag{1.7}$$

$$\forall p \; \exists q \; \forall r \; \exists c(p,r) : a_p(n)a_r(n) \leqslant c(p,r)a_q^2(n), i = 2. \tag{1.8}$$

1.6 О квазиэквивалентности базиса дополняемого подпространства части базиса ортов

Пусть F — дополняемое подпространство пространство Фреше E, и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — абсолютный базис в E, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — базис в F. Говорят, что для E выполняется гипотеза Бессаги, если $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ квазиэквивалентен части базиса $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, то есть если найдется инъективное отображение $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что базисы $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(x_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ квазиэквивалентны. Следующее утверждение является следствием результатов, полученных В.П. Кондаковым (см. [34], с. 47 и 52).

Теорема 1.5. *[34] Пусть E — ядерное пространств Фреше с правильным абсолютным базисом $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ из класса (d_1) либо из класса (d_2), и F — его дополняемое подпространство, в котором существует абсолютный базис $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Тогда $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ квазиэквивалентнен по отношению к $(x_{s(n)})_{n=1}^{\infty}$, где $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — инъективное отображение. То есть для пространств из классов (d_1) и (d_2) справедлива гипотеза Бессаги.*

Замечание 1.3. *В [34] приведены более сильные результаты. В частности, в [34] для пространства Фреше из класса (d_1) ограничением служит наличие упорядочиваемого базиса, который всегда является правильным.*

1.7 Критерий существования базиса в дополняемом подпространстве пространства Фреше

Приведем критерий существования базиса в пространстве Фреше. Напомним, что система элементов $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется минимальной, если каждый элемент этой системы не является предельной точкой линейной оболочки множества других элементов системы. Покажем, что для всякой минимальной системы $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в пространстве Фреше E_0 существует биортогональная система линейных непрерывных функционалов, то есть система $(e'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ элементов сопряженного пространства E' такая, что

$$e'_k(e_n) = \delta_{kn}.$$

Действительно, выберем из $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ произвольно элемент e_{k_0}. Пусть $E_0 = \overline{\operatorname{span}_{k\neq k_0}\{e_k\}}$ — замыкание линейной оболочки всех, кроме e_{k_0}, элементов системы $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Поскольку система $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ минимальна, то E_0 является замкнутым подпространством, не содержащим e_{k_0}. Тогда в силу одного из следствий теоремы Хана-Банаха (см., например, [50, гл. 3, стр. 72]) найдется $e'_{k_0} \in E'$ такой, что $e'_{k_0}(e_{k_0}) = 1$ и $e'_{k_0}(x) = 0$ для всех $x \in E_0$. Определив аналогичным образом e'_k для остальных e_k, получим биортогональную систему. Существует ряд критериев существования базиса в пространстве Фреше, один из которых приведен ниже и будет использован при доказательстве теорем 3.3, 3.4 третьей главы. В [15, гл. 1, стр. 10] аналогичный критерий сформулирован несколько иначе.

Предложение 1.7. *Пусть $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — полная минимальная система в пространстве Фреше E с фундаментальной системой норм $(\|\cdot\|_{k=1}^{\infty})$. Пусть $(e'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — система непрерывных функционалов, биортогональная к $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Для того, чтобы система $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ яв-*

лялась базисом, необходимо и достаточно, чтобы семейство операторов

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} e'_k(x) e_k$$

было равностепенно непрерывным в E, *то есть для любого* m *должны найтись* m_1 *и* $C_m > 0$ *такие, что*

$$\|P_n x\|_m \leqslant C_m \|x\|_{m_1}$$

для всех n *и* $x \in E$.

Доказательство. Необходимость указанного условия очевидна. Докажем, что оно является также достаточным. Рассмотрим сначала случай, когда $x \in \operatorname{span}\{e_k\}$, то есть

$$x = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k.$$

Тогда, выбрав $M > N$, будем иметь:

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{M} e'_k(x) e_k = \sum_{k=1}^{M} e'_k \left(\sum_{i=1}^{N} c_i e_i \right) e_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i \sum_{k=1}^{M} e'_k(e_i) e_k = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k = x.$$

Действуя на $x = P_M(x)$ каждым функционалами из системы $(e'_k)_{k \in \mathbb{N}}$, получим:

$$c_k = e'_k(x)$$

для всех $x \in \operatorname{span}\{x_k\}$. То есть для всех $x \in \operatorname{span}\{e_k\}$ имеет место представление

$$x = \lim_{n \to \infty} P_n x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} e'_k(x) e_k,$$

единственное в силу биортогональности систем $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e'_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Пусть теперь $x \in E$ — произвольный элемент. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого m найдется N такой что,

$$\|x - P_n x\|_m < \varepsilon$$

для всех $n > N$. Это и будет означать, что

$$x = \lim_{n\to\infty} P_n x.$$

Согласно условию теоремы существует m_1 и C_m такие, что

$$\|P_n x\|_m \leqslant C_m \|x\|_{m_1}.$$

Поскольку система $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ полна, найдется элемент $y = \sum\limits_{k=1}^{M} c_k e_k$ такой, что $\|x - y\|_{m_1} < \varepsilon/(1 + C_m)$. Заметим, что $\|x - y\|_m < \varepsilon/(1 + C_m)$, поскольку система полунорм $(\|\cdot\|_k)_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая. Тогда, как было показано выше, $P_n x = P_n y$ для всех $n > M$ будем иметь. Следовательно,

$$\|P_n x - x\|_m \leqslant \|P_n x - P_n y\|_m + \|P_n y - y\|_m + \|y - x\|_m <$$

$$< \|P_n(x - y)\|_m + 0 + \|y - x\|_{m_1} < C_m \|x - y\|_{m_1} + \|y - x\|_{m_1} <$$

$$< C_m \|x - y\|_{m_1} + \|y - x\|_{m_1} = (C_m + 1)\|y - x\|_{m_1} = \varepsilon$$

для всех $n > M$.

Таким образом, для каждого $x \in E$ имеет место разложение,

$$x = \lim_{n\to\infty} P_n x = \sum_{k=1}^{\infty} e'_k(n) e_k(x),$$

единственное единственное в силу биортогональности систем $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(e'_k)_{k=1}^{\infty}$. □

Следствие 1.4. *Пусть F — дополняемое подпространство пространства Фреше E, причем P — оператор проектирования E на*

F. Пусть система элементов $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ является полной минимальной в F с биортогональной системой $(f'_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Чтобы система $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ являлась базисом необходимо и достаточно, чтобы система операторов

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} f'_k(Px) f_k$$

была равностепенно непрерывной в E.

Пусть E и F — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_E$ и $(\cdot,\cdot)_F$, при этом E компактно вложено в F. Пусть $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в E (во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве он существует). Согласно спектральной теореме (см. [49, гл. 8, с. 182]) в F существует ортонормированная система $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ такая, что для оператора тождественного вложения $\mathcal{J} : E \to F$ справедливо представление

$$\mathcal{J}x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i)_E f_i, x \in E,$$

где $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — убывающая сходящаяся к нулю последовательность, состоящая из положительных элементов. Поскольку E плотно вложено в F, то $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой в пространстве F, то есть базисом. В то же время, поскольку $f_i = \frac{e_i}{\lambda_i}$ для всех i, система $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ является также ортогональным базисом в пространстве E. Систему $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ называют «общим» ортогональным базисом пространств E и F.

Пусть E — ядерное пространство Фреше с возрастающей определяющей системой гильбертовых норм $(\|\cdot\|_r)_{r=1}^{\infty}$, порождающие ассоциированные гильбертовы пространства E_r (см. замечание 1.2). Пусть E_∞ — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_\infty$, непрерывно вложенное в каждое из E_r. Такое пространство всегда можно построить (см. пп. 3.3 и 3.4). Пополнив линейное многообразие $L = \{Px :$

$x \in G_\infty\}$ по нормам $\|\cdot\|_r$ и $\|\cdot\|_\infty$, получим гильбертовы пространства F_r и F_∞:

$$F_1 \supset ... \supset F_r \supset F_{r+1} \supset ... \supset F_\infty.$$

Поскольку в силу ядерности E все вложения являются компактными, существует «общий» ортогональный базис $(f_k)_{k=1}^\infty$ пространств F_1 и F_∞. Из предложения 1.7 следует, что система $(f_k)_{k=1}^\infty$ будет являться базисом в $P(E) = F$, если равностепенно непрерывно семейство операторов $\{P_n\}$:

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} f'_k(Px) f_k$$

для всех $x \in E$.

Глава 2

Интерполяционные тройки конусов

Применение классических интерполяционных методов при решении проблемы существования базиса в дополняемого подпространстве ядерного пространства Фреше в ряде случаев затруднено. Чтобы возникающие сложности преодолеть, в настоящей работе предлагается расширить постановку задачи теории интерполяции, рассматривая операторы, ограниченные на вложенных в банаховы пространства конусы (см. подробнее п. 3.2). Соответственно возникают понятия промежуточного конуса, тройки конусов и интерполяционного свойства тройки конусов . В пп. 2.1 - 2.4 приводятся основные понятия теории интерполяции, на основе которых в п. 2.5 будет изложена постановка задачи теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах. Все результаты пп. 2.1 - 2.4 хорошо известны и широко применяются, поэтому доказательства опускаются. В пп. 2.6 - 2.8 изложены основные результаты главы.

2.1 Интерполяционные тройки банаховых пространств. Основные определения

Пусть E_0 и E_1 — топологические векторные пространства.

Определение 2.1. *Говорят, что линейное топологическое пространство E_1 вложено в банахово E_0, если*

1) E_1 вложено в E_0 в теоретико-множественном и алгебраическом смысле;

2) топология, индуцируемая E_0 на E_1, слабее топологии пространства E_1.

Если E_0 и E_1 — нормированные, то последнее условие можно заменить следующим:

$$\|x\|_{E_0} \leqslant C\|x\|_{E_1}, x \in E_1,$$

где C — некоторая постоянная.

Определение 2.2. *Говорят, что банаховые пространства E_0 и E_1 образуют банахову пару (E_0, E_1), если каждое из них вложено в некоторое отделимое линейное топологическое пространство $\mathcal{A}$.*

Пересечением E_0 и E_1 будем называть нормированное пространство $E_0 \cap E_1$ с нормой:

$$\|x\|_{E_0 \cap E_1} = \max\{\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}\}.$$

Суммой пространств E_0 и E_1 будем называть нормированное пространство $E_0 + E_1$ с нормой:

$$\|x\|_{E_0+E_1} = \inf_{\substack{x=x_0+x_1,\\ x_0\in E_0, x_1\in E_1}} \{\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}\}.$$

Несложно показать, что $E_0 \cap E_1$ и $E_0 + E_1$ являются банаховыми пространствами, то есть выполняются аксиомы нормы и условие полноты.

Промежуточным банаховым пространством E для пары (E_0, E_1) мы будем называть пространство, для которого выполняется вложение

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1$$

в указанном выше смысле.

Будем говорить, что T — непрерывный линейный оператор из пары $\overline{E} = (E_0, E_1)$ в пару $\overline{F} = (F_0, F_1)$, если сужения оператора T на пространства E_0 и E_1 непрерывно действуют из E_0 и E_1 в F_0 и F_1 соответственно, то есть:

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, x \in E_0,$$
$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_{E_1}, x \in E_1.$$

Через $L(\overline{E}, \overline{F})$ будем обозначать множество непрерывных операторов из пары $\overline{E}$ в пару $\overline{F}$. Множество $L(E_0, E_1)$ является банаховым пространством.

Пусть E и F — промежуточные пространства соответственно банаховых пар $\overline{E} = (E_0, E_1)$ и $\overline{F} = (F_0, F_1)$. Пусть $T : (E_0, E_1) \to (F_0, F_1)$ — непрерывный линейный оператор из $\overline{E}$ в $\overline{F}$. Набор банаховых пространств (E_0, E_1, E), состоящий из пространств E_0, E_1, образующих банахову пару, и пространства E, являющегося их промежуточным, называется банаховой тройкой.

Определение 2.3. *Тройка банаховых пространств (E_0, E_1, E) называется интерполяционной относительно тройки (F_0, F_1, F), если для любого оператора $T \in L(\overline{E}, \overline{F})$ его сужение $T|_E$ на промежуточное пространство E непрерывно действует из E в F. Другими словами, из неравенств*

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, x \in E_0,$$
$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_{E_1}, x \in E_1,$$

следует неравенство

$$\|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E, x \in E. \tag{2.1}$$

Если тройка (F_0, F_1, F) в определении интерполяционных троек совпадает с (E_0, E_1, E), то пространство E называют интерполяционным между пространствами банаховой пары E_0 и E_1.

Для всякой банаховой пары (E_0, E_1) простейшими интерполяционным пространствами являются $E_0 + E_1$ и $E_0 \cap E_1$, что непосредственно следует из следующей леммы.

Лемма 2.1. *[45, 4] Пусть (E_0, E_1) и (F_0, F_1) — банаховы пары и $T \in L(\overline{E}, \overline{F})$. Тогда T является ограниченным из $E_0 + E_1$ в $F_0 + F_1$, а его сужение $T|_{E_0 \cap E_1}$ — ограниченным из $E_0 \cap E_1$ в $F_0 \cap F_1$, при этом*

$$\|T\|_{E_0+E_1 \to F_0+F_1} \leqslant \|T\|_{L(\overline{E}, \overline{F})},$$
$$\|T\|_{E_0 \cap E_1 \to F_0 \cap F_1} \leqslant \|T\|_{L(\overline{E}, \overline{F})}.$$

Оказывается, постоянную M в неравенстве (2.1) можно выбрать одинаковой для всех операторов $T \in L(\overline{E}, \overline{F})$. Этим свойством удобно пользоваться для построения примеров банаховых троек, не обладающих свойством интерполяции.

Лемма 2.2. *[45, 4] Пусть тройка (E_0, E_1, E) является интерполяционной относительно тройки (F_0, F_1, F). Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\|T\|_{E \to F} \leqslant c\|T\|_{L(\overline{E}, \overline{F})}, \tag{2.2}$$

для всех $T \in L(\overline{E}, \overline{F})$.

Таким образом, для доказательства отсутствия интерполяционного свойства у тройки (E_0, E_1, E) по отношению к (F_0, F_1, F) достаточно привести пример последовательности операторов T_n таких, что $\|T_n\|_{F_i} \leqslant M_0\|x\|_{E_i}, x \in E_i (i = 0, 1)$, и при этом $\|T_n\|_{E \to F} \to \infty$

при $n \to \infty$. Такое рассуждение можно использовать для построения банаховых троек, не обладающих интерполяционным свойством (см, например, [45, с. 35]). Аналогичный подход будет в дальнейшем использован при исследовании вопроса о том, наследует ли тройка конусов интерполяционное свойство (см. п. 2.6).

2.2 Построение интерполяционных троек. Вещественный метод интерполяции

Пусть (E_0, E_1) — банахова пара. Определим на $E_0 + E_1$ для каждого $t > 0$ функционал $K(t; x; E_0, E_1)$:

$$K(t; x; E_0, E_1) = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in E_0, x_1 \in E_1}} \{\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}\}.$$

При каждом t функционал $K(t; x; E_0, E_1)$ определяет норму в $E_0 + E_1$, эквивалентную исходной норме. Действительно,

$$\min(1, t)(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}) \leqslant \|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1} \leqslant$$
$$\leqslant \max(1, t)(\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}).$$

Широкий класс интерполяционных троек можно построить следующим образом.

Зафиксируем $x \in E_0 + E_1$. Введем функционал Φ на множестве измеримых на $(0, +\infty)$ функций:

$$\Phi(h) = \int\limits_0^\infty \left((t^{-\theta} h(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далее всюду будем считать, что $0 < \theta < 1, 1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Обозначим через $K_\Phi(E)$ линейное многообразие всех $x \in E_0 + E_1$, удовлетворяющих неравенству

$$\Phi(K(t, x)) < \infty. \tag{2.3}$$

На $E_\Phi(E)$ введем норму

$$\|x\| = \Phi(K(t,x)).$$

Теорема 2.1. *Пусть* (E_0, E_1) *и* (F_0, F_1) *— банаховы пары. Пространства* $K_\Phi(E_0, E_1)$ *и* $K_\Phi(F_0, F_1)$ *являются промежуточными банаховыми пространствами пар* (E_0, E_1) *и* (F_0, F_1) *соответственно, и при этом банахова тройка* $(E_0, E_1, K_\Phi(E_0, E_1))$ *является интерполяционной относительно тройки* $(F_0, F_1, K_\Phi(F_0, F_1))$.

Доказательство можно найти в [51, с. 24]. В [4, с. 56] приведено доказательство для нормированных пространств.

2.3 Примеры интерполяционных троек пространств числовых последовательностей

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, $a : \Sigma \to \mathbb{R}$ — измеримая функция (вес) такая, что $a(t) > 0$ почти всюду. Через $L_p(a)$ будем обозначать соответствующее весовое пространство функций с нормой:

$$\|x\|_{L_p(a)} = \|ax\|_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}$$

Функция $h : M(\subset \mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}^+$ называется квазивогнутой, если существуют вогнутая функция $k : M(\subset \mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}^+$ и постоянная $c > 0$ такие, что

$$\frac{1}{c}k(t) \leqslant h(t) \leqslant ck(t), t \in M.$$

Если две неотрицательные функции h и k связаны этим неравенством, то они называются эквивалентными. При этом мы пишем $h \sim k$. Приведем критерий интерполяционности троек L_p-пространств.

Теорема 2.2. *[4, с. 153] Чтобы банахова тройка* $(L_p(a_0), L_p(a_1), L_p(a))$ *обладала интерполяционным свойством по отношению к банаховой* *тройке* $(L_p(b_0), L_p(b_1), L_p(b))$ *при всех* $1 \leqslant p < \infty$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$a \sim a_1 h\left(\frac{a_0}{a_1}\right), \quad b \sim b_1 h\left(\frac{b_0}{b_1}\right),$$

где $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *— квазивогнутая функция.*

Замечание 2.1. *Аналогичный критерий интерполяционности справедлив и для весовых пространств числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом. Именно, необходимым и достаточным условием интерполяционности тройки* $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ *относительно* $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$ *является выполнение условия*

$$a \sim a_1 h\left(\frac{a_0}{a_1}\right), \quad b \sim b_1 h\left(\frac{b_0}{b_1}\right), n \in \mathbb{N},$$

где $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *— некоторая квазивогнутая функция.*

В дальнейшем удобно будет пользоваться еще одним критерием.

Теорема 2.3. *Для того, чтобы банахова тройка* $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ *была интерполяционна относительно тройки* $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная* $C > 0$, *для которой выполняется соотношение:*

$$\frac{b(m)}{a(n)} \leqslant C \max\left\{\frac{b_0(m)}{a_0(n)}, \frac{b_1(m)}{a_1(n)}\right\}, m, n \in \mathbb{N}. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что банахова тройка $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ интерполяционна относительно банаховой тройки $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$. Пусть (e_n) — базис ортов в каждом из пространств тройки $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$, (f_n) — базис ортов в пространствах тройки $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$. Через (f'_n) обозначим координатные функционалы базиса (f_n). Согласно лемме 2.2 найдется такая постоянная $C > 0$, что для каждого оператора $T \in L(c_0(a_0), c_0(a_1)) \to L(c_0(b_0), c_0(b_1))$

$$\|T\|_{c_0(a)\to c_0(b)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|Te_n\|_{c_0(b)}}{\|e_n\|_{c_0(a)}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{m\in\mathbb{N}} |f'_m(T(e_n))| \frac{b(m)}{a(n)} \right\}$$

$$\leqslant C \max\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{m\in\mathbb{N}} |f'_m(T(e_n))| \frac{b_0(m)}{a_0(n)}\}, \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{m\in\mathbb{N}} |f'_m(T(e_n))| \frac{b_1(m)}{a_1(n)}\} \right\}.$$

Применяя это неравенство по отношению к оператору $T_{nm} = e'_n(e) f_m$, получим условие

$$\frac{b(m)}{a(n)} \leqslant C \max\left\{ \frac{b_0(m)}{b_0(n)}, \frac{b_1(m)}{b_1(n)} \right\}$$

для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Достаточность. Пусть справедливо неравенство (2.4) и T — непрерывный линейный оператор из пары $(c_0(a_0), c_0(a_1))$ в пару $(c_0(b_0), c_0(b_1))$. Последнее равносильно выполнению условий:

$$\|T\|_{c_0(a_0)\to c_0(b_0)} < C_0,$$

$$\|T\|_{c_0(a_1)\to c_0(b_1)} < C_1,$$

для некоторых постоянных C_0, C_1.

Умножим обе части неравенства (2.4) на $|f'_m(T(e_n))|$:

$$|f'_m(T(e_n))| \frac{b(m)}{a(n)} \leqslant C \max\left\{ |f'_m(T(e_n))| \frac{b_0(m)}{b_0(n)}, |f'_m(T(e_n))| \frac{b_1(m)}{b_1(n)} \right\}.$$

Переходя к верхним граням, будем иметь:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sup_{m\in\mathbb{N}} |f'_m(T(e_n))| \frac{b(m)}{a(n)} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C \max\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{m\in\mathbb{N}} |f'_m(T(e_n))| \frac{b_0(m)}{a_0(n)}\}, \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{m\in\mathbb{N}} |f'_m(T(e_n))| \frac{b_1(m)}{a_1(n)}\} \right\},$$

или

$$\|T\|_{c_0(a)\to c_0(b)} \leqslant C \max\{\|T\|_{c_0(a_0)\to c_0(b_0)}, \|T\|_{c_0(a_1)\to c_0(b_1)}\} =$$

$$= C \max\{C_0, C_1\},$$

и оператор $T : c_0(a) \to c_0(b)$ ограничен. $\square$

Замечание 2.2. *Данный критерий применим и к тройкам вида* $(l_1(a_0), l_1(a_1), l_1(a))$ *(см. [32, гл. 2, с. 120]). Доказательство совершенно аналогичное.*

2.4 Интерполяционные тройки конусов в банаховых пространствах. Постановка задачи

В данном пункте излагается постановка задачи теории интерполяции линейных операторов, ограниченных на конусах, вложенных в банаховы пространства, составляющих банахову пару.

Определение 2.4. *Подмножество* Q *линейного пространства* E *называется конусом, если* $x + y \in Q$ *для любых* $x, y \in Q$ *и* $\lambda x \in Q$ *для всех* $\lambda \geqslant 0$ *и* $x \in Q$.

Если Q_0 и Q_1 — конусы в E, то множества

$$Q_0 \cap Q_1 = \{x \in E : x \in Q_0, x \in Q_1\}$$

$$Q_0 + Q_1 = \{x \in E : x = x_0 + x_1, x_0 \in Q_0, x_1 \in Q_1\},$$

также являются конусами.

Конус Q в линейном пространстве E называется воспроизводящим, если линейная оболочка Q совпадает с E (то есть $\operatorname{span}\{Q\} = E$).

Пусть теперь E — нормированное пространство. Конус Q в нормированном пространстве E называется тотальным, если его линейная оболочка плотна в E (то есть $\overline{\operatorname{span}\{Q\}} = E$). Конус Q в нормированном пространстве E называется несплющенным, если существует константа $c > 0$ такая, что для любого $x \in E$ найдутся $y, z \in Q$ такие, что $x = y - z$ и $\|y\| \leqslant c\|x\|, \|z\| \leqslant c\|x\|$. Наименьшая из таких констант называется константой несплющенности конуса Q

и обозначается $\gamma(Q)$. Пусть E, F — нормированные пространства и $T : E \to F$ — линейный оператор, ограниченный на элементах несплющенного конуса $Q \subset E$:

$$\|Tx\|_F \leqslant C\|x\|_E, x \in Q.$$

Тогда оператор T ограничен на подпространстве $\mathrm{span}\{Q\}$. Действительно, пусть $x = y - z$, где $y, z \in Q$. Тогда:

$$\|Tx\|_F \leqslant \|Ty\|_F + \|Tz\|_F \leqslant C\|y\|_E + C\|x\|_E \leqslant 2 \cdot C\gamma(Q)\|x\|_E.$$

Приведем пример несплющенного конуса, который понадобится в дальнейшем. Пусть $B : E \to E$ — положительный оператор, действующий в банаховом пространстве числовых последовательностей с монотонной нормой E (см. [7]) и $\|B\| < 1$. Введем конус $Q(B) = \{x \in E^+, x \geqslant Bx\}$, где E^+ — конус положительных элементов в E в смысле теории векторных решеток. В данном случае в силу биективности B конус $Q(B)$ является воспроизводящим. Действительно, поскольку для любого $y \in \omega$ справедливо разложение $y = y_+ - y_-$, где

$$y_+ = \max(y(n), 0),$$

$$y_- = \max(-y(n), 0),$$

то

$$x = (I - B)^{-1}((I - B)x)_+ - (I - B)^{-1}((I - B)x)_-.$$

Ясно, что $(I - B)^{-1}((I - B)x)_\pm \in Q(B)$. При этом, учитывая, что $\|(I - B)^{-1}\| \leqslant 2, \|(I - B)\| \leqslant 2$ и $\|((I - B)x)_\pm\| \leqslant \|(I - B)x\|$ (поскольку норма монотонна), справедлива оценка:

$$\|(I - B)^{-1}((I - B)x)_\pm\| \leqslant 2\|(I - B)x\| \leqslant 4\|x\|, x \in E.$$

То есть конус $Q(B)$ является несплющенным с константой несплщенности, не превосходящей 4.

Перейдем к постановке задачи теории интерполяции линейных операторов, ограниченных на конусах. Обозначим через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ отделимые вещественные линейные топологические пространства, $\overline{E} = (E_0, E_1)$. Пусть $\overline{F} = (F_0, F_1)$ — банаховы пары такие, что $E_i \subset \mathcal{A}$, $F_i \subset \mathcal{B}$ и Q_i — конусы, вложенные в $E_i (i = 0, 1)$. Будем говорить, что $\overline{Q} = (Q_0, Q_1)$ — пара конусов в банаховой паре $\overline{E}$. Конус Q в пространстве $\mathcal{A}$ называется промежуточным для пары $\overline{Q}$, если

$$Q_0 \cap Q_1 \subset Q \subset Q_0 + Q_1.$$

Пусть банаховы пространства E и F являются промежуточными пространствами банаховых пар $\overline{E}$ и $\overline{F}$, причем тройка (E_0, E_1, E) является интерполяционной относительно тройки (F_0, F_1, F).

Рассмотрим линейный непрерывный оператор $T : E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1$ (непрерывный относительно топологий пространств $E_0 + E_1$ и $F_0 + F_1$). Обозначим через $L(\overline{Q}, \overline{F})$ множество операторов, для которых существуют постоянные M_0 и M_1 такие, что

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, x \in Q_0, \tag{2.5}$$

$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_{E_1}, x \in Q_1. \tag{2.6}$$

Множество операторов из $L(\overline{Q}, \overline{F})$, для которых справедливы оценки (2.5) и (2.6) будем обозначать через $L(\overline{Q}, \overline{F}; M_0, M_1)$. Постоянные M_0 и M_1 будем называть постоянными ограничения оператора T на паре (Q_0, Q_1).

Определение 2.5. *Пусть конус $Q \subset E$ является промежуточным для пары $\overline{Q}$. Если найдется постоянная $c = c(\overline{E}, \overline{F}, \overline{Q}, E, F, Q) > 0$ такая, что для всех $T \in L(\overline{Q}, \overline{F}; M_0, M_1)$ справедливо неравенство*

$$\|Tx\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E \text{ при } x \in Q, \tag{2.7}$$

то будем говорить, что тройка конусов (Q_0, Q_1, Q) обладает интерполяционным свойством по отношению к тройке (F_0, F_1, F).

Пусть теперь задано семейство конусов

$$\mathcal{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}},$$

где A — некоторое множество индексов.

Определение 2.6. *Пусть семейство $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям:*
1) для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ справедливы вложения: $Q_0^\alpha \subset E_0, Q_1^\alpha \subset E_1$, $Q^\alpha \subset E$, причем конус Q^α является промежуточным для пары (Q_0^α, Q_1^α);
2) для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ тройка $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ обладает интерполяционна относительно банаховой тройки (F_0, F_1, F).
В этом случае будем говорить, что семейство троек конусов $\mathcal{M}$ является интерполяционным по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

При этом постоянная $c = c(\overline{E}, \overline{F}, \overline{Q^\alpha} E, F, Q^\alpha)$ в неравенстве (2.7), вообще говоря, зависит от выбора тройки $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ из семейства $\mathcal{M}$. Поэтому имеет смысл ввести понятие равномерного интерполяционного свойства.

Определение 2.7. *Если для всех троек конусов из $\mathcal{M}$ может быть выбрана одинаковая интерполяционная постоянная $c = c(\overline{E}, \overline{F}, E, F)$, то будем говорить, что семейство конусов $\mathcal{M}$ обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к тройке банаховых пространств (F_0, F_1, F).*

Замечание 2.3. *Выше была представлена постановка задачи теории интерполяции линейных операторов, ограниченных на конусах, вложенных в банаховы пространства. Еще один способ обобщить результаты классической теории интерполяции — заменить банаховы пространства пространствами Фреше. При этом для заданной пары пространств Фреше аналогичным образом возникают понятия суммы, пересечения и промежуточного пространства. Отметим, однако, что содержательная теория возникает при более* *сильных ограничениях на операторы, действующих в крайних пространствах, чем ограниченность (см. [62]) Среди работ в этой области отметим результаты М.А. Шубарина [52]-[55], в которых рассмотрены условия интерполяционности линейных операторов, действующих в пространствах Кёте.*

2.5 Построение интерполяционных троек конусов

Если промежуточное пространство интерполяционной пары получено с помощью $K-$метода, интерполяционные тройки конусов можно строить с помощью аналога $K-$функционала Петре для конусов.

Определение 2.8. *K^Q-фунционалом пары конусов (Q_0, Q_1) банаховой пары (E_0, E_1) называют функционал, определяемый равенством:*

$$K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) = \inf_{\substack{x_0+x_1=x,\\ x_i\in Q_i, i=0,1}} (\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}), x \in Q_0 + Q_1.$$

Функционал $K^{\overline{Q}}$ играет ту же роль в теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах, что и K-функционал Петре в задачах интерполяции ограниченных линейных операторов. Непосредственно из определения следует, что $K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) \geqslant K(t, x; \overline{E})$ при всех $x \in Q_0 + Q_1$.

Если для промежуточного конуса Q пары конусов $\overline{Q}$ существует такая постоянная $c = c(\overline{E}, \overline{Q}, Q) > 0$, что

$$K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) \leqslant cK(t, x; \overline{E}) \quad \text{для всех} \quad x \in Q, \tag{2.8}$$

то будем писать $K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) \sim K(t, x, \overline{E})$ на Q. В этом случае говорят, что функционалы K и $K^{\overline{Q}}$ эквивалентны на Q. Приведем следующий критерий интерполяционности тройки конусов для случая, когда интерполяционные пространства получены с помощью вещественного $K-$метода.

Теорема 2.4. *Пусть промежуточные пространства банаховых троек* (E_0, E_1, E) *и* (F_0, F_1, F) *получены с помощью* K*-метода:* $E = K_\Phi(E_0, E_1)$,$F = K_\Phi(F_0, F_1)$. *Пусть* $\mathcal{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\}$ *— семейство троек конусов банаховой тройки* (E_0, E_1, E). *Если существует постоянная* $c = c(\overline{E}, \overline{F}) > 0$ *такая, что для любого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *и любого оператора* $T \in L(\overline{Q^\alpha}, \overline{F})$, *удовлетворяющего условиям* $\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i}$ *при* $x \in Q_i^\alpha$ $(i = 0, 1)$, *имеет место неравенство*

$$K(t, Tx; \overline{F}) \leqslant c(\overline{E}, \overline{F}) \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \overline{E}), x \in Q^\alpha, \tag{2.9}$$

то семейство $\mathcal{M}$ *обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к тройке* (F_0, F_1, F).

Доказательство. Пусть $E = K_\Phi(\overline{E})$, $F = K_\Phi(\overline{F})$. Тогда применив Φ-функционал (см. п. 3.2) к обеим частям (2.9), получим оценка:

$$\|Tx\|_F \leqslant \widetilde{c}(\overline{E}, \overline{F}, E, F) \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E$$

при $x \in Q^\alpha$. То есть семейство $\mathcal{M}$ обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к паре (F_0, F_1). □

С помощью функционала $K^{\overline{Q}}$ можно сформулировать следующее достаточное условие интерполяционности тройки (Q_0, Q_1, Q) относительно $(F_0, F_1, K(F))$.

Теорема 2.5. *Пусть банаховы тройки* (E_0, E_1, E), (F_0, F_1, F) *и семейство троек конусов* $\mathcal{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)\}$ *такие же, как в теореме 2.4. Если существует постоянная* $c = c(\overline{E}, \overline{F}) > 0$ *такая, что*

$$K^{\overline{Q^\alpha}}(t, x; \overline{E}) \leqslant cK(t, x; \overline{E}), x \in Q^\alpha,$$

то семейство $\mathcal{M}$ обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Доказательство. Для любого оператора $T \in L(\overline{Q^\alpha}, \overline{F})$ такого, что $\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i}$ при $x \in Q_i^\alpha$ $(i = 0, 1)$, имеем:

$$
\begin{aligned}
K(t, Tx; \overline{F}) &= \inf_{\substack{Tx = y_0 + y_1, \\ y_0 \in F_0, y_1 \in F_1}} \{\|y_0\|_{F_0} + t\|y_1\|_{F_1}\} \\
&\leqslant \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in E_0, x_1 \in E_1}} \{\|Tx_0\|_{F_0} + t\|Tx_1\|_{F_1}\} \\
&\leqslant \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in Q_0^\alpha, x_1 \in Q_1^\alpha}} \{\|Tx_0\|_{F_0} + t\|Tx_1\|_{F_1}\} \\
&\leqslant \max\{M_0, M_1\} \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in Q_0^\alpha, x_1 \in Q_1^\alpha}} \{\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}\} \\
&= \max\{M_0, M_1\} K^{\overline{Q^\alpha}}(t, x; \overline{E}) \\
&\leqslant c(\overline{E}, \overline{F}) \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \overline{E})
\end{aligned}
$$

для всех $x \in Q^\alpha$. Таким образом, выполнено неравенство (2.9), и равномерное интерполяционное свойство семейства $\mathcal{M}$ следует из теоремы 2.4. □

2.6 Пример тройки конусов, не наследующей интерполяционное свойство

Согласно приведенной выше постановке задачи теории интерполяции операторов, ограниченных на вложенных в банаховы пространства конусах, рассматриваются только те банаховы тройки, которые являются интерполяционными (в том числе относительно некоторых других банаховых троек). Естественным образом возникает вопрос, не переносится ли автоматически интерполяционное свойство банаховой тройки на тройку вложенных в нее конусов. В данном пункте приводится контрпример, показывающий, что это, вообще говоря, не так.

Пусть $E_0 = c_0(a_0), E_1 = c_0(a_1), E = c_0(a)$ и $F_0 = c_0(b_0), F_1 = c_0(b_1), F = c_0(b)$, причем

$$a_1(n) = 1, \quad a_0(n) = \frac{1}{n}, \quad a(n) = \frac{1}{n^\theta},$$

$$b_1(n) = n, \quad b_0(n) = 1, \quad b(n) = n^{1-\theta},$$

где $0 < \theta < 1$. Рассмотрим вогнутую функцию $h(t) = t^\theta$. Тогда

$$a(n) = a_1(n) h\left(\frac{a_0(n)}{a_1(n)}\right), \quad b(n) = b_1(n) h\left(\frac{b_0(n)}{b_1(n)}\right).$$

Из замечания 2.1 следует, что тройка $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ интерполяционна относительно тройки $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$. Рассмотрим следующее множество в ω :

$$C_1(\alpha) = \{x \in \omega^+ : \alpha(n)x(n) \in C_1\},$$

где $\alpha \in \omega^+$ и C_1 — множество невозрастающих последовательностей, ограниченных снизу некоторой положительной постоянной (своей для каждой последовательности). Пусть

$$C(\alpha) = C_1(\alpha) \cup \{0\}.$$

Ясно, что $C(\alpha)$ — конус в ω. Введем конус $Q = C(b_0) + C(b_1)$ и семейство операторов

$$(P_N x)(n) = \begin{cases} x(n), & n = 1, 2, \ldots, N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

Пусть $x \in Q \cap c_0^+(a_0)$. Поскольку $x \in Q$, то $x = x_0 + x_1$, где x_0 и x_1 — такие, что последовательности положительных чисел $(x_0(n))_{n=1}^\infty$ и $(n x_1(n))_{n=1}^\infty$ не возрастают. Следовательно, не возрастает и последовательность $(x(n))$. Несложно также видеть, что $Q \subset c_0^+(a_0)$ и потому $Q \cap c_0^+(a_0) = Q$. Из всего этого следует, что $\|x\|_{E_0} = \|x\|_{F_0} = x(1)$. Тогда

$$\|P_N x\|_{F_0} = (P_N x)(1) = x(1) = \|x\|_{E_0}.$$

Рассуждая аналогично для $x \in Q \cap c_0^+(a_1)$, получим

$$\|P_N x\|_{b_1} = \|x\|_{c_0(a_1)}.$$

Тогда каждый из операторов P_N ограничен на паре конусов $(Q \cap E_0; Q \cap E_1)$ с постоянными ограничения $M_0 = M_1 = 1$, то есть $P_N \in L(\overline{Q}, \overline{F}; 1, 1)$. Рассмотрим теперь элемент $e = \{1, 1, \dots\}$. Несложно убедиться, что $e \in Q \cap E$. Действительно, $e \in E$, поскольку $b(n)e(n) = \frac{1}{n^\theta} \to 0$, и $e \in C(b_0) \subset c(b_1) + c(b_0) = Q$. Однако, $\|P_N e\|_F = N^{1-\theta} \to \infty$ при $N \to \infty$. Таким образом, для данного случая из ограниченности оператора на паре конусов не следует ограниченность на промежуточном конусе, и интерполяционное свойство не наследуется.

2.7 Интерполяционные тройки конусов в весовых пространствах ограниченных числовых последовательностей

Пусть Ω — измеримое пространство, на σ-алгебре измеримых множеств которого задана мера μ. Пусть $S(\Omega, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых на $\mathbb{M}$ функций. Полуупорядоченность в $S(\Omega, \mu)$ задается обычным образом: $x \leqslant y (x, y \in S(\Omega, \mu))$ эквивалентно тому, что $x(t) \leqslant y(t)$ почти при всех $t \in \Omega$. Далее будут рассматриваться банаховы пространства $E \subset S(\Omega, \mu), E \neq \{\emptyset\}$. Максимум, минимум двух элементов из E и модуль определяются следующим образом:

$$\max(x, y)(t) = \max_{t \in \mathbb{M}}(x(t), y(t)), \quad \min(x, y)(t) = \min_{t \in \mathbb{M}}(x(t), y(t)),$$

$$|x|(t) = \max(x, 0)(t) + \min(y, 0)(t).$$

Пространство E будем называть идеальным банаховым пространством, если из условий $|x| \leqslant |y|$, где x – измеримая функция и $y \in E$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. Элемент $e \in E$ называют порядковой единицей в E, если для любого y найдется число $\lambda > 0$ такое, что $y \leqslant \lambda e$.

Все рассматриваемые ниже пространства являются идеальными банаховыми пространствами числовых последовательностей. Через e далее будем обозначать последовательность, состоящую из единиц:

$$e = (1, 1, ..., 1, ...).$$

Несложно видеть, что e является порядковой единицей в l_∞. Будем говорить, что множество $\mathcal{M} \subset E$ обладает свойством нижней полурешетки (или является нижней полурешеткой), если из условия $x, y \in \mathcal{M}$ следует, что $\min(x, y) \in \mathcal{M}$.

Ниже часто будет применяться тождество

$$x = \min(x, y) + (x - y)_+, \tag{2.10}$$

где x и y – элементы идеального банахова пространства числовых последовательностей. Оно, однако, справедливо и для более общего случая векторных решеток (см. [56, гл. 1, с. 4]).

Теорема 2.6. *Пусть E_0 — идеальное банахово пространство числовых последовательностей такое, что $l_\infty = E_1 \subset E_0$, и Q — конус в ω^+, обладающий свойством нижней полурешетки и содержащий единицу e. Тогда для банаховой пары $\overline{E} = (E_0, l_\infty)$ и пары конусов $\overline{Q} = (E_0^+, Q \cap l_\infty^+)$ имеет место совпадение $K-$ и $K^{\overline{Q}}-$функционалов:*

$$K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) = K(t, x; \overline{E})$$

при $x \in Q \cap E_0^+$.

Доказательство. Так как неравенство $K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) \geqslant K(t, x; \overline{E})$ очевидно, то достаточно показать, что $K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) \leqslant K(t, x; \overline{E})$ при

$x \in Q \cap E_0^+$. Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in Q \cap E_0^+$. Тогда существуют векторы x_0 и x_1 такие, что $x_0 + x_1 = x$, $x_i \in E_i^+$ и $K(t, x; \overline{E}) > \|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1} - \varepsilon$.

Положим $x_1' = \min(\|x_1\|_{l_\infty} e, x)$, $x_0' = (x - \|x_1\|_{l_\infty})_+$, где

$$(x_+)(n) = \begin{cases} x(n), & x(n) \geqslant 0, \\ 0, & x(n) < 0. \end{cases}$$

Тогда $x_1' \in Q \cap E_1^+$, $x_0 \in E_0^+$ и $x_0' + x_1' = x$ в силу тождества (2.10). Далее, $\|x_1'\|_{l_\infty} \leqslant \|x_1\|_{l_\infty} \|e\|_{l_\infty} = \|x_1\|_{l_\infty}$. Покажем, что $(x - \|x_1\|_{l_\infty} e)_+ \leqslant x - x_1$. Если $x(n) - \|x_0\|_{l_\infty} < 0$, то это очевидно, т. к. $x - x_1 = x_0 \geqslant 0$. Пусть $x(n) - \|x_1\|_{l_\infty} \geqslant 0$. Тогда $x(n) - \|x_1\|_{l_\infty} \leqslant x(n) - x_1(n)$, т. к. $x_1(n) \leqslant \|x_1\|_{l_\infty}$. Таким образом $(x - \|x_1\|_{l_\infty} e)_+ \leqslant x - x_1 = x_0$, а значит $\|x_0'\|_{E_0} \leqslant \|x_0\|_{E_0}$. Отсюда следует, что

$$K(t, x; \overline{E}) > \|x_0'\|_{E_0} + t\|x_1'\|_{E_1} - \varepsilon \geqslant \inf_{\substack{x_0 + x_1 = x, \\ x_0 \in E_0^+, \\ x_1 \in Q \cap E_1^+}} (\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}) - \varepsilon =$$

$$= K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) = K(t, x; \overline{E})$ при $x \in Q \cap E_0^+$. Теорема доказана.

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 2.7. *Пусть E_1 — идеальное банахово пространство такое, что $E_1 \subset E_0 = l_\infty$. Пусть Q — конус в ω, обладающий свойством нижней полурешетки, $Q \subset \omega^+$ и $e \in Q$. Пусть, далее, $\overline{E} = (l_\infty, E_1), \overline{Q} = (Q \cap l_\infty^+, E_1^+)$. Тогда*

$$K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E}) = K(t, x; \overline{E})$$

при $x \in Q \cap E_0^+$.

Следующие две теоремы непосредственно следует из совпадения функционалов $K^{\overline{Q}}(t, x; \overline{E})$ и $K(t, x; \overline{E})$ для рассмотренных выше случаев и теоремы 2.4.

Теорема 2.8. *[27] Пусть $E_1 = l_\infty, E_0$ — идеальное банахово пространство числовых последовательностей такое, что $E_1 \subset E_0$, (F_0, F_1) — некоторая банахова пара, $E = K_\Phi(E_0, E_1)$, $F = K_\Phi(F_0, F_1)$. Пусть $\mathcal{A}$ множество конусов в ω^+ такое, что любой конус $Q \in \mathcal{A}$ — нижняя полурешетка и $e \in Q$. Тогда семейство троек конусов*

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Теорема 2.9. *Пусть $E_0 = l_\infty, E_1$ — идеальное банахово пространство числовых последовательностей такое, что $E_1 \subset E_0$, (F_0, F_1) — некоторая банахова пара, $E = K_\Phi(E_0, E_1)$, $F = K_\Phi(F_0, F_1)$. Пусть $\mathcal{A}$ множество конусов в ω^+ такое, что любой конус $Q \in \mathcal{A}$ — нижняя полурешетка и $e \in Q$. Тогда семейство троек конусов*

$$\mathcal{L} = \{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

2.8 Интерполяционное свойство троек конусов в пространствах числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом

В данном параграфе будут сформулированы интерполяционные теоремы, аналогичные приведенным выше, для троек конусов вида $(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+)$ и $(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+)$, где E_i и E — пространства c_0 с весами, Q — конус со свойством нижней полурешетки. Поскольку в пространстве c_0 нет упорядоченной единицы, тождество (2.10) нельзя применить непосредственно. Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы оценки $K-$функционала проводить на специальным образом построенных конечномерных конусах Q_N, элементы которых аппроксимируют элементы основного конуса. Важную роль при этом играет лемма 2.3. Одновременно, чтобы воспользоваться тождеством (2.10), возникает необходимость расширить конус $Q_N = Q_{N,\delta}$ до конуса $\widetilde{Q}_N$, обладающего свойством нижней полурешетки, и, кроме того, содержащего вектор f_N, где f_N — вектор из c_0, аппроксимирующий единицу. Последовательность $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ выбирается так, чтобы она сходилась к вектору e поточечно. Такие конусы $\widetilde{Q}_N$ можно построить с помощью одномерных расширений конуса Q_N. При этом также потребуется продолжать некоторые из возникающих в доказательстве линейных функционалов на конус $\widetilde{Q}_N$ с сохранением верхних оценок. Это можно сделать, используя приведенную ниже версию теоремы Хана-Банаха для конусов(см. лемму 2.4). Для каждого конуса $\widetilde{Q}_N$, содержащего вектор f_N, аппроксимирующий единицу, можно применить тот же подход к оценке K–функционалов соответствующей пары конусов, зависящей от N, который применялся ранее, а затем в полученных таким путем неравенствах перейти к пределу при $N \to \infty$.

Через ω^{++} обозначим множество строго положительных последовательностей. Если E — некоторое идеальное банахово пространство, вложенное в ω, то мы полагаем $E^+ = E \cap \omega^+$, $E^{++} = E \cap \omega^{++}$. Через P_N далее обозначается проектор на линейную оболочку первых N координатных ортов:

$$(P_N x)(n) = \begin{cases} x(n), & 1 \leqslant n \leqslant N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

Лемма 2.3. *[27] Пусть $E = c_0$ и конус $Q \subset E^+$ обладает свойством нижней полурешетки. Пусть $T : E \to E$ — ограниченный* *линейный оператор такой, что*

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|, x \in Q.$$

Пусть $\delta > 0$ — фиксированное число, $N \in \mathbb{N}$ и $Q_{N,\delta}$ — конечномерный конус, определенный следующим образом:

$$Q_{N,\delta} = \{x = P_N y : y \in Q, \quad y(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)y\|\}.$$

Тогда конус $Q_{N,\delta}$ обладает свойствами:

1) конус $Q_{N,\delta}$ — нижняя полурешетка;

2) если $x \in Q_{N,\delta}$, то

$$\|Tx\| \leqslant M^{\delta}\|P_N x\|,$$

где $M^{\delta} = M + \delta(M + \|T\|)$;

3) если $x \in Q \cap E^{++}$, то $P_N x \in Q_{N,\delta}$ при всех $N > N(x, \delta)$.

Доказательство. 1) Пусть $x, y \in Q_{N,\delta}$. Тогда найдутся $x', y' \in Q$ такие, что $x = P_N x'$,$y = P_N y'$ и

$$x'(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)x'\|,$$
$$y'(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)y'\|.$$

Тогда, поскольку Q — нижняя полурешетка, то

$$\min(P_N x', P_N y') = P_N(\min(x', y')) \in P_N(Q). \tag{2.11}$$

При этом, поскольку норма в c_0 монотонна,

$$x'(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)\min(x', y')\|,$$

и

$$y'(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)\min(x', y')\|.$$

Следовательно,

$$\min(x', y')(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)\min(x', y')\|. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что $\min(x, y) \in Q_{N,\delta}$. 2) Пусть $x \in Q_{N,\delta}$ и $x = P_N y$. Имеем:

$$\begin{gathered}
\|Tx\| = \|TP_N y\| = \|T(y - (I - P_N)y)\| \leqslant \|Ty\| + \|T(I - P_N)y\| \\
\leqslant M\|P_N y\| + M\|(I - P_N)y\| + \|T\|\|(I - P_N)y\| \\
\leqslant M\|P_N x\| + \delta(M + \|T\|)y(1) \leqslant M\|P_N x\| + \delta(M + \|T\|)\|P_N x\| \\
= (M + \delta(M + \|T\|))\|P_N x\|.
\end{gathered}$$

Доказательство свойства 3) тривиально. □

Пусть L — линейное пространство, вложенное в нормированное пространство E, L_0 — подпространство в L коразмерности единица. Далее нам понадобится версия теоремы Хана-Банаха в которой утверждается существование мажорированного продолжения линейного функционала $f_0 : L_0 \to \mathbb{R}$, ограниченного на некотором конусе $Q_0 \subset L_0$, до линейного функционала $f : L \to \mathbb{R}$, ограниченного на конусе Q, являющемся одномерным расширением исходного конуса Q_0. Доказательство этой теоремы аналогично первому шагу доказательства классической теоремы Хана-Банаха о продолжении функционала, ограниченного на некотором подпространстве (см. [26]).

Лемма 2.4. *Пусть в вещественном векторном пространстве E задана полунорма p. Пусть L_0 — подпространство в E и $Q_0 \subset L_0$ — конус в L_0. Пусть f_0 — линейный функционал, определенный на подпространстве L_0 такой, что*

$$f_0(x) \leqslant p(x) \quad \textit{при} \quad x \in Q_0. \tag{2.13}$$

Пусть x_1 — *вектор в* E *такой, что* $x_1 \notin L_0$ *и*

$$L = \{x = y + \lambda x_1 : y \in L_0, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$Q = \{x = y + \lambda x_1 : y \in Q_0, \lambda \geqslant 0\}.$$

Тогда функционал f_0 *может быть продолжен до линейного функционала* f, *определенного на подпространстве* L, *для которого справедливо неравенство:*

$$f(x) \leqslant p(x) \quad \textit{при} \quad x \in Q. \tag{2.14}$$

Доказательство. Каждый элемент $x \in L$ может быть единственным образом представлен в виде:

$$x = x' + \lambda x_1, \quad x' \in L_0, \lambda \geqslant 0. \tag{2.15}$$

Если $x', x'' \in Q$, то с помощью (2.13) находим:

$$f_0(x') + f_0(x'') = f_0(x' + x'') \leqslant p(x' + x'')$$

$$\leqslant p((x' + x_1) + (-x_1 + x'')) \leqslant p(x' + x_1) + p(-x_1 + x''),$$

откуда

$$f_0(x'') - p(-x_1 + x'') \leqslant -f_0(x') + p(x_1 + x'),$$

и, следовательно (поскольку x' и x'' здесь произвольны),

$$c' = \sup_{x' \in Q_0} [f_0(x') - p(-x_1 + x')] \leqslant \inf_{x' \in Q_0} [-f_0(x') + p(x_1 + x')] = c''.$$

Пусть $c' \leqslant t_1 \leqslant c''$. Определим на L функционал f формулой

$$f(x) = f(\lambda x_1 + x') = \lambda t_1 + f_0(x'),$$

если $x = \lambda x_1 + x', x' \in Q$. Тогда f — линейный функционал, который является продолжением f_0 на подпространство L. Покажем, что имеет место (2.14) . Будем считать, что в представлении (2.15) $\lambda > 0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
f(x) = \lambda t_1 + f_0(x') &\leqslant \lambda c'' + f_0(x') \\
\leqslant \lambda \left[-f_0 \left(\frac{x'}{\lambda} \right) + p \left(x_1 + \frac{x'}{\lambda} \right) \right] &+ f_0(x') \\
= -f_0(x') + p(\lambda x_1 + x') + f_0(x') &= p(x).
\end{aligned}
$$

Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.4. *Существует достаточно много работ, в которых рассмотрены обобщения теоремы Хана-Банаха на случай функционалов, действующих на конусах (см. [77], [78], [82] и др.) Однако непосредственно использовать эти результаты представляется затруднительным, поскольку в них доказывается существование линейного функционала, действующего на упорядоченном конусе и отвечающего ряду ограничений, но не предполагается при этом, что он продолжает заранее определенный функционал, действующий на конусе, вложенном в исходный.*

Теорема 2.10. *Пусть* $E_i = c_0(a_i), F = c_0(b_i)\,(i = 0, 1), E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, *причем* $E_1 \subset E \subset E_0, F_1 \subset F \subset F_0$, *и тройка* (E_0, E_1, E) *обладает интерполяционным свойством по отношению к* (F_0, F_1, F). *Пусть* $\mathcal{A}$ — *множество конусов в* ω^+ *такое, что для каждого конуса* $Q \in \mathcal{A}$ *выполняются условия:*

1) Q — *нижняя полурешетка в* ω;

2) $Q \cap E_1^+$ — *тотальный конус в пространстве* ω.

Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}.$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к тройке (F_0, F_1, F).

Доказательство. Разобьем доказательство на два этапа. Сперва предположим, что каждый конус Q из семейства $\mathcal{A}$ удовлетворяет дополнительным ограничениям:

1$'$) $Q \cap E_1^+$ — тотальный конус в пространстве E_1;

2$'$) $Q \cap E_1^{++} \neq \{\emptyset\}$.

Без ограничений общности можно полагать, что

$$a_0(n) \leqslant a(n) \leqslant a_1(n) = 1, \quad b_0(n) \leqslant b(n) \leqslant b_1(n) = 1,$$

и то есть $F_1 = E_1 = c_0$.

Пусть N_0 — некоторое натуральное число. Положим

$$f_0(n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2N_0}, & n = 1, 2, ..., N_0; \\ 0, & n > N_0. \end{cases}$$

Так как $f_0 \in E_1$, найдется $f \in \operatorname{span}(Q \cap E_1^+)$ такой, что $\|f - f_0\|_{E_1} < \frac{1}{2N_0}$. Тогда

$$\|f - f_0\|_{E_1} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n) - f_0(n)| < \frac{1}{2N_0}.$$

Очевидно, для f выполнены условия:

1) $1 \leqslant f(n) \leqslant 1 + \frac{1}{N_0}, n = 1, 2, ..., N_0$;

2) $-\frac{1}{N_0} \leqslant f(n) \leqslant 1 + \frac{1}{N_0}$ при $n > N_0$.

Пусть $f = f^+ - f^-$, где $f^+, f^- \in Q \cap E_1^+$. Без ограничений общности можно считать, что $f^+, f^- \in E_1^{++}$ (иначе следует выбрать $h_0 \in Q \cap E_1^{++} \neq \{\emptyset\}$ и заменить f^+ и f^- на $\widetilde{f}^+$ и $\widetilde{f}^-$, где $\widetilde{f}^+ = f^+ + h_0$, $\widetilde{f}^- = f^- + h_0$).

Пусть $T : E_0 \to F_0$ — ограниченный линейный оператор такой, что

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_0, x \in E_0^+,$$

$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_1, x \in Q \cap E_1^+.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathrm{Ran}(T) \subset F_1$. Из теоремы о замкнутом графике следует, что сужение T на E_1 является ограниченным оператором из E_1 в F_1. Фиксируем положительное число $\delta > 0$ и некоторое $N \in \mathbb{N}$. Введем конус $Q_N = Q_{N,\delta}$:

$$Q_N = \{x \in P_N y : y \in Q \cap E_1^{++}, y(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)y\|_1\}.$$

Пусть $x \in Q_N$. Тогда, в силу леммы 2.4 справедливо неравенство:

$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1, x \in Q_N, \tag{2.16}$$

где $M_1^\delta = M_1 + \delta(M_1 + \|T\|_{E_1 \to F_1})$. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Из (2.16) следует, что

$$\pm(Tx)(m) \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1, x \in Q_N.$$

Пусть подпространство L_N является линейной оболочкой первых N координатных ортов:

$$L_N = \mathrm{span}\{e_i\}_{i=1}^N.$$

Рассмотрим линейный функционал $\varphi_m : L_N \to \mathbb{R}(m \in \mathbb{N})$,

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(x; T) = (Tx)(m), x \in L_N.$$

Тогда

$$\varphi_m(x) \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1, x \in Q_N.$$

Введем следующие конусы в E_1:

$$\hat{Q}_N = \{x = y - \lambda f^-, y \in Q_N, \lambda \geqslant 0\}, \quad \widetilde{Q}_N = \hat{Q}_N \cap \omega_N^+,$$

где

$$\omega_N^+ = \{x \in \omega : P_N x \geqslant 0\}.$$

Далее будем полагать что $N \geqslant \max\{N_0, N_1\}$, где $N_1 = N_1(f^-)$ такое натуральное число, что $P_{N_1}f^- \in\ Q_N$. Покажем, что конусы $\hat{Q}_N$ и $\widetilde{Q}_N$ обладают свойством нижней полурешетки. Действительно, пусть $u, v \in \hat{Q}_N$, $u = u_1 - \lambda_1 f^-$, $v = v_1 - \lambda_2 f^-$, где $u_1, v_1 \in Q_N$, и, для определенности, $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant 0$. Тогда

$$\min(u, v) = \min(u_1 - \lambda_1 f^-, v_1 - \lambda_2 f^-) =$$
$$= \min(u_1 + \lambda_2 f^- - \lambda_1 f^- - \lambda_2 f^-, v_1 - \lambda_2 f^-) =$$
$$= \min(u_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)P_N f^-, v_1) - \lambda_2 f^-.$$

Поскольку при $N > N_1, P_N f^- \in Q_N$, то $(\lambda_2 - \lambda_1)P_N f^- \in Q_N$. Так как, согласно лемме 2.3, Q_N — нижняя полурешетка, то

$$\min(u_1 +\ (\lambda_2\ -\ \lambda_1)P_N f^-, v_1) \in Q_N,$$

и

$$\min(u_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)P_N f^-, v_1) - \lambda_2 f^- \in \hat{Q}_N.$$

Так как ω_N^+, очевидно, обладает свойством нижней полурешетки, то и $\widetilde{Q}_N = \hat{Q}_N \cap \omega_N^+$ им также обладает. Воспользуемся леммой 2.4, продолжив функционал $\varphi_m(x; T)$ с L_N до линейного функционала $\widetilde{\varphi}_m(x) = \widetilde{\varphi}_m(x; T)$, определенного на подпространстве

$$\widetilde{L}_N = L_N + \{\lambda f^-\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

и ограниченного преднормой $M_1^\delta \|P_N x\|_1$:

$$\widetilde{\varphi}_m(x) \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1, x \in \hat{Q}_N.$$

Введем векторы $f_N = P_N f^+ - f^- = f_N^+ - f^-$, $\quad g_N = P_N f^- - f^- = f_N^- - f^-$. Очевидно, что f_N и g_N принадлежат конусу $\widetilde{Q}_N$, причем $g_N = (I - P_N)f_N$.

Рассмотрим множество:

$$K_N^+ = \{x = y - \lambda f^- : y \in L_N^+, \lambda \geqslant 0\} \cap \omega_N^+.$$

K_N^+, очевидно, является конусом в E_1, при этом $\widetilde{Q}_N \subset K_N^+$. Отношение частичного порядка на E_1, порождаемое конусом K_N^+, будем обозначать через $\preccurlyeq$, т.е. $y \preccurlyeq x (x, y \in E_1)$, если $x - y \in K_N^+$. Заметим, что $y \preccurlyeq x$ влечет $P_N y \leqslant P_N x$ поточечно.

Введем вспомогательный функционал $\Psi_m : \widetilde{Q}_N \to \mathbb{R}$:

$$\Psi_m(x) = \Psi_m(x; T) = \sup_{y \in \widetilde{Q}_N : y \preccurlyeq x} \widetilde{\varphi}_m(y; T), \quad x \in \widetilde{Q}_N.$$

Ниже мы убедимся в удобстве использования свойств этого вспомогательного функционала для вывода оценки $K(t, Tx; \overline{E})$ при $x \in Q_N$. Поскольку $0 \in \widetilde{Q}_N$, то $\Psi_m(x) \geqslant 0$, и из $x_1 \preccurlyeq x_2 (x_1, x_2 \in \widetilde{Q}_N)$ следует $\Psi_m(x_1) \leqslant \Psi_m(x_2)$. Пусть $F_i^{(m)} = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_i^{(m)})(i = 0, 1)$, где

$$\|x\|_1^{(m)} = |x|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \|x\|_0^{(m)} = |x| b_0(m), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что функционал $\Psi_m : E_1 \to F_1^{(m)}$ ограничен и выполняется неравенство:

$$\|\Psi_m(x)\|_1^{(m)} \leqslant M_1^\delta \|x\|_1, x \in \widetilde{Q}_N. \tag{2.17}$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $y \in \widetilde{Q}_N : y \preccurlyeq x$ и $\Psi_m(x) \leqslant \widetilde{\varphi}_m(y) + \varepsilon$. Поэтому:

$$\|\Psi_m(x)\|_1^{(m)} = \Psi_m(x) \leqslant \widetilde{\varphi}_m(y) + \varepsilon.$$

Из условия $y \preccurlyeq x$ следует, что $P_N y \leqslant P_N x$, причем $P_N y \geqslant 0$, так как $y \in \widetilde{Q}_N$. Поскольку $\widetilde{\varphi}_m(y) \leqslant M_1^\delta \|P_N y\|_1$ и $0 \leqslant P_N y \leqslant P_N x$, то $\|P_N y\|_1 \leqslant \|P_N x\|_1$ и$\|\Psi_m(x)\|_1^{(m)} \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1 + \varepsilon$.

Ввиду произвольности ε имеем:

$$\|\Psi_m(x)\|_1^{(m)} \leqslant M_1^\delta \|P_N x\|_1 \leqslant M_1^\delta \|x\|_1, x \in \widetilde{Q}_N,$$

и (2.17) верно.

Покажем, что если $x_1, x_2 \in \widetilde{Q}_N$ и $x_2 - x_1 \in L_N^+$, то

$$\|\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)\|_0^{(m)} \leqslant M_0\|x_2 - x_1\|_0. \qquad (2.18)$$

Из $x_2 - x_1 \in L_N^+$ следует, что x_1 и x_2 имеют следующий вид:

$$x_1 = u_1 - \lambda f^-, \quad x_2 = u_2 - \lambda f^-,$$

где $u_1, u_2 \in Q_N, \lambda \geqslant 0$. Так как $x_i \in \widetilde{Q}_N$, то $P_N x_i \geqslant 0$, откуда $u_i \geqslant \lambda P_N f^-, i = 1, 2$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $y' \in \widetilde{Q}_N : y' \preccurlyeq x_2$, и $\Psi_m(x_2) \leqslant \widetilde{\varphi}_m^+(y') + \varepsilon$. Представим y' в виде:

$$y' = v - \mu f^-,$$

где $v \in Q_N$ и $v \geqslant \mu P_N f^-$. Поскольку $y' \preccurlyeq x_2$, то $v \leqslant u_2, \mu \leqslant \lambda$. Пусть

$$y'' = \min(u_1, v) - \mu f^-.$$

Так как $u_1 \geqslant \lambda P_N f^- \geqslant \mu P_N f^-$ и $v \geqslant \mu P_N f^-$, то $\min(u_1, v) \geqslant \mu P_N f^-$, т.е. $P_N y'' \geqslant 0$ и $y'' \in \widetilde{Q}_N$. Тогда, так как $\min(u_1, v) \leqslant u_1, \mu \leqslant \lambda$, то

$$y'' \preccurlyeq x_1 = u_1 - \lambda f^-.$$

Следовательно, $\Psi_m(x_1) \geqslant \widetilde{\varphi}_m(y'')$. Так как $x_2 \succcurlyeq x_1$, то $\Psi_m(x_2) \geqslant \Psi_m(x_1)$. Тогда:

$$|\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)| = \Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{\varphi}_m(y') - \widetilde{\varphi}_m(y'') + \varepsilon \leqslant |\widetilde{\varphi}_m(y') - \widetilde{\varphi}_m(y'')| + \varepsilon.$$

Поэтому $|\Psi_m(x_2) - \Psi_m(x_1)| \leqslant |\widetilde{\varphi}_m(y') - \widetilde{\varphi}_m(y'')| + \varepsilon = |\widetilde{\varphi}_m(y' - y'')| + \varepsilon$. С другой стороны,

$$y' - y'' = v - \mu f^- - (\min(u_1, v) - \mu f^-) = v - \min(u_1, v) = (v - u_1)_+.$$

Так как $v \leqslant u_2$, то $(v - u_1)_+ \leqslant (u_2 - u_1)_+ \leqslant |u_2 - u_1|$. Следовательно, $(v - u_1)_+ \in L_N^+$, и $\widetilde{\varphi}_m(y' - y'') = \varphi_m(y' - y'') = (T(y' - y''))(m)$ (поскольку сужение $\widetilde{\varphi}_m$ на L_N совпадает с φ_m) и

$$b_0(m)|\Psi(x_2) - \Psi(x_1)|$$

$$\leqslant b_0(m)|(T(y'-y'')(m)|+b_0(m)\varepsilon$$
$$\leqslant M_0\|y'-y''\|_0+b_0(m)\varepsilon.$$

Так как $y'-y''=(v-u_1)_+\leqslant|u_2-u_1|$, то

$$b_0(m)|\Psi_m(x_2)-\Psi_m(x_1)|\leqslant M_0\|u_2-u_1\|_0+b_0(m)\varepsilon.$$

Так как $x_2-x_1=u_2-u_1$ то $\|u_2-u_1\|_0=\|x_2-x_1\|_0$. Тогда

$$b_0(m)|\Psi_m(x_2)-\Psi_m(x_1)|_0\leqslant M_0\|x_2-x_1\|_0+b_0(m)\varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем:

$$\|\Psi_m(x_2)-\Psi_m(x_1)\|_0^{(m)}=b_0(m)|\Psi_m(x_2)-\Psi_m(x_1)|_0\leqslant M_0\|x_2-x_1\|_0.$$

Справедливость свойства доказана. Из (2.17), (2.18) легко получить оценку:

$$K(t,\Psi_m(x);\overline{F^{(m)}})\leqslant\max\{M_0,M_1^\delta\}K^{(L_N^+,\widetilde{Q}_N)}(t,x;\overline{E}),x\in\widetilde{Q}_N,\quad(2.19)$$

где

$$K^{(L_N^+,\widetilde{Q}_N)}(t,x;\overline{E})=\inf_{\substack{x=x_0+x_1,\\x_0\in L_N^+,\\x_1\in\widetilde{Q}_N}}(\|x_0\|_0+t\|x_1\|_1).$$

Действительно,

$$K(t,\Psi_m(x);\overline{F^{(m)}})=\inf_{\Psi_m(x)=y_0+y_1}(\|y_0\|_0^{(m)}+t\|y_1\|_1^{(m)})$$
$$\leqslant\inf_{\substack{x'\in\widetilde{Q}_N:\\x-x'\in L_N^+}}(\|\Psi_m(x)-\Psi_m(x')\|_0^{(m)}+t\|\Psi_m(x')\|_1^{(m)})$$
$$\leqslant\max\{M_0,M_1^\delta\}\inf_{\substack{x'\in\widetilde{Q}_N:\\x-x'\in L_N^+}}(\|x-x'\|_0+t\|x'\|_1)$$
$$=\max\{M_0,M_1^\delta\}\inf_{\substack{x=x_0+x_1,\\x_0\in L_N^+,\\x_1\in\widetilde{Q}_N}}(\|x_0\|_0+t\|x_1\|_1)$$

$$= \max\{M_0, M_1^\delta\} K^{(L_N^+, \widetilde{Q}_N)}(t, x; \overline{E}).$$

Так как $\Psi_m(x) \leqslant \Psi_m(y)$ при $x \preccurlyeq y (x, y \in \widetilde{Q}_N)$, и K-функционал — монотонная норма, то оценку (2.19) можно усилить:

$$K(t, \Psi_m(x); \overline{F^{(m)}}) \leqslant \max\{M_0, M_1^\delta\} L_N(t, x; \overline{E}), \tag{2.20}$$

где

$$L_N(t, x; \overline{E}) = \inf_{\substack{y \succcurlyeq x, \\ y \in \widetilde{Q}_N}} K^{(L_N^+, \widetilde{Q}_N)}(t, y; \overline{E}).$$

Оценим теперь функционал $L_N(t, x; \overline{E})$ через K-функционал Петре банаховой пары $\overline{E}$ при $x \in Q_N$. При этом мы будем опираться на монотонность функционала $L_N(t, x; \overline{Q})$ в смысле введенного отношения порядка. Для получения оценки $K(t, Tx; \overline{F^{(m)}})$ при $x \in Q_N$ достаточно оценить $L_N(t, x; \overline{E})$ также для $x \in Q_N \subset \widetilde{Q}_N \cap L_N^+$. Пусть $x \in Q_N$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $x = x_0 + x_1$ — оптимальное ε-разложение для K-функционала $K(t, x; \overline{E})$, то есть

$$K(t, x; \overline{E}) \geqslant \|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 - \varepsilon.$$

Введем вектор $x' = x + \|x_1\|_1 g_N$. Тогда $x' \in \widetilde{Q}_N$ и $x \preccurlyeq x'$, откуда

$$L_N(t, x; \overline{E}) \leqslant K^{(L_N^+, \widetilde{Q}_N)}(t, x'; \overline{E}).$$

Используя тождество $x = (x - y)_+ + \min(x, y)$, получим

$$x' = (x' - \|x_1\|_1 f_N)_+ + \min(x', \|x_1\|_1 f_N).$$

Обозначим $x_0' = (x' - \|x_1\|_1 f_N)_+, x_1' = \min(x', \|x_1\|_1 f_N)$. Покажем, что $x_0' \in L_N^+$. Действительно, так как $x \in Q_N \subset L_N^+$, то

$$0 \leqslant x_0' = (x + \|x_1\|_1 g_N - \|x_1\|_1 f_N)_+ = (x - \|x_1\|_1 (P_N f^+ - P_N f^-))_+$$

$$= (P_N x - \|x_1\|_1 (P_N f^+ - P_N f^-))_+ = P_N(x - \|x_1\|_1 (f^+ - f^-))_+,$$

следовательно, $x_0' \in L_N^+$. Так как $\widetilde{Q}_N$ — нижняя полурешетка, то $x_1' \in \widetilde{Q}_N$ и

$$L_N(t,x;\overline{E}) \leqslant K^{(L_N^+,\widetilde{Q}_N)}(t,x';\overline{E}) \leqslant \|x_0'\|_0 + t\|x_1'\|_1. \tag{2.21}$$

Получим оценки норм векторов x_0', x_1'. Напомним, что мы рассматриваем $N > \max\{N_0, N_1\}$. При $n > N$ имеем: $x_0'(n) = 0$. Пусть теперь $0 \leqslant n \leqslant N$. Если $0 \leqslant n \leqslant N_0$, то $f_N(n) \geqslant 1$ и $g_N(n) = 0$, следовательно,

$$x_0'(n) = (x(n) + \|x_1\|_1 g_N(n) - \|x_1\|_1 f_N(n))_+$$
$$\leqslant (x(n) - \|x_1\|_1)_+ \leqslant \max(x_0(n), 0).$$

Следовательно, $x_0'(n) \leqslant x_0(n)$ при $n = 1, 2, ...N_0$.

Если $N_0 < n \leqslant N$, то $g_N(n) = 0, -\frac{1}{N_0} \leqslant f_N(n) < 1 + \frac{1}{N_0}$,

$$x_0'(n) = (x + \|x_1\|_1 g_N(n) - \|x_1\|_1 f_N(n))_+$$

$$= (x - \|x_1\|_1 f_N(n))_+ \leqslant x(n) + \frac{1}{N_0}\|x_1\|_1.$$

Ранее было показано, что $x_0' \in L_N^+$. Таким образом:

$$\|x_0'\|_0 \leqslant \|x_0\|_0 + \|(I - P_{N_0})x\|_0 + \frac{1}{N_0}\|x_1\|_1.$$

Далее, $0 \leqslant x_1'(n) \leqslant \|x_1\|_1 f_N(n) \leqslant (1 + \frac{1}{N_0})\|x_1\|_1$, при $1 \leqslant n \leqslant N$. Если $n > N$, то, с учетом $x \in Q_N$,

$$x_1'(n) = \min(x(n) + \|x_1\|_1 g_N, \|x_1\|_1 f_N(n))$$

$$= \min(-f^-(n)\|x_1\|_1, -f^-(n)\|x_1\|_1)$$
$$= -\|x_1\|_1 f^-(n),$$

откуда следует, что

$$\|(I - P_N)x_1'\|_1 \leqslant \|x_1\|_1 \|(I - P_N)f^-\|_1.$$

Следовательно, $\|x_1'\|_1 \leqslant (1+\frac{1}{N_0})\|x_1\|_1 + \|x_1\|_1\|(I-P_N)f^-\|_1$. Обозначим: $\mu_N = \|(I-P_N)f^-\|_1$. Ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty}\mu_N = 0$. Так как $0 \leqslant x_1 \leqslant x$, то $\|x_1\|_1 \leqslant \|x\|_1$ и

$$\|x_1'\|_1 \leqslant \left(1+\frac{1}{N_0}\right)(\|x_1\|_1 + \mu_N\|x\|_1)\,.$$

Из (2.21) получаем:

$$L_N(t,x;\overline{E}) \leqslant \|x_0'\|_0 + t\|x_1'\|_1 \leqslant \|x_0\|_0 + \|(I-P_{N_0})x\|_0$$
$$+(t(1+\frac{1}{N_0})+\frac{1}{N_0})\|x_1\|_1 + t(1+\frac{1}{N_0})\mu_N\|x\|_1.$$

Используя (2.20) при $x \in Q_N$ получим цепочку неравенств:

$$K(t,\Psi_m(x);\overline{F^{(m)}}) \leqslant \max\{M_0, M_1^\delta\}L_N(t,x;\overline{E})$$
$$\leqslant \max\{M_0,M_1^\delta\}(\|x_0\|_0 + (t(1+\frac{1}{N_0})+\frac{1}{N_0})\|x_1\|_1$$
$$+\|(I-P_{N_0})x\|_0 + t(1+\frac{1}{N_0})\mu_N\|x\|_1)$$
$$\leqslant \left((1+\frac{c(t)}{N_0}\right)\max\{M_0,M_1^\delta\}\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1$$
$$+\|(I-P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N\|x\|_1)$$
$$\leqslant \left(1+\frac{c(t)}{N_0}\right)\max\{M_0,M_1^\delta\}(K(t,x;\overline{E})$$
$$+\varepsilon + \|(I-P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N\|x\|_1),$$

где $c(t) = 1+\frac{1}{t}$. Таким образом, для $x \in Q_N$ в силу произвольности ε имеем:

$$K(t,\Psi_m(x);\overline{F^{(m)}}) \leqslant \left(1+\frac{c(t)}{N_0}\right)\max\{M_0,M_1^\delta\}(K(t,x;\overline{E})$$
$$+\|(I-P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N\|x\|_1). \quad (2.22)$$

Рассмотрим далее два случая.

I случай:$(Tx)(m) \geqslant 0$. Тогда $\widetilde{\varphi}_m(x) = \varphi_m(x) = (Tx)(m)$ и

$$\Psi_m(x) = \sup_{\substack{y \in \widetilde{Q}_N: \\ y \preccurlyeq x}} \widetilde{\varphi}_m(y) \geqslant \widetilde{\varphi}_m(x) = \varphi_m(x) = (Tx)(m) = |(Tx)(m)|.$$

Простое вычисление приводит к равенству:

$$K(t, \Psi_m(x); \overline{F^{(m)}}) = \inf_{\substack{y_i \in \mathbb{R}: \\ y_0 + y_1 = \Psi_m(x)}} (|y_0| b_0(m) + t|y_1|)$$
$$= |\Psi_m(x)| \min(b_0(m), t). \quad (2.23)$$

Следовательно,

$$|(Tx)(m)| \min(b_0(m), t)$$
$$\leqslant |\Psi_m(x)| \min(b_0(m), t) = K(t, \Psi_m(x); \overline{F^{(m)}})$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{c(t)}{N_0}\right) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \overline{E})$$
$$+ \|(I - P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N \|x\|_1). \quad (2.24)$$

II случай: $(Tx)(m) < 0$. Тогда $(Sx)(m) > 0$, где $Sx = -Tx$. Повторяя те же выкладки для функционала $\Psi'_m(x) = \Psi_m(x; S)$, где оператор $S = -T$, получим:

$$|(Tx)(m)| \min(b_0(m), t) = (Sx)(m) \min(b_0(m), t)$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{c(t)}{N_0}\right) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \overline{E}) + \|(I - P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N \|x\|_1).$$

при $x \in Q_N$. Так как m здесь произвольное, то

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |(Tx)(m)| \min(b_0(m), t) \leqslant \left(1 + \frac{c(t)}{N_0}\right) \max\{M_0, M_1^\delta\}(K(t, x; \overline{E})$$
$$+ \|(I - P_{N_0})x\|_0 + t\mu_N \|x\|_1),$$

или

$$K(t,Tx;\overline{F}) \leqslant \left(1+\frac{c(t)}{N_0}\right)\max\{M_0,M_1^\delta\}(K(t,x;\overline{E})$$
$$+\|(I-P_{N_0})x\|_0+t\mu_N\|x\|_1). \quad (2.25)$$

Выберем теперь произвольно $x \in Q \cap E_1^{++}$. Тогда $P_N x \in Q_N$ при достаточно большом N. Считая, что такое N выбрано, получим:

$$K(t,T(P_N x);\overline{F}) \leqslant \left(1+\frac{c(t)}{N_0}\right)\max\{M_0,M_1^\delta\}(K(t,P_N x;\overline{E})+$$
$$+\|(I-P_{N_0})P_N x\|_0+t\mu_N\|P_N x\|_1)), x \in Q \cap E_1^{++}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая непрерывность операторов P_N,$I - P_N$ и K-функционала, для $x \in Q \cap E_1^{++}$ будем иметь:

$$K(t,Tx;\overline{F}) \leqslant \left(1+\frac{c(t)}{N_0}\right)\max\{M_0,M_1^\delta\}(K(t,x;\overline{E})+\|(I-P_{N_0})x\|_0).$$

Переходя еще раз к пределу при $N_0 \to \infty$, будем иметь:

$$K(t,Tx;\overline{F}) \leqslant \max\{M_0,M_1^\delta\}K(t,x;\overline{E}), x \in Q \cap E_1^{++}.$$

Поскольку $M_1^\delta = M_1+\delta(M_1+\|T\|_{E_1\to F_1})$, то, в силу произвольности δ, получим:

$$K(t,Tx;\overline{F}) \leqslant \max\{M_0,M_1\}K(t,x;\overline{E}), x \in Q \cap E_1^{++} \quad (2.26)$$

Предположим теперь, что $x \in Q \cap E_1^+$. Выберем произвольно $g_0 \in Q \cap E_1^{++}$ и рассмотрим вектор $x_\varepsilon = x+\varepsilon g_0 \in Q \cap E_1^{++}$. Для вектора x_ε неравенство (2.26) выполняется, поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим, что оно выполняется для всех $x \in Q \cap E_1^+$.

Наконец, перейдем к случаю, когда $x \in Q \cap E^+$. Пусть $z_0 \in Q \cap E_1^{++}$. Вектор $x_N = \min(x, Nz_0)$ принадлежит $Q \cap E_1^+$, так как

$0 \leqslant x_N \leqslant Nz_0 \in E_1^+$. Очевидно, что $x_N(n) \to x(n)$ при $N \to \infty$ (поскольку $z_0(n) > 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$). Так как при этом $x_N \leqslant x$, то $x_N \to x$ в топологии пространства E_0. Переходя к пределу по N в неравенстве

$$K(t, Tx_N; \overline{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x_N; \overline{E})$$

получим

$$K(t, Tx; \overline{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \overline{E}), x \in Q \cap E^+.$$

Пусть теперь образ оператора T не вложен пространство E_1. Рассмотрим оператор $T_N = P_N T, N \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathrm{Ran}(T_N) \subset E_1$ и

$$K(t, T_N x; \overline{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \overline{E}), x \in Q \cap E^+.$$

Так как $T_N x \to Tx$ при $N \to \infty$ в топологии постранства F_0, то из общих свойств K-функционала Петре следует, что

$$K(t, Tx; \overline{F}) \leqslant \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \overline{E}), x \in Q \cap E^+.$$

Как показано выше, если x — финитный вектор, то из полученной оценки для K–функционалов следует требуемое интерполяционное неравенство для оператора T. Поэтому, как это уже делалось выше, перейдем к оценке на конусе, аппроксимирующем $Q \cap E^+$ и состоящем из финитных векторов. Пусть

$$K_{N,\delta} = \{x = P_N y : y \in Q \cap E^{++}, y(1) \geqslant \frac{1}{\delta} \|(I - P_N)y\|_0\}.$$

Повторяя те же оценки, что в доказательстве теоремы 3.1, получим:

$$K(t, Tx; \overline{F}) \leqslant M^\delta K(t, x; \overline{E}), \quad x \in K_{N,\delta},$$

где $M^\delta = M + \delta(M + \|T\|_{E_0 \to F_0})$, $M = \max\{M_0, M_1\}$. Из этой оценки для K-функционалов следует интерполяционное неравенство:

$$\|Tx\|_F \leqslant cM^\delta \|x\|_E, \quad x \in K_{N,\delta},$$

где E и F—промежуточные весовые интерполяционные пространства, определяемые квазивогнутой функцией h, а положительная постоянная c зависит только от пространств $E_i, F_i (i = 0, 1), E$ и F. Поэтому при достаточно больших N справедливо неравенство:

$$\|TP_N x\|_F \leqslant cM^\delta \|P_N x\|_E, \quad x \in Q \cap E^{++}.$$

Так же, как и ранее, переходя сначала к пределу при $N \to \infty$, а затем при $\delta \to 0$ (при фиксированном $x \in Q \cap E^{++}$), а затем аппроксимируя вектор из $Q \cap E^+$ последовательностью векторов из $Q \cap E^{++}$, получим требуемое неравенство:

$$\|Tx\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E, \quad x \in Q \cap E^+.$$

Итак, утверждение теоремы было доказано для случая, когда каждый конус Q из семейства $\mathcal{A}$ удовлетворяет более жестким условиям $1')$ и $2')$ по сравнению с теми, что указаны в условиях теоремы. Перейдем к случаю, когда выполнены исходные ограничения, то есть когда каждый конус $Q \in \mathcal{A}$ удовлетворяет условиям:

1) Q — нижняя полурешетка в ω;

2) $Q \cap E_1^+$ — тотальный конус в пространстве ω.

Пусть $T : E_0 \to F_0$ и

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, x \in E_0^+,$$
$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_{E_1}, x \in Q \cap E_1^+.$$

Сперва рассмотрим случай, когда $Im(T) \subset F_1$. Зафиксируем натуральное число N и некоторое число $\varepsilon > 0$. Введем конус $Q^{(N)}$, состоящий из элементов $x = P_N y$, где $y \in Q \cap E_1^+$ такой, что $y(1) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \|(I - P_N)y\|_{E_1}$. Тогда для всех $x \in Q^{(N)}$

$$\|Tx\|_{F_1} = \|TP_N y\|_{F_1} \leqslant \|Ty\|_{F_1} + \|T(I - P_N)y\|_{F_1}$$

$$\leqslant M_1\|y\|_{E_1} + \|T\|_{E_1\to F_1}\|(I-P_N)y\|_{E_1}$$

$$\leqslant M_1\|P_Ny\|_{E_1} + M_1\|(I-P_N)y\|_{E_1} + C_1\|(I-P_N)y\|_{E_1}$$

$$\leqslant M_1(1+\varepsilon C_2)\|P_Ny\|_{E_1}.$$

Так как $Tx = TP_Nx$, то

$$\|TP_Nx\|_{F_1} \leqslant M_1^\varepsilon\|x\|_{E_1}, x \in Q^{(N)}, \tag{2.27}$$

где $M_1^\varepsilon = M_1(1+\varepsilon C_2)$.

Далее,

$$\|TP_Nx\|_{F_0} \leqslant M_0\|P_Nx\|_{E_0} \leqslant M_0\|x\|_{E_0}, \tag{2.28}$$

то есть

$$\|TP_Nx\|_{F_0} \leqslant M_0\|x\|_{E_0}, x \in E^+.$$

Введем конус:

$$\widetilde{Q}^{(N)} = Q^{(N)} + (I-P_N)E_1^+.$$

Пусть $T_N = TP_N$. Для всех $x \in \widetilde{Q}^{(N)}$ справедливо представление:

$$x = x' + x'',$$

где $x' \in Q^{(N)}$ и $P_Nx'' = 0(x', x'' \in E_1^+)$. Тогда

$$\|T_Nx\|_{F_1} = \|T_Nx'\|_{F_1} \leqslant M_1^\varepsilon\|x'\|_{E_1} \leqslant M_1^\varepsilon\|x\|_{E_1}, x \in \widetilde{Q}^{(N)}.$$

Итак,

$$\|T_Nx\|_{F_1} \leqslant M_1^\varepsilon\|x\|_E, x \in \widetilde{Q}^{(N)}. \tag{2.29}$$

Очевидно, что конус $\widetilde{Q}^{(N)}$ обладает свойством нижней полурешетки. Так как конус $Q \cap E_1^+$ — тотальный конус в ω, то $P_N(Q\cap E_1^+)$ является тотальным конусом в $L_N = P_N\omega = \{x = P_Ny : y \in \omega\}$. Поскольку L_N конечномерно, всякое всюду плотное в нем множество совпадает с L_N. Следовательно, $\mathrm{span}(P_N(Q\cap E_1^+))$ совпадает с L_N, его размерность равна N и $P_N(Q \cap E_1^+)$ является воспроизводящим в L_N.

Конус $\widetilde{Q}^{(N)}$ содержит строго положительный вектор, поскольку является воспроизводящим в E_1. Таким образом, условия $1'$) и $2'$), следовательно, как уже было доказано,

$$\|T_N x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x\|_E, x \in \widetilde{Q}^{(N)}.$$

Так как $Q^{(N)} \subset \widetilde{Q}^{(N)}$, то

$$\|T_N x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x\|_E, x \in Q^{(N)}.$$

Пусть $x \in Q \cap E_1^+$ и $x(1) > 0$. Тогда $x_N = P_N x \in Q^{(N)}$ при достаточно больших N. Так как $T_N x = T P_N x_N = T x_N$, то

$$\|T x_N\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x_N\|_E.$$

Если $x_N \to x$ в E, то

$$\|T x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x\|_E.$$

Пусть x — произвольный вектор из $Q \cap E_1^+$ и x_1 — вектор из $Q \cap E_1^+$ такой, что $x_1(n) > 0$. Ясно, что $\min(x, kx_1) \in Q \cap E_1^+$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N$. Пусть $x_k = \min(x, kx_1) + \frac{1}{k} x_1 \in Q \cap E_1^+$. Ясно, что $P_N x_k \to P_N x$ при $k \to \infty$ и $x_k(1) > 0$. Тогда, как было показано,

$$\|T x_k\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x_k\|_E.$$

Следовательно,

$$\|T P_N x_k\|_F \leqslant \|T x_k\|_F + \|T(I - P_N) x_k\|_F \leqslant$$
$$\leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x_k\|_E + \|T\| (\|(I - P_N) x\|_E + \frac{1}{k} \|x_1\|_E.$$

Поскольку оператор $T : E \to F$ непрерывен, то, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим:

$$\|T P_N x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|P_N x\|_E + \|(I - P_N) x\|_E,$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, получим:

$$\|Tx\|_F \leqslant c\max\{M_0, M_1\}\|x\|_E, x \in Q \cap E^+.$$

Теорема доказана. $\square$

Сформулируем симметричную теорему о равномерном интерполяционном свойстве для семейств троек конусов $(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+)$. Её доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 2.10.

Теорема 2.11. *Пусть*

$$E_i = c_0(a_i),\ F = c_0(b_i)\,(i = 0, 1), E = \ c_0(a),\ F = c_0(b),$$

причем $E_1 \subset E \subset E_0, F_1 \subset F \subset E_0$. Пусть банахова тройка (E_0, E_1, E) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F). Пусть $\mathcal{A}$ — множество конусов в ω^+ такое, что для каждого конуса $Q \in \mathcal{A}$ выполняются условия:

1) Q — нижняя полурешетка в ω;

2) $Q \cap E_0^+$ — тотальный конус в пространстве ω.

Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{L} = \{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}.$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Глава 3

Существование базисов в дополняемых подпространствах ядерных пространств Кёте из классов (d_1) и (d_2) с правильным базисом

В этой главе содержатся основные результаты работы. В п. 3.1 вводятся необходимые обозначения и преобразования, необходимые для доказательства основных результатов, представленных в пп. 3.3-3.4. В п. 3.2 дается подробное объяснение необходимости расширения постановки теории интерполяции линейных операторов для решения задачи о существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте. В п. 3.5 представлено следствие полученных результатов, опирающееся на результаты В.П. Кондакова [33].

3.1 Эквивалентные системы норм в пространствах Кёте из классов (d_1) и (d_2)

Введем обозначения и совершим некоторые преобразования, пользуясь приведенными в первой главе свойствами.

Пусть E — ядерное пространство Кёте $l_1(a_r(n))$ с правильной матрицей. Таким образом, учитывая следствие 1.3, без ограничения общности можем полагать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} < +\infty \tag{3.1}$$

и

$$\frac{a_r(m)}{a_{r+1}(m)} \leqslant \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)}, \text{ при } \ m > n, \tag{3.2}$$

для всех r.

Напомним, что пространство Кёте E относится к классу (d_i), $(i = \ 1, 2)$, если

$$\forall r \ \exists s_1 = s_1(r), \ c = c(r) > 0 : a_r^2(n) \leqslant c(r) a_1(n) a_{s_1(r)}(n), i = 1,$$

$$\forall r \ \exists s_2 = s_2(r) \ \forall q \ \exists c = c(r, q) > 0 : a_r(n) a_q(n) \leqslant c(r, q) a_{s_2(r)}^2(n), i = 2.$$

С учетом следствия 1.3 без ограничения общности можно считать, что

$$\forall r \ \exists c(r) > 0 : a_r^2(n) \leqslant c(r) a_1(n) a_{r+1}(n), i = 1, \tag{3.3}$$

$$\forall r, q \ \exists c(r, q) > 0 : a_r(n) a_q(n) \leqslant c(r, q) a_{r+1}^2(n), i = 2, \tag{3.4}$$

Переходя в случае необходимости к функции $\widetilde{c}(r) = \max\limits_{1 \leqslant r' \leqslant r} \{c(r'), 1\}$ можно полагать, что функция $c(r)$ возрастает по r и что $c(r) \geqslant 1$.

Аналогично можно считать, что $c(r,q) \geqslant 1$ и $c(r,q) \leqslant c(q,q)$ при $q \geqslant r$.

Введем пространства:

$$H_r = l_2(a_r(n)) = \{x \in \omega : \|x\|_r = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 a_r^2(n)\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\},$$

$$G_r = c_0(a_r(n)) = \{x \in \omega : |x|_r = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)| a_r(n) < +\infty\},$$

с определяющими системами норм $\{\| \cdot \|_r\}_{r=1}^{\infty}$ и $\{| \cdot |_r\}_{r=1}^{\infty}$. Из теоремы 1.3 и замечания 1.2 следует, что $E = \bigcap\limits_{r \geqslant 1} H_r = \bigcap\limits_{r \geqslant 1} G_r$. При этом для систем норм $\{\| \cdot \|_r\}_{r=1}^{\infty}$ и $\{| \cdot |_r\}_{r=1}^{\infty}$ справедливы оценки:

$$|x|_r \leqslant \|x\|_r \leqslant D(r)|x|_{r+1}.$$

Используя предложение 1.4, можно перейти к изоморфному пространству Кёте, в котором $a_1(n) \equiv 1$.

3.2 Применение интерполяционных свойств троек конусов к теории базисов в пространствах Фреше

В двух следующих параграфах будут доказаны теоремы о существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте с правильной матрицей из класса (d_1) либо (d_2). Доказательство будет опираться над так называемый метод «тупикового» пространства.

3.3 Теорема о существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте с правильной матрицей из класса (d_1)

Теорема 3.1. *Пусть E — ядерное пространство Кёте с правильной матрицей, принадлежащее классу (d_1), и F — дополняемое подпространство в E. Тогда в пространстве F существует абсолютный базис.*

Доказательство. Пусть P — непрерывный проектор в E такой, что $F = P(E)$. Обозначим через $|P|$ модуль оператора P в смысле теории векторных решеток (см. [7, гл. 8, с. 231]). Так как E — пространство с абсолютным базисом (поскольку E ядерно, то в силу теоремы теоремы Дынина-Митягина (см. [49, гл. 10, с. 240]) каждый базис в E абсолютен), оператор $|P| : E \longrightarrow E$ непрерывен. Если (p_{ij}) — матрица P в базисе $(e_i)_{i=1}^{\infty}$, то $(|p_{ij}|)$ — матрица $|P|$ в этом же базисе. Запишем условие непрерывности оператора $|P|$:

$$\forall r \ \exists s(r), C'(r) > 0 : \| |P| x\|_r \leqslant C'(r)|x|_{s(r)}. \tag{3.5}$$

Заметим, что из (3.5) следует, что

$$\|Px\|_r \leqslant C'(r)|x|_{s(r)}. \tag{3.6}$$

Функции $C'(r)$ и $s(r)$ в (3.5) и (3.6), с учетом предложения 1.3, можно считать возрастающими по r и, кроме того, учитывая следствие 1.3 предложения 1.2, без ограничения общности можно принять, что $s(r) = r + 1$. Далее, используя предложение 1.1, перейдем к эквивалентной системе норм вида

$$|x|'_r = \alpha(r)|x|_r, \ \|x\|'_r = \alpha(r)\|x\|_r,$$

где последовательность $\{\alpha(r)\}_{r=1}^{\infty}$ выбирается из условия

$$C'(r)\frac{\alpha(r)}{\alpha(r+1)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда справедливы неравенства:

$$\||P|x\|'_r \leqslant \frac{1}{2}|x|'_{r+1},\ r \in \mathbb{N}.$$

Будем считать, что это преобразование выполнено, то есть

$$\||P|x\|_r \leqslant \frac{1}{2}|x|_{r+1},\ r \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Пусть $G_{\infty,0} = c_0(b_\infty)$, где $b_\infty(n) = a_n(n)$ — пространство последовательностей, определяемое нормой

$$|x|_{\infty,0} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x(n)|b_\infty(n)\}.$$

Очевидно, $G_{\infty,0} \subset H_r \subset G_r$.

Пусть H_∞ — гильбертово пространство, определяемое гильбертовой нормой:

$$\|x\|_\infty^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2\|x\|_r^2,$$

где $\{\delta_r\}_{r=1}^{\infty}$ — некоторая числовая последовательность, элементы которой будут выбраны ниже. Несложно видеть, что

$$H_\infty = l_2(a_\infty),$$

где

$$a_\infty^2(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 a_r^2(n).$$

Через G_∞ обозначим пространство числовых последовательностей $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)|a_\infty(n) = 0,$$

определяемое нормой

$$|x|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| a_\infty(n),$$

то есть соответствующее этому же весу пространство с sup-нормой.

Введем оператор $J_r : E \to E$,

$$J_r x = \frac{a_{r+1}}{a_r} x = \left\{ \frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} x(n) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Из $E \subset (d_1)$ следует, что определение корректно, то есть J_r действительно переводит элементы из E в E (см. неравенство (3.9) ниже).

Выясним, какому условию должны удовлетворять элементы последовательности $\{\delta_r\}_{r=1}^\infty$, чтобы оператор $J_r|P|$ непрерывно действовал из $G_{\infty,0}$ в H_∞.

Так как $G_{\infty,0} \subset H_r$ для любого r, то

$$\|x\|_r \leqslant D_1(r)|x|_{\infty,0}\ , r \in \mathbb{N},$$

следовательно,

$$\||P|x\|_r \leqslant D(r)|x|_{\infty,0}\ , r \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Будем полагать, что $D(r) \geqslant 1$ для всех r.

Так как матрица $(a_r(n))$ монотонно возрастает по столбцам, то, используя условие (3.3), для любого $k > r$ будем иметь:

$$\left\|\frac{a_{r+1}}{a_r} x\right\|_k^2 \leqslant \left\|\frac{a_k}{a_1} x\right\|_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k^2(n)}{a_1^2(n)} a_k^2(n) x^2(n)$$

$$\leqslant c^2(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1^2(n) a_{k+1}^2(n)}{a_1^2(n)} x^2(n) = c^2(k)\|x\|_{k+1}^2. \tag{3.9}$$

Тогда, с учетом (3.8),

$$\left\|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|x\right\|_\infty^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 \left\|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|x\right\|_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} \delta_k^2 \left\| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right\|_k^2 + \sum_{k=r+1}^{\infty} \delta_k^2 \left\| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right\|_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right\|_r^2 \sum_{k=1}^{r} \delta_k^2 + \sum_{k=r+1}^{\infty} \delta_k^2 c^2(k) \| |P| x \|_{k+1}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| |P| x \|_{r+1}^2 \sum_{k=1}^{r} \delta_k^2 + \sum_{k=r+1}^{\infty} \delta_k^2 c^2(k) \| |P| x \|_{k+1}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(D^2(r+1) \sum_{k=1}^{r} \delta_k^2 + \sum_{k=r+1}^{\infty} \delta_k^2 c^2(k) D^2(k+1) \right) |x|_{\infty,0}^2 \leqslant |x|_{\infty,0}.$$

Положим $\delta_r^2 = \frac{1}{2^r c^2(r) D^2(r+1)}$. Тогда

$$\left\| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right\|_\infty = \| J_r |P| x \|_\infty \leqslant |x|_{\infty,0}, \tag{3.10}$$

и оператор $J_r|P| : G_{\infty,0} \to H_\infty$ непрерывен.

Пополнив линейное многообразие $L = \{Px : x \in G_{\infty,0}\}$ по нормам $\|\cdot\|_r, r \in \mathbb{N}$, и $\|\cdot\|_\infty$, получим гильбертовы пространства $F_r, r \in \mathbb{N}$, и F_∞ такие, что

$$F_1 \supset \ldots \supset F_r \supset F_{r+1} \supset \ldots \supset F_\infty.$$

Из условия ядерности E легко вывести, что вложения $F_{r+1} \subset F_r$ являются ядерными (и, следовательно, компактными) для всех r. Поскольку $F_\infty \subset F_{r+1} \subset F_r$, то вложение $F_\infty \subset F_r$ также является ядерным для всех r как произведение ядерного и непрерывного отображения (см. [70, гл. 28, с. 346]). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — «общий» ортогональный базис пространств F_1 и F_∞. Для определённости будем считать его нормированным в F_1. Несложно видеть, что $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — минимальная полная система в $P(E)$. Докажем что $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — базис в $P(E) = F = \bigcap\limits_{r \geqslant 1} F_r$. Для этого, согласно предложению 1.7, достаточно доказать равностепенную непрерывность семейства операторов $\{P_n\}$:

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} f_k'(Px) f_k, x \in E.$$

Так как $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональный базис и в F_1 и в F_∞, то

$$\|P_n x\|_1 \leqslant \|Px\|_1, \tag{3.11}$$

$$\|P_n x\|_\infty \leqslant \|Px\|_\infty. \tag{3.12}$$

Для оператора $|P|$ из (3.11) получим:

$$\|P_n x\|_1 \leqslant \| \, |P| x\|_1,$$

если $x \in \varphi^+$, так как

$$\|Px\|_1 \leqslant \| \, |P| x\|_1$$

при $x \in \varphi^+$.

Зафиксируем некоторое $r \in \mathbb{N}$. В силу условия ядерности (3.1) для любого $x \in G_{\infty,0}$ справедливо:

$$\|x\|_\infty = \|x\|_{l_2(a_\infty(n))} \leqslant \|x\|_{l_1(a_\infty(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| a_\infty(n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \left(\frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} |x(n)| a_\infty(n) \right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |x(n)| a_\infty(n) \frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} \right\}.$$

Таким образом,

$$\|x\|_\infty \leqslant C_1(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} x \right|_\infty, \tag{3.13}$$

где $C_1(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)}$.

Пусть

$$\left(Q^{(N)}x\right)(n)=\begin{cases}x(n), & n=1,2,\ldots,N,\\ 0, & n>N.\end{cases}$$

В силу (3.7) для всех $x\in G_1$ справедлива цепочка неравенств

$$\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|\frac{a_1}{a_{r+2}}Q^{(N)}x\right|_r=\left||P|\frac{a_1}{a_{r+2}}Q^{(N)}x\right|_{r+1}$$

$$\leqslant\ \frac{1}{2}\ \left|\frac{a_1}{a_{r+2}}Q^{(N)}x\right|_{r+2}=\ \frac{1}{2}\ |x|_1.$$

Пусть

$$A_r=J_r|P|J_r' \quad , \quad A_r^{(N)}=A_rQ^{(N)},$$

где $J_r'=\frac{a_1}{a_{r+2}}$. Оператор $A_r^{(N)}$ является непрерывным при отображении из G_1 в G_r. Тогда $A_r^{(N)}$ является также непрерывным из G_r в G_r. При этом $\left\|A_r^{(N)}\right\|_{G_r\to G_r}\leqslant\frac{1}{2}$.

Поскольку, с учетом (3.13), для $x\in G_{\infty,0}$ справедливо

$$|P_nx|_\infty\leqslant\|P_nx\|_\infty\leqslant\|Px\|_\infty\leqslant\||P|x\|_\infty\leqslant C_1(r)\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|x\right|_\infty,$$

то для всех $x\in\varphi^+$ справедливо каждое из неравенств

$$|P_nJ_r'x|_\infty\leqslant C_1(r)\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|\frac{a_1}{a_{r+2}}x\right|_\infty=C_1(r)|A_rx|_\infty,$$

$$|P_nJ_r'x|_1\leqslant|J_r|P|J_r'x|_1\leqslant C_2(r)|x|_1.$$

Положим

$$S_{n,r}=P_nJ_r' \quad , \quad S_{n,r}^{(N)}=S_{n,r}Q^{(N)}. \tag{3.14}$$

Так как $|\cdot|_\infty$ — монотонная норма, то $|A_r^{(N)}x|_\infty\leqslant|x|_\infty$ при $0\leqslant A_r^{(N)}x\leqslant x$. Рассмотрим семейство конусов $\{Q_N\}$ в пространстве ω:

$$Q_{r,N}=\left\{x\in\omega^+ : x\geqslant A_r^{(N)}x\right\}.$$

Тогда

$$\left|S_{n,r}^{(N)}x\right|_1 \leqslant C_1(r)|x|_1 \text{ при } x \in G_1^+, \tag{3.15}$$

$$\left|S_{n,r}^{(N)}x\right|_\infty \leqslant C_2(r)|x|_\infty \text{ при } x \in Q_{r,N} \cap G_\infty^+. \tag{3.16}$$

Покажем,опираясь на теорему 2.10, что семейство троек конусов $\mathcal{A} = \{(G_1^+, Q_{r,N} \cap G_\infty^+, Q_{r,N} \cap G_r^+)\}_N$ обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (G_1, G_∞, G_r) и, следовательно, из этих неравенств следует

$$\left|S_{n,r}^{(N)}x\right|_r \leqslant C_3(r)|x|_r \text{ при } x \in Q_{r,N} \cap G_r^+.$$

Убедимся сперва, что тройка (G_1, G_∞, G_r) интерполяционна. Согласно теореме 2.3, для этого достаточно проверить справедливость неравенства:

$$\frac{a_r(n)}{a_r(m)} \leqslant C_r \cdot \max\left\{\frac{a_1(n)}{a_1(m)}, \frac{a_\infty(n)}{a_\infty(m)}\right\}. \tag{3.17}$$

Пусть $n < m$. Из условия правильности (3.3) легко выводится неравенство:

$$\frac{a_r(n)}{a_r(m)} \leqslant \frac{a_1(n)}{a_1(m)}.$$

Пусть $n \geqslant m$. Покажем, что найдется постоянная $C_r \geqslant 1$ такая, что

$$\frac{a_r^2(n)}{a_r^2(m)} \leqslant C_r^2 \frac{a_\infty^2(n)}{a_\infty^2(m)}, \tag{3.18}$$

или, что то же самое,

$$C_r^{-2} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 \frac{a_k^2(n)}{a_r^2(n)}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 \frac{a_k^2(m)}{a_r^2(m)}}. \tag{3.19}$$

Используя условие правильности, оценим выражение в правой части (3.19):

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k^2\frac{a_k^2(n)}{a_r^2(n)}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k^2\frac{a_k^2(m)}{a_r^2(m)}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{r}\delta_k^2\frac{a_k^2(n)}{a_r^2(n)} + \sum\limits_{k=r+1}^{\infty}\delta_k^2\frac{a_k^2(n)}{a_r^2(n)}}{\sum\limits_{k=1}^{r}\delta_k^2\frac{a_k^2(m)}{a_r^2(m)} + \sum\limits_{k=r+1}^{\infty}\delta_k^2\frac{a_k^2(m)}{a_r^2(m)}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta_r^2 + \sum\limits_{k=r+1}^{\infty}\delta_k^2\frac{a_k^2(m)}{a_r^2(m)}}{\sum\limits_{k=1}^{r}\delta_k^2 + \sum\limits_{k=r+1}^{\infty}\delta_k^2\frac{a_k^2(m)}{a_r^2(m)}} \geqslant \frac{\delta_r^2}{\sum\limits_{k=1}^{r}\delta_k^2}.$$

Таким образом, неравенство (3.17) будет выполняться при $C_r^2 = \delta_r^{-2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{r}\delta_k^2$.

Покажем теперь, что выполняются условия теоремы 2.10. Рассмотрим оператор $I - A_r^{(N)} : G_r \to G_r$. Поскольку $\|A_r^{(N)}\|_{G_r\to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$, то $I - A_r^{(N)}$ биективно действует из G_r в G_r. Таким образом, $ker(I - A_r^{(N)}) = 0$. Тогда ядро его сужения $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ также состоит из нулевого вектора, следовательно, $I - A_r^{(N)}$ инъективен при каждом N.

Пользуясь (3.10), а также эквивалентностью всех норм в конечномерном пространстве, получим следующую цепочку неравенств:

$$\left|A_r^{(N)}x\right|_\infty = \left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|\frac{a_1}{a_{r+2}}Q^{(N)}x\right|_\infty \leqslant \left\|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|\frac{a_1}{a_{r+2}}Q^{(N)}x\right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{a_1}{a_{r+2}}Q^{(N)}x\right|_{\infty,0} \leqslant \left|Q^{(N)}x\right|_{\infty,0} \leqslant C(N)|x|_\infty,$$

где $C(N)$ — некоторая зависящая от N константа. Следовательно, оператор $A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ компактен, поскольку является непрерывным и конечномерным. Тогда к оператору $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ применима альтернатива Фредгольма, и потому его инъективность влечет биективность. Из биективности оператора $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to$

G_∞ следует, что конус $Q_{r,N} \cap G_\infty^+$ является воспроизводящим (см. п. 2.5).

Покажем, что в $Q_{r,N} \cap G_\infty^+$ существует строго положительный элемент. Выберем некоторый элемент $x_0 \in G_\infty^{++}$. Норма положительного оператора $A_r^{(N)}$ в пространстве G_1 меньше единицы, поэтому оператор $(I - A_r^{(N)})^{-1}$ положителен в G_1 и, кроме того, $(I - A_r^{(N)})^{-1} \geqslant I$ (следует из разложения этого оператора в ряд Неймана). Поэтому вектор $y_0 = (I - A_r^{(N)})^{-1} x_0$ строго положителен и, очевидно, лежит в G_∞.

Наконец, конус $Q_{r,N}$ является нижней полурешеткой в ω. Действительно, пусть $x, y \in Q_{r,N}$, то есть $x \geqslant A_r^{(N)} x, y \geqslant A_r^{(N)} y$. В силу положительности оператора $A_r^{(N)}$ имеем: $x \geqslant A_r^{(N)} \min(x,y), y \geqslant A_r^{(N)} \min(x,y)$. Но тогда $\min(x,y) \geqslant A_r^{(N)} \min(x,y)$. Следовательно, для всех троек конусов из семейства $\{(G_1^+, Q_{r,N} \cap G_\infty^+, Q_{r,N} \cap G_r)\}_N$ выполнены условия теоремы 2.10, и справедливо неравенство:

$$|S_{n,r}^{(N)} x|_r \leqslant C_3(r)|x|_r, x \in Q_{r,N} \cap G_r^+.$$

Поскольку, оператор $A_r^{(N)}$ положителен, $\|A_r^{(N)}\|_{G_r \to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$ и норма $\|\cdot\|_{G_r}$ монотонна, то конус $Q_{r,N}$ (см. п. 2.1) является несплющенным с константой несплющенности, не превышающей 4. Поэтому

$$|S_{n,r}^{(N)} x|_r \leqslant 8 \cdot C_3(r)|x|_r \tag{3.20}$$

для всех $x \in G_r$.

Пусть $C_4(r) = 8 \cdot C_3(r)$. Тогда, переходя к пределу при $N \to \infty$ в (3.20), для всех $x \in E$ получим:

$$|S_{n,r} x|_r \leqslant C_4(r)|x|_r,$$

или

$$|P_n J_r' x|_r \leqslant C_4(r)|x|_r.$$

Тогда

$$|P_n x|_r \leqslant C_4(r) \left| J_r'^{-1} x \right|_r = C_4(r) \left| \frac{a_{r+2}}{a_1} x \right|_r.$$

С учетом (3.3),

$$|P_n x|_r^2 \leqslant C_4^2(r)\left|\frac{a_{r+2}}{a_1}x\right|_r^2 = C_4^2(r)\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{r+2}^2(n)}{a_1^2(n)}a_r^2(n)x^2(n) \leqslant$$

$$\leqslant C_4^2(r)\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{r+2}^4(n)}{a_1^2(n)}x^2(n) \leqslant C_4^2(r)\cdot c^2(r+2)\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_1^2(n)\cdot a_{r+3}^2(n)}{a_1^2(n)}x^2(n) =$$

$$= C_4^2(r)\cdot c^2(r+2)\sup_{n\in\mathbb{N}}a_{r+3}^2(n)x^2(n) = C^2(r)|x|_{r+3}^2,$$

где $C(r) = C_4(r)\cdot c(r+2)$. То есть $\{P_n\}$ — равностепенно непрерывное семейство операторов, действующих в E, и система $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ является базисом в дополняемом подпространстве $P(E)$. Поскольку каждое подпространство ядерного пространства является ядерным (см. [49, гл. 5, с. 125]), из теоремы Дынина-Митягина следует, что базис $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ является абсолютным в $P(E)$. Теорема доказана.

□

3.4 Теорема о существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Драгилева из класса (d_2)

Теорема 3.2. *Пусть E — ядерное пространство Кёте с правильным базисом, принадлежащее классу (d_2), и $F \subset E$ — дополняемое подпространство в E. Тогда в пространстве F существует абсолютный базис.*

Доказательство. Пусть P — непрерывный проектор в E такой, что $F = P(E)$. Как и в предыдущей теореме, через $|P| : E \to E$ обозначим модуль оператора P. При этом $|P|$ непрерывен, то есть

$$\forall r\ \exists s(r), C_1(r) > 0 : \||P|x\|_r \leqslant C_1(r)|x|_{s(r)}. \qquad (3.21)$$

Заметим, что из (3.21) следует

$$\|Px\|_r \leqslant C_1(r)|x|_{s(r)}. \tag{3.22}$$

Функции $C_1(r)$ и $s(r)$ в (3.21) и (3.22) можно считать монотонными по r. Кроме того, без ограничения общности можно полагать, что $s(r) = r + 1$.

Из предложения 1.1 следует, что переход к эквивалентной системе норм вида

$$|x|'_r = \alpha(r)|x|_r,\ \|x\|'_r = \alpha(r)\|x\|_r,$$

соответствует переходу к эквивалентной матрице Кёте. Выбирая последовательность $\alpha(r) \geqslant r$ из условия

$$C_1(r)\frac{\alpha(r)}{\alpha(r+1)} \leqslant \frac{1}{2},$$

можно добиться выполнения неравенств

$$\||P|\|'_r \leqslant \frac{1}{2}|x|'_{r+1}, r = 1, 2, \ldots$$

Будем считать, что это преобразование выполнено, то есть

$$\||P|x\|_r \leqslant \frac{1}{2}|x|_{r+1},\ r = 1, 2, \ldots. \tag{3.23}$$

Определим весовое «тупиковое» гильбертово пространство H_∞ и пространство $G_{\infty,1}$ так, чтобы вложения $G_{\infty,1} \subset H_r, H_\infty \subset H_r$ имели место для любого r и оператор $|P|$ непрерывно действовал из $G_{\infty,1}$ в H_∞.

Так как $a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r,q)a^2_{r+1}(n)$, то

$$a_r(n)\sum_{q=1}^{\infty}\gamma_q a_q(n) \leqslant \left(\sum_{q=1}^{\infty}\gamma_q c(r,q)\right)a^2_{r+1}(n)$$

для всех n и r. Выберем элементы последовательности $\{\gamma_q\}_{q=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\sum_{q=1}^{\infty}\gamma_q c(r,q) < +\infty\ , r = 1, 2, \ldots$$

Положим $\gamma_q = \frac{1}{2^q c(q,q)}$. Так как $\frac{c(r,q)}{c(q,q)} \leqslant 1$ при $q > r$, то

$$c'(r) = \sum_{q=1}^{\infty} \gamma_q c(r,q) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^q} \cdot \frac{c(r,q)}{c(q,q)} < +\infty$$

для всех $r = 1, 2, \ldots$

Введем пространство

$$G_{\infty,1} = \{x \in \omega : |x|_{\infty,1} := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_{\infty,1}(n)|x(n)| < \infty\},$$

где

$$a_{\infty,1}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_r a_r(n)$$

с нормой $|\cdot|_{\infty,1}$. Тогда

$$a_r(n) a_{\infty,1}(n) \leqslant c'(r) a_{r+1}^2(n) \tag{3.24}$$

для всех r и n.

Несложно видеть, что

$$|x|_r \leqslant D_1(r) |x|_{\infty,1}\ , r = 1, 2, \ldots,$$

где $D(r) = \gamma_r^{-1}$. Положим

$$a_{\infty}^2(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 a_r^2(n),$$

где последовательность $\{\delta_r\}_{r=1}^{\infty}$ будет выбрана ниже. Введем гильбертово пространство

$$H_{\infty} = \{x \in \omega : \|x\|_{\infty} := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_{\infty}^2(n) x^2(n)} < \infty\}$$

с гильбертовой нормой $\|x\|_{\infty}$. Несложно видеть, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\infty}^2(n)x^2(n) = \sum_{r=1} \delta_r^2 \|x\|_r^2.$$

Выберем последовательность $\{\delta_r\}_{r=1}^{\infty}$ так, чтобы оператор $T = |P|$ непрерывно действовал из $G_{\infty,0}$ в H_{∞}. Поскольку $|P|$ непрерывно действует из G_{r+1} в H_r, то

$$\||P|x\|_{\infty}^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 \||P|x\|_r^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 |x|_{r+1}^2 \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 D^2(r+1) \right) |x|_{\infty,1}.$$

Положим $\delta_r = \max\{\gamma_r, \frac{1}{2D(r+1)}\}$. Тогда $G_{\infty,1} \subset H_{\infty}$ и

$$\||P|x\|_{\infty} \leqslant |x|_{\infty,1}. \tag{3.25}$$

Пусть

$$\left(Q^{(N)}x\right)(n) = \begin{cases} x(n), & n = 1, 2, \ldots, N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

Пополним линейное многообразие $L = \{Px : x \in G_{\infty,0}\}$ по нормам $\| \cdot \|_r$ и $\| \cdot \|_{H_{\infty}}$. Получим гильбертовы пространства F_r и F_{∞} такие, что

$$F_1 \supset F_r \supset \ldots \supset F_{r+1} \supset \ldots \supset F_{\infty}.$$

Определим «общий» ортогональный базис в пространствах F_1 и F_{∞} (см. п. 1.7 гл. 1). Для определённости будем считать его нормированным в F_1. Докажем, что $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — абсолютный базис в $F = P(E)$. Введём операторы:

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} f_k'(Px) f_k,$$

где $f_k'(x) = (f_k, x)_{H_1}$. Тогда последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет базисом в F, если $\{P_n\}$ — равностепенно непрерывное семейство операторов в E (см. п. 1.7 гл. 1). Так как $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональный базис и в F_1, и в F_{∞}, то

$$\|P_n x\|_1 \leqslant \|Px\|_1, x \in H_1, \tag{3.26}$$

$$\|P_n x\|_{H_\infty} \leqslant \|Px\|_{H_\infty}, x \in H_\infty. \tag{3.27}$$

Для всех $x \in \varphi^+$ из (3.26) получим

$$\|P_n x\|_1 \leqslant \| \, |P|x\|_1, \tag{3.28}$$

так как $\|Px\|_1 \leqslant \| \, |P|x\|_1$ при $x \in \varphi^+$ в силу монотонности нормы $\| \cdot \|_1$.

Зафиксируем $r \geqslant 2$. Напомним, что в силу условия ядерности E

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} < +\infty.$$

Тогда для любого $y \in E$ имеем:

$$\|y\|_1 = \|y\|_{l_2} \leqslant \|y\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \cdot \frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} \cdot |y(n)|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} |y(n)| = C_1(r) \left\| \frac{a_{r+1}}{a_r} y \right\|_{l_\infty} = C_1(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} y \right|_1,$$

где $C_1(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)}$. Используя это неравенство и (3.26), получим:

$$\|P_n x\|_1 \leqslant C_1(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right|_1$$

при $x \in \varphi^+$. Так как $\|x\|_1 \geqslant |x|_1$, то

$$|P_n x|_1 \leqslant C_1(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right|_1.$$

Так как $|P_n x|_r \leqslant \|P_n x\|_r \leqslant \|P_n x\|_\infty \leqslant \|Px\|_\infty \leqslant \||P|x\|_\infty \leqslant |x|_\infty$ в силу (3.25), (3.27) и монотонности нормы $\| \cdot \|_\infty$ для всех $x \in \varphi^+$, где $D'(r)$ — некоторая постоянная, то

$$|P_n x|_r \leqslant D'(r) |x|_\infty \ \text{ при } \ x \in \varphi^+.$$

Таким образом, существуют постоянные $C_1(r),\ C_2(r)$ такие, что

$$|P_n x|_1 \leqslant C_1(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right|_1 , \tag{3.29}$$

$$|P_n x|_r \leqslant C_2(r) |x|_\infty, \tag{3.30}$$

при всех $x \in \varphi^+$.

Далее нам понадобятся оценки для оператора $|P|$. В силу (3.23)

$$\left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right|_1 \leqslant \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| x \right|_r = \left| |P| x \right|_{r+1} \leqslant \frac{1}{2} |x|_{r+2} = \frac{1}{2} \left| a_{r+2} x \right|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left| a_{r+2} x \right|_r .$$

Следовательно,

$$\left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| \frac{1}{a_{r+2}} x \right|_1 \leqslant \frac{1}{2} |x|_1 \tag{3.31}$$

и

$$\left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| \frac{1}{a_{r+2}} x \right|_r \leqslant \frac{1}{2} |x|_r. \tag{3.32}$$

Введем операторы:

$$J_r = \frac{a_{r+1}}{a_r}, \quad J'_r = \frac{1}{a_{r+2}},$$

$$A_{rN} = J_r |P| J'_r Q^{(N)}.$$

Из (3.31) и (3.32) следует, что $|A_{rN} x|_1 \leqslant \dfrac{1}{2} |x|_1$ и $|A_{rN} x|_r \leqslant \dfrac{1}{2} |x|_r$, следовательно, $\|A_{rN}\|_{G_1 \to G_1} \leqslant \frac{1}{2}$ и $\|A_{rN}\|_{G_r \to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$. Несложно видеть, что из (3.29) и (3.30) следуют неравенства

$$|P_n J'_r x|_1 \leqslant C_1(r) |A_{rN} x|_1,$$

$$|P_n J'_r x|_r \leqslant C_2(r) |J'_r x|_\infty \leqslant C_2(r) |x|_\infty,$$

для всех $x \in \varphi^+$. Положим

$$S_n = P_n J' \quad , \quad S_n^{(N)} = S_n Q^{(N)}.$$

Тогда

$$|S_n^{(N)} x|_1 \leqslant C_1(r) |A_{rN} x|_1 \text{ при всех } x \in \omega^+,$$

$$|S_n^{(N)} x|_r \leqslant C_2(r) |x|_\infty \text{ при всех } x \in \omega^+ \cap G_\infty.$$

Так как $|\cdot|_1$ — монотонная норма, то $|A_{rN} x|_1 \leqslant |x|_1$ при x таких, что $x \geqslant A_{rN} x \geqslant 0$.

Рассмотрим в пространстве ω конус

$$Q_{r,N} = \{x \in \omega^+ : A_{rN} x \leqslant x\}.$$

Справедливы неравенства:

$$\left|S_n^{(N)} x\right|_1 \leqslant C_1(r) |x|_1 \text{ при } x \in Q_{r,N} \cap G_1^+,$$

$$\left|S_n^{(N)} x\right|_r \leqslant C_2(r) |x|_\infty \text{ при } x \in G_\infty^+.$$

Покажем, что выполняются условия теоремы 2.10 для троек $(Q_{r,N} \cap G_1^+, G_\infty^+, Q_{r,N} \cap G_r^+)$ и (G_1, G_∞, G_{r-1}) и из этих неравенств следует ограниченность оператора $S_{n,r}^{(N)}$ на элементах конуса $Q_{r,N} \cap G_r^+$:

$$\left|S_{n,r}^{(N)} x\right|_{r-1} \leqslant C_3(r) |x|_r, \text{ при } x \in Q_{r,N} \cap G_r^+.$$

Согласно теореме 2.3, чтобы убедиться в интерполяционности тройки (G_1, G_∞, G_r) относительно тройки (G_1, G_r, G_{r-1}), достаточно проверить выполнение неравенства:

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant C_r \max\left\{1, \frac{a_r(m)}{a_\infty(n)}\right\}, \quad m, n, \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n \geqslant m$. Из условия правильности, учитывая, что $a_1(n) = 1$ для всех n, получаем:

$$\frac{1}{a_{r-1}(n)} \leqslant \frac{1}{a_{r-1}(m)}.$$

Тогда

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant \frac{a_{r-1}(m)}{a_{r-1}(n)} \leqslant 1.$$

Пусть $m > n$. Покажем, что

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant C_r \frac{a_r(m)}{a_\infty(n)}. \tag{3.33}$$

В силу условия правильности имеем:

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(m)} \leqslant \frac{a_{r-1}(n)}{a_r(n)}.$$

Поэтому, с учетом (3.24), полагая $C_r := c'(r-\ 1)$, получим:

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(m)} \leqslant \frac{a_{r-1}(n)}{a_r(n)} \leqslant C_r \frac{a_r(n)}{a_\infty(n)}.$$

Тогда

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(m)} \leqslant C_r \frac{a_r(n)}{a_\infty(n)},$$

из чего следует справедливость неравенства (3.33). Следовательно, тройка (G_1, G_∞, G_r) интерполяционна относительно (G_1, G_r, G_{r-1}).

Покажем теперь, что выполняются условия теоремы 2.11. Пусть $x, y \in Q_N \cap\ G_1^+$, то есть $x \geqslant A_{rN}x, y \geqslant A_{rN}y$. В силу положительности оператора A_{rN} имеем: $x \geqslant A_{rN}\min(x,y), y \geqslant A_{rN}\min(x,y)$, из чего получаем: $\min(x,y) \geqslant A_{rN}\min(x,y)$. Следовательно, $Q_{r,N} \cap G_1^+$ является нижней полурешеткой, и условие 1) теоремы 2.11 выполнено. Далее, рассмотрим оператор $I - A_{rN} : G_1 \to G_1$. Поскольку $\|A_{rN}\|_{G_1 \to G_1} \leqslant \frac{1}{2}$, то $I - A_{rN}$ биективно действует из G_1 в G_1. Покажем, что $Q_{r,N} \cap G_1^+$ является тотальным в ω и, таким образом, выполнено условие 2) теоремы 2.10. Заметим, что $y \in Q_{r,N} \cap G_1$ в том и только в том случае, если найдется $h \geqslant 0$ такой, что $y = A_{rN}^{-1}h$. Пусть $x \in \omega$. Тогда, поскольку $Q^{(N)}x \in G_1$ для любого N,

$$Q^{(N)}x = A_{rN}^{-1}A_{rN}x = A_{rN}^{-1}((A_{rN}x)_+ - (A_{rN}x)_-) =$$
$$= A_{rN}^{-1}(A_{rN}x)_+ - A_{rN}^{-1}(A_{rN}x)_-.$$

Таким образом, $Q^{(N)}x \in Q_{r,N} \cap\ G_1^+$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Из этого следует воспроизводимость конуса $Q_{r,N} \cap G_1^+$ (см. п. 2.4). Поскольку всякий воспроизводимый конус является тотальным, условие 2) теоремы 2.10 выполнено.

Следовательно, для всех троек конусов из семейства $\{(Q_{r,N} \cap G_1^+, G_\infty^+, Q_{r,N} \cap G_r^+)\}_N$ выполнены условия теоремы 2.11, и справедливо неравенство

$$\|S_{n,r}^{(N)}x\|_{r-1} \leqslant C_3(r)\|x\|_r, x \in Q_{r,N} \cap G_r^+.$$

Поскольку оператор A_{rN} положителен, $\|A_{rN}\|_{G_r \to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$ и норма $\|\cdot\|_{G_r}$ монотонна, то конус $Q_{r,N}$ (см. пример из п. 2.4), несплющен с константой несплющенности, не превышающей 4. Поэтому:

$$\|S_{n,r}^{(N)}x\|_{r-1} \leqslant 8 \cdot C_3(r)\|x\|_r, x \in G_r.$$

Пусть $C(r) = 8 \cdot C_3(r)$. Переходя к пределу при $N \to \infty$, для всех $x \in E$ получим:

$$\|S_{n,r}x\|_{r-1} \leqslant C(r)\|x\|_r,$$

или

$$\|P_nJ_r'x\|_{r-1} \leqslant C(r)\|x\|_r.$$

Тогда

$$\|P_nx\|_{r-1} \leqslant C(r)\|J_r'^{-1}x\|_r = C(r)\left\|\frac{a_{r+2}}{a_r}x\right\|_r = C(r)\|x\|_{r+2},$$

или, поскольку приведенные рассуждения не зависят от выбора r,

$$\|P_nx\|_r \leqslant C(r+1)\|x\|_{r+3}, x \in E.$$

Таким образом, $\{P_n\}$ — равностепенно непрерывное семейство операторов в E, следовательно, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — абсолютный (так как F — ядерно) базис в F. Теорема доказана. $\square$

3.5 О гипотезе Бессаги

Напомним, что базисы $(x_n)_1^{\infty}$ и $(y_n)_1^{\infty}$ в пространстве Кёте E называются квазиэквивалентными, если найдутся числа $\lambda_n > 0$, перестановка (биективное отображение) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и автоморфизм $T : E \to E$ такие, что $Ty_n = \lambda_n x_{\sigma(n)}$. Если в данном определении вместо $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ рассматривать инъективное отображение $m : \mathbb{N} \to A(\subset \mathbb{N})$ на подмножество натуральных чисел, то говорят, что $(y_n)_1^{\infty}$ квазиэквивалентными части базиса $(x_n)_1^{\infty}$.

В [57] Ч. Бессага выдвинул гипотезу, согласно которой всякий базис дополняемого подпространства ядерного пространства Фреше квазиэквивалентен части базиса ортов. В [34, гл. 4, с. 47] В.П. Кондаков доказал, что в пространстве Кёте из класса (d_1) каждый базис дополняемого подпространства (если он существует) квазиэквивалентен части базиса ортов. То есть для $l_1(a_r(n))$ из (d_1) утверждение гипотезы Бессаги выполняется. Тогда из теоремы 3.3 немедленно вытекает следующий результат.

Теорема 3.3. *В любом дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте типа (d_1) с правильным базисом существует базис, квазиэквивалентный базису ортов.*

Заметим, что в [34] справедливость гипотезы Бессаги доказана при более слабых условиях. Именно, вместо условия правильности базиса предполагается наличие упорядочиваемого базиса. Для пространств Кёте это условие может быть записано следующим образом: для любой пары натуральных индексов m и n выполняется одно из неравенств

$$\frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} \leqslant \frac{a_{r+1}(m)}{a_r(m)}, \forall r \in \mathbb{N},$$

$$\frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} \geqslant \frac{a_{r+1}(m)}{a_r(m)}, \forall r \in \mathbb{N}.$$

Литература

[1] Абанин А. В., Ле Ха Хой. Линейный непрерывный правый обратный оператор для оператора свертки в пространствах голомофрных функций полиномиального роста. // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1, С. 3 - 13.

[2] Баркина У. В., Мелихов С. Н. Об операторе решения для дифференциальных уравнений бесконечного порядка на выпуклых множествах. // Владикавказский матем. журнал, 2014, Т. 16, № 4, С. 27-40.

[3] Богачев В.И., Смолянов О.Г. , Соболев В.И. . Топологические векторные пространства и их приложения. Введение. М.-Ижевск, НИЦ «Регулярная и хоатическая динамика», 2012.

[4] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М., Мир, 1983.

[5] Буренков В. И., Гольдман М. Л. Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций. // Тр. МИАН, 1995. Т. 210, С. 104-137.

[6] Буренков В. И., Нурсултанов Е. Д., Чигамбаева Д. К.. Описание интерполяционных пространств для пары локальных пространств типа Морри и их обобщений. // Тр. МИАН, 1995. Т. 284, С. 65-89.

[7] Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

[8] Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л.. Неравенства для операторов типа Харди на конусе убывающих функций из весового пространтсва Орлича. // Докл. РАН, 2017, Т. 477, № 2, С. 133-137.

[9] ГохбергИ. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука, 1965.

[10] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., Издательство иностранной литературы, 1962.

[11] Драгилев М. М. О регулярной сходимости базисных разложений в пространстве аналитических функций. // Науч. докл. Высш. шк., сер. физ.-матем. наук. 1958. № 4, С. 27-32.

[12] Драгилев М. М. О базисах регулярной сходимости в пространстве аналитических функций. // Науч. докл. Высш. шк., сер. физматем. наук. 1958. № 6, С. 61-70.

[13] Драгилев М. М. Каноническая форма базиса пространства аналитических функций. // УМН. 1960. Т. 15, В. 2 (92), С. 181-188.

[14] Драгилев М. М. О правильных базисах в ядерных пространствах. // Математический сборник. 1965. Т. 68, № 2, С. 153-173.

[15] Драгилев М. М. Базисы в пространствах Кёте. Ростов-на-Дону, РГУ, 1983.

[16] Драгилев М. М. Базисы в пространствах Кёте. Ростов-на-Дону, РГУ, 2003.

[17] Дронов А. К. Интерполяция операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей и ее

применение к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше // Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - IV», 27 апреля - 1 мая 2014, г. Ростов-на-Дону, Россия, С. 21.

[18] Дронов А. К. Интерполяционные свойства семейства троек конусов в весовых пространствах числовых последовательностей, сходящихся к нулю, и их применение к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше // Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V», 26 апреля - 1 мая 2015, г. Ростов-на-Дону, Россия, С. 26.

[19] Дронов А. К. Существования базиса в дополняемых подпространствах ядерных пространств Фреше из классов Фреше (d_1) и (d_2) // Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», 12-18 июля 2015, с. Цей, Россия, С. 67.

[20] Дронов А. К. О существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2) // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18, В. 1, С. 9 - 20.

[21] Дронов А. К. Интерполяция операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей // Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», 3-8 июля 2017, с. Цей, Россия, С. 25.

[22] Дронов А. К., Каплицкий В. М. О существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_1) // Математический сборник. 2018. Т. 209, В. 10, С. 50 - 70.

[23] Захарюта В. П. О квазиэквивалентности базисов в конечных центрах гильбертовых шкал. // Докл. АН СССР. 1968. №. 5, С. 786-788.

[24] Захарюта В. П. Об изоморфизме декартовых произведений линейных топологических пространств // Функц. анализ и его прил. 1970. Т. 5, № 4, С. 87-88.

[25] Робертсон А., Робертсон В.. Топологические векторные пространства. М., Мир, 1967.

[26] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, 2004.

[27] Каплицкий В. М. Интерполяция нелинейных операторов в весовых L_p-пространствах // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, В. 2. С. 316-329.

[28] Каплицкий В. М., Дронов А. К. Применение интерполяционных свойств операторов, ограниченных на конусах, к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше // Математический форум. ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2013. Т. 7 , С. 88-103.

[29] Каплицкий В. М., Дронов А. К. К теории интерополяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей // Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т. 424, С. 154-178.

[30] Каплицкий В. М., Дронов А. К. Интерполяционные теоремы для операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей // Известия вузов. Северокавказский регион. 2016. № 1, С. 17-20.

[31] Каплицкий В. М., Дронов А. К. К теории интерополяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах чис-

ловых последовательсностей, II // Записки научных семинаров ПОМИ. 2017. Т. 456, С. 107-113.

[32] Кондаков В. П. О квазиэквивалентнотси правильных базисов в пространствах Кёте // Мат. анал. и прилож. Ростов-на-Дону, 1974. Т. 5, С. 210-213.

[33] Кондаков В. П. Вопросы геометрии ненормируемых простр-наств. Ростов н/Д, РГУ, 1983.

[34] Кондаков В. П. Об ортогонализации базисов в некоторых базисах в некоторых классах ядерных пространств // Сибирский матем. журнал. 1990. Т. 31, № 4, С. 77-89.

[35] Кондаков В. П. Об операторах и дополняемых подпространствах в пространствах Кёте, определяемых разряжёнными матрицами // Сиб. матем. журнал. 1995. Т. 36, № 5.

[36] Кондаков В. П. Геометрические свойства пространств Фреше и выделение базисных последовательностей // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 1, С. 102-111.

[37] Кондаков В. П. Замечания о существовании базисов в весовых счётно-гильбертовых пространствах и их дополняемых подпространствах // Сибирский матем. журнал. 2001. Т. 43, № 6, С. 1300-1313.

[38] Кондаков В. П. Харкатеризация дополняемоых подпространств в декартовых произведениях структурно несравнимых пространств Кёте из класов $(f)_0$ и $(f)_1$ // Владикавказский матем. журнал. 2003. Т. 5, В. 4, С. 43-49.

[39] Кондаков В. П. Три основных принципа линейного функционального анализа. Ростов-на-Дону – Владикавказ, ВНЦ РАН, 2007.

[40] Кондаков В. П., Ефимов А. И. О базисах в дополняемых подпространствах пространств, обобщающих пространства степенных рядов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2001. № 1, С. 5 - 9.

[41] Кондаков В. П., Ефимов А. И. О двух классах пространств Кёте-Фреше, в которых каждое дополняемое подпространства имеет базис // Владикавказский матем. журнал. 2003. Т. 5, В. 4, С. 43-49.

[42] Кондаков В. П., Ефимов А. И. О классах пространств Кёте, в которых каждое дополняемое подпространство имеет базис // Владикавказский матем. журнал. 2008. Т. 10, № 2, С. 21-29.

[43] Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34, № 1, С. 70 - 84.

[44] Крейн С. Г. О минимальном разложении функционала на положительные составляющие // ДАН СССР. 1940. Т. 28, № 1, С. 18-22.

[45] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М Интерполяция линейных операторов. М., Наука, 1978.

[46] Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // УМН. 1961. Т. XVI, в. 4, С. 63-132.

[47] Митягин Б. С. Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia math. 1971. Т. 37, С. 111-137.

[48] Митягин Б. С., Хенкин Г. М. Линейные задачи комплексного анализа // УМН. 1970. Т. 26, №. 4, С. 93-153.

[49] Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М., Мир, 1970.

[50] Рудин У. Функциональный анализ. СПб., Лань, 2005.

[51] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., Мир, 1980.

[52] Шубарин М. А. Конструкция интерполяционного функтора в категории пар пространств Фреше с общим базисом // Владикавк. мат журн. 2014. Т. 16, В. 1, С. 68-79.

[53] Шубарин М. А. Условия интерполяионности для семейств пространств Фреше // Владикавк. мат журн. 2007. Т. 9, В. 2, С. 57-65.

[54] Шубарин М. А. Классы пространств, порождаемые интерполяцией диагональных операторов // Изв. вузов Сев. Кавк. региона. сер. естеств. науки. 2006. №. 1, С. 24-26.

[55] Шубарин М. А. Продолжение интерполяционных функторов в различных категориях пространств Фреше // Исследования по мат. анализу.–Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А. 2008. С. 229-238.

[56] Aliprantis D., Burkinshaw. Positive operators. N.Y.: Acad. Press, 1985.

[57] Bessaga C. Some remarks on Dragilev's theorem // Studia math. 1968, P. 307-318.

[58] Braun R. W., Meise R., Vogt D. Existence of fundamental solutions and surjectivity of convolution operators on classes of ultra-differetiable functions // Proc. London Math. Soc. 1990, V. 61, P. 344-370.

[59] Cedra J., Coll H. Function cones and interpolation // Math. Nachr. 2005, V. 278, P.227-239.

[60] Cedra J., Martin J. Interpolation of operators on decreasing functions // Math. Scand. 1996, V. 78, P. 233-245.

[61] Cedra J, Martin J. Interpolation restricted to decreasing functions and Lorntz spaces // Proceedings of the Edinburgh Matnematical Society. 1999, V. 42, P. 243-256.

[62] Deutsch N. Interpolation dans les espaces vectorieles topologiques localement convexes // Mémoires de la Société Mathématique de France. 1968, V. 20, P. 237 - 289.

[63] Dubinsky E. The structure of nuclear Fréchet Spaces // Lect. Notes in Math. 1979. V. 720, P. 187.

[64] Dubinsky E., Vogt D. Bases in complemented subspaces of power series spaces // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1986. V. 34, P. 65-67.

[65] Jarchow H. Locally convex cpaces. Stuttgart, Teubner, 1981.

[66] Dynin A. and Mitiagin B. Criterion for nuclearity in terms if approximative dimension // Bull. Acad. Pol. Sci. 1960. V. 8, № 8, P. 535-522.

[67] Krone J. Existence of bases and the dual splitting relation for Fréchet spaces // Studia Math. 1989., V. 92, P. 37-48.

[68] Krone J. On projections in power series spaces and the existence of bases // Proc. Amer. Math. Soc. 1989., V. 105, P. 350-355.

[69] Krone J. Basisprobleme in nuklearen Frechetrăumen. Dis. doct. mathematis. Wuppertal 1986.

[70] Meise R., Vogt D. Introduction to functional analysis. Oxford, Clarendon press, 2004.

[71] Melikhov S. N., Momm S. Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle on the boundary // Math. Scand. 2000, V. 86, P. 293-319.

[72] Momm S. Convex univalent functions and continious linear right inverses // J. Funct. Anal. 1993, V. 103, P. 85-103.

[73] Peetre J. On interpolation functions // I: Acts Sci. Math., 1966. V. 27, № 3, 4. P. 167-171; III: Acta Sci. Math., 1969, V. 30, № 3,4. P. 235-239.

[74] Peetre J. On interpolation functions // I: Acta Sci. Math. 1966. V. 30, P. 167-171, 18-22.

[75] Pelczynski A. Problem 37 // Studia Math. 1970. V. 38, p. 476.

[76] Pelczynski A. Projections in certain Banach spaces // Studia Math. 1960. V. 19, P. 209-228.

[77] Romaguaera S., S*á*nchez E.A., Valerio O. Dominated extensions of functionals and V-convex functions on cancellatie cones // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. V. 67, P. 87-94.

[78] Roth W. Hanh-Banach type theorems for locally convex cones // Austral. Math. Soc. (Series A). 1970. V. 68, P. 104-125.

[79] Schwerdfeger K. Faltunsoperatoren auf R*ä*umen holomorpher und beliebig oft differenzierbarer Funktionen // Thesis D*ü*sseldorf. 1982.

[80] Taskinen J. A Fr*é*chet-Schwartz space with basis having a complemented without basis // Proceedings of the american mathematical society. V. 113, number 1, P. 151-155.

[81] Terzio*ğ*lu T. Smooth sequaence spaces // Proceedings of Symposium on Functional Analysis. Silivri. 1974. P. 31-41.

[82] Tix R., Keimel K., Pllotkin G. Semantic domains for combibing probability and non-determenism // Electronic Notes in Rheoretical Computer Science (ENTCS). 2009. P. 3 - 99.

[83] Vogt D. Tame spaces and power series spaces // Math Z. 1987. V. 196, P. 523-536.

[84] Vogt D. Ein Isomorphiesatz für Potenzreihenräume // Arch. Math. 1982. V. 38, P. 540-548.

[85] Vogt D. Structure theory of power series of infinite type // Rev. R. Acad. Cien. Serie a. Mat. 2003. V. 97, №2, P. 540-548.

[86] Wojtynski W. On bases in certain countably-Gilbert spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. 1966. V. 14, P. 681-684.

[87] Zakharyuta V. P. On the isomorphism of Cartesian products of locally convex spaces // Stud. Math. 1973. V 46, № 3, P. 201-221.