Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Южный Федеральный Университет"

На правах рукописи

КРУТЕНКО Елена Владимировна

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Левенштам В.Б.

Ростов-на-Дону — 2019 г.

Оглавление

Введение

Решение многих задач физики и техники сводится к исследованию дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В редких случаях для таких уравнений можно получить точное решение. Во многих же случаях для их исследования используют приближенные методы, к которым относятся численные и асимптотические методы. Для дифференциальных уравнений с высокочастотными членами (т.е. зависящими от произведения большого параметра – частоты – и времени), которые рассматриваются в диссертации, непосредственное применение численных методов - в частности, разностных - связано с известными проблемами (из-за большого сомножителя при временной переменной). Поэтому здесь необходимо использовать асимптотические методы (как правило, в сочетании с численными). Их зарождение применительно к линейным уравнениям связано с именем Лиувилля, изучавшего (в связи с разложением функций в ряды Фурье по собственным функциям краевых задач) асимптотическое поведение собственных чисел и собственных функций. Так, в 1837 году Лиувиллем [1] были построены и обоснованы асимптотические разложения фундаментальной системы решений $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Штурма-Лиувилля) вида

$$y'' + \left(\lambda^2 r(x) + q(x)\right) y = 0, \quad x \in [0, a],$$

где λ – большой параметр, а $r(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции, причём $r(x) > 0$. Им получены разложения вида

$$y_1(x,\lambda) = \left(y_{01}(x) + \frac{1}{\lambda}y_{11}(x) + ...\right) sin\left(\lambda\int\limits_0^x \sqrt{r(x)}dx\right),$$

$$y_2(x,\lambda) = \left(y_{02}(x) + \frac{1}{\lambda}y_{12}(x) + ...\right) cos\left(\lambda\int\limits_0^x \sqrt{r(x)}dx\right),$$

$$x \in [0,a].$$

В дальнейшем асимптотические представления решений стали применяться не только при исследовании сходимости разложений по собственным функциям, но и во многих задачах иного рода, включая прикладные задачи. Например, указанная работа Лиувилля была использована Де-Спааром [2] при интегрировании уравнения баллистики вращающегося артиллерийского снаряда, которое имеет вид

$$y^{''} + \lambda^2 r(x)y = 0, \quad r > 0,$$

при $\lambda \to \infty$. Построенная Де-Спааром асимптотика была обоснована Горном [3]. Фауллер и Локк [4] позже также использовали результаты Лиувилля в задаче о движении снаряда.

В XX веке важнейшие результаты об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с большим параметром были получены Биркгофом [5], Шлезингером [6] и Тамаркиным [7]. А В.И. Тржитзинский [8] обобщил теорию Шлезингера-Биркгофа-Тамаркина на интегро-дифференциальные уравнения. В послевоенные годы теория асимптотического интегрирования уравнений с большим параметром получила дальнейшее развитие в работах В.С.Пугачёва [9], А.А. Дородницина [10], И.М. Раппопорта [11], Н.Н. Моисеева [12,13] и других авторов. В работах Территина Х.Л. [14,15] и Сибуйя [16] рассматривается вопрос асимптотического расщепления нормальной системы линейных дифференциальных уравнений на подсистемы более низкого порядка, число которых определяется количеством тождественно кратных корней характеристического уравнения. Дальнейшее развитие это направление получило в работах С.В. Фещенко [17,18]. Н.И.Шкиль [19-22] провел в своих работах асимптотический анализ нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в случае кратных корней характеристического уравнения. Отметим ещё работы В. Вазова [23] и Э. Коддингтона, Н.Левинсона [24],в которых задачи с кратными корнями характеристического уравнения упрощаются с помощью соответствующих линейных преобразованиях. В работах М.В. Федорюка [25] рассмотрена, в частности, задача на бесконечном промежутке изменения независимой переменной, где асимптотическое разложение решений построено одновременно по малому параметру и независимой переменной (двойная асимптотика).

В упомянутых выше работах коэффициенты уравнений являются, как правило, произведениями степеней асимптотического параметра и зависящих от времени функцией. Единственной, исключая наши исследования, работой об асимптотическом интегрировании линейных дифференциальных уравнений, в которых кроме коэффициентов, зависящих от большого параметра ω указанным выше образом (их называют плавными, или медленными коэффициентами), имеются и высокочастотные (или быстрые) коэффициенты, является работа Ю.А. Далецкого [26] (см. эти результаты также в гл. VIII монографии [27]). При этом в [26]([27]) решается задача об асимптотическом расщеплении уравнений (в случае, например, простого спектра старшего операторного коэффициента задача приводит к реализации асимптотического интегрирования уравнения) и там рассматриваются не просто нормальные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, а линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с ограниченными операторными коэффициентами. К работам по асимптотическому интегрированию линейных дифференциальных уравнений с быстрыми коэффициентами относятся также работы В.Б.Левенштама, Г.Л.Хатламаджияна, Д.А.Басистой и Е.В.Крутенко [28-38]

Настоящая диссертация посвящена развитию теории асимптотического интегрирования систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих плавные и высокочастотные коэффициенты, пропорциональные определённым (в том числе, положительным) степеням частоты осцилляций. Полученные результаты развивают и дополняют соответствующие результаты Моисеева Н.Н.[12,13], Ю.Л. Далецкого [26,27] , Коддингтона Э. и Левинсона Н.[24], Эвельсона Р.Л.[39] .

Структура основных результатов диссертации следующая. 1. Для каждого типа рассматриваемых задач описан вид асимптотического разложения решения. 2. Показано, что вычисление любого коэффициента этого разложения сводится к решению конечного числа простых однозначно разрешимых задач без асимптотического параметра. 3. Построенная формальная асимптотика обоснована, т.е. доказаны оценки разности решений и частичных сумм асимптотик по определённым нормам.

Перейдём к изложению основных результатов. Предварительно договоримся о следующих обозначениях. Для непрерывной 2π-периодической по τ (вектор-) функции $a(t,\tau)$, где t - параметр, положим

$$\langle a(t,.)\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a(t,s)ds,$$

$$\{a(t,.)\} = a(t,\tau) - \langle a(t,\tau)\rangle .$$

Напомним, что (вектор-)функцию $\langle a(t,.)\rangle$ называют усреднением (вектор-) функции $a(t,\tau)$ по τ. В дальнейшем точкой будем обозначать производную по переменной t, а штрихом - по переменной τ.

Одной из основных задач диссертации является задача о построении и обосновании асимптотического разложения решения задачи Коши для однородных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \sum_{k=0}^{3} \omega^{\frac{3-k}{2}} b_k(t,\omega t)\right] x = 0, \quad t \in [0,T]$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega x_1,$$

и

$$\ddot{x}(t) + \omega^{\frac{2p-1}{2}} \left(\omega^{\frac{1}{2}} a_0^2(t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \omega^{-\frac{i}{2}} b_i(t,\omega t)\right) x(t) = 0,$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega^{\frac{p}{2}} x_1.$$

Здесь ω — большой вещественный параметр, $T > 0$, $p \in N, p \geqslant 3$, $a(t), a_0(t)$ и $b_k(t,\tau), k = 0,1,...,2p-1,$ — заданные на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty) \equiv \Pi$, соответственно, вещественные непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка и по τ – первого порядка. Предполагается, что $a(t) \neq \frac{k}{2}, k \in Z, a_0(t) \neq 0$, функции

$b_k(t,\tau)$ являются 2π-периодическими по τ, а x_0 и x_1 — заданные вещественные числа.

Второй основной задачей диссертации является построение и обоснование полных асимптотических разложений фундаментальных матриц решений (т.е. базиса в пространстве решений) для двух классов нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = \omega^{\frac{1}{2}} \left(A(t,\omega) + B(t,\omega t,\omega)\right) x(t), \quad t \in [0,T] \tag{0.1}$$

и

$$\dot{x}(t) = \Big(\omega A(t,\omega) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)\Big) x(t), \quad t \in [0,T] \tag{0.2}$$

где ω — большой вещественный параметр, $T > 0$, $m, n \in N$,

$$A(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} A_k(t), \quad B(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau),$$

A_k и $B_k, k = \overline{0,m}$ – квадратные матрицы порядка n. Предполагается, что элементы последних определены и непрерывны на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty)$, причём элементы матрицы A_k имеют на интервале $t \in (0,T)$ производные любого порядка, которые продолжимы до непрерывных на отрезке $t \in [0,T]$ функций, а матрицы $B_k(t,\tau)$ – 2π-периодичны по τ с нулевым средним: $\langle B_k(t,\tau)\rangle = 0$. В системе (0.1) матрица $A_0(t)$ имеет различные характеристические корни $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t)$, а в случае системы (0.2) рассмотрены два случая: 1) $\lambda_k(t) - \lambda_j(t) \neq is, s \in Z, k \neq j$, и 2) матрица $A_0(t)$ имеет единственный корень кратности n.

В диссертационной работе, помимо однородных дифференциальных уравнений второго порядка и однородных нормальных систем дифференциальных уравнений рассматриваются некоторые классы соответствующих неоднородных уравнений и систем. Подробнее об этом сказано во второй части введения. Решения всех рассматриваемых в диссертационной работе задач понимаются в классическом смысле.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, приложения и списка литературы, содержащего 39 наименований. Общий объём диссертации 144 страницы.

В первой главе исследуются дифференциальные уравнения второго порядка. Для формулировки основных результатов этой главы введём в рассмотрение следующие элементарные задачи, в которых функции a, b_2, b_3 – те же, что и выше.

Задачей типа (A) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0, \infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ с нулевым средним решения уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varphi(t, \tau),$$

где $t \in [0, T]$ — параметр, а $\varphi(t, \tau)$ — непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(B_\pm)$ назовём задачу на полуоси $\tau \in [0, \infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ решения уравнения

$$\frac{\partial w(t, \tau)}{\partial \tau} \pm 2ia(t)w(t, \tau) = \psi(t, \tau),$$

где $t \in [0, T]$ - параметр, а $\psi(t, \tau)$ - непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(C_\pm)$ назовём задачу Коши на участке $t \in [0, T]$ вида

$$\pm 2ia(t)\dot{u} + \left(\langle b_2(t, \tau) + b_3(t, \tau)\beta_\pm(t, \tau) \rangle \pm i\dot{a}(t) - \frac{\langle b_3(t, \tau) \rangle^2}{4a^2(t)} \right) u = \chi(t),$$

$$u(0) = u_0,$$

где $\chi(t), u_0$ — непрерывная функция и число, а $\beta_\pm(t,\tau) - 2\pi$-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения

$$\frac{\partial^2\beta_\pm}{\partial\tau^2} \pm 2ia(t)\frac{\partial\beta\pm}{\partial\tau} = \{b_3(t,\tau)\}_\tau\,.$$

Как известно, задачи $A, B_\pm$ и $C_\pm$ однозначно разрешимы, а потому решения задач B_- и C_- при замене ψ, χ и u_0 на их комплексно сопряжённые связаны с соответствующими решениями задач B_+ и C_+ операцией комплексного сопряжения.

Скажем теперь коротко об используемом методе построения формального асимптотического разложения решения. Такое разложение, представленное в виде соответствующего асимптотического ряда (в §1,например, это ряд (1.3)), подставляется в исходное уравнение и в полученном равенстве приравниваются коэффициенты при одинаковых функциях. В результате приходим к бесконечной последовательности равенств, каждое из которых разбивается затем с помощью операции усреднения $\langle ... \rangle$ по быстрой переменной $\tau = \omega t$ на два уравнения. Для однозначного определения медленных коэффициентов потребуются начальные условия (для быстрых имеется условие периодичности), которые определяются путём подстановки асимптотического ряда в заданные начальные условия и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ω.

Обоснование формального асимптотического разложения можно разбить на три пункта. В первом пункте производятся необходимые преобразования, во втором - доказывается вспомогательная лемма, в которой установлены априорные оценки решений, в третьем - доказываются оценки разности решений и частных сумм, отвечающих им асимптотик.

В §1 рассматривается обыкновенное однородное дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t,\omega t) + \omega b_2(t,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t,\omega t) + b_0(t,\omega t)\right] x = 0, \quad (0.3)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega x_1. \quad (0.4)$$

Данные задачи удовлетворяют указанным выше ограничениям.

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (0.3), (0.4) ищется в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s) + \sqrt{\omega}\mu_k(s))ds} \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)\right) \right), \quad (0.5)$$

где функции $v_{jk}(t,\tau)$ являются 2π — периодическими по τ с нулевым средним.

Частичную сумму ряда (0.5)

$$x^n(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s) + \sqrt{\omega}\mu_k(s))ds} \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega^{-\frac{j}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) \right), \quad (0.6)$$

$$(n = 0, 1, 2, ...)$$

будем называть n-ым приближением решения $x_\omega(t)$ рассматриваемой задачи (0.3), (0.4).

Основным результатом первого параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ эффективно строится*

n-ое приближение $x^n(t)$ решения $x_\omega(t)$ задачи (0.3), (0.4), которое является вещественным, и при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценкам

$$|x_\omega(t) - x^n(t)| \le C_n \omega^{\frac{-n-1}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega(t) - \dot{x}^n(t)| \le C_n \omega^{\frac{-n+1}{2}}.$$

Под эффективностью понимается тот факт, что построение приближения $x^n(t)$ сводится к решению конечного числа задач каждого из типов : A, B_+, C_+.

Рассматриваемый случай $a(t) \neq \frac{k}{2}, k \in Z$, называют нерезонансным. Резонансный случай исследован позже в работе Левенштама В.Б.[36].

Во втором параграфе рассматривается неоднородное уравнение вида

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t,\omega t) + \omega b_2(t,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t,\omega t) + b_0(t,\omega t)\right] x = \\ = e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right) ds} \left(f(t,\omega) + g(t,\omega,\omega t)\right), \end{aligned} \tag{0.7}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega x_1. \tag{0.8}$$

Здесь $T > 0, m \in Z$, $a(t), \mu_1(t), \mu_2(t), f_j(t)$ и $b_k(t,\tau), g_j(t,\tau), k = \overline{0,3}, j = \overline{-4,m}$, — заданные на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty) \equiv \Pi$, соответственно, непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка. Будем предполагать, что $a(t)$ и $\mu_1(t), \mu_2(t)$ – вещественные, а остальные функции могут быть комплекснозначными. Кроме того, $a(t)$ и $\mu_1(t)$ не принимают целых и полуцелых значений, а $b_j(t,\tau)$ и $g_k(t,\tau)$ – 2π-периодические по τ функции, а

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-4}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad g(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-4}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} g_k(t,\tau),$$

$m \geq -4$, где $f_k(t), \mu_1(t), \mu_2(t)$ и $g_k(t,\tau)$ — непрерывные при $(t,\tau) \in \Pi$ функции, сколь угодно гладкие по t , причём $\langle g_k(t,\tau)\rangle = 0$.

Положим

$$r = \begin{cases} 0, \quad a(t) \pm \mu_1(t) \neq n, n \in Z, t \in [0,T]; \\ -1, \quad a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau)\rangle \neq \mu_1(t)\mu_2(t), t \in [0,T]; \\ -2, \quad a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau)\rangle \equiv \mu_1(t)\mu_2(t), t \in [0,T]; \end{cases} \tag{0.9}$$

и будем рассматривать три указанные здесь ситуации.

Асимптотическое разложение решения задачи (0.7), (0.8) ищется в виде

$$x_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j+r}{2}} \left[\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) + \right.$$
$$\left. + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} (p_j(t) + q_j(t,\omega t)) \right],$$

где функции $v_{jk}(t,\tau)$ и $q_j(t,\tau)$ — 2π - периодичны по τ с нулевым средним.

Соответствующее n-ое приближение имеет вид

$$x_\omega^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \omega^{-\frac{j+r}{2}} \left[\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) + \right.$$
$$\left. + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} (p_j(t) + q_j(t,\omega t)) \right],$$

Введём в рассмотрение ещё одну элементарную задачу. Задачей типа (D) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ решения уравнения

$$q''(t,\tau) + 2i\mu_1(t)q'(t,\tau) + (a^2(t) - \mu_1^2(t))q(t,\tau) = g(t,\tau),$$

где $t \in [0,T]$ - параметр, а $g(t,\tau)$ - непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Легко видеть, что в условиях (0.9) эта задача однозначно разрешима.

Справедлив следующий результат.

Теорема 1.2. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ эффективно строится n-ое приближение $x^n(t)$ решения $x_\omega(t)$ задачи (0.7), (0.8), которое при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценкам*

$$|x_\omega(t) - x^n(t)| \leq C_n \omega^{\frac{-n-1-r}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega(t) - \dot{x}^n(t)| \leq C_n \omega^{\frac{-n+1-r}{2}}.$$

Под эффективным построением приближения решения в этой теореме понимается тот факт, что для построения каждого слагаемого приближения сводится к решению конечного числа линейных однозначно разрешимых задач без асимптотического параметра типов $A, B_\pm, C_\pm$, а в первом случаи ещё и типа D.

Доказательство теоремы 1.2 приведено в приложении.

В третьем параграфе для любого натурального числа $p > 2$ (случай $p = 2$ исследован в первом параграфе) рассматривается задача Коши

$$\ddot{x}(t) + \omega^{\frac{2p-1}{2}} \left(\omega^{\frac{1}{2}} a_0^2(t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \omega^{-\frac{i}{2}} b_i(t, \omega t) \right) x(t) = 0, \quad t \in [0,T] \qquad (0.10)$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega^{\frac{p}{2}} x_1, \qquad (0.11)$$

где $a_0(t) \neq 0$ при всех $t \in [0,T]$, число p называется рангом (в соответствии с [12]). .

Асимптотическое разложение решения задачи Коши (0.10), (0.11) ищется в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega^{\frac{p}{2}} \lambda_{1,k}(s) + \sum\limits_{l=1}^{p-2} \omega^{\frac{p-l}{2}} \mu_{lk}(s, \omega s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s) \right) ds} \times$$

$$\times \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t) \right) \right),$$

где функции $v_{jk}(t,\tau), j = 1,2,..., k = 1,2,$ и $\mu_{lk}(t,\tau), l = 1,2,...,p-2, k = 1,2$ являются 2π-периодическими по τ, и $v_{jk}(t,\tau), j = 1,2,..., k = 1,2,$ имеют нулевые среднии.

Частичную сумму

$$x^n(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega^{\frac{p}{2}} \lambda_{1,k}(s) + \sum\limits_{l=1}^{p-2} \omega^{\frac{p-l}{2}} \mu_{lk}(s,\omega s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s) \right) ds} \times$$

$$\times \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t) \right) \right), n \in N,$$

ряда $x(t)$ будем называть n-ым приближением решения задачи Коши (0.10), (0.11).

Имеет место следующий результат.

Теорема 1.3.*Для любого натурального n построение приближения x^n решения задачи Коши (0.10)-(0.11) сводится к решению конечного числа задач типов A и C_+. При этом вектор-функция x^n вещественна, и справедливы оценки*

$$\sup_{t \in [0,T]} |x(t) - x^n(t)| \leq C_1 \omega^{-\frac{n+1}{2}},$$

$$\sup_{t \in [0,T]} |\dot{x}(t) - \dot{x}^n(t)| \leq C_2 \omega^{-\frac{n+1-p}{2}},$$

где C_1 и C_2 – не зависимые от ω постоянные.

Эффективность здесь понимается аналогично том, как она понимается в теореме 1.2.

В §4 рассматривается неоднородное уравнение произвольного ранга $p > 2$

$$\ddot{x}(t)+\omega^{\frac{2p-1}{2}}\left(\omega^{\frac{1}{2}}a_0^2(t)+\sum_{i=0}^{2p-1}\omega^{-\frac{i}{2}}b_i(t,\omega t)\right)x(t)=e^{i\omega^{\frac{p}{2}}\int\limits_0^t r(s)ds}(f(t,\omega)+g(t,\tau,\omega)),\tag{0.12}$$

где

$$f(t,\omega)=\sum_{k=-2p}^{m}\omega^{-\frac{k}{2}}f_k(t),\quad g(t,\tau,\omega)=\sum_{k=-2p}^{m}\omega^{-\frac{k}{2}}g_k(t,\tau),$$

с начальными условиями

$$x(0)=x_0,\qquad \dot{x}(0)=\omega^{\frac{p}{2}}x_1,\tag{0.13}$$

где параметр $\omega >> 1, m \in Z$. Вещественные функции $a_0(t), r(t)$ и комплекснозначные $f_k(t)$, $b_i(t,\tau)$и $g_k(t,\tau)$ определены и непрерывны на множествах $t \in [0,T], (t,\tau) \in [0,T]\times[0,\infty)$ соответственно, причём b_i, g_k – 2π-периодичные по τ , а g_k имеет нулевое среднее по τ, $a_0(t)\neq 0,\quad a_0^2(t)\neq r^2(t), \forall t\in[0,T]$, x_0 и x_1 – некоторые комплексные заданные числа.

Асимптотическое разложение решения данной задачи Коши ищется в виде

$$x(t)=\sum_{k=1}^{2}e^{\int\limits_0^t\left(\omega^{\frac{p}{2}}\lambda_{1,k}(s)+\sum\limits_{l=1}^{p-2}\omega^{\frac{p-l}{2}}\mu_{lk}(s,\omega s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds}\times$$
$$\times\left(u_{0k}(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(u_{jk}(t)+v_{jk}(t,\omega t)\right)\right)+$$
$$+e^{i\omega^{\frac{p}{2}}\int\limits_0^t r(s)ds}\sum_{j=1}^{n}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(p_j(t)+q_j(t,\omega t)\right),$$

где функции $v_{jk}(t,\tau), j=1,2,...,k=1,2,$ и $q_j(t,\tau), l=1,2,...,p-2, k=1,2$ являются 2π-периодическими по τ с нулевыми средними.

Справедлив следующий результат.

Теорема 1.4. *Для любого $n \in N$ найдутся такие положительные числа c_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ эффективно строится n-ое приближение x^n решения задачи Коши (0.12)-(0.13), которое при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценкам*

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t) - x^n(t)| \le C_1 \omega^{\frac{-n-1}{2}},$$
$$\sup_{t\in[0,T]} |\dot{x}(t) - \dot{x}^n(t)| \le C_2 \omega^{\frac{-n-1+p}{2}},$$

где C_1 и C_2 – не зависимые от ω постоянные.

Эффективность понимается в том же , что и в теоремах 1.2, 1.3 смысле.

Отметим, что рассматриваемые в гл. I уравнения 2-го порядка аналогичны соответствующим уравнениям Н.Н. Моисеевым [12, гл. IV], в которых высокочастотные слагаемые отсутствуют.

Перейдём ко второй главе.

Здесь, а также в третьей главе, многократно будем пользоваться следующими обозначениями. По любой квадратной матрице S определим матрицы $\overline{S}$ и $\widehat{S}$, где $\overline{S}$ получена из S заменой в последней диагональных элементов нулями, а $\widehat{S} = S - \overline{S}$.

В первом параграфе этой главы рассматривается нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \omega^{\frac{1}{2}} \left(A(t,\omega)x(t) + B(t,\omega t,\omega)\right) x(t), \omega >> 1, \tag{0.14}$$

где

$$A(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} A_k(t), B(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau),$$

A_k и $B_k, k = \overline{0,m}$ – квадратные матрицы порядка n. Будем предполагать, что элементы последних определены и непрерывны на множествах $t \in$

$[0, T]$ и $(t, \tau) \in [0, T] \times [0, \infty)$, причём они имеют на интервале $t \in (0, T)$ производные любого порядка, которые продолжимы до непрерывных на отрезке $t \in [0, T]$ функций, а матрицы $B_k(t, \tau)$ – 2π -периодичны по τ с нулевым средним: $\langle B_k(t, \tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} B_k(t, \tau) d\tau = 0$. Предположим ещё, что матрица $A_0(t)$ имеет различные характеристические корни $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t), t \in [0, T]$.

Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений системы (0.14) ищется в виде

$$X(t) = \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(P_j(t) + H_j(t, \omega t) \right) \right] e^{Q(t, \omega)},$$

где $P_j(t)$ и $H_j(t, \tau)$ – квадратные матрицы порядка n, причём $H_j(t, \tau)$ – 2π-периодичны по τ с нулевым средним, $P_0(t)$ – невырождены, диагональные элементы матриц $P_0^{-1}(0) P_j(0), j \geq 1$, равны нулю, $Q(t, \omega) = \omega^{\frac{1}{2}} Q_{-1}(t) + Q_0(t), Q_{-1}(t) = \left(q_{ij}^{(-1)}(t) \right)$ и $Q_0(t) = \left(q_{ij}^{(0)}(t) \right)$ – диагональные матрицы порядка n, удовлетворяющие условиям $Q_{-1}(0) = Q_0(0) = 0$.

Положим

$$P^l(t, \omega) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{l} \omega^{-\frac{j}{2}} P_j(t),$$

$$H^l(t, \tau, \omega) = \sum_{j=1}^{l} \omega^{-\frac{j}{2}} H_j(t, \tau);$$

p_l^k и h_l^k — k-ые столбцы матриц P^l и H^l соответственно;

$$\varphi_l^k = (p_l^k + h_l^k);$$

q_k — k-ый диагональный элемент матрицы Q; символами $\|A\|$ и $|a|$ будем обозначать какие-либо согласованные нормы матрицы A и вектора a.

Имеет место следующий результат

Теорема 2.1. *Существует число $\omega_0 > 0$, такое что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k = \overline{1,n}$ найдётся решение φ^k системы уравнений (0.14), для которого при всех целых неотрицательных l выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^k(t)e^{-q_k} - \varphi_l^k(t)| \leq \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2}}},$$

где $c = c(l)$ – не зависящая от ω константа. При этом столбцы $\varphi^k, k = \overline{1,n}$, составляют фундаментальную матрицу решений.

В конце параграфа построено асимптотическое разложение решения неоднородной задачи Коши вида

$$\dot{x}(t) = \left[\omega^{\frac{1}{2}}A(t,\omega) + \omega^{\frac{1}{2}}B(t,\omega t,\omega)\right] x(t) + f(t,\omega) + d(t,\omega t,\omega),$$

$$x(0) = x_0$$

на участке $t \in [0,T]$, где

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-1}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad d(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-1}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} d_k(t,\tau),$$

m– натуральное число.

Здесь элементы вектор-функций $f_k(t)$ и $d_k(t,\tau)$ относятся к тем же классам функций , что и элементы матриц $A_k(t)$ и $B_k(t,\tau)$ соответственно, кроме того, элементы d_k имеют нулевое среднее по τ.

Асимптотическое разложение частного решения рассматриваемой задачи построено в виде

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left[v_j(t) + w_j(t,\omega t)\right],$$

где w_j – 2π-периодические по τ вектор-функции с нулевым средним.

Для данной неоднородной задачи и последующих линейных неоднородных задач при построении асимптотик решений задач Коши мы ограничиваемся построением формальных асимптотик их частных решений. Отметим, что асимптотики соответствующих однородных задач строятся с обоснованием предварительно. Формальные асимптотики указанных частных решений можно обосновать аналогично.

Перейдём к третьей главе.

В первом параграфе этой главы рассматривается нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \omega A(t,\omega)x(t) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)x(t), \omega >> 1, \qquad (0.15)$$

где

$$A(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} A_k(t), \quad B(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau),$$

в случае когда характеристические числа матрицы A_0 удовлетворяют условию $\lambda_k - \lambda_j \neq si, s \in Z$. Это нерезонансный случай. Резонансный случай исследован В.Б. Левенштамом [36].

Заметим, что в [26] исследованы уравнения аналогичного (0.15) вида, но в банаховом пространстве с ограниченными операторами A и B. При этом, однако, в [26] отсутствует большой сомножитель $\omega^{\frac{1}{2}}$ при быстро осциллирующем слагаемом. Кроме этого, здесь используется более простая, отвечающая конечномерной ситуации, техника.

Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений системы (0.15) построено в виде

$$X(t) = \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(P_j(t) + H_j(t,\omega t) \right) \right] e^{Q(t,\omega)},$$

где

$$Q(t,\omega) = \omega Q_{-2}(t) + \omega^{\frac{1}{2}} Q_{-1}(t) + Q_0(t), Q_k(t) = (q_{ij}^k(t)), k = -2, -1, 0,$$

– диагональные матрицы, удовлетворяющие условиям $Q_k(0) = 0$, матрицы $P_0(t)$ - невырождены, диагональные элементы матриц $S_0(t) = P_0^{-1}(0)P_j(0)$ -нулевые, а матрицы $H_j(t,\tau), j = 1, 2, ...,$ являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним.

При введённых во второй главе обозначениях имеет место следующий результат.

Теорема 3.1. *Существует $\omega_0 > 0$, такое что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k = \overline{1,n}$ найдётся решение φ^k системы уравнений (0.15), для которых при всех целых неотрицательных l выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^k e^{-q_k} - \varphi_l^k| \leq \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2}}},$$

где $c = c(l)$ – не зависящая от ω константа.

Отметим, что для систем (0.14) и (0.15) в отсутствие быстрых слагаемых ($B(t,\tau,\omega) = 0$) аналогичный результат имеется в монографии Э.А. Коддингтона, Н. Левинсона [24, гл. VI].

В конце параграфа построено асимптотическое разложение решения неоднородной задачи Коши вида

$$\dot{x}(t) = \omega A(t,\omega)x(t) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)x(t) + f(t,\omega) + d(t,\omega t,\omega), \omega >> 1.$$

Здесь

$$A(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} A_k(t), \quad B(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{s} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau),$$

причём матрица $A_0(t)$ имеет различные характеристические числа

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-2p}^{s} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad d(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-2p}^{s} \omega^{-\frac{k}{2}} d_k(t,\tau),$$

Элементы вектор-функций $f_k(t)$ и $d_k(t,\tau)$ относятся к тем же классам функций , что и элементы матриц $A_k(t)$ и $B_k(t,\tau)$соответственно, кроме того, элементы d_k имеют нулевое среднее по τ.

Асимптотическое разложение частного решения ищется в виде

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left[v_j(t) + w_j(t, \omega t) \right],$$

где w_j – 2π-периодические по τ вектор-функции с нулевым средним.

Во втором параграфе этой главы рассматривается система того же вида, но в случае, когда матрица A_0 имеет единственный характеристический корень кратности n.

В этом параграфе для любой матрицы порядка m положим

$$C = \sum_{j=1-m}^{m-1} C_{(j)},$$

где $C_{(j)}$ – матрица порядка m, у которой j-ая диагональ совпадает с j-ой диагональю матрицы C, а все остальные элементы равны нулю.

А также для формулировки основного второго параграфа этой главы введем в рассмотрение следующую задачу

Именно, рассматривается нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \omega \left[\mu(t) E + J_1 \right] x + \omega^{\frac{1}{2}} \left[A(t) + B(t, \omega t) \right] x, \omega >> 1. \tag{0.16}$$

Здесь $\mu(t), t \in [0,T]$, – непрерывная комплекснозначная функция, A и B – квадратные матрицы порядка m с комплексными, вообще говоря, коэффициентами, E – единичная матрица, J_1 – первый единичный косой ряд (так что матрица в скобках при ω в (0.16) – верхняя жорданова клетка порядка m с характеристическим числом $\mu(t)$). Элементы матриц A и B определены и непрерывны на множествах $t \in [0, T]$ и $(t, \tau) \in [0, T] \times [0, \infty)$ соответственно. Матрица $B(t, \tau)$ является 2π-периодической по τ с нулевым средним:

$$\langle B(t, \tau) \rangle := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} B(t, \tau) d\tau = 0.$$

По аналогии с [12, 13, 39] фундаментальную матрицу решений системы (0.15) можно представить в виде

$$X = \Lambda(\omega) \left(U(\omega, t) + \omega^{-\beta} V(\omega, t, \omega t) \right) \times e^{\int\limits_0^t (\omega\mu(s)E + \omega^{\alpha}\Phi) ds},$$

где Λ, U, V и Φ – искомые матрицы, причём Λ, Φ – диагональные, а элементами матрицы V являются 2π-периодические по последнему аргументу $\tau = \omega t$ функции с нулевыми средними, α и β – искомые положительные числа.

Введём следующие обозначения:

$$U^l(t, \omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} U_j(t),$$

$$V^l(t, \tau, \omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} V_j(t, \tau),$$

$$\Phi^l(t, \tau, \omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} \Phi_j(t, \tau),$$

где $l \in N$ или $l = \infty, U^{\infty} \equiv U, V^{\infty} \equiv V$; u_l^k и v_l^k – k-тые столбцы матриц U^l и V^l соответственно, $q_k = \int\limits_0^t \left(\omega\mu(s) + \omega^{\frac{2m-1}{2m}} \lambda_k \right) ds, \varphi_l^k(t) = \left(u_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_l^k \right)$.

Теорема 3.2. *Существует $\omega_0 > 0$, такое что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k = \overline{1, m}$ найдётся решение φ^k системы уравнений (0.16), для которого при* *всех целых неотрицательных* l *выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^k(t)e^{-q_k} - \varphi_l^k(t)| \leq \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2m}}},$$

где $c = c(l)$ *– не зависящая от* ω *константа..*

Отметим, что в работах [12, 13, 39] исследовалась система вида (0.16) без сомножителя $\omega^{\frac{1}{2}}$ и высокочастотного слагаемого $B(t,\tau)$. При этом обоснование асимптотик там практически отсутствует.

1 Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Асимптотика решения задачи Коши.

§1. Однородное уравнение

1°. **Формулировка.** Пусть $T > 0$, $a(t)$ и $b_k(t,\tau), k = 0,1,2,3,$ — заданные на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty) \equiv \Pi$, соответственно, вещественные непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка. Будем предполагать, что $a(t)$ не принимает целых и полуцелых значений $\left(a(t) \neq \frac{n}{2}, n \in Z\right)$, а функции $b_k(t,\tau), k = 0,1,2,3,$ являются 2π-периодическими по τ, причём $b_k(t,\tau)$ имеют непрерывные на Π производные по τ.

Рассмотрим на участке $t \in [0,T]$ задачу Коши

$$\ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t,\omega t) + \omega b_2(t,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t,\omega t) + b_0(t,\omega t)\right] x = 0, \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega x_1, \quad (1.2)$$

где ω — большой вещественный параметр, а x_0 и x_1 — заданные вещественные числа.

Замечание 1.1. Вместо второго условия (1.2) можно рассматривать условие вида $\dot{x}(0) = \omega x_2 + \omega^{\frac{1}{2}} x_1 + x_0$. Кроме того, к коэффициентам уравнения (1.1) и к правым частям (1.2) можно добавить слагаемые, пропорциональные степеням $\omega^{-\frac{n}{2}}$, где n — натуральное. При этом, как видно из дальнейших рассуждений, алгоритм построения асимптотики и его обоснование, по существу, не меняются.

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (1.1), (1.2) согласно методу ВКБ и методу двухмасштабных разложений будем строить в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))ds} \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)\right) \right), \quad (1.3)$$

где $v_{jk}(t,\tau)$ – 2π-периодичны по τ с нулевым средним:

$$\langle v_{jk}(t,\tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v_{jk}(t,s)ds = 0. \quad (1.4)$$

Функции $\lambda_k(t), \mu_k(t), u_{jk}(t)$ и $v_{jk}(t,\tau)$, входящие в (1.3), будем искать следующим образом. Подставим ряд (1.3) в уравнение (1.1) и приравняем в левой и правой частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых функциях. Отметим, что указанные функции имеют вид

$$\omega^{\frac{m}{2}} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))ds}, \quad m = 4, 3, 2, ..., \quad k = 1, 2. \quad (1.5)$$

Получим бесконечную последовательность равенств, каждое из которых разобьём затем с помощью операции усреднения $<...>$ по быстрой переменной $\tau = \omega t$ на два уравнения. В результате найдём неизвестные λ_k, μ_k ,а также получим уравнения для коэффициентов $v_{jk}(t,\tau)$ и коэффициентов $u_{jk}(t)$. Коэффициенты $v_{jk}(t,\tau)$ однозначно определяются построенными уравнениями в силу условия (1.4). Для однозначного определения коэффициентов $u_{jk}(t)$ требуются начальные условия, которые находим, подставив ряд (1.3) в равенства (1.2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ω.

Частичную сумму ряда (1.3)

$$x^n(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))ds} \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega^{-\frac{j}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) \right), \quad (1.6)$$

$$(n = 0, 1, 2, ...)$$

будем называть n-ым приближением решения $x_\omega(t)$ задачи (1.1), (1.2). Для формулировки основных результатов этой главы введём в рассмотрение следующие задачи.

Задачей типа (A) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0, \infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ с нулевым средним решения уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varphi(t, \tau),$$

где $t \in [0, T]$ — параметр, а $\varphi(t, \tau)$ — непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(B_\pm)$ назовём задачу на полуоси $\tau \in [0, \infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ решения уравнения

$$\frac{\partial w(t, \tau)}{\partial \tau} \pm 2ia(t)w(t, \tau) = \psi(t, \tau), \tag{1.7}$$

где $t \in [0, T]$ - параметр, а $\psi(t, \tau)$ - непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(C_\pm)$ назовём задачу Коши на участке $t \in [0, T]$ вида

$$\pm 2ia(t)\dot{u} + \left(\langle b_2(t, \tau) + b_3(t, \tau)\beta_\pm(t, \tau) \rangle \pm i\dot{a}(t) - \frac{\langle b_3(t, \tau) \rangle^2}{4a^2(t)} \right) u = \chi(t),$$

$$u(0) = u_0,$$

где $\chi(t)$ — непрерывная функция, u_0 – число, а $\beta_\pm(t, \tau) - 2\pi$-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \beta_\pm}{\partial \tau^2} \pm 2ia(t)\frac{\partial \beta \pm}{\partial \tau} = \{b_3(t, \tau)\}_\tau .$$

Определение операции $\{...\}_\tau$ см. на стр. 5.

Теорема 1.1. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ эффективно строится n-ое приближение $x^n(t)$ решения $x_\omega(t)$ задачи* (1.1), (1.2), *которое является вещественным и при всех $t \in [0, T]$ удовлетворяет оценкам*

$$|x_\omega(t) - x^n(t)| \le C_n \omega^{\frac{-n-1}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega(t) - \dot{x}^n(t)| \le C_n \omega^{\frac{-n+1}{2}}. \tag{1.8}$$

Под эффективностью понимается тот факт, что построение приближения $x^n(t)$ сводится к решению конечного числа задач каждого из типов : A, B_+, C_+.

Замечание 1.2. Говоря о действиях, к которым сводится построение приближения, мы исключаем арифметические операции, операцию дифференцирования известных функций и операцию определения среднего известных непрерывных периодических функций.

2°. **Построение формальной асимптотики.**

Начнём с формулировок двух известных простых утверждений.

Лемма 1.1. *Задача типа (A) имеет единственное решение*

$$v(t,\tau) = \left\{ \int\limits_0^\tau \varphi(t,s)ds \right\}_\tau .$$

Доказательство известной леммы 1 опускается.

Лемма 1.2. *Задача типа ($B_\pm$) имеет единственное решение*

$$w_\pm(t,\tau) = \int\limits_0^\tau e^{\mp 2ia(t)(\tau - s)}\psi(t,s)ds + \Big(1 - e^{\mp 4\pi a(t) i}\Big)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{\mp 2ia(t)(2\pi - s + \tau)}\psi(t,s)ds, \tag{1.9}$$

причём $\langle w_\pm(t,\tau)\rangle = 0$.

Действительно, каждое из двух уравнений (1.7) имеет единственное 2π-периодическое по τ решение $w(t,\tau)$, и последние имеют вид (1.9) (см., например,[42], с.34). Применив к равенствам (1.5) операцию $\langle \ldots \rangle$ усреднения по τ, получим $\langle w(t,\tau)\rangle = 0$.

Задача типа $(C_{\pm})$ также, очевидно,однозначно разрешима.

Для нахождения неизвестных функций, входящих в (1.6), дважды формально продифференцируем равенство (1.3).

$$
\begin{gathered}
\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))ds} \Bigg[\Big(\omega\lambda_k(t) + \sqrt{\omega}\mu_k(t)\Big)\times \\
\times\Big(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}}\Big(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)\Big)\Big)+ \qquad (1.10) \\
+\dot{u}_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}}\Big(\dot{u}_{jk}(t) + \dot{v}_{jk}(t,\omega t) + \omega v_{jk}^{'}(t,\omega t)\Big)\Bigg],
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))ds} \Bigg[\big(\omega\lambda_k(t) + \sqrt{\omega}\mu_k(t)\big)\Bigg[\big(\omega\lambda_k(t) + \sqrt{\omega}\mu_k(t)\big)\times \\
\times\Big(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}}\big(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)\big)\Big)+ \\
+2\Big[\dot{u}_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}}\,\Big(\dot{u}_{jk}(t) + \dot{v}_{jk}(t,\omega t) + \omega v_{jk}^{'}(t,\omega t)\Big)\Big]\Bigg]+ \qquad (1.11) \\
+\big(\omega\dot{\lambda}_k(t) + \sqrt{\omega}\dot{\mu}_k(t)\big)\Big(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}}\big(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)\big)+ \\
+\ddot{u}_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}}\big(\ddot{u}_{jk}(t) + \ddot{v}_{jk}(t,\omega t) + 2\omega\dot{v}_{jk}^{'}(t,\omega t) + \omega^2 v_{jk}^{''}(t,\omega t)\big)\Big)\Bigg].
\end{gathered}
$$

Подставим выражения (1.3), (1.10) в уравнение (1.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим последовательность пар уравнений, первая из которых (равенство коэффициентов при функциях (1.5) в случае

$m = 4$) имеет вид

$$\left(\lambda_k^2(t) + a^2(t)\right) u_{0k}(t) = 0, k = 1, 2. \tag{1.12}$$

Положим

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm a(t) i, \tag{1.13}$$

тогда равенства (1.12) будут выполнены.

Вторая пара уравнений ($m = 3$) имеет вид

$$(2\lambda_k \mu_k + b_3)\, u_{0k} + \left(\lambda_k^2 + a^2\right)(u_{1k} + v_{1k}) + 2\lambda_k v_{1k}^{'} + v_{1k}^{''} = 0, \quad k = 1, 2. \tag{1.14}$$

Применяя к последнему уравнению операцию $< ... >$ усреднения по τ, и учитывая (1.12), получим равенства

$$2\lambda_k \mu_k u_{0k} + \langle b_3 \rangle\, u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{1.15}$$

из которых, с учётом (1.13), находим

$$\mu_{1,2}(t) = \mp \frac{\langle b_3(t, \tau) \rangle\, i}{2a(t)}. \tag{1.16}$$

Разность уравнений (1.14) и (1.15) имеет вид

$$v_{1k}^{''} + 2\lambda_k v_{1k}^{'} + \{b_3\}_\tau\, u_{0k} = 0, \quad \langle v_{1k} \rangle = 0, \quad k = 1, 2. \tag{1.17}$$

Произведя в задачах (1.17) замену

$$v_{1k}^{'} = w_{1k} u_{0k}, \quad \langle w_{1k} \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \tag{1.18}$$

мы преобразуем их к задачам типа ($B\pm$) и найдём, согласно лемме 2,

$$w_{1k}(t, \tau) = \left(1 - e^{\mp 4a(t)\pi}\right)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \{b_3(t, s)\}_s\, e^{\pm 2a(t) i (s - \tau - 2\pi)} ds +$$

$$+\int\limits_0^\tau \{b_3(t,s)\}_s\, e^{\pm 2a(t)i(s-\tau)} ds \equiv \alpha_k(t,\tau), \quad k=1,2, \tag{1.19}$$

где

$$\alpha_k(t,\tau+2\pi)=\alpha_k(t,\tau), \qquad \langle \alpha_k(t,\tau)\rangle = 0.$$

Заметим, что $\alpha_1(t,\tau)=\overline{\alpha_2}(t,\tau)$, а потому для нахождения функций $w_{1k}(t,\tau), k =$ достаточно решить лишь задачу B_+ и воспользоваться операцией комплексного сопряжения. Подставив выражения (1.19) в (1.18), придём к задачам типа (A), которые, согласно лемме 1, однозначно разрешимы, и их решения имеют вид:

$$v_{1k}(t,\tau)=\beta_k(t,\tau)u_{0k}(t), \tag{1.20}$$

где

$$\beta_k(t,\tau)=\int\limits_0^\tau \alpha_k(t,s)ds - \left\langle \int\limits_0^\tau \alpha_k(t,s)ds \right\rangle. \tag{1.21}$$

Здесь опять достаточно решить лишь одну задачу типа (A) и, найдя $\beta_1(t,\tau)$, положить $\beta_2(t,\tau)=\overline{\beta_1}(t,\tau)$.

Третья пара уравнений ($m=2$) рассматриваемой нами последовательности имеет вид

$$\lambda_k^2\left(u_{2k}+v_{2k}\right)+2\lambda_k\mu_k\left(u_{1k}+v_{1k}\right)+\mu_k^2 u_{0k}+2\lambda_k\dot{u}_{0k}+\dot{\lambda}_k u_{0k}+v_{2k}''+$$

$$+a^2\left(u_{2k}+v_{2k}\right)+b_3\left(u_{1k}+v_{1k}\right)+b_2u_{0k}=0, \quad k=1,2.$$

Применяя к этим уравнениям операцию $\langle\ldots\rangle$ усреднения по $\tau=\omega t$, и учитывая равенства (1.12), (1.15), получим

$$\left(\mu_k^2+\dot{\lambda}_k+\langle b_2\rangle\right)u_{0k}2\lambda_k\dot{u}_{0k}+\langle b_3v_{1k}\rangle=0.$$

Отсюда в силу (1.13), (1.16), (1.20) вытекают равенства

$$\pm 2a(t)i\dot{u}_{0k}(t) + \left(\langle b_2(t,\tau) + b_3(t,\tau)\beta_k \rangle \pm \dot{a}(t)i - \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)} \right) u_{0k} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{1.22}$$

Для нахождения соответствующих уравнениям (1.22) начальных условий положим в равенствах (1.3) и (1.9) $t = 0$ и приравняем коэффициенты в их левых и правых частях при одинаковых степенях ω. Для неизвестных $u_{0k}(0)$ получим таким образом соотношения

$$\begin{cases} u_{01}(0) + u_{02}(0) \ = \ x_0, \\ \lambda_1 u_{01}(0) + \lambda_2 u_{02}(0) \ = \ x_1. \end{cases} \tag{1.23}$$

Эта система имеет единственное решение u_{01}, u_{02}, причём $u_{01} = \overline{u}_{02}$. Последнее соотношение является следствием того факта, что наряду с решением u_{01}, u_{02} системы (1.23), её решением, очевидно, является $\overline{u}_{02}, \overline{u}_{01}$.

Задачи Коши для уравнений (1.22) с начальными условиями

$$u_{0k}(0) = u_{0k}, \qquad k = 1, 2, \tag{1.24}$$

соответствуют задачам типа $(C\pm)$. Определив из (1.22), (1.24) функции $u_{0k}(t), k = 1, 2$, найдём по формулам (1.20) функции $v_{1k}(t,\tau)$. Ясно, что $u_{01}(t) = \overline{u}_{02}(t), v_{11}(t,\tau) = \overline{v}_{12}(t,\tau)$. Опять заметим, что нахождение функций $u_{0k}(t)$ сводится к решению задачи C_+ и последующему применению операции сопряжения.

Предположим теперь, что для некоторого числа N нахождение функций $u_{jk}, v_{j+1,k}, k = 1, 2, j \le N$, сводится к решению $(j+1)$ задач типов: A, B_+ и C_+, причём $u_{j1}(t) = \overline{u}_{j2}(t), v_{j+1,1}(t,\tau) = \overline{v}_{j+1,2}(t,\tau)$, а значит функции $x^j, 0 \le j \le N$, вещественны. Покажем, что тогда для нахождения неизвестных $u_{N+1,k}, v_{N+2,k}$ достаточно будет решить по одной задаче типов: $(A)\,,(B_+)\,,(C_+)$, и при этом $u_{N+1,1}=\overline{u}_{N+1,2}, v_{N+2,1}=\overline{v}_{N+2,1}$. Для этого рассмотрим пару уравнений введённой выше последовательности, полученных приравниванием коэффициентов при функциях вида (1.11) в случае $m=N-2:$

$$\left(\lambda_k^2(t)+a^2(t)\right)(u_{N+2,k}+v_{N+2,k})+(2\lambda_k\mu_k+b_3(t,\tau))\,(u_{N+1,k}+v_{N+1,k})+$$
$$+\left(\mu_k^2+\dot\lambda_k+b_2(t,\tau)\,(u_{N,k}+v_{N,k})+(\dot\mu_k+b_1(t,\tau))\,(u_{N-1,k}+v_{N-1,k})+\right.$$
$$+2\mu_k\left(\dot u_{N-1,k}+\dot v_{N-1,k}+v^{'}_{N+1,k}\right)+\ddot u_{N-2,k}+\ddot v_{N-2,k}+2\dot v^{'}_{N,k}+v^{''}_{N+2,k}+\quad(1.25)$$
$$+b_0\,(u_{N-2,k}+v_{N-2,k})\,2\lambda_k\left(\dot u_{N,k}+\dot v_{N,k}+v^{'}_{N+2,k}\right)=0,\quad k=1,2.$$

Применяя к ним операцию усреднения по τ, получим равенства

$$\mu_k^2u_{N,k}+\dot\lambda_ku_{N,k}+\dot\mu_ku_{N-1,k}+2\lambda_k\dot u_{N,k}+2\mu_k\dot u_{N-1,k}+\ddot u_{N-2,k}+$$
$$+\langle b_3(t,\tau)v_{N+1,k}\rangle+\langle b_2(t,\tau)\rangle\,u_{N,k}+\langle b_2(t,\tau)v_{N,k}\rangle+\langle b_1(t,\tau)\rangle\,u_{N-1,k}\quad(1.26)$$
$$+\langle b_1(t,\tau)v_{N-1,k}\rangle+\langle b_0(t,\tau)\rangle\,u_{N-2,k}+\langle b_0(t,\tau)v_{N-2,k}\rangle=0,k=1,2.$$

Эти равенства используются при определении коэффициентов $u_{N,k}$. Поскольку последние по предположению найдены, то здесь этими уравнениями заниматься не будем.

Разность уравнений (1.25) и (1.26) имеет вид

$$v^{''}_{N+2,k}+2\lambda_kv^{'}_{N+2,k}+\{b_3\}_\tau\,u_{N+1,k}=$$
$$=\langle b_3v_{N+1,k}\rangle-(2\lambda_k\mu_k+b_3)\,v_{N+1,k}-2\mu_kv^{'}_{N+1,k}-\left(\mu_k^2+\dot\lambda_k+b_2\right)v_{N,k}-$$
$$-2\lambda_k\dot v_{N,k}+\langle b_2v_{N,k}\rangle+\langle b_1v_{N-1,k}\rangle-\dot\mu_kv_{N-1,k}-\ddot v_{N-2,k}-b_0v_{N-2,k}+\quad(1.27)$$
$$+\langle b_0v_{N-2,k}\rangle-\{b_2\}_\tau\,u_{N,k}-\{b_1\}_\tau\,u_{N-1,k}-\{b_0\}_\tau\,u_{N-2,k}\equiv\psi_{n+2,k},$$

$$k = 1, 2.$$

Произведя в задачах (1.27) замену

$$v'_{N+2,k} = w_{N+2,k}, \tag{1.28}$$

преобразуем их к задачам типа $(B_{\pm})$ и найдём, согласно лемме 2,

$$w_{N+2,k}(t,\tau) = \int_0^\tau \left(\{b_3(t,s)\}_\tau \, u_{N+1,k} - \psi_{N+2,k}\right) e^{2\lambda_k(t)(s-\tau)} ds +$$

$$+ \left(1 - e^{-4\lambda_k(t)\pi}\right)^{-1} \int_0^\tau \left(\{b_3(t,s)\}_\tau \, u_{N+1,k} - \psi_{N+2,k}\right) e^{2\lambda_k(t)(s-2\pi-\tau)} ds \equiv \tag{1.29}$$

$$\equiv \alpha_k(t,\tau) u_{N+1,k}(t) + \gamma_{N+2,k}(t,\tau),$$

где $\gamma_{N+2,k}$ – известные функции с нулевым средним по τ. Подставив выражения (1.29) в равенства (1.28), придём к задачам типа (A), которые, согласно лемме 1, однозначно разрешимы, и их решения

$$v_{N+2,k} = \left\{ \int_0^\tau \left(\alpha_k(t,s) u_{N+1,k}(t) + \gamma_{N+2,k}(t,s)\right) ds \right\}_\tau \equiv$$

$$\equiv \xi_k(t,\tau) u_{N+1,k}(t) + \eta_{N+2,k}(t,\tau), \quad k = 1, 2, \tag{1.30}$$

где ξ_k и $\eta_{N+2,k}$ — известные функции с нулевым средним по τ.

Следующая пара уравнений $(m = N - 1)$ рассматриваемой нами последовательности имеет вид

$$\left(\lambda_k^2 + a^2\right)\left(u_{N+3,k} + v_{N+3,k}\right) + \left(2\lambda_k\mu_k + b_3\right)\left(u_{N+2,k} + v_{N+2,k}\right) +$$

$$+ \left(\mu_k^2 + \dot{\lambda}_k + b_2\right)\left(u_{N+1,k} + v_{N+1,k}\right) + \left(\dot{\mu}_k + b_1\right)\left(u_{N,k} + v_{N,k}\right) +$$

$$+ 2\mu_k\left(\dot{u}_{N,k} + \dot{v}_{N,k} + v'_{N+2,k}\right) + \ddot{u}_{N-1,k} + \ddot{v}_{N-1,k} + 2\dot{v}'_{N+1,k} + v''_{N+3,k} + \tag{1.31}$$

$$+2\lambda_k\left(\dot{u}_{N+1,k}+\dot{v}_{N+1,k}+v'_{N+3,k}\right)+b_0\left(u_{N-1,k}+v_{N-1,k}\right)=0,\quad k=1,2.$$

Применяя к уравнениям (1.31) операцию усреднения, получим соотношение

$$2\lambda_k\dot{u}_{N+1,k}+\left(\mu_k^2+\dot{\lambda}_k+\langle b_2\rangle\right)u_{N+1,k}+\langle b_3v_{N+2,k}\rangle=$$

$$=-\dot{\mu}_ku_{N,k}-2\mu_k\dot{u}_{N,k}-\ddot{u}_{N-1,k}-\langle b_2v_{N+1,k}\rangle-\langle b_1v_{N,k}\rangle-$$

$$-\langle b_0v_{N-1,k}\rangle-\langle b_1\rangle u_{N,k}-\langle b_0\rangle u_{N-1,k}.$$

Отсюда в силу (1.30) получим

$$2\lambda_k\dot{u}_{N+1,k}+\left(\mu_k^2+\dot{\lambda}_k+\langle b_2\rangle+\langle b_3\xi_k\rangle\right)u_{N+1,k}=$$

$$=-\langle b_3\eta_{N+1,k}\rangle-\dot{\mu}_ku_{N,k}-2\mu_k\dot{u}_{N,k}-\ddot{u}_{N-1,k}-\langle b_2v_{N+1,k}\rangle-\langle b_1v_{N,k}\rangle-\quad(1.32)$$

$$-\langle b_0v_{N-1,k}\rangle-\langle b_1\rangle u_{N,k}-\langle b_0\rangle u_{N-1,k},k=1,2.$$

Полагая $t=0$ в уравнениях (1.3) и (1.9), придём к системе

$$\begin{cases} u_{N+1,1}(0)+u_{N+1,2}(0) &= \nu_{N+1},\\ \lambda_1(0)u_{N+1,1}(0)+\lambda_2(0)u_{N+1,2}(0) &= \sigma_{N+1}, \end{cases}\qquad(1.33)$$

где

$$\nu_{N+1}=-v_{N+1,1}(0,0)-v_{N+1,2}(0,0),$$

$$\sigma_{N+1}=-\lambda_1(0)v_{N+1,1}(0,0)-\lambda_2(0)v_{N+1,2}(0,0)-\mu_1(0)u_{N,1}(0)-\qquad(1.34)$$

$$-\mu_2(0)u_{N,2}(0)-\mu_1(0)v_{N,1}(0,0)-\mu_2(0)v_{N,2}(0,0)-v'_{N+1,1}(0,0)-v'_{N+1,2}(0,0).$$

Отсюда видно, что числа ν_{N+1} и σ_{N+1} — вещественны и

$$\overline{u}_{N+1,2}(0)=u_{N+1,1}(0).\qquad(1.35)$$

Задачи для уравнений (1.32) с начальными условиями

$$u_{N+1,k}(t)\left.\right|_{t=0}=u_{N+1,k}(0)$$

являются задачами типа $(C_\pm)$. Определив из них функции $u_{N+1,k}(t), k = 1,2$, найдём по формулам (1.31) функции $v_{N+2,k}(t,\tau), k = 1,2$. Из предыдущих рассуждений легко следуют соотношения

$$\overline{u}_{N+1,2}(t) = u_{N+1,1}(t), \qquad \overline{v}_{N+2,2}(t,\tau) = v_{N+2,1}(t,\tau)$$

Первая часть теоремы доказана. (1.6), д

3°. **Обоснование.** Процесс обоснования асимптотического разложения разбит на три пункта. В первом пункте производятся необходимые для проведения обоснования преобразования, во втором пункте доказывается лемма 3, в которой установлены оценки, типа оценок (1.8), для задачи (1.48), в третьей части показано, что оценки (1.8) являются следствием леммы 3.

1.В этом пункте сделаем замену переменных в уравнении (1.1) с тем, чтобы в преобразованном уравнении отсутствовало быстроосциллирующее с нулевым средним слагаемое, пропорциональное степени $\omega^{\frac{3}{2}}$. Задачу (1.1), (1.2) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y, \\ \dot{y} &= \left[-\omega a^2(t) - \omega^{\frac{1}{2}} b_3(t,\tau) - b_2(t,\tau) - \omega^{-\frac{1}{2}} b_1(t,\tau) - \omega^{-1} b_0(t,\tau)\right] x, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = x_1 \end{aligned} \tag{1.36}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \left[\omega A_1(t) + \omega^{\frac{1}{2}} A_2(t,\tau) + A_3(t,\tau) + \omega^{-\frac{1}{2}} A_4(t,\tau) + \omega^{-1} A_5(t,\tau)\right] u, \\ u(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.37}$$

где

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t) & 0 \end{pmatrix}, A_2(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_3(t,\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_2(t,\tau) & 0 \end{pmatrix}, A_4(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_1(t,\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_0(t,\tau) & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

С целью уничтожения в задаче (1.37) слагаемого $\{A_2(t,\tau)\}_\tau, \tau = \omega t$, произведём в ней замену переменных

$$u = v + \omega^{-\frac{1}{2}} C(t,\omega t)v, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

где $C(t,\tau)$ — неизвестная 2π-периодическая по τ матрица второго порядка. Получим

$$\dot{v} = \left(\omega A_1 + \omega^{\frac{1}{2}} \langle A_2 \rangle\right) v + \omega^{\frac{1}{2}} \left(A_1 C - C A_1 - C' + \{A_2\}_\tau\right) v +$$
$$+ \left(A_3 + A_2 C + C^2 A_1 - C\left(A_1 C + A_2 - C'\right)\right) v + \omega^{-\frac{1}{2}} B_1(t,\omega t,\omega) v. \tag{1.39}$$

Здесь $B_1(t,\tau,\omega)$ зависит от $C(t,\tau)$, причём для любой 2π-периодической по τ и равномерно ограниченной на множестве Π матрицы-функций $C(t,\tau)$. $B_1(t,\tau,\omega) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau), \omega >> 1,$ — равномерно сходящийся на множестве Π ряд, коэффициенты $B_k(t,\tau)$ которого непрерывны и 2π - периодичны по τ. Приравняем к нулю матрицу, заключённую во вторые скобки равенства (1.39):

$$C' - A_1(t)C + CA_1(t) - \{A_2(t,\tau)\}_\tau = 0. \tag{1.40}$$

Переходя от матричного уравнения (1.40) к системе соответствующих поэлементных равенств, получим

$$\xi^{'} = A(t)\xi + f(t, \tau), \tag{1.41}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a^2(t) & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -a^2(t) & 0 & 0 & a^2(t) \\ 0 & -a^2(t) & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку характеристические числа матрицы A имеют вид $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm 2a(t)i$, то уравнение (1.41) , а значит и (1.40) , имеет единственное 2π-периодическое по τ решение. Покажем это. Поскольку элементами матрицы $A_2(t, \tau)$ являются 2π-периодические по τ функции, имеющие на множестве Π непрерывные производные по τ, то имеет место представление

$$f(t, \tau) = \sum_{k \neq 0} \alpha_k(t) e^{ik\tau},$$

где равномерно относительно $t \in [0, T]$ справедлива формула $|\alpha_k(t)| = O(\frac{1}{k}), k \to \infty$.

Здесь и ниже символом $|a|$, где a – вектор, мы обозначаем норму вектора a.

Решение ξ уравнения (41) будем искать в виде

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \beta_k(t) e^{ik\tau}. \tag{1.42}$$

Подставляя последнее в (1.41), получим

$$(ikE - A(t))\,\beta_k = \alpha_k.$$

Согласно теореме Крамера, эта система имеет единственное решение, если $|ikE - A(t)| \neq 0, k \in Z, k \neq 0$, то есть при условии $2a(t)i \neq \pm ik$. Последнее выполнено в силу наложенных на $a(t)$ ограничений. При этом

$$\beta_k(t) = (ikE - A)^{-1} \alpha_k.$$

Поскольку $|\beta_k| = \left|(ik - A)^{-1} \alpha_k\right| = \left|\frac{1}{ik} \left(E - \frac{A}{ik}\right)^{-1} \alpha_k\right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right), k \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{k \neq 0} \beta_k(t) e^{ik\tau}$, фигурирующий в представлении (1.42), равномерно и абсолютно сходится.

Таким образом, существует искомая матрица $C(t, \tau)$, при которой задача (1.37) в результате замены (1.38) примет вид.

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= \omega v_2 + d_1(t, \omega t, \omega) v_1 + d_2(t, \omega t, \omega) v_2, \\
\dot{v}_2 &= -\omega \left(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3 \rangle\right) v_1 + d_3(t, \omega t, \omega) v_1 + d_4(t, \omega t, \omega) v_2 \\
v_1(0) &= v_{1\omega}, \qquad v_2(0) = v_{2\omega}.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Здесь $d_k(t, \tau, \omega), \omega >> 1,$ — непрерывные на множестве Π и равномерно ограниченные относительно ω функции, представленные сходящимися асимптотическими рядами:

$$d_k(t, \tau, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} d_{kj}(t, \tau), \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{1.44}$$

где $d_{kj}(t, \tau)$ — непрерывные по (t, τ) функции, 2π-периодические по τ.

Выразим из первого уравнения системы (1.43) v_2:

$$\begin{aligned}
v_2(t) = \omega^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} e_{1j}(t, \omega t) \dot{v}_1 + \omega^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} e_{2j}(t, \omega t) v_1 \equiv \\
\equiv \omega^{-1} \left(e_1(t, \tau, \omega) \dot{v}_1 + e_2(t, \tau, \omega) v_1\right)
\end{aligned} \tag{1.45}$$

а затем продифференцируем это же уравнение по t и в полученное равенство подставим выражение функции v_2 из (1.45) и выражение её производной $\dot{v}_2$ из (1.43), в котором v_2 опять же представлена рядом (1.45). Получим дифференциальное уравнение второго порядка для v_1. Начальные условия для него найдём из (1.43). В результате от задачи (1.43) придём к задаче

$$\ddot{v}_1 + \omega^2 \left(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3 \rangle\right) v_1 + g_1(t, \omega t, \omega)\dot{v}_1 + \omega g_2(t, \omega t, \omega) v_1 = 0,$$

$$v_1(0) = w_1(\omega), \qquad \dot{v}_1(0) = \omega w_2(\omega). \tag{1.46}$$

Здесь $g_i(t, \tau, \omega), k = 1, 2,$ — функции того же типа, что и $d_k(t, \tau, \omega), w_1(\omega) = v_1(\omega)$, а $w_2(\omega)$ — функция того же типа, что и $w_1(\omega)$.

Задачу (1.46) с помощью замены переменных

$$v_1(t) = e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^t g_1(s, \omega s, \omega) ds} z(t) \tag{1.47}$$

приведём к виду

$$\ddot{z} + \omega^2 \left(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3 \rangle\right) z + \omega h(t, \omega t, \omega) z = 0,$$

$$z(0) = w_1(\omega), \qquad \dot{z}(0) = \omega w_3(\omega). \tag{1.48}$$

Здесь

$$h(t, \tau, \omega) = g_2(t, \tau, \omega) + \omega^{-1}[\frac{1}{4}(g_1(t, \omega t, \omega))^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial g_1(t, \omega t, \omega)}{\partial t}] - \frac{1}{2}\frac{\partial g_1(t, \omega t, \omega)}{\partial \tau}.$$

Асимптотическое разложение решения задачи (1.48) может быть построено в виде

$$z(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega \lambda_k(s) + \sqrt{\omega}\mu_k(s)) ds} \left(y_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(y_{jk}(t) + w_{jk}(t, \tau)\right) \right), \tag{1.49}$$

$$\langle w_{jk}(t, \tau) \rangle = 0$$

совершенно аналогично тому, как была построена асимптотика (1.3) решения $x(t)$ задачи (1.1), (1.2). При этом частичные суммы

$$z^n(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t (\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))ds} \left(y_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(y_{jk}(t) + w_{jk}(t,\tau) \right) \right) \quad (1.50)$$

удовлетворяют соотношениям

$$\ddot{z}^n + \omega^2 \left(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3 \rangle \right) z^n + \omega h(t, \omega t, \omega) z^n = \epsilon_n(t, \omega t, \omega), \quad (1.51)$$

$$z^n(0) = w_1^n(\omega), \dot{z}^n(0) = \omega w_3^n(\omega), \quad (1.52)$$

где

$$\sup_{(t,\tau)\in\Pi} |\epsilon_n(t,\tau,\omega)| = O\left(\omega^{-\frac{n-3}{2}}\right), \quad (1.53)$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\dot{\epsilon}_n(t,\tau,\omega) + \omega\epsilon_n^{'}(t,\tau,\omega)| = O(\omega^{-\frac{n-5}{2}}),$$

$$|w_k^n(\omega) - w_k(\omega)| = O\left(\omega^{-\frac{n+1}{2}}\right), \quad k = 1, 2, \quad (1.54)$$

2. **Лемма 1.3.** *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при всех $\omega > \omega_n$ и $t \in [0,T]$ справедливы оценки*

$$|z_\omega(t) - z_\omega^n(t)| \le C_n \omega^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad |\dot{z}_\omega(t) - \dot{z}^n(t)| \le C_n \omega^{-\frac{n-1}{2}}, \quad (1.55)$$

Здесь z_ω - решение задачи (1.48), а z^n - n-ое его приближение (1.50).

Доказательство леммы 1.3. Введём обозначение

$$p^n = z_\omega - z^n.$$

Отметим, что оценки (1.55) будут доказаны, если для любого целого неотрицательного числа n найдётся такое натуральное $N \ge n$ и положительные числа $\hat{C}_N$ и $\hat{\omega}_N$, что при всех $\omega > \hat{\omega}_N$ и $t \in [0,T]$ справедливы оценки

$$\left|p^N\right| \le \hat{C}_N \omega^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad \left|\dot{p}^N\right| \le \hat{C}_N \omega^{-\frac{n-1}{2}}. \quad (1.56)$$

Действительно, из первого неравенства (1.56), равенства (1.17) и неравенства треугольника следуют соотношения

$$|p^n(t)| \le \left|z_\omega(t) - z^N(t)\right| + \left|z^N(t) - z^n(t)\right| \le$$
$$\le \hat{C}_N \omega^{-\frac{n+1}{2}} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=n+1}^{N} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(|y_{jk}(t)| + |w_{jk}(t, \omega t)|\right) \le$$
$$\le \left(\hat{C}_N + d_N\right) \omega^{-\frac{n+1}{2}} \equiv C_n \omega^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $d_N = const > 0$. Аналогичным образом из второго неравенства (1.56) вытекает вторая оценка (1.55).

Для доказательства неравенств (1.56) вычтем из первого равенства (1.48) равенство (1.51), а из остальных равенств (1.48) вычтем соответствующие равенства (1.52). Придём к задаче

$$\ddot{p} + \omega^2 \left(a^2(t) + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3(t, \tau) \rangle\right) p + \omega h(t, \omega t, \omega) p = -\epsilon_N(t, \omega t, \omega), \tag{1.57}$$

$$p(0) = \omega^{-\frac{N+1}{2}} p_{1\omega}, \quad \dot{p}(0) = \omega^{-\frac{N-1}{2}} p_{2\omega}, \tag{1.58}$$

где в силу (1.54)

$$|p_{1\omega}| = O(1), \qquad |p_{2\omega}| = O(1), \quad \omega \to \infty. \tag{1.59}$$

Умножим уравнение (1.57) на $\dot{p}(t)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t. В результате получим

$$\frac{1}{2}\dot{p}^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2 \left(a^2(t) + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3(t, \tau) \rangle\right) p^2(t) + \frac{1}{2}\omega h(t, \tau, \omega) p^2(t) =$$
$$= -\int\limits_0^t \epsilon_N(s, \omega s, \omega) \dot{p}(s) ds + \omega^2 \int\limits_0^t a(s) \dot{a}(s) p^2(s) ds +$$
$$+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^t \left\langle \dot{b}_3(s, \omega s) \right\rangle p^2(s) ds + \frac{1}{2}\omega \int\limits_0^t \Big(\dot{h}(s, \omega s, \omega) +$$

$$+\omega h'(s,\omega s,\omega)\Big)p^2(s)ds+\frac{1}{2}\left[\dot{p}^2(0)+\Big(\omega^2a^2(0)+\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(0,0)\right\rangle+\omega h(0,0,0)\Big)\,p^2(0)\right]$$

В силу (1.58) и (1.59), последнее равенство можно переписать в следующем виде

$$\frac{1}{2}\dot{p}^2(t)+\frac{1}{2}\omega^2a^2(t)p^2(t)+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(t,\tau)\right\rangle p^2(t)+\frac{1}{2}\omega h(t,\tau,\omega)p^2(t)=$$

$$=-\int\limits_0^t\epsilon_N(t,\omega s,\omega)\dot{p}(s)ds+\omega^2\int\limits_0^t a(s)\dot{a}(s)p^2(s)ds+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^t\left\langle\dot{b}_3(s,\omega s)\right\rangle p^2(s)ds+ \tag{1.60}$$

$$+\frac{1}{2}\omega\int\limits_0^t\Big(\dot{h}(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega)\Big)\,p^2(s)ds+\epsilon_{N_1}$$

где

$$\max_{(t,\tau)\in\Pi}|\epsilon_{N_1}(t,\tau,\omega)|=O\left(\omega^{-N+1}\right),\omega\to\infty. \tag{1.61}$$

Так как $\dot{p}^2(t)\geq 0$, то из равенства (1.60) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\Big(\omega^2a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(t,\tau)\right\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)\Big)\,p^2(t)\leq$$

$$\leq-\int\limits_0^t\epsilon_N(t,\omega s,\omega)\dot{p}(s)ds+\omega^2\int\limits_0^t a(s)\dot{a}(s)p^2(s)ds+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^t\left\langle\dot{b}_3(s,\omega s)\right\rangle p^2(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\omega\int\limits_0^t\Big(\dot{h}(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega)\Big)\,p^2(s)ds+\epsilon_{N_1}.$$

Применяя к первому интегралу метод интегрирования по частям, придём к соотношению

$$\frac{1}{2}\Big(\omega^2a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(t,\tau)\right\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)\Big)\,p^2(t)\leq$$

$$\leq-\epsilon_N(t,\omega s,\omega)p(t)+\epsilon_N(0,0,0)p(0)+\int\limits_0^t\Big(\dot{\epsilon}_N(s,\omega s,\omega)-\omega\epsilon_N'(s,\omega s,\omega)\Big)p(s)ds+$$

$$\int_0^t p^2(s)\left(\omega^2 a(s)\dot a(s)+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle \dot b_3(s,\omega s)\right\rangle+\frac{1}{2}\omega\left(\dot h(s,\omega s,\omega)+\omega h^{'}(s,\omega s,\omega)\right)\right)ds+\epsilon_{N_1}.$$

Отсюда, в силу неравенства

$$|ab|\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}, \tag{1.62}$$

следует соотношение

$$\begin{gathered}\left(\omega^2 a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(t,\tau)\right\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)-1\right)p^2(t)\le\\ \le\int_0^t p^2(s)\Bigg(2\omega^2 a(s)\dot a(s)+\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(s,\omega s)\right\rangle+ \\ +\omega\left(\dot h(s,\omega s,\omega)+\omega h^{'}(s,\omega s,\omega)\right)+1\Bigg)ds+\epsilon_{N_2},\end{gathered} \tag{1.63}$$

где

$$\max_{(t,\tau)\in\Pi}|\epsilon_{N_2}(t,\tau,\omega)|=O(\omega^{-N+6}),\quad \omega\to\infty.$$

При достаточно больших ω

$$\alpha_\omega=\omega^2 a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(t,\tau)\right\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)>1. \tag{1.64}$$

Разделив (1.63) на α_ω, получим

$$p^2(t)\le M\int_0^t p^2(s)ds+\frac{\epsilon_{N_2}}{\alpha_\omega}$$

Из леммы Гроноулла теперь следует оценка

$$p^2(t)\le\frac{\epsilon_{N_2}}{\alpha_\omega}e^{Mt}, \tag{1.65}$$

так что

$$|p(t)|\le\sqrt{\frac{\epsilon_{N_2}}{\alpha_\omega}e^{Mt}},$$

а

$$\sup_{t\in[0,T]} |p(t)| = O\left(\omega^{-\frac{N-4}{2}}\right), \quad \omega \to \infty.$$

Положив в последней формуле $N = n + 5$, получим неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} |p(t)| \le \hat{C}_n \omega^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \hat{C}_n = const.$$

Из равенства (1.60) в силу (1.64) следует неравенство

$$\dot{p}^2(t) \le -2\int\limits_0^t \epsilon_N(s,\tau,\omega)\dot{p}(s)ds + 2\int\limits_0^t p^2(s)\Big(\omega^2 a(s)\dot{a}(s) + \frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(s,\tau)\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\omega\Big(\dot{h}(s,\tau,\omega) + \omega h^{'}(s,\tau,\omega)\Big)\Big)ds + \epsilon_{N_1}(t,\tau,\omega).$$

Воспользовавшись снова формулой (1.62), получим

$$\dot{p}^2(t) \le \int\limits_0^t \epsilon_N^2(s,\omega s,\omega)(s)ds + \int\limits_0^t \dot{p}^2(s)ds + 2\int\limits_0^t p^2(s)\Big(\omega^2 a(s)\dot{a}(s) + \frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\left\langle b_3(s,\omega s)\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\omega\Big(\dot{h}(s,\omega s,\omega) + \omega h^{'}(s,\omega s,\omega)\Big)\Big)ds + \epsilon_{N_1}(t,\tau,\omega).$$

В силу (1.65) отсюда следует оценка

$$\dot{p}^2(t) \le \int\limits_0^t \dot{p}^2(s)ds + \epsilon_{N_3}(t,\tau,\omega),$$

где

$$\max_{(t,\tau)\in\Pi} |\epsilon_{N_3}| = O(\omega^{-N+6}), \quad \omega \to \infty.$$

Поэтому в силу леммы Гронуолла имеет место неравенство

$$|\dot{p}(t)| \le \sqrt{\epsilon_{N_3} e^t},$$

так что

$$\sup_{t\in[0,T]} |\dot{p}(t)| = O\left(\omega^{-\frac{N-6}{2}}\right), \quad \omega \to \infty. \tag{1.66}$$

Из (1.66)при $N = n + 5$ находим

$$\sup_{t\in[0,T]} |\dot p(t)| \le C_n \omega^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Итак, оценки (1.56), а с ними и лемма 3, доказаны.

3. Покажем теперь, что оценки (1.8) вытекают из леммы 3. Для этого, прежде всего, отметим, что из предыдущего пункта доказательства теоремы вытекает следующее соотношение между решением x задачи (1.1), (1.2) и решением z задачи (1.48)

$$\begin{pmatrix} x \\ \omega^{-1}\dot x \end{pmatrix} = e^{\frac12\int\limits_0^t g_1(s,\omega s,\omega)ds} \left(E + \omega^{-\frac12} C(t,\omega t)\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} z \\ \left(\omega^{-1} e_1(t,\omega t,\omega)\dot z + \omega^{-1}\left(\frac12 g_1(t,\omega t,\omega) e_1(t,\omega t,\omega) + e_2(t,\omega t,\omega)\right) z\right) \end{pmatrix} \tag{1.67}$$

Ясно, что подставив в (1.67) вместо z его асимптотическое разложение (1.49) мы получим формальное асимптотическое разложение решения x задачи (1.1), (1.2) и его производной. Так же, как в начале доказательства леммы 3, устанавливается, что оценки (1.8) будут доказаны, если они будут установлены при замене x^n и $\dot x^n$ функциями x^{m_1} и $\dot x^{m_2}$ при каких-либо $m_1, m_2 \ge n$.

Возьмём достаточно большое M и заменим в правой части (1.67) асимптотические разложения по степеням ω^{-1} функций $g_1(t,\tau,\omega)$, $e_1(t,\tau,\omega)$, $e_2(t,\tau,\omega)$, z их M-ыми частичными суммами g_1^M, e_1^M, e_2^M, z^M. Тогда в левой части (1.67) мы с точностью до слагаемых порядка $O(\omega^{-\frac{n+1}{2}})$ получим $\begin{pmatrix} x^{m_1} \\ \omega^{-1}\dot{x}^{m_2} \end{pmatrix}$, где m_1 и m_2 — достаточно большие натуральные числа. Оценки (1.8) теперь следуют из сказанного выше, соотношения

$$\begin{pmatrix} x \\ \omega^{-1}\dot{x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^{m_1} \\ \omega^{-1}\dot{x}^{m_2} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^t g_1(s,\omega s,\omega)ds} \left(E + \omega^{-\frac{1}{2}}C(t,\omega t)\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} z - z^M \\ \left(\omega^{-1}e_1(t,\omega t,\omega)\dot{z} + \omega^{-1}\left(\frac{1}{2}g_1(t,\omega t,\omega)e_1(t,\omega t,\omega) + e_2(t,\omega t)\right) z\right) \end{pmatrix}$$

$$-e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^t g_1^M(s,\omega s,\omega)ds} \left(E + \omega^{-\frac{1}{2}}C(t,\omega t)\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\omega^{-1}e_i^M(t,\omega t)\dot{z}^M + + \omega^{-1}\left(\frac{1}{2}g_1^M(t,\omega t,\omega)e_1^M(t,\omega t,\omega) + e_2^M(t,\omega t,\omega)\right) z^M\right) \end{pmatrix} +$$

$$+O\left(\omega^{-\frac{n+1}{2}}\right)$$

и леммы 3.

Замечание 1.3. Уравнение вида

$$\ddot{x}(t) + \omega a_0(t)\dot{x}(t) +$$

$$+\left(\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}}b_3(t,\omega t) + \omega b_2(t,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}}b_1(t,\omega t) + b_0(t,\omega t)\right) x(t) = 0$$

можно свести к уравнению вида (1.1) с помощью замены

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}\omega\int_0^t a_0(s)ds} z(t), \quad t \in [0,T].$$

§2. Неоднородное уравнение

1°. **Формулировка.** Пусть $T > 0, m \in Z$, $a(t), \mu_1(t), \mu_2(t), f_j(t)$ и $b_k(t,\tau), g_j(t,\tau), k$ $\overline{0,3}, j = \overline{-4,m}$, — заданные на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty) \equiv \Pi$, соответственно, непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка. Будем предполагать, что $a(t)$ и $\mu_1(t), \mu_2(t)$ – вещественные, а остальные функции могут быть комплекснозначными. Кроме того, $a(t)$ и $\mu_1(t)$ не принимают целых и полуцелых значений, а $b_j(t,\tau)$ и $g_k(t,\tau)$ – 2π-периодические по τ функции.

Рассмотрим на участке $t \in [0,T]$ задачу Коши

$$\ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t,\omega t) + \omega b_2(t,\omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t,\omega t) + b_0(t,\omega t)\right] x = \\ = e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right) ds} \left(f(t,\omega) + g(t,\omega t,\omega)\right), \tag{1.68}$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega x_1. \tag{1.69}$$

Здесь

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-4}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad g(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-4}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} g_k(t,\tau), \qquad < g_k >_\tau = 0,$$

ω — большой вещественный параметр, а x_0 и x_1 — заданные числа.

В этом параграфе рассматриваются три случая:

$$\begin{cases} \mu_1(t) \pm a(t) \neq n, n \in Z, t \in [0,T]; \\ a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau)\rangle \neq \mu_1(t)\mu_2(t), t \in [0,T]; \\ a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau)\rangle \equiv \mu_1(t)\mu_2(t), t \in [0,T]. \end{cases} \tag{1.70}$$

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (1.68), (1.69) будем строить в виде

$$x_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j-r}{2}} \left(\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) \right.$$
$$\left. + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} (p_j(t) + q_j(t,\omega t)) \right), \tag{1.71}$$

где значения параметра r в 1-ом, 2-ом и 3-ем случаях (1.70) следующие:

$$r = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 2, \end{cases}$$

а $v_{jk}(t,\tau)$ и $q_j(t,\tau)$ — 2π-периодические по τ функции с нулевыми средними:

$$< v_{jk}(.,\tau) >=< q_j(.,\tau) >= 0.$$

Напомним формулировки основных задач; теперь в них присутствуют комплекснозначные функции.

Задачей типа (A) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ с нулевым средним решения уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varphi(t,\tau),$$

где $t \in [0,T]$ — параметр, а $\varphi(t,\tau)$ — непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(B_\pm)$ назовём задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ решения уравнения

$$\frac{\partial w(t,\tau)}{\partial \tau} \pm 2ia(t)w(t,\tau) = \psi(t,\tau),$$

где $t \in [0,T]$ - параметр, а $\psi(t,\tau)$ - непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа ($C_\pm$) назовём задачу Коши на участке $t \in [0,T]$ вида

$$\pm 2ia(t)\dot{u} + \left(\langle b_2(t,\tau) + b_3(t,\tau)\beta_\pm(t,\tau)\rangle \pm i\dot{a}(t) - \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)} \right) u = \chi(t),$$

$$u(0) = u_0,$$

где $\chi(t), u_0$ — непрерывная функция и число, а $\beta_\pm(t,\tau) - 2\pi$-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \beta_\pm}{\partial \tau^2} \pm 2ia(t)\frac{\partial \beta \pm}{\partial \tau} = \{b_3(t,\tau)\}_\tau .$$

Задачей типа (D) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ решения уравнения

$$q^{''}(t,\tau) + 2i\mu_1(t)q^{'}(t,\tau) + (a^2(t) - \mu_1^2(t))q(t,\tau) = g(t,\tau),$$

где $t \in [0,T]$ - параметр, а $g(t,\tau)$ - непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Частичную сумму ряда (1.71)

$$x^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \omega^{-\frac{j-r}{2}} \left(\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) \right.$$
$$\left. + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} (p_j(t) + q_j(t,\omega t)) \right) \tag{1.72}$$

будем называть n-ым приближением решения задачи (1.68), (1.69)

Справедлив следующий результат.

Теорема 1.2. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ эффективно строится n-ое приближение $x^n(t)$ решения $x_\omega(t)$ задачи (1.68), (1.69) при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценкам*

$$|x_\omega(t) - x^n(t)| \le C_n\omega^{\frac{-n-1-r}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega(t) - \dot{x}^n(t)| \le C_n\omega^{\frac{-n+1-r}{2}}.$$

Под эффективным построением приближения решения в этой теореме понимается тот факт, что нахождение каждого слагаемого приближения сводится к решению конечного числа линейных однозначно разрешимых задач без асимптотического параметра типов $A, B_{\pm}, C_{\pm}$, а в первом случае ещё и типа D.

Доказательство теоремы 1.2 изложим в приложении.

§3. Уравнение произвольного ранга

Для натурального $p > 2$ рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{x}(t) + \omega^{\frac{2p-1}{2}} \left(\omega^{\frac{1}{2}} a_0^2(t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \omega^{-\frac{i}{2}} b_i(t, \omega t) \right) x(t) = 0, \tag{1.73}$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega^{\frac{p}{2}} x_1, \tag{1.74}$$

где параметр $\omega >> 1$, функции $a_0(t)$ и $b_i(t, \tau)$ определены, вещественнозначны и непрерывны на множествах $t \in [0, T], (t, \tau) \in [0, T] \times [0, \infty)$ соответственно, причём b_i – 2π-периодические по τ функции, $a_0(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$, x_0 и x_1 – некоторые заданные вещественные числа. Из вещественности коэффициентов уравнения (1.73) и начальных условий (1.74) в силу единственности решения задачи Коши следует его вещественность.

Асимптотическое разложение решения задачи Коши (1.73) - (1.74), будем искать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega^{\frac{p}{2}} \lambda_{1,k}(s) + \sum\limits_{l=1}^{p-2} \omega^{\frac{p-l}{2}} \mu_{l,k}(s, \omega s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2,k}(s) \right) ds} \times$$

$$\times \left(u_{0,k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{j,k}(t) + v_{j,k}(t, \omega t) \right) \right), \tag{1.75}$$

где функции $v_{j,k}(t,\tau), j=1,2,...,k=1,2,$ и $\mu_{l,k}(t,\tau), l=1,2,...,p-2, k=1,2$ являются 2π-периодическими по τ, и $v_{j,k}(t,\tau), j=1,2,...,k=1,2,$ имеют нулевые среднии. Кроме того, функции $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}$ и $\mu_{i,k}$ – чисто мнимые; например, $\mu_{i,k}=i\hat{\mu}_{i,k}$, где $\hat{\mu}_{i,k}$ – вещественная. Частичную сумму

$$x^n(t)=\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t\left(\omega^{\frac{p}{2}}\lambda_{1,k}(s)+\sum\limits_{l=1}^{p-2}\omega^{\frac{p-l}{2}}\mu_{l,k}(s,\omega s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2,k}(s)\right)ds}\times$$

$$\times\left(u_{0,k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(u_{j,k}(t)+v_{j,k}(t,\omega t)\right)\right), n\in N,$$

ряда $x(t)$ будем называть n-ым приближением решения задачи Коши (1.73)-(1.74).

Имеет место следующий результат.

Теорема 1.3. *Для любого натурального n построение приближения x^n решения задачи Коши (1.73)-(1.74) сводится к решению конечного числа задач типов A и C_+. При этом вектор-функция x^n вещественна, и справедливы оценки*

$$\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-x^n(t)|\le C_1\omega^{-\frac{n+1}{2}},$$

$$\sup_{t\in[0,T]}|\dot{x}(t)-\dot{x}^n(t)|\le C_2\omega^{-\frac{n+1-p}{2}},$$

где C_1 и C_2 – не зависимые от ω постоянные.

Для нахождения неизвестных $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \mu_{l,k}, u_{j,k}, v_{j,k}, l=1,2,...,p-2, j=1,2,...,k=\ 1,2,$ подставим ряд (1.75) в (1.73), (1.74) и приравняем коэффициенты в полученных равенствах при одинаковых степенях ω:

$$\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t\left(\omega^{\frac{p}{2}}\lambda_{1,k}(s)+\sum\limits_{l=1}^{p-2}\omega^{\frac{p-l}{2}}\mu_{l,k}(s,\omega s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2,k}(s)\right)ds}\times\Bigg[\Bigg[\left(\omega^{\frac{p}{2}}\lambda_{1,k}+\sum_{i=1}^{p-2}\omega^{\frac{p-i}{2}}\mu_{i,k}+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2,k}\right)^2+$$

$$+\left(\omega^{\frac{p}{2}}\dot{\lambda}_{1,k}+\sum_{i=1}^{p-2}\omega^{\frac{p-i}{2}}\dot{\mu}_{i,k}+\sum_{i=1}^{p-2}\omega^{\frac{p+2-i}{2}}\mu^{'}_{i,k}+\omega^{\frac{1}{2}}\dot{\lambda}_{2,k}\right)\Bigg]\times\left(u_{0,k}+\sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(u_{j,k}+v_{j,k}\right)\right)$$

$$+2\left(\omega^{\frac{p}{2}}\lambda_{1,k}+\sum_{i=1}^{p-2}\omega^{\frac{p-i}{2}}\mu_{i,k}+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2,k}\right)\times\left[\dot{u}_{0,k}+\sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(\dot{u}_{j,k}+\dot{v}_{j,k}+\omega v_{j,k}^{'}\right)\right]+$$

$$+\ddot{u}_{0,k}+\sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(\ddot{u}_{j,k}+\ddot{v}_{j,k}+2\omega\dot{v}_{j,k}^{'}+\omega^{2}v_{j,k}^{''}\right)+$$

$$+\omega^{\frac{2p-1}{2}}\left(\omega^{\frac{1}{2}}a_0^2+\sum_{i=0}^{2p-1}\omega^{-\frac{i}{2}}b_i\right)\times\left[u_{0,k}+\sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(u_{j,k}+v_{j,k}\right)\right]\Bigg]=0,\qquad k=1,2.$$

В результате подстановки x и $\ddot{x}$ в уравнение (1.73), сокращения полученных равенств на

$$e^{\int\limits_0^t\left(\omega^p\mu_{0,k}(s)+\sum\limits_{j=1}^{p-1}\omega^{p-j}\mu_{j,k}(s,\omega s)\right)ds}$$

и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ω, начиная с ω^p, придём к бесконечной цепочке уравнений.

Первое из них имеет вид

$$\lambda_{1,k}^2(t)u_{0,k}(t)+a_0^2(t)u_{0,k}(t)=0,\quad k=1,2. \tag{1.76}$$

Ему, очевидно, удовлетворяют функции

$$\lambda_{1,1}(t)=ia_0(t),\qquad \lambda_{1,2}(t)=-ia_0(t).$$

Следующее равенство коэффициентов (при $\omega^{\frac{2p-1}{2}}$) имеет вид

$$\lambda_{1,k}^2(t)\left(u_{1,k}(t)+v_{1,k}(t,\tau)\right)+2\lambda_{1,k}(t)\mu_{1,k}(t,\tau)u_{0,k}(t)+a_0^2(t)\left(u_{1,k}(t)+v_{1,k}(t,\tau)\right)+$$
$$+b_0(t,\tau)u_{0,k}(t)=0,\quad k=1,2, \tag{1.77}$$

или

$$2\lambda_{1,k}(t)\mu_{1,k}(t,\tau)u_{0,k}(t)+b_0(t,\tau)u_{0,k}(t)=0,\quad k=1,2, \tag{1.78}$$

откуда находим

$$\mu_{1,k}(t,\tau)=-\frac{b_0(t,\tau)}{2\lambda_{1,k}(t)},\quad \mu_{1,k}=i\hat{\mu}_{1,k},\quad k=1,2,$$

где $\hat{\mu}_{1,k}$ – вещественна.

Приравнивая теперь коэффициенты при ω^{p-1}, получим равенство

$$(\lambda_{1,k}^2(t)+a_0^2)(u_{2,k}+v_{2,k})+(2\lambda_{1,k}\mu_{1,k}+b_0)(u_{1,k}+v_{1,k})+\beta 2\lambda_{1,k}v_{1,k}^{'}+$$
$$+\left(2\alpha\lambda_{1,k}\mu_{2,k}+\beta(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}+\mu_{1,k}^{'})+b_1+\mu_{1,k}^2\right)u_{0,k}=0, k=1,2, \tag{1.79}$$

где

$$\alpha=\begin{cases}0, p=3,\\ 1, p>3;\end{cases} \quad \beta=\begin{cases}1, p=3,\\ 0, p>3;\end{cases}$$

Из равенств (1.76) и (1.78) получаем, что первые два слагаемых последнего равенства равны нулю, потому равенство (1.79) принимает вид

$$\left(2\alpha\lambda_{1,k}\mu_{2,k}+\beta(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}+\mu_{1,k}^{'})+b_1+\mu_{1,k}^2\right)u_{0,k}+\beta 2\lambda_{1,k}v_{1,k}^{'}=0, k=1,2. \tag{1.80}$$

В таком случае при $p>3$ получим выражение

$$\left(2\lambda_{1,k}(t)\mu_{2,k}(t,\tau)+b_1(t,\tau)+\mu_{1,k}^2(t,\tau)\right)u_{0,k}(t)=0, k=1,2, \tag{1.81}$$

откуда

$$\mu_{2,k}(t,\tau)=-\frac{b_1(t,\tau)+\mu_{1,k}^2(t,\tau)}{2\lambda_{1,k}(t)}, \quad \mu_{2,k}=i\hat{\mu}_{2,k}, \quad k=1,2.$$

Если же $p=3$, то придём к равенству

$$\left(2\lambda_{1,k}(t)\lambda_{2,k}(t)+b_1(t,\tau)+\mu_{1,k}^2(t,\tau)+\mu_{1,k}^{'}(t,\tau)\right)u_{0,k}(t)+2\lambda_{1,k}(t)v_{1,k}^{'}(t,\tau)=0, k=1 \tag{1.82}$$

которое после усреднения по τ примет вид

$$(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}+\langle b_1\rangle+\langle\mu_{1,k}^2\rangle)u_{0,k}=0, k=1,2,$$

а значит

$$\lambda_{2,k}(t) = -\frac{\left\langle b_1(t,\tau) + \mu_{1,k}^2(t,\tau)\right\rangle}{2\lambda_{1,k}(t)}, \quad k = 1,2.$$

После применения к (1.82) операции $\{\dots\}_\tau$ найдём

$$v_{1,k}^{'}(t,\tau) = -\frac{\left\{b_1(t,\tau) + \mu_{1,k}^2(t,\tau)\right\} + \mu_{1,k}^{'}}{2\lambda_{1,k}(t)} u_{0,k}(t), \quad k = 1,2.$$

которое можно выразить как

$$v_{1,k}(t,\tau) = s_k(t,\tau) u_{0,k}(t), k = 1,2,$$

где $s_k(t,\tau)$ – известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним.

Покажем, что из последующих $p-3$ (если $p-3>0$) уравнений, находятся все $\mu_{l,k}, \mu_{l,k} = i\hat{\mu}_{l,k}, k = 1,2$. Предположим, что мы нашли $\mu_{l,k}, \mu_{l,k} = i\hat{\mu}_{l,k}, k = 1,2, \forall l \le l_0$. Покажем, что аналогичным образом могут быть определены $\mu_{l_0+1,k}, k = 1,2$. Для этого рассмотрим равенство коэффициентов при $\omega^{\frac{2p-l_0-1}{2}}, l_0+1 \le p-2$:

$$\lambda_{1,k}^2(t)\left(u_{l_0+1,k}(t) + v_{l_0+1,k}(t,\tau)\right) + \sum_{l=1}^{\left[\frac{l_0+1}{2}\right]} \mu_{l,k}^2(t,\tau)\left(u_{l_0+1-2l,k}(t) + v_{l_0+1-2l,k}(t,\tau)\right) +$$

$$+ 2\sum_{l=1}^{l_0+1} \lambda_{1,k}(t)\mu_{l,k}(t,\tau)\left(u_{l_0+1-l,k}(t) + v_{l_0+1-l,k}(t,\tau)\right) +$$

$$+ 2\sum_{l,m,l<m}^{l+m=l_0+1} \mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)\left(u_{l_0+1-l-m,k}(t) + v_{l_0+1-l-m,k}(t,\tau)\right) +$$

$$+ a_0^2(t,\tau)\left(u_{l_0+1,k}(t) + v_{l_0+1,k}(t,\tau)\right) + \sum_{i=0}^{l_0+1} b_i(t,\tau)\left(u_{l_0+1-i,k}(t) + v_{l_0+1-i,k}(t,\tau)\right) = 0,$$

$$k = 1,2, \quad (1.83)$$

или

$$2\lambda_{1,k}(t)\mu_{l_0+1,k}(t,\tau)u_{0,k}(t)+\alpha_{l_0+1}\mu^2_{\frac{l_0+1}{2}}(t,\tau)u_{0,k}(t)+$$

$$2\sum_{l,m,l<m,l+m=l_0+1}\mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)+b_{l_0+1}(t,\tau)u_{0,k}(t)=0, k=1,2,$$

здесь и далее

$$\alpha_l=\begin{cases}1, l=2n, n\in Z,\\ 0, l=2n+1, n\in Z;\end{cases}$$

Громоздкий переход от равенства (1.83) к следующему мы приводить не будем, т.к. он становится понятным в результате рассмотрения приведённого ниже примера для случая $p=8$.

Из последнего получим, что

$$\mu_{l_0+1,k}(t,\tau)=-\frac{b_{l_0+1}(t,\tau)+\alpha_{l_0+1}\mu^2_{\frac{l_0+1}{2}}(t,\tau)+2\sum\limits_{l,m,l<m,l+m=l_0+1}\mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)}{2\lambda_{1,k}(t)},$$

$$\mu_{l_0+1,k}=i\hat{\mu}_{l_0+1,k},\qquad k=1,2,$$

где $\hat{\mu}_{l_0+1,k}$ –вещественна. Перейдём к рассмотрению равенства коэффициентов при $\omega^{\frac{p+1}{2}}$, из которых будут найдены $\lambda_{2k}(t), k=1,2$.

$$\lambda^2_{1,k}(t)\left(u_{p-1,k}(t)+v_{p-1,k}(t,\tau)\right)+\sum_{l=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\mu^2_{l,k}(t,\tau)\left(u_{p-1-2l,k}(t)+v_{p-1-2l,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\sum_{l=1}^{p-2}\lambda_{1,k}(t)\mu_{l,k}(t,\tau)\left(u_{p-1-l,k}(t)+v_{p-1-l,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\sum_{l,m,l<m}^{l+m=p-1}\mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)\left(u_{p-1-l-m,k}(t)+v_{p-1-l-m,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\lambda_{1,k}(t)\lambda_{2,k}(t)u_0(t)+\mu'_{1,k}(t,\tau)u_0(t)+2\lambda_{1,k}(t)v'_{1,k}(t,\tau)+$$

$$+a^2_0(t,\tau)\left(u_{p-1,k}(t)+v_{p-1,k}(t,\tau)\right)+\sum_{i=0}^{p-2}b_i(t,\tau)\left(u_{p-2-i,k}(t)+v_{p-2-i,k}(t,\tau)\right)=0,$$

$$k=1,2,\quad (1.84)$$

Также как и в (1.83), в последнем равенстве для каждого $j \neq 0$ сумма коэффициентов при $(u_{jk}+v_{jk})$ обратится в ноль. И таким образом, получим

$$\alpha_{p-1}\mu^2_{\frac{p-1}{2},k}(t,\tau)u_0(t)+2\sum_{l,m,l+m=p-1}\mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)u_0(t)+2\lambda_{1,k}(t)\lambda_{2,k}(t)u_0(t)+$$

$$+\mu'_{1,k}(t,\tau)u_0(t)+2\lambda_{1,k}(t)v'_{1,k}(t,\tau)+b_{p-2}(t,\tau)u_0(t)=0, k=1,2. \quad (1.85)$$

Применяя к последнему уравнению операцию усреднения $\langle\cdots\rangle$, получим

$$\lambda_{2,k}(t)=-\frac{\left\langle \alpha_{p-1}\mu^2_{\frac{p-1}{2},k}(t,\tau)+2\sum\limits_{l+m=p-1}\mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)+b_{p-2}(t,\tau)\right\rangle}{2\lambda_{1,k}(t)}, \qquad k=1,$$

Теперь рассмотрим разность последних двух уравнений

$$v'_{1,k}(t,\tau)=$$

$$=-\frac{\left(\mu'_{1,k}+\left\{\alpha_{p-1}\mu^2_{\frac{p-1}{2},k}+2\sum\limits_{l,m,l+m=p-1}\mu_{l,k}\mu_{m,k}+b_{p-2}\right\}\right)u_{0,k}(t)}{2\lambda_{1,k}(t)},$$

$$k=1,2, \quad (1.86)$$

откуда получаем, что

$$v_{1,k}(t,\tau)=s_k(t,\tau)u_{0,k}(t), \quad (1.87)$$

где $s_k(t,\tau)$ – известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним.

Перейдём к равенству коэффициентов при степени $\omega^{\frac{p}{2}}$:

$$\alpha_{p-2}\mu^2_{\frac{p-2}{2},k}(t,\tau)u_{0,k}(t)+2\sum_{l,m,l+m=p}\mu_{l,k}(t)\mu_{m,k}(t)u_{0,k}(t)+2\lambda_{2,k}(t)\mu_{1,k}(t,\tau)u_{0,k}(t)+$$

$$+2\lambda_{1,k}(t)\lambda_{2,k}(t)\left(u_{1,k}(t)+v_{1,k}(t,\tau)\right)+\dot\lambda_{1,k}(t)u_{0,k}(t)+\mu'_{2,k}(t,\tau)u_{0,k}(t)+$$

$$+2\lambda_{1,k}(t)\dot u_{0,k}+2\lambda_{1,k}(t)v'_2(t,\tau)+2\mu_{1,k}(t,\tau)v'_{1,k}(t,\tau)+\gamma_1 v''_{1,k}(t,\tau)+$$

$$(\alpha_{p-1}\mu^2_{\frac{p-1}{2},k}(t,\tau)+2\sum_{l,m,l+m=p+1}\mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)\mu'_{1k}(t,\tau))\left(u_{1,k}(t)+v_{1,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+b_{p-1}(t,\tau)u_{0,k}(t)+b_{p-2}(t,\tau)\left(u_{1,k}(t)+v_{1,k}(t,\tau)\right)=0,$$

$$k=1,2. \quad (1.88)$$

Применяя к последнему равенству операцию усреднения, получим уравнения с известными коэффициентами вида

$$2\lambda_{1,k}(t)\dot{u}_{0,k}(t)+f_k(t)u_{0,k}(t)=0, \qquad k=1,2,$$

где

$$f_k(t)=\left\langle \alpha_{p-2}\mu^2_{\frac{p-2}{2},k}(t,\tau)+2\sum_{l,m,l+m=p}\mu_{l,k}(t)\mu_{m,k}(t)+2\lambda_{2,k}(t)\mu_{1,k}(t,\tau)+b_{p-1}(t,\tau)\right\rangle$$

Для нахождения начальных данных $u_{0,1}(0)$ и $u_{0,2}(0)$ в положим в выражении (1.83) для $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ $t=0$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω. На первом шаге получим систему

$$\begin{cases} u_{0,1}(0)+u_{0,2}(0)=x_0, \\ \lambda_{1,1}(0)u_{0,1}(0)+\lambda_{1,2}(0)u_{0,2}(0)=x_1. \end{cases}$$

По теореме Крамера эта система имеет единственное решение

$$u_{0,1}(0)=\frac{\lambda_{12}(0)x_0-x_1}{\lambda_{12}(0)-\lambda_{11}(0)}, \qquad u_{0,2}(0)=\frac{x_1-\lambda_{11}(0)x_0}{\lambda_{12}(0)-\lambda_{11}(0)},$$

После применения к уравнению (1.88) операции $\{\cdots\}_\tau$, получим

$$v'_{2,k}(t,\tau)=r_{2,k}(t,\tau)+q_k(t,\tau)u_{1,k}(t), \qquad k=1,2,$$

где $r_2(t,\tau)$ и $q(t,\tau)$ – известные 2π-периодические по τ функции с нулевым средним. Отсюда найдём

$$v_{2,k}(t,\tau)=w_{2,k}(t,\tau)+s_k(t,\tau)u_{1,k}(t), \qquad k=1,2,$$

где $w_2(t,\tau)$ и $s_k(t,\tau)$ – также известные 2π-периодические по τ функции с нулевым средним.

Предположим, что мы нашли все $u_{j,k}$ и $v_{j+1,k}$, $k=1,2,\forall j\le j_0$. Покажем, что аналогичным образом могут быть определены $u_{j_0+1,k}$ и $v_{j_0+2,k}$, $k=1,2$. Для этого рассмотрим равенство коэффициентов при $\omega^{\frac{p-j_0}{2}}$

$$\lambda_{1,k}(t)\left(u_{p+j_0,k}(t)+v_{p+j_0,k}(t,\tau)\right)+\sum_{l=1}^{\left[\frac{p+j_0}{2}\right]}\mu^{'}_{l,k}(t,\tau)\left(u_{p+j_0-2l,k}(t)+v_{p+j_0-2l,k}(t,\tau)\right)+$$
$$+2\sum_{l,m,l<m}^{l+m=p+j_0}\mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)\left(u_{p+j_0-l-m,k}(t)+v_{p+j_0-l-m,k}(t,\tau)\right)+$$
$$+2\sum_{l=1}^{p-2}\lambda_{1,k}(t)\mu_{l,k}(t,\tau)\left(u_{p+j_0-l,k}(t)+v_{p+j_0-l,k}(t,\tau)\right)+$$
$$+2\lambda_{1,k}(t)\lambda_{2,k}(t)\left(u_{p+j_0,k}(t)+v_{p+j_0,k}(t,\tau)\right)+$$
$$+2\sum_{l=1}^{p-2}\lambda_{2,k}(t)\mu_{l,k}(t,\tau)\left(u_{1+j_0-l,k}(t)+v_{1+j_0-l,k}(t,\tau)\right)+\dot\lambda_{1,k}(t)\left(u_{j_0,k}(t)+v_{j_0,k}(t,\tau)\right)+$$
$$+\sum_{l=1}^{p-2}\dot\mu_{l,k}(t,\tau)\left(u_{j_0-l,k}(t)+v_{j_0-l,k}(t,\tau)\right)+\sum_{l=1}^{p-2}\mu^{'}_{l,k}(t,\tau)\left(u_{j_0+2-l,k}(t)+v_{j_0+2-l,k}(t,\tau)\right)+$$
$$+2\lambda_{1,k}(t)\left(\dot u_{j_0,k}(t)+\dot v_{j_0,k}(t,\tau)+v^{'}_{j_0+2,k}(t,\tau)\right)+2\sum_{l=1}^{p-2}\mu_{l,k}(t,\tau)\left(\dot u_{j_0-l,k}(t)+\right.$$
$$\left.+\dot v_{j_0-l,k}(t,\tau)+v^{'}_{j_0+2-l,k}(t,\tau)+2\lambda_{2,k}(t)\left(\dot u_{j_0+1-p,k}(t)+\dot v_{j_0+1-p,k}(t,\tau)+v^{'}_{j_0+3-p,k}(t,\tau)\right)+\right.$$
$$+\alpha\left(\ddot u_{j_0-p,k}(t)+\ddot v_{j_0-p,k}(t)\right)+\dot v^{'}_{j_0+2-p,k}(t,\tau)+v^{''}_{j_0+4-p,k}(t,\tau)+$$
$$+a_0^2(t)\left(u_{p+j_0,k}(t)+v_{p+j_0,k}(t,\tau)\right)+\sum_{i=0}^{2p-1}b_i(t,\tau)\left(u_{p+j_0-1-i,k}(t)+v_{p+j_0-1-i,k}(t,\tau)\right)=0,$$
$$k=1,2. \quad (1.89)$$

Применяя к этому уравнению операцию $\{\cdots\}$, найдём, что $v^{'}_{j_0+2,k}(t,\tau)$ выражается через $u_{j_0+1,k}(t)$, а значит

$$v_{j_0+2,k}(t,\tau)=w_{j_0+2,k}(t,\tau)+s_k(t,\tau)u_{j_0+1,k}, k=1,2.$$

Рассмотрим следующее уравнение (при $\omega^{\frac{p-j_0-1}{2}}$):

$$\lambda_{1,k}(t)\left(u_{p+j_0+1,k}(t)+v_{p+j_0+1,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{\left[\frac{p+j_0+1}{2}\right]}\mu^{'}_{l,k}(t,\tau)\left(u_{p+j_0+1-2l,k}(t)+v_{p+j_0+1-2l,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\sum_{l,m,l<m}^{l+m=p+j_0}\mu_{l,k}(t,\tau)\mu_{m,k}(t,\tau)\left(u_{p+j_0+1-l-m,k}(t)+v_{p+j_0+1-l-m,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\sum_{l=1}^{p-2}\lambda_{1,k}(t)\mu_{l,k}(t,\tau)(u_{p+j_0+1-l,k}(t)+v_{p+j_0+1-l,k}(t,\tau)+$$

$$+2\lambda_{1,k}(t)\lambda_{2,k}(t)\left(u_{p+j_0+1,k}(t)+v_{p+j_0+1,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\sum_{l=1}^{p-2}\lambda_{2,k}(t)\mu_{l,k}(t,\tau)\left(u_{1+j_0+1-l,k}(t)+v_{1+j_0+1-l,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+\dot\lambda_{1,k}(t)\left(u_{j_0+1,k}(t)+v_{j_0+1,k}(t,\tau)\right)+\sum_{l=1}^{p-2}\dot\mu_{l,k}(t,\tau)\left(u_{j_0+1-l,k}(t)+v_{j_0+1-l,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{p-2}\mu^{'}_{l,k}(t,\tau)\left(u_{j_0+3-l,k}(t)+v_{j_0+3-l,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\lambda_{1,k}(t)\left(\dot u_{j_0+1,k}(t)+\dot v_{j_0+1,k}(t,\tau)+v^{'}_{j_0+3,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\sum_{l=1}^{p-2}\mu_{l,k}(t,\tau)\left(\dot u_{j_0+1-l,k}(t)+\dot v_{j_0+1-l,k}(t,\tau)+v^{'}_{j_0+3-l,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+2\lambda_{2,k}(t)\left(\dot u_{j_0+2-p,k}(t)+\dot v_{j_0+2-p,k}(t,\tau)+v^{'}_{j_0+4-p,k}(t,\tau)\right)+$$

$$+\alpha\left(\ddot u_{j_0+1-p,k}(t)+\ddot v_{j_0+1-p,k}(t)\right)+\beta\dot v^{'}_{j_0+3-p,k}(t,\tau)+v^{''}_{j_0+5-p,k}(t,\tau)+$$

$$+a_0^2(t)\left(u_{p+j_0+1,k}(t)+v_{p+j_0+1,k}(t,\tau)\right)+\sum_{i=0}^{2p-1} b_i(t,\tau)\left(u_{p+j_0-i,k}(t)+v_{p+j_0-i,k}(t,\tau)\right)=0,$$

После применения к нему операции усреднения, получим выражение

$$2\lambda_{1,k}(t)\dot{u}_{j_0+1,k}(t)+f_k(t)u_{j_0+1,k}(t)=g_{j_0+1,k}(t), k=1,2,$$

где $f_k(t)$ и $g_{j_0+1,k}(t)$ – известные функции, с начальными условиями

$$\begin{cases} u_{j_0+1,1}(0)+u_{j_0+1,2}(0)=d_{j_0+1}, \\ \lambda_{1,1}(0)u_{j_0+1,1}(0)+\lambda_{1,2}(0)u_{j_0+1,2}(0)=p_{j_0+1}, \end{cases}$$

здесь d_{j_0+1} и p_{j_0+1} – известные значения. Таким образом, найдём $u_{j_0+1,1}(t)$ и $u_{j_0+1,2}(t)$, а затем $v_{j_0+1,1}(t,\tau)$ и $v_{j_0+1,2}(t,\tau)$.

Из приведённых рассуждений следует первая часть теоремы 1.3 – до оценок. Доказательства самих оценок мы опускаем, т.к. они аналогичны доказательствам подобных оценок в §1.

Пример. Построим несколько членов асимптотики решения задачи Коши (1.73)-(1.74) в случае $p=8$:

$$\begin{gathered}\ddot{x}(t)+(\omega^8 a_0^2(t)+\omega^{\frac{15}{2}}b_0(t,\omega t)+\omega^7 b_1(t,\omega t)+\omega^{\frac{13}{2}}b_2(t,\omega t)+\omega^6 b_3(t,\omega t)+\\ +\omega^{\frac{11}{2}}b_4(t,\omega t)+\omega^5 b_5(t,\omega t)+\omega^{\frac{9}{2}}b_6(t,\omega t)++\omega^4 b_7(t,\omega t)+\omega^{\frac{7}{2}}b_8(t,\omega t)+\\ +\omega^3 b_9(t,\omega t)++\omega^{\frac{5}{2}}b_{10}(t,\omega t)+\omega^2 b_{11}(t,\omega t)+\omega^{\frac{3}{2}}b_{12}(t,\omega t)+\omega b_{13}(t,\omega t)+\\ +\omega^{\frac{1}{2}}b_{14}(t,\omega t)+b_{15}(t,\omega t))x(t)=0\end{gathered}$$

$$x(0)=x_0, \qquad \dot{x}(0)=\omega^4 x_1.$$

Будем действовать по описанной выше схеме. А асимптотическое разложение ищем в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega^4\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{7}{2}}\mu_{1k}(s,\omega s)+\omega^3\mu_{2k}(s,\omega s)+\omega^{\frac{5}{2}}\mu_{3k}(s,\omega s)+\omega^2\mu_{4k}(s,\omega s)+\omega^{\frac{3}{2}}\mu_{5k}(s,\omega s)+\omega\mu_{6k}(s,\omega s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds}$$

$$\times\left(u_{0,k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(u_{j,k}(t) + v_{j,k}(t,\omega t)\right)\right).$$

При ω^8 получим равенство

$$\lambda_{1,k}^2(t)u_{0,k}(t) + a_0^2(t)u_{0,k}(t) = 0, \quad k = 1, 2,$$

которое можно записать в виде

$$\left(\lambda_{1,k}^2(t) + a_0^2(t)\right)u_{0,k}(t) = 0, \quad k = 1, 2,$$

Ему, очевидно, удовлетворяют функции

$$\lambda_{1,1}(t) = ia_0(t), \qquad \lambda_{1,2}(t) = -ia_0(t). \tag{1.91}$$

Следующее равенство коэффициентов (при $\omega^{\frac{15}{2}}$) имеет вид

$$\lambda_{1,k}^2(t)\left(u_{1,k}(t) + v_{1,k}(t,\tau)\right) + 2\lambda_{1,k}(t)\mu_{1,k}(t,\tau)u_{0,k}(t) +$$
$$+ a_0^2(t)\left(u_{1,k}(t) + v_{1,k}(t,\tau)\right) + +b_0(t,\tau)u_{0,k}(t) = 0, \quad k = 1, 2,$$

которое можно записать в виде

$$\left(\lambda_{1,k}^2(t) + a_0^2(t)\right)\left(u_{1,k}(t) + v_{1,k}(t,\tau)\right) +$$
$$+ \left(2\lambda_{1,k}(t)\mu_{1,k}(t,\tau) + b_0(t,\tau)\right)u_{0,k}(t) = 0, \quad k = 1, 2,$$

в силу равенств (1.91) первое слагаемое равно нулю, а значит

$$\left(2\lambda_{1,k}(t)\mu_{1,k}(t,\tau) + b_0(t,\tau)\right)u_{0,k}(t) = 0, \quad k = 1, 2$$

откуда находим

$$\mu_{1,k}(t,\tau) = -\frac{b_0(t,\tau)}{2\lambda_{1,k}(t)}, \quad k = 1, 2. \tag{1.92}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при ω^7, получим равенство

$$(\lambda_{1,k}^2(t)+a_0^2)(u_{2,k}+v_{2,k})+(2\lambda_{1,k}\mu_{1,k}+b_0)(u_{1,k}+v_{1,k})+$$
$$+(2\lambda_{1,k}\mu_{2,k}+b_1+\mu_{1,k}^2)u_{0,k}=0, k=1,2,$$

Из равенств (1.91) и (1.92) получаем, что первые два слагаемых последнего равенства равны нулю, а само равенство примет вид

$$(2\lambda_{1,k}\mu_{2,k}+b_1+\mu_{1,k}^2)u_{0,k}=0, k=1,2,$$

откуда

$$\mu_{2,k}(t,\tau)=-\frac{b_1(t,\tau)+\mu_{1,k}^2(t,\tau)}{2\lambda_{1,k}(t)},\quad k=1,2. \tag{1.93}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при $\omega^{\frac{13}{2}}$, получим

$$(\lambda_{1,k}^2(t)+a_0^2)(u_{3,k}+v_{3,k})+(2\lambda_{1,k}\mu_{1,k}+b_0)(u_{2,k}+v_{2,k})+$$
$$+(2\lambda_{1,k}\mu_{2,k}+b_1+\mu_{1,k}^2)(u_{1,k}+v_{1,k})+(2\lambda_{1,k}\mu_{3,k}+2\mu_{1,k}\mu_{2,k}+b_2)u_{0,k}=0, k=1,2.$$

Здесь в силу (1.91) - (1.93) первые три слагаемых равны нулю, и получится уравнение

$$(2\lambda_{1,k}\mu_{3,k}+2\mu_{1,k}\mu_{2,k}+b_2)u_{0,k}=0, k=1,2,$$

откуда находим

$$\mu_{3,k}(t,\tau)=-\frac{b_2(t,\tau)+2\mu_{1,k}(t,\tau)\mu_{2,k}(t,\tau)}{2\lambda_{1,k}(t)},\quad k=1,2. \tag{1.94}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при ω^6, получим равенство

$$(\lambda_{1,k}^2(t)+a_0^2)(u_{4,k}+v_{4,k})+(2\lambda_{1,k}\mu_{1,k}+b_0)(u_{3,k}+v_{3,k})+$$
$$+(2\lambda_{1,k}\mu_{2,k}+b_1+\mu_{1,k}^2)(u_{2,k}+v_{2,k})+(2\lambda_{1,k}\mu_{3,k}+2\mu_{1,k}\mu_{2,k}+b_2)(u_{1,k}+v_{1,k})+$$
$$+(\mu_{2,k}^2+2\lambda_{1,k}\mu_{4,k}+2\mu_{1,k}\mu_{3,k}+b_3)u_{0,k}=0, k=1,2.$$

Здесь в силу (1.91) - (1.94) первые четыре слагаемых равны нулю и последнее выражение примет вид

$$(\mu_{2,k}^2 + 2\lambda_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{3,k} + b_3)u_{0,k} = 0, k = 1, 2.$$

откуда находим

$$\mu_{4,k}(t,\tau) = -\frac{b_3(t,\tau) + 2\mu_{1,k}(t,\tau)\mu_{3,k}(t,\tau) + \mu_{2,k}^2}{2\lambda_{1,k}(t)}, \quad k = 1, 2. \tag{1.95}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при $\omega^{\frac{11}{2}}$, найдём

$$(\lambda_{1,k}^2(t) + a_0^2)(u_{5,k} + v_{5,k}) + (2\lambda_{1,k}\mu_{1,k} + b_0)(u_{4,k} + v_{4,k}) +$$
$$+ (2\lambda_{1,k}\mu_{2,k} + b_1 + \mu_{1,k}^2)(u_{3,k} + v_{3,k}) + (2\lambda_{1,k}\mu_{3,} + 2\mu_{1,k}\mu_{2,k} + b_2)(u_{2,k} + v_{2,k}) +$$
$$+ (\mu_{2,k}^2 + 2\lambda_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{3,k} + b_3)(u_{1,k} + v_{1,k}) +$$
$$+ (2\lambda_{1,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{3,k} + b_4)u_{0,k} = 0, k = 1, 2.$$

Здесь в силу (1.91) - (1.95) первые пять слагаемых равны нулю и последнее выражение примет вид

$$(2\lambda_{1,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{3,k} + b_4)u_{0,k} = 0, k = 1, 2$$

откуда находим

$$\mu_{5,k}(t,\tau) = -\frac{2\mu_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{3,k} + b_4}{2\lambda_{1,k}(t)}, \quad k = 1, 2. \tag{1.96}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при ω^5, получим равенство

$$(\lambda_{1,k}^2(t) + a_0^2)(u_{6,k} + v_{6,k}) + (2\lambda_{1,k}\mu_{1,k} + b_0)(u_{5,k} + v_{5,k}) +$$
$$+ (2\lambda_{1,k}\mu_{2,k} + b_1 + \mu_{1,k}^2)(u_{4,k} + v_{4,k}) + (2\lambda_{1,k}\mu_{3,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{2,k} + b_2)(u_{3,k} + v_{3,k}) +$$
$$+ (\mu_{2,k}^2 + 2\lambda_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{3,k} + b_3)(u_{2,k} + v_{2,k}) +$$
$$+ (2\lambda_{1,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{3,k} + b_4)(u_{1,k} + v_{1,k}) =$$

$$+(\mu_{3,k}^2+2\lambda_{1,k}\mu_{6,k}+2\mu_{1,k}\mu_{5,k}+2\mu_{2,k}\mu_{4,k}+b_5)u_{0,k}=0, k=1,2.$$

Здесь в силу (1.91) - (1.96) первые шесть слагаемых равны нулю и последнее выражение примет вид

$$(\mu_{3,k}^2+2\lambda_{1,k}\mu_{6,k}+2\mu_{1,k}\mu_{5,k}+2\mu_{2,k}\mu_{4,k}+b_5)u_{0,k}=0, k=1,2$$

откуда находим

$$\mu_{6,k}(t,\tau)=-\frac{\mu_{3,k}^2+2\mu_{1,k}\mu_{5,k}+2\mu_{2,k}\mu_{4,k}+b_5}{2\lambda_{1,k}(t)}, \quad k=1,2. \tag{1.97}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при $\omega^{\frac{9}{2}}$, получим равенство

$$(\lambda_{1,k}^2(t)+a_0^2)(u_{7,k}+v_{7,k})+(2\lambda_{1,k}\mu_{1,k}+b_0)(u_{6,k}+v_{6,k})+$$

$$+(2\lambda_{1,k}\mu_{2,k}+b_1+\mu_{1,k}^2)(u_{5,k}+v_{5,k})+(2\lambda_{1,k}\mu_{3,k}+2\mu_{1,k}\mu_{2,k}+b_2)(u_{4,k}+v_{4,k})+$$

$$+(\mu_{2,k}^2+2\lambda_{1,k}\mu_{4,k}+2\mu 1,k\mu_{3,k}+b_3)(u_{3,k}+v_{3,k})+$$

$$+(2\lambda_{1,k}\mu_{5,k}+2\mu 1,k\mu 4,k+2\mu_{2,k}\mu 3,k+b_4)(u_{2,k}+v_{2,k})=$$

$$+(\mu_{3,k}^2+2\lambda_{1,k}\mu_{6,k}+2\mu_{1,k}\mu_{5,k}+2\mu_{2,k}\mu_{4,k}+b_5)(u_{1,k}+v_{1,k})+$$

$$+(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}+2\mu_{1,k}\mu_{6,k}+2\mu_{2,k}\mu_{5,k}+2\mu_{3,k}\mu_{4,k}+\mu_{1,k}^{'})u_{0k}+2\lambda_{1,k}v_{1,k}^{'}=0, k=1,2.$$

Здесь в силу (1.91) - (1.97) первые семь слагаемых равны нулю и последнее выражение примет вид

$$(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}+2\mu_{1,k}\mu_{6,k}+2\mu_{2,k}\mu_{5,k}+2\mu_{3,k}\mu_{4,k}+\mu_{1,k}^{'}+b_6)u_{0,k}+2\lambda_{1,k}v_{1,k}^{'}=0, k=1,2 \tag{1.98}$$

Применяя к последнему выражению операцию усреднения по τ, получим

$$\lambda_{2,k}(t,\tau)=-\frac{\langle 2\mu_{1,k}\mu_{6,k}+2\mu_{2,k}\mu_{5,k}+2\mu_{3,k}\mu_{4,k}+b_6\rangle}{2\lambda_{1,k}(t)}, \quad k=1,2. \tag{1.99}$$

Применим к уравнению (1.98) операцию $\{...\}$ и получим

$$v'_{1,k}(t,\tau) =$$
$$= -\frac{\left(\mu'_{1,k} + \{2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + b_6\}\right) u_{0,k}(t)}{2\lambda_{1,k}(t)},$$
$$k = 1, 2, \quad (1.100)$$

которое можно переписать в виде

$$v'_{1,k}(t,\tau) = d_k(t,\tau)u_{0,k}, \quad k = 1, 2, \quad (1.101)$$

где

$$d_k(t,\tau) = -\frac{\mu'_{1,k} + \{2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + b_6\}}{2\lambda_{1,k}}$$

известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним.

Решая его, найдём

$$v_{1,k}(t,\tau) = s_k(t,\tau)u_{0,k}(t), \quad (1.102)$$

где $s_k(t,\tau)$ – известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним.

Рассмотрим теперь равенство коэффициентов при ω^4

$$(\lambda^2_{1,k}(t) + a_0^2)(u_{8,k} + v_{8,k}) + (2\lambda_{1,k}\mu_{1,k} + b_0)(u_{7,k} + v_{7,k}) +$$
$$+ (2\lambda_{1,k}\mu_{2,k} + b_1 + \mu^2_{1,k})(u_{6,k} + v_{6,k}) + (2\lambda_{1,k}\mu_{3,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{2,k} + b_2)(u_{5,k} + v_{5,k}) +$$
$$+ (\mu^2_{2,k} + 2\lambda_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{3,k} + b_3)(u_{4,k} + v_{4,k}) +$$
$$+ (2\lambda_{1,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{3,k} + b_4)(u_{3,k} + v_{3,k}) =$$
$$+ (\mu^2_{3,k} + 2\lambda_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{4,k} + b_5)(u_{2,k} + v_{2,k}) +$$
$$+ (2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + \mu'_{1,k} + b_6)(u_{1,k} + v_{1,k}) + 2\lambda_{1,k}v'_{2,k} +$$
$$+ (\mu^2_{4,k} + 2\mu_{1,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} +$$

$$+\dot{\lambda}_{1,k}+\mu_{2,k}^{'}+b_7)u_{0,k}+2\lambda_{1,k}\dot{u}_{0,k}+2\mu_{1,k}v_{1,k}^{'}=0, k=1,2.$$

Учитывая (1.91)-(1.97), обнулятся первые семь слагаемых в последнем выражении. И получим

$$(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}+2\mu_{1,k}\mu_{6,k}+2\mu_{2,k}\mu_{5,k}+2\mu_{3,k}\mu_{4,k}+\mu_{1,k}^{'}+b_6)(u_{1,k}+v_{1,k})+2\lambda_{1,k}v_{2,k}^{'}+$$
$$+(\mu_{4,k}^2+2\mu_{1,k}\lambda_{2,k}+2\mu_{2,k}\mu_{6,k}+2\mu_{3,k}\mu_{5,k}+\dot{\lambda_{1,k}}+\mu_{2,k}^{'}+b_7)u_{0,k}+$$
$$+2\lambda_{1,k}\dot{u_{0,k}}+2\mu_{1,k}v_{1,k}^{'}=0, k=1,2. \quad (1.103)$$

Применяя к (1.103) операцию усреднения по τ, получим

$$(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}+2\langle\mu_{1,k}\mu_{6,k}\rangle+2\langle\mu_{2,k}\mu_{5,k}\rangle+2\langle\mu_{3,k}\mu_{4,k}\rangle+\langle b_6\rangle)u_{1,k}+$$
$$+(2\langle\mu_{1,k}\mu_{6,k}v_{1,k}\rangle+2\langle\mu_{2,k}\mu_{5,k}v_{1,k}\rangle+2\langle\mu_{3,k}\mu_{4,k}v_{1,k}\rangle+\langle b_6v_{1,k}\rangle+\left\langle\mu_{1,k}^{'}v_{1,k}\right\rangle)+$$
$$+(\langle\mu_{4,k}^2+2\mu_{2,k}\mu_{6,k}+2\mu_{3,k}\mu_{5,k}+b_7\rangle+\dot{\lambda}_{1,k})u_{0,k}+$$
$$+2\lambda_{1,k}\dot{u}_{0,k}+\left\langle 2\mu_{1,k}v_{1,k}^{'}\right\rangle=0, k=1,2. \quad (1.104)$$

Из (1.99) получаем, что коэффициент первого слагаемого равен нулю, а значит получим

$$(2\langle\mu_{1,k}\mu_{6,k}v_{1,k}\rangle+2\langle\mu_{2,k}\mu_{5,k}v_{1,k}\rangle+2\langle\mu_{3,k}\mu_{4,k}v_{1,k}\rangle+\langle b_6v_{1,k}\rangle+\left\langle\mu_{1,k}^{'}v_{1,k}\right\rangle)+$$
$$+(\langle\mu_{4,k}^2+2\mu_{2,k}\mu_{6,k}+2\mu_{3,k}\mu_{5,k}+b_7\rangle+\dot{\lambda}_{1,k})u_{0,k}+$$
$$+2\lambda_{1,k}\dot{u}_{0,k}+\left\langle 2\mu_{1,k}v_{1,k}^{'}\right\rangle=0, k=1,2. \quad (1.105)$$

Учитывая (1.101) и (1.102), придём к уравнению вида

$$2\lambda_{1,k}(t)\dot{u}_{0,k}(t)+f_k(t)u_{0,k}(t)=0,$$

где

$$f_k = \dot{\lambda}_{1,k} + \langle \mu_{4,k}^2 + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + b_7 +$$
$$+ \left(2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + b_6 + \mu_{1,k}^{'}\right) s_{1,k} + 2\mu_{1,k}d_{1k}\rangle$$

– известная функция.

С учётом начальных условий для $u_{0,1}$ и $u_{0,2}$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} u_{0,1}(0) + u_{0,2}(0) = x_0, \\ \lambda_{1,1}(0)u_{0,1}(0) + \lambda_{1,2}(0)u_{0,2}(0) = x_1, \end{cases}$$

решим последнее дифференциальное уравнение, то есть найдём $u_{0,1}(t)$ и $u_{0,2}(t)$, а возвращаясь к (1.102), найдём и $v_{1,1}(t,\tau)$, $v_{1,2}(t,\tau)$.

Применяя к (1.103) операцию $\{...\}$, получим

$$2\lambda_{1,k}v_{2,k}^{'} = -\left[\left(\{2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + b_6\} + \mu_{1,k}^{'}\right) u_{1,k} +\right.$$
$$+ \left((\{\mu_{4,k}^2 + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + b_7\} + \mu_{2,k}^{'} + 2\mu_{1,k}\lambda_{2,k}\right) u_{0,k} +$$
$$+ 2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}v_{1,k} + \left\{2\mu_{1,k}v_{1,k}^{'}\right\}$$
$$+ \left\{\left(2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + \mu_{1,k}^{'} + b_6\right) v_{1,k}\right\}, k = 1, 2.$$

Учитывая (1.101) и (1.102), получим

$$v_{2,k}^{'}(t,\tau) = q_k(t,\tau)u_{1,k}(t) + r_{2,k}(t,\tau)u_{0,k}(t), \tag{1.106}$$

где r_k – уже упомянутая ранее известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним, а $q_{2,k}(t,\tau)$ – также известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним, которая имеет вид

$$q_{2,k}(t,\tau) = \left[\left(\{\mu_{4,k}^2 + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + b_7\} + \mu_{2,k}^{'} + 2\mu_{1,k}\lambda_{2,k}\right) +\right.$$
$$+ 2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k}s_k + \{2\mu_{1,k}d_k\}$$
$$\left. + \left\{\left(2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + \mu_{1,k}^{'} + b_6\right) s_k\right\}\right] / 2\lambda_{1,k}$$

Из последнего получим

$$v_{2,k}(t,\tau) = s_k(t,\tau)u_{1,k}(t) + w_{2,k}(t,\tau)u_{0,k}(t), \tag{1.107}$$

а $s_k, w_{2,k}(t,\tau)$ – известные 2π-периодические по τ функции с нулевым средним.

Рассмотрим теперь равенство коэффициентов при $\omega^{\frac{7}{2}}$:

$$\begin{gathered}(\lambda_{1,k}^2(t) + a_0^2)(u_{9,k} + v_{9,k}) + (2\lambda_{1,k}\mu_{1,k} + b_0)(u_{8,k} + v_{8,k}) + \\ + (2\lambda_{1,k}\mu_{2,k} + b_1 + \mu_{1,k}^2)(u_{7,k} + v_{7,k}) + (2\lambda_{1,k}\mu_{3,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{2k} + b_2)(u_{6,k} + v_{6,k}) + \\ + (\mu_{2,k}^2 + 2\lambda_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{3,k} + b_3)(u_{5,k} + v_{5,k}) + \\ + (2\lambda_{1,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{4,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{3,k} + b_4)(u_{4,k} + v_{4,k}) = \\ + (\mu_{3,k}^2 + 2\lambda_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{4,k} + b_5)(u_{3,k} + v_{3,k}) + \\ + (2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + \mu_{1,k}^{'} + b_6)(u_{2,k} + v_{2,k}) + \\ + (\mu_{4,k}^2 + 2\mu_{1,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + \dot{\lambda_{1,k}} + \mu_{2,k}^{'} + b_7)(u_{1,k} + v_{1,k}) + \\ + (2\mu_{2,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{4,k}\mu_{5,k} + \dot{\mu}_{1,k} + \mu_{3,k}^{'})u_{0,k} + \\ + 2\lambda_{1,k}(\dot{u}_{1,k} + \dot{v}_{1,k}) + 2\lambda_{1,k}v_{3,k}^{'} + \mu_{1,k}\dot{u}_{0,k} + 2\mu_{1,k}v_{2,k}^{'} + 2\mu_{2,k}v_{1,k}^{'} = 0\end{gathered}$$

Учитывая (1.91)-(1.97), обнулятся первые семь слагаемых в последнем выражении, так что получим

$$\begin{gathered}(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + \mu_{1,k}^{'} + b_6)(u_{2,k} + v_{2,k}) + \\ + (\mu_{4,k}^2 + 2\mu_{1,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + \dot{\lambda_{1,k}} + \mu_{2,k}^{'} + b_7)(u_{1,k} + v_{1,k}) + \\ + (2\mu_{2,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{4,k}\mu_{5,k} + \dot{\mu}_{1,k} + \mu_{3,k}^{'})u_{0,k} + \\ + 2\lambda_{1,k}(\dot{u}_{1,k} + \dot{v}_{1,k}) + 2\lambda_{1,k}v_{3,k}^{'} + \mu_{1,k}\dot{u}_{0,k} + 2\mu_{1,k}v_{2,k}^{'} + 2\mu_{2,k}v_{1,k}^{'} = 0\end{gathered}$$

Из последнего выражения, после применения к нему операции усреднения по τ, найдём

$$
\begin{aligned}
&(2\lambda_{1,k}\lambda_{2,k} + \langle 2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + b_6\rangle)u_{2,k} + \\
&\quad + \left\langle \left(2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + \mu_{1,k}^{'} + b_6\right) v_{2,k} \right\rangle + \\
&\quad + \left(\langle \mu_{4,k}^2 + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + b_7\rangle + \dot{\lambda}_{1,k}\right) u_{1,k} + \\
&\quad + \left\langle \left(\mu_{4,k}^2 + 2\mu_{1,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + \mu_{2,k}^{'} + b_7\right) v_{1,k} \right\rangle + \\
&\quad + \langle 2\mu_{3,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{4,k}\mu_{5,k}\rangle u_{0,k} 2\lambda_{1,k}\dot{u}_{1,k} + 2\left\langle \mu_{1,k}v_{2,k}^{'}\right\rangle + 2\left\langle \mu_{2,k}v_{1,k}^{'}\right\rangle = 0
\end{aligned}
$$

Из (1.99) получаем, что коэффициент первого слагаемого равен нулю, а значит получим

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \left(2\mu_{1,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{5,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{4,k} + \mu_{1,k}^{'} + b_6\right) v_{2,k} \right\rangle + \\
&\quad + \left(\langle \mu_{4,k}^2 + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + b_7\rangle + \dot{\lambda}_{1,k}\right) u_{1,k} + \\
&\quad + \left\langle \left(\mu_{4,k}^2 + 2\mu_{1,k}\lambda_{2,k} + 2\mu_{2,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{3,k}\mu_{5,k} + \mu_{2,k}^{'} + b_7\right) v_{1,k} \right\rangle + \\
&\quad + \langle 2\mu_{3,k}\mu_{6,k} + 2\mu_{4,k}\mu_{5,k}\rangle u_{0,k} 2\lambda_{1,k}\dot{u}_{1,k} + 2\left\langle \mu_{1,k}v_{2,k}^{'}\right\rangle + 2\left\langle \mu_{2,k}v_{1,k}^{'}\right\rangle = 0
\end{aligned}
$$

Учитывая (1.101), (1.102), (1.106)(1.107), придём к уравнению

$$
2\lambda_{1,k}(t)\dot{u}_{1,k}(t) + f_k(t)u_{1,k}(t) = l_{1,k},
$$

где $f_k(t)$ и $l_{1k}(t)$ – известные функции.

Определив начальные условия из системы

$$
\begin{cases}
u_{1,1}(0) + u_{1,2}(0) = -\left(v_{1,1}(0,0) + v_{1,2}(0,0)\right) \\
\lambda_{1,1}(0)u_{1,1}(0) + \lambda_{1,2}(0)u_{1,2}(0) = \\
-\left(\lambda_{1,1}(0)v_{1,1}(0,0) + \lambda_{1,2}(0)v_{1,2}(0,0) + \mu_{1,1}(0,0)u_{0,1} + \mu_{1,2}(0,0)u_{0,2}(0)\right),
\end{cases}
$$

найдём $u_{1,1}(t)$ и $u_{1,2}(t)$, а значит из (1.107) будут найдены $v_{2,1}(t,\tau)$ и $v_{2,2}(t,\tau)$.

На этом этапе завершим построение нескольких членов асимптотики решения.

§4. Неоднородное уравнение произвольного ранга

Для натурального $p > 2$ рассмотрим следующую задачу Коши

$$\ddot{x}(t) + \omega^{\frac{2p-1}{2}} \left(\omega^{\frac{1}{2}} a_0^2(t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \omega^{-\frac{i}{2}} b_i(t, \omega t) \right) x(t) =$$
$$= e^{i\omega^{\frac{p}{2}} \int\limits_0^t r(s)ds} (f(t) + g(t, \omega t)), \quad (1.108)$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega^{\frac{p}{2}} x_1, \quad (1.109)$$

$$f(t, \omega) = \sum_{k=-2p}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad g(t, \tau, \omega) = \sum_{k=-2p}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} g_k(t, \tau),$$

где параметр $\omega >> 1, m \in Z$. Вещественные функции $a_0(t), r(t),\ b_i(t, \tau)$ и комплекснозначные $f_k(t)$и $g_k(t, \tau)$ определены и непрерывны на множествах $t \in [0, T], (t, \tau) \in [0, T] \times [0, \infty)$ соответственно, причём b_i, g_k – 2π-периодичные по τ , а g_k имеет нулевое среднее по τ, $a_0(t) \neq 0, \quad a_0^2(t) \neq r^2(t), \forall t \in [0, T]$, x_0 и x_1 – некоторые комплексные заданные числа.

Асимптотическое разложение решения задачи Коши (1.108) - (1.109) будем искать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega^{\frac{p}{2}} \lambda_{1,k}(s) + \sum\limits_{l=1}^{p-2} \omega^{\frac{p-l}{2}} \mu_{lk}(s, \omega s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s) \right) ds} \times$$
$$\times \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t) \right) \right) +$$
$$+ e^{i\omega^{\frac{p}{2}} \int\limits_0^t r(s)ds} \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(p_j(t) + q_j(t, \omega t) \right), \quad (1.110)$$

где функции $v_{jk}(t,\tau), j=1,2,...,k=1,2,$ и $q_j(t,\tau), l=1,2,...,p-2, k=1,2$ являются 2π-периодическими по τ имеют нулевые среднии.

Частичную сумму

$$x^n(t)=\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega^{\frac{p}{2}}\lambda_{1,k}(s)+\sum\limits_{l=1}^{p-2}\omega^{\frac{p-l}{2}}\mu_{lk}(s,\omega s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds}\times$$
$$\times\left(u_{0k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(u_{jk}(t)+v_{jk}(t,\omega t)\right)\right)+$$
$$+e^{i\omega^{\frac{p}{2}}\int\limits_0^t r(s)ds}\sum_{j=1}^{n}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(p_j(t)+q_j(t,\omega t)\right), n\in N,$$

ряда $x(t)$ будем называть n-ым приближением решения задачи Коши (1.108)-(1.109).

Алгоритм нахождения коэффициентов асимптотического разложения в целом совпадает с описанным в §2, поэтому опустим нахождение неизвестных коэффициентов $u_{j,k}, v_{j,k}$. Будем рассматривать равенства коэффициентов только при функциях

$$\omega^{\frac{l}{2}}e^{i\omega^{\frac{p}{2}}\int\limits_0^t r(s)ds}, l=2p,2p-1,...$$

Итак, при ω^p получаем уравнение вида

$$(a^2(t)-r^2(t))(p_0(t)+q_0(t,\tau))=f_{-2p}(t)+g_{-2p}(t,\tau), \tag{1.111}$$

откуда после разделения с помощью операции усреднения на два уравнения, получим

$$p_0(t)=\frac{f_{-2p}(t)}{a_0^2(t)-r^2(t)}, q_0(t,\tau)=\frac{g_{-2p}(t,\tau)}{a_0^2(t)-r^2(t)}.$$

Следующее равенство при $\omega^{\frac{2p-1}{2}}$ имеет вид

$$(a^2(t)-r^2(t))(p_1(t)+q_1(t,\tau)=$$
$$=f_{-2p+1}(t)+g_{-2p+1}(t,\tau)-b_0(t,\tau)(p_0(t)+q_0(t,\tau))$$

Действуя, как и в случае уравнения (1.111), получим

$$p_1(t)=\frac{f_{-2p+1}(t)-\langle b_0(t,\tau)q_0(t,\tau)\rangle}{a_0^2(t)-r^2(t)},$$

$$q_1(t,\tau)=\frac{g_{-2p+1}(t,\tau)-\{b_0(t,\tau)q_0(t,\tau)\}-b_0(t,\tau)p_0(t)}{a_0^2(t)-r^2(t)}.$$

По аналогии с §3 находятся остальные коэффициенты асимптотического разложения.

Обоснование асимптотики опустим, так как оно проводится аналогично обоснованию в §1.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1.4. *Для любого $n\in N$ найдутся такие положительные числа c_n и ω_n, что при $\omega>\omega_n$ эффективно строится n-ое приближение x^n решения задачи Коши (1.108)-(1.109), которое при всех $t\in[0,T]$ удовлетворяет оценкам*

$$\sup_{t\in[0,T]}|x(t)-x^n(t)|\le C_1\omega^{\frac{-n-1}{2}},$$
$$\sup_{t\in[0,T]}|\dot{x}(t)-\dot{x}^n(t)|\le C_2\omega^{\frac{-n-1+p}{2}},$$

где C_1 и C_2 – не зависимые от ω постоянные.

2 Нормальная система первого типа. Асимптотика фундаментальной матрицы решений.

§1. Однородная система. Случай простых собственных значений.

1°. **Построение формальной асимптотики.** Уравнение вида

$$\dot{x}(t) = \omega^{\frac{1}{2}} A(t,\omega)x(t) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)x(t), \omega >> 1. \tag{2.1}$$

Пусть m и n – натуральные числа, $T > 0$. На участке $t \in [0,T]$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1), где

$$A(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} A_k(t), B(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau),$$

A_k и $B_k, k = \overline{0,m}$ – квадратные матрицы порядка n. Будем предполагать, что элементы последних определены и непрерывны на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty)$, причём элементы матрицы A_k имеют на интервале $t \in (0,T)$ производные любого порядка, которые продолжимы до непрерывных на отрезке $t \in [0,T]$ функций, а матрицы $B_k(t,\tau)$ – 2π -периодичны по τ с нулевым средним: $\langle B_k(t,\tau)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} B_k(t,\tau)d\tau = 0$. Предположим ещё, что матрица $A_0(t)$ имеет различные характеристические корни $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t), t \in [0,T]$.

Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений системы (2.1) будем искать в виде

$$X(t) = \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(P_j(t) + H_j(t,\omega t)\right)\right] e^{Q(t,\omega)}, \tag{2.2}$$

где $P_j(t)$ и $H_j(t,\tau)$ – квадратные матрицы порядка n, причём $H_j(t,\tau)$ – 2π-периодичны по τ с нулевым средним, $P_0(t)$ – невырождены, диагональные элементы матриц $P_0^{-1}(0)P_j(0), j \geq 1$, равны нулю, $Q(t,\omega) = \omega^{\frac{1}{2}}Q_{-1}(t) + Q_0(t), Q_{-1}(t) = \left(q_{ij}^{(-1)}(t)\right)$ и $Q_0(t) = \left(q_{ij}^{(0)}(t)\right)$ – диагональные матрицы порядка n, удовлетворяющие условиям $Q_{-1}(0) = Q_0(0) = 0$.

Подставив формально (2.2) в (2.1), и сократив обе части полученного равенства на $e^{Q(t,\omega)}$, придём к соотношению

$$\dot{P}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(\dot{P}_j(t) + \dot{H}_j(t,\tau) + \omega H_j^{'}(t,\tau)\right) +$$

$$+\left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(P_j(t) + H_j(t,\tau)\right)\right]\dot{Q}(t,\omega) = \tag{2.3}$$

$$= \omega^{\frac{1}{2}} \left[A(t,\omega) + B(t,\tau,\omega)\right] \cdot \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(P_j(t) + H_j(t,\tau)\right)\right], \tau = \omega t.$$

Здесь и далее точкой обозначается производная по t, а штрихом - производная по τ.

Приравнивая в (2.3) коэффициенты при одинаковых степенях ω, придём к бесконечной цепочке уравнений, первое из которых (равенство коэффициентов при $\omega^{\frac{1}{2}}$) имеет вид:

$$H_1^{'}(t,\tau) + P_0(t)\dot{Q}_{-1}(t) = A_0(t)P_0(t) + B_0(t,\tau)P_0(t). \tag{2.4}$$

Применяя к уравнению (2.4) операцию $\langle ... \rangle$ усреднения по τ, получим

$$\dot{Q}_{-1}(t) = P_0^{-1}(t)A_0(t)P_0(t). \tag{2.5}$$

Таким образом, получили что P_0 – это матрица, приводящая A_0 к диагональному виду $\dot{Q}_{-1}$, так что P_0 и Q_{-1} можно считать найденными.

Из (2.4), (2.5) следует равенство

$$H_1^{'}(t,\tau) = B_0(t,\tau)P_0(t),$$

из которого находим (см. лемму 2 при A=0 ниже)

$$H_1(t,\tau) = \{\int\limits_0^\tau B_0(t,s)ds\}_\tau P_0(t), \tag{2.6}$$

где использована введённая ранее в скалярном случае операция $\{A\}_\tau :=$ $A(t,\tau)- < A(t,\tau) >$.

Следующее равенство коэффициентов в (2.4) (при ω^0) имеет вид:

$$\begin{gathered}\dot P_0(t) + H_2^{'}(t,\tau) + P_0(t)\dot Q_0(t) + P_1(t)\dot Q_{-1}(t) + H_1(t,\tau)\dot Q_{-1}(t) = \\ = A_0(t)P_1(t) + A_0(t)H_1(t,\tau) + B_0(t,\tau)[P_1(t) + H_1(t,\tau)] + \\ +[A_1(t) + B_1(t,\tau)]P_0(t).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Применяя к нему операцию усреднения по τ, найдём

$$\dot P_0(t)+P_0(t)\dot Q_0(t)+P_1(t)\dot Q_{-1}(t) = A_0(t)P_1(t)+\langle B_0(t,\tau)H_1(t,\tau)\rangle+A_1(t)P_0(t). \tag{2.8}$$

Умножая уравнение (2.8) слева на матрицу $P_0^{-1}(t)$ и вводя обозначения $S_i := P_0^{-1}P_i, i = 1, 2, ...$, придём к равенству

$$S_1(t)\dot Q_{-1}(t) - \dot Q_{-1}(t)S_1(t) = M_1(t) - \dot Q_0(t), \tag{2.9}$$

где M_1 – известная матрица. Так как матрица Q_0 диагональная, то элементы $s_{ij}^{(1)}$ матрицы S_1 при $i \neq j$ удовлетворяют уравнениям

$$s_{ij}^{(1)}(\lambda_j - \lambda_i) = m_{ij}^{(1)}, \tag{2.10}$$

где $m_{ij}^{(1)}$ – элементы матрицы M_1. Отсюда, в силу условия $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, элементы $s_{ij}^{(1)}$ определяются однозначно.

Далее многократно будем пользоваться следующими обозначениями. По любой квадратной матрице S определим матрицы $\overline{S}$ и $\widehat{S}$, где $\overline{S}$ получена из S заменой в последней диагональных элементов нулями, а $\widehat{S} = S - \overline{S}$. В этих обозначениях (2.9) можно переписать в виде двух уравнений:

$$\overline{S}_1 \dot{Q}_{-1} - \dot{Q}_{-1} \overline{S}_1 = \overline{M}_1, \widehat{M}_1 - \dot{Q}_0 = 0,$$

откуда

$$q_{ii}^{(0)}(t) = \int\limits_0^t m_{ii}^{(1)}(s) ds.$$

Разность уравнений (2.7) и (2.8) приводит к соотношению

$$H_2'(t,\tau) + H_1(t,\tau)\dot{Q}_{-1}(t) =$$

$$= A_0(t)H_1(t,\tau) + B_0(t,\tau)P_1(t) + R_\tau[B_0(t,\tau)H_1(t,\tau)] + B_1(t,\tau)P_0(t)$$

или

$$H_2'(t,\tau) = A_0(t)H_1(t,\tau) + B_0(t,\tau)P_0(t)\overline{S}_1(t) + B_0(t,\tau)P_0(t)\widehat{S}_1(t) +$$

$$+ R_\tau[B_0(t,\tau)H_1(t,\tau)] + B_1(t,\tau)P_0(t) - H_1(t,\tau)\dot{Q}_{-1}(t),$$

так что H_2 в силу леммы 2 можно представить в виде

$$H_2(t,\tau) = V_2(t,\tau) + H_1(t,\tau)\widehat{S}_1(t), \tag{2.11}$$

где V_2 – некоторая известная матрица с нулевым средним по τ.

Равенство коэффициентов в (2.3) при $\omega^{-\frac{1}{2}}$ имеет вид:

$$\dot{P}_1(t) + \dot{H}_1(t,\tau) + H_3'(t,\tau) + P_2(t)\dot{Q}_{-1}(t) + H_2(t,\tau)\dot{Q}_{-1}(t) + [P_1(t) + H_1(t,\tau)]\dot{Q}_0(t) =$$

$$= A_2(t)P_0(t) + B_2(t,\tau)P_0(t) + [A_1(t) + B_1(t,\tau)][P_1(t) + H_1(t,\tau)] + \tag{2.12}$$

$$+ A_0(t)P_2(t) + A_0(t)H_2(t,\tau) + B_0(t,\tau)[P_2(t) + H_2(t,\tau)].$$

В результате усреднения уравнения (2.12) получим

$$\dot{P}_1(t) + P_2(t)\dot{Q}_{-1}(t) + P_1(t)\dot{Q}_0(t) =$$

$$= A_2(t)P_0(t) + A_1(t)P_1(t) + A_0(t)P_2(t) + \langle B_1(t,\tau)H_1(t,\tau)\rangle + \langle B_0(t,\tau)H_2(t,\tau)\rangle\,. \tag{2.13}$$

Умножив равенство (2.13) слева на P_0^{-1} и воспользовавшись равенством $P_0^{-1}\dot{P}_1 = \dot{S}_1 - \dot{P_0^{-1}}P_0S_1$ получим соотношение

$$S_2(t)\dot{Q}_{-1}(t) - \dot{Q}_{-1}(t)S_2(t) = M_2(t) - \widehat{S}_1\dot{Q}_0 + G_1(t)\widehat{S}_1 + \dot{\widehat{S}}_1, \tag{2.14}$$

где $G_1 = P_0^{-1}A_1P_0 + < P_0^{-1}B_0H_1 > + P_0^{-1}P_0$, а выражение M_2 очевидно. Отсюда следует, что матрица $\widehat{S}_1$ является решением задачи

$$\dot{\widehat{S}}_1 + \widehat{S}_1\dot{Q}_0 - \widehat{G}_1(t)\widehat{S}_1 - \widehat{M}_2(t) = 0, \widehat{S}_1(0) = 0.$$

Матрица $\overline{S}_2$ находится из уравнения

$$\overline{S}_2\dot{Q}_{-1} - \dot{Q}_{-1}\overline{S}_2 = \overline{M}_2 + \overline{G}_1\widehat{S}_1.$$

Найдя $\widehat{S}_1$, определим матрицы P_1, H_2 и $\overline{S}_2$.

Допустим теперь, что мы нашли все P_j, H_{j+1} и $\overline{S}_{j+1}, j \le k$, при некотором натуральном k. Покажем, что тогда аналогичным образом можно найти P_{k+1}, H_{k+2} и $\overline{S}_{k+2}$. Для этого приравняем коэффициенты в равенстве (2.3) при степени $\omega^{-\frac{k}{2}}$:

$$H'_{k+2} + P_{k+1}\dot{Q}_{-1} - A_0P_{k+1} = -\dot{P}_k - \dot{H}_k - H_{k+1}\dot{Q}_{-1} - (P_k + H_k)\dot{Q}_0 + A_0H_{k+1} +$$

$$+ B_0(P_{k+1} + H_{k+1}) + \sum_{l+r=k+1, l\neq 0}(A_l + B_l)(P_r + H_r). \tag{2.15}$$

Применив теперь к полученному уравнению операцию R_τ, найдём

$$H'_{k+2} = -\dot{H}_k - P_{k+1}\dot{Q}_{-1} - H_k\dot{Q}_0 + A_0H_{k+1} + B_0P_{k+1} +$$

$$+\sum_{l+r=k+1,l\neq 0} A_l H_r + \sum_{l+r=k+1,l\neq 0} B_l P_r + \sum_{l+r=k+1} R_\tau [B_l H_r].$$

Отсюда

$$H_{k+2}(t,\tau) = V_{k+2}(t,\tau) + H_1(t,\tau)\widehat{S}_{k+1}(t), \tag{2.16}$$

где V_{k+2} – известная матрица.

Для нахождения $\widehat{S}_{k+1}$ рассмотрим равенство коэффициентов в (2.3) при $\omega^{-\frac{k+1}{2}}$

$$H'_{k+3} + P_{k+2}\dot{Q}_{-1} - A_0 P_{k+2} = -\dot{P}_{k+1} - \dot{H}_{k+1} - H_{k+2}\dot{Q}_{-1} - (P_{k+1} - H_{k+1})\dot{Q}_0 +$$
$$+ A_0 H_{k+2} + B_0(H_{k+2} + P_{k+2}) + \sum_{l+r=k+2,l\neq 0} (A_l + B_l)(P_r + H_r).$$

Применив к нему операцию усреднения по τ и умножив полученное равенство слева на P_0^{-1}, придём к уравнению

$$S_{k+2}\dot{Q}_{-1} - \dot{Q}_{-1}S_{k+2} = M_{k+2} - \widehat{S}_{k+1}\dot{Q}_0 + G_{k+2}\widehat{S}_{k+1} - \dot{\widehat{S}}_{k+1},$$

где M_{k+1} – известная матрица. Здесь мы учли (2.16) и тождество

$$P_0^{-1}P_{k+1} = \dot{S}_{k+1} - \dot{P_0^{-1}} P_0 S_{k+1}.$$

Теперь $\widehat{S}_{k+1}$ и $\overline{S}_{k+2}$ однозначно находятся из соотношений:

$$\widehat{S}_{k+1} + \widehat{S}_{k+1}\dot{Q}_0 - \widehat{G}_{k+2}\widehat{S}_{k+1} - \widehat{M}_{k+2} = 0, \widehat{S}_{k+1}(0) = 0,$$

$$\overline{S}_{k+2}\dot{Q}_{-1} - \dot{Q}_{-1}\overline{S}_{k+2} = \overline{M}_{k+2} + \overline{G}\widehat{S}_{k+1},$$

а в след за ними определятся P_{k+1} и H_{k+2}. Итак , установлено, что описанным выше способом можно найти все коэффициенты формального асимптотического разложения фундаментальной матрицы решений (2.2).

2°. **Обоснование.**

В этом пункте для решений системы (2.1), составляющих её фундаментальную матрицу, будет обоснована полная асимптотика.

Дополнительно к обозначениям п.1 введём следующие:

$$P(t,\omega) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} P_j(t),$$

$$H(t,\tau,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} H_j(t,\tau);$$

$$P^l(t,\omega) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{l} \omega^{-\frac{j}{2}} P_j(t),$$

$$H^l(t,\tau,\omega) = \sum_{j=1}^{l} \omega^{-\frac{j}{2}} H_j(t,\tau);$$

p_l^k и h_l^k — k-ые столбцы матриц P^l и H^l соответственно;

$$\varphi_l^k = (p_l^k + h_l^k);$$

q_k — k-ый диагональный элемент матрицы Q; символами $\|A\|$ и $|a|$ будем обозначать какие-либо нормы матрицы A и вектора a.

Теорема 2.1. *Существует число $\omega_0 > 0$, такое что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k = \overline{1,n}$ найдётся решение φ^k системы уравнений* (2.1), *для которого при всех целых неотрицательных l выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^k(t)e^{-q_k} - \varphi_l^k(t)| \le \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2}}},$$

где $c = c(l)$ – не зависящая от ω константа. При этом столбцы $\varphi^k, k = \overline{1,n}$, составляют фундаментальную матрицу решений.

Доказательству теоремы предпошлём одно вспомогательное утверждение. Оно хорошо известно, но приводится здесь с доказательством для полноты изложения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = C(t)x(t) + \varphi(t), t \in [0, T], \tag{2.17}$$

где $C(t)$ — непрерывная квадратная матрица порядка n, $\varphi(t)$ — непрерывный n-мерный вектор. Пусть $V(t)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = C(t)x$. Представим матрицу V в виде суммы $V = V_1 + V_2$, где V_1 получена из матрицы V заменой нулями некоторых её столбцов.

Лемма 1. *Вектор-функция*

$$x(t) = V_1(t)\int\limits_0^t V^{-1}(s)\varphi(s)ds - V_2(t)\int\limits_t^T V^{-1}(s)\varphi(s)ds$$

является решением системы (2.17).

Доказательство.

Матрица $V(t)$ является решением однородной матричной системы

$$\dot{V}(t) = C(t)V(t). \tag{2.18}$$

Частное решение системы (2.17) будем искать в виде

$$x(t) = V(t)y(t). \tag{2.19}$$

Производя замену (2.19) в уравнении (2.17) и учитывая (2.18), получим

$$V(t)\dot{y}(t) = \varphi(t), \tag{2.20}$$

то есть

$$\dot{y}(t) = V^{-1}(t)\varphi(t). \tag{2.21}$$

Система (2.21), очевидно, имеет частные решения

$$y_1(t) = \int\limits_0^t V^{-1}(s)\varphi(s)ds$$

и

$$y_2(t) = -\int\limits_t^T V^{-1}(s)\varphi(s)ds.$$

Покажем, что вектор

$$x = V_1 y_1 + V_2 y_2 = V y_1 + V_2(y_2 - y_1) \tag{2.22}$$

является решением уравнения (2.17) . Производя замену (2.22) в (2.17) и учитывая (2.18) , (2.20) , получим

$$\dot{x} = \dot{V} y_1 + V \dot{y}_1 + \dot{V}_2(y_2 - y_1) + V_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) =$$
$$= CV y_1 + CV_2(y_2 - y_1) + \varphi(t) =$$
$$= C(V_1 y_1 + V_2 y_2) + \varphi(t) = Cx + \varphi.$$

Здесь мы учли равенства:

$$\dot{V}(t)y_1(t) + V(t)\dot{y}_1(t) = C(t)V(t)y_1(t) + \varphi(t),$$
$$\dot{V}_2(t)(y_2(t) - y_1(t)) + V_2(t)(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) = C(t)V_2(t)(y_2(t) - y_1(t)).$$

Таким образом, вектор-функция $x = V_1 y_1 + V_2 y_2$ является решением системы (2.17) . *Лемма доказана.*

Доказательство теоремы.

Так как $(P(t,\omega) + H(t,\omega t,\omega))e^{Q(t,\omega)}$ формальное асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений системы(1.1), то справедливо формальное равенство:

$$(\dot{P} + \dot{H} + \omega H^{'} + P\dot{Q} + H\dot{Q}) = \omega^{\frac{1}{2}}(A + B)(P + H). \tag{2.23}$$

Для каждого натурального l зададим при $\omega >> 1$ матрицу $C_l = C_l(t,\omega t,\omega)$ равенством

$$\dot{P}^l + \dot{H}^l + \omega (H^l)^{'} + P^l\dot{Q} + H^l\dot{Q} = \omega^{\frac{1}{2}} C_l(P^l + H^l). \tag{2.24}$$

При этом C_l определена однозначно, так как матрица $P^l + H^l$ при всех $t \in [0, T]$ и $\omega >> 1$ невырожденная. Вычитая последнее равенство из очевидного (в силу (2.23)) соотношения

$$\dot{P}^l + \dot{H}^l + \omega(H^l)' + P^l\dot{Q} + H^l\dot{Q} = \omega^{\frac{1}{2}}(A + B)(P^l + H^l) + R_1(\omega),$$

где

$$\sup_{t\in[0,T]} \|R_1(\omega)\| = O(\omega^{\frac{-l+1}{2}}), \omega \to \infty,$$

получим

$$\omega^{\frac{1}{2}}(A + B - C_l)(P^l + H^l) = -R_1(\omega),$$

Таким образом

$$\sup_{t\in[0,T]} \|A + B - C_l\| \le c_1\omega^{-\frac{l}{2}}, \tag{2.25}$$

где $c_1 = const > 0$.

Уравнение (2.1) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt} - \omega^{\frac{1}{2}}C_l x = \omega^{\frac{1}{2}}(A + B - C_l)x, \tag{2.26}$$

и будем далее учитывать, что матрица-функция

$$V_l(t, \omega) = (P_l(t, \omega) + H_l(t, \omega t, \omega))e^{Q(t,\omega)}$$

в силу (2.24) является фундаментальной матрицей решений системы

$$\frac{dx}{dt} - \omega^{\frac{1}{2}}C_l(t, \omega t, \omega)x = 0.$$

Для любого $k, k = \overline{1, n}$, положим $P^l + H^l = W_{1k} + W_{2k}$, где j-ый столбец матрицы W_{1k} совпадает с j-ым столбцом матрицы $(P^l + H^l)$, если

$$\lambda_j(t) - \lambda_k(t) < 0, 0 \le t \le T, \tag{2.27}$$

а остальные столбцы W_{1k} – нулевые. Согласно (2.24) и лемме 1, некоторое решение уравнения (2.26) представимо в виде

$$\varphi^k(t) = (p_l^k(t,\omega) + h_l^k(t,\omega t,\omega))e^{q_k(t)} +$$

$$+\omega^{\frac{1}{2}} W_{1k}(t,\omega)\int\limits_0^t e^{Q(t,\omega)-Q(s,\omega)}(P^l(s,\omega)+H^l(s,\omega s,\omega))^{-1}(A(s,\omega)+B(s,\omega s,\omega)-$$

$$-C_l(s,\omega s,\omega))\varphi^k(s)ds- \tag{2.28}$$

$$-\omega^{\frac{1}{2}} W_{2k}(t,\omega)\int\limits_t^T e^{Q(t,\omega)-Q(s,\omega)}(P^l(s,\omega)+H^l(s,\omega s,\omega))^{-1}(A(s,\omega)+B(s,\omega s,\omega)-$$

$$-C_l(s,\omega s,\omega))\varphi^k(s)ds \equiv [T_\omega(\varphi^k)](t).$$

Докажем, что интегральное уравнение (2.28) имеет непрерывное решение $\varphi^k(t)$, и тем самым установим, что вектор-функция φ^k в силу леммы 1 является решением системы (2.1).

Пусть

$$K_1 = W_{1k}e^{Q(t,\omega)-Q(s,\omega)}(P^l + H^l)^{-1}(A + B - C_l) \tag{2.29}$$

и

$$K_2 = W_{2k}e^{Q(t,\omega)-Q(s,\omega)}(P^l + H^l)^{-1}(A + B - C_l). \tag{2.30}$$

При $0 \leq s \leq t$, для каждого j, удовлетворяющего (2.27) , справедлива оценка

$$e^{q_j(t,\omega)-q_j(s,\omega)-q_k(t,\omega)+q_k(s,\omega)} = e^{-\int\limits_t^s (q_j'(\sigma,\omega)-q_k'(\sigma,\omega))d\sigma} \leq 1.$$

Для остальных j и $t \leq s \leq T$ имеет место оценка

$$e^{q_j(t,\omega)-q_j(s,\omega)-q_k(t,\omega)+q_k(s,\omega)} = e^{-\int\limits_t^s (q_j'(\sigma,\omega)-q_k'(\sigma,\omega))d\sigma} \leq 1.$$

Из этих оценок и соотношений (2.24), (2.29) при $\omega >> 1$ и $0 \leq \tau \leq t$, следует неравенство

$$\omega^{\frac{l}{2}} \left\| K_1 e^{q_k(\tau,\omega)-q_k(t,\omega)} \right\| \leq c_2, \tag{2.31}$$

а при $t \leq \tau \leq T$ - неравенство

$$\omega^{\frac{l}{2}} \left\| K_2 e^{q_k(\tau,\omega)-q_k(t,\omega)} \right\| \leq c_3, \tag{2.32}$$

где c_2 и c_3 – некоторые не зависящие от τ, t и ω постоянные.Покажем, применяя метод последовательных приближений, что интегральное уравнение (2.28) имеет решение. В связи с этим будем рассматривать итерации, определяемые соотношениями

$$\varphi_{s+1}^k = T_\omega(\varphi_s^k), s = 0, 1, ...,$$

$$\varphi_0^k = 0.$$

Уравнения (2.32) в результате замены переменных

$$\psi_s^k(t) = \varphi_s^k(t) e^{-q_k(t)}$$

перепишем в виде

$$\psi_{s+1}^k(t) = (p_l^k(t) + h_l^k(t)) + \omega^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^t K_1 e^{q_k(\tau)-q_k(t)} \psi_s^k(\tau) d\tau -$$

$$-\omega^{\frac{1}{2}} \int\limits_t^T K_2 e^{q_k(\tau)-q_k(t)} \psi_s^k(\tau) d\tau. \tag{2.33}$$

Из соотношений (2.31), (2.32) для больших ω следует неравенство

$$|\psi_{s+1}^k(t) - \psi_s^k(t)| \leq \frac{T(c_2 + c_3)}{\omega^{\frac{l-1}{2}}} \max_{t \in [0,T]} |\psi_s^k(t) - \psi_{s-1}^k(t)|.$$

Если при $t \in [0, T]$ выполнена оценка $|p_l^k(t) - h_l^k(t)| \leq c_0$ и ω_0 настолько велико, что при $\omega > \omega_0$ имеет место неравенство $T(c_2 + c_3) \leq \frac{1}{2}\omega^{\frac{l-1}{2}}$, то

$$\left\|\psi_{s+1}^k(t) - \psi_s^k(t)\right\| \leq \frac{c_0}{2^s}.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности φ_s^k к пределу φ^k, который является решением интегрального уравнения (2.28). Кроме того, очевидно, что

$$\max|\psi^k(t)| \leq 2c_0.$$

Переходя в уравнении (2.33) к пределу по $s \to \infty$, найдём оценку

$$\left\|\psi^k - (p_l^k + h_l^k)\right\| \leq \frac{2cN}{\omega^{\frac{l-1}{2}}}, c = \max(c_2, c_3). \tag{2.34}$$

В силу неравенства треугольника и оценки (2.34) находим

$$|\psi^k - (p_l^k + h_l^k)| \leq |\psi^k - (p_{l+2}^k + h_{l+2}^k)| + |(p_{l+2}^k + h_{l+2}^k) - (p_l^k + h_l^k)| \leq \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2}}}.$$

Линейная независимость решений φ^k при $\omega >> 1$ вытекает из линейной независимости векторов φ_s^k (это легко следует из их структуры) и установленных в теореме асимптотических оценок. *Теорема доказана.*

3°. **Неоднородная система.** В заключении этого параграфа рассмотрим неоднородную систему дифференциальных уравнений и остановимся на построении формальной асимптотики ее частного решения.

Рассмотрим на участке $t \in [0, T]$ неоднородную задачу Коши вида

$$\dot{x}(t) = \left[\omega^{\frac{1}{2}}A(t, \omega) + \omega^{\frac{1}{2}}B(t, \omega t, \omega)\right]x(t) + f(t, \omega) + d(t, \omega t, \omega), \tag{2.35}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.36}$$

где вектор-функции

$$f(t, \omega) = \sum_{k=-1}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad d(t, \tau, \omega) = \sum_{k=-1}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} d_k(t, \tau), \langle d_k \rangle = 0,$$

m- натуральное число.

Элементы вектор-функций $f_k(t)$ и $d_k(t,\tau)$ относятся к тем же классам функций , что и элементы матриц $A_k(t)$ и $B_k(t,\tau)$ соответственно.

Кроме того, без дополнительных оговорок здесь будут использованы некоторые матрицы, фигурирующие в §1.

Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений однородной системы было построено в первом параграфе этой главы; в этом же параграфе мы, прежде всего, построим асимптотическое разложение частного решения x_r данной неоднородной системы. После этого асимптотическое разложение решения задачи Коши (2.35)-(2.36) будет найдено в виде:$Xc + x_r$, где X – асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений однородной системы, $c = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} c_j, c_j = (c_{j1}, c_{j2}, ...c_{jn})^T$, где c_{ji} – пока ещё неизвестные постоянные.

Итак, формальное частное решение x_r будем искать в виде

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left[v_j(t) + w_j(t, \omega t) \right], \tag{2.37}$$

где w_j – 2π-периодические по τ вектор-функции с нулевым средним.

Подставляя (2.37) в (2.35), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ω, получим бесконечную цепочку равенств, которые будем затем исследовать.

Так, при ω^1 получим задачу

$$w_0^{'} = 0, \langle w_0 \rangle = 0,$$

откуда находим

$$w_0(t,\tau) = 0.$$

При $\omega^{\frac{1}{2}}$ получим уравнение вида

$$w_1'(t,\tau) = (A_0(t) + B_0(t,\tau))v_0(t) + f_0(t) + d_0(t,\tau). \tag{2.38}$$

Применяя к (2.38) операцию усреднения $\langle ... \rangle$ по τ, придем к уравнению

$$A_0(t)v_0(t) = f_0(t),$$

которое, с учётом обратимости $A_0(t)$, имеет решение

$$v_0 = A_0(t)^{-1} f_0(t).$$

Применяя к (2.38) операцию $\{...\}$, получим задачу

$$w_1'(t,\tau) = B_0(t,\tau)v_0(t) + d_0(t,\tau), \langle w_1 \rangle = 0,$$

из которой однозначно определяем вектор-функцию w_1.

Предположим, что найдены все $v_j(t)$ и $w_{j+1}(t,\tau), j \leq j_0$. Покажем, что аналогичным образом могут быть найдены $v_{j_0+1}(t)$ и $w_{j_0+2}(t,\tau)$. Для этого рассмотрим равенство коэффициентов при $\omega^{\frac{2-j_0-1}{2}}$. Разделив его на экспоненту, придём к равенству вида:

$$\begin{gathered} w_{j_0+2}'(t,\tau) + \dot{v}_{j_0}(t) + \dot{w}_{j_0} = \\ = \sum_{l+k=j_0+1, l\neq 0} (A_l(t) + B_l(t,\tau))(v_k(t) + w_k(t,\tau)) + (f_{j_0+1}(t) + d_{j_0+1}(t,\tau)). \end{gathered} \tag{2.39}$$

Применяя к (2.39) операцию $\langle ... \rangle$, получим уравнение, из которого будет найдено

$$v_{j_0+1}(t) = A_0(t)^{-1}(f_{j_0+1}(t) + m_{j_0}(t)),$$

где $m_{j_0}(t)$ – известная вектор функция. А применяя к (2.39) операцию $\{...\}$, получим однозначно разрешимую задачу

$$w_{j_0+1}'(t,\tau) = d_{j_0+1}(t,\tau) + n_{j_0}(t,\tau), \langle w_{j_0+1} \rangle = 0,$$

где $n_{j_0}(t,\tau)$ – известная 2π-периодическая по τ вектор-функция с нулевым средним.

Перейдём к вопросу об асимптотическом разложении решения задачи Коши (2.35)-(2.36). Для этого нужно найти постоянные c_{ji}.

Вектор c должен быть таким, чтобы выполнялось равенство

$$X(0)c + x_r(0) = x_0,$$

то есть

$$c_1x^1(0)e^{\omega^{\frac{1}{2}}q^1_{-1}(0)+q^1_0(0)} + c_2x^2(0)e^{\omega^{\frac{1}{2}}q^2_{-1}(0)+q^2_0(0)} + ...$$
$$+ c_nx^n(0)e^{\omega^{\frac{1}{2}}q^n_{-1}(0)+q^n_0(0)} + \sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}(v_j(0) + w_j(0,0)) = x_0$$

где $x^k, q^k_l, l = -1, 0, k = 1, 2, ..., n$ — есть k-ые столбцы соответственно матриц X и Q_l.

При ω^0 в силу условия $Q_l(0) = 0$, получим

$$c_{10}p^1_0(0) + c_{20}p^2_0(0) + ... + c_{n0}p^n_0(0) + v_0(0) + w_0(0,0) = x_0,$$

откуда найдём, учитывая, что $P_0(t)$ – невырожденная матрица,

$$c_0 = P_0^{-1}(0)\left(x_0 - v_0(0) - w_0(0,0)\right).$$

При $\omega^{-\frac{1}{2}}$ получим выражение вида

$$c_{10}(p^1_1(0) + h^1_1(0,0)) + c_{11}p^1_0(0) + c_{20}(p^2_1(0) + h^2_1(0,0)) + c_{21}p^2_0(0) + ...+$$
$$+ c_{n0}(p^n_1(0) + h^n_1(0,0)) + c_{n1}p^n_0(0) + v_1(0) + w_1(0,0) = 0.$$

Последнее можно записать в матричном виде

$$P_1(0)c_0 + H_1(0,0)c_0 + P_0(0)c_1 + v_1(0) + w_1(0,0) = 0,$$

откуда получаем

$$c_1 = P_0^{-1}(0) \left(-P_1(0)c_0 - H_1(0,0)c_0 - v_1(0) - w_1(0,0)\right).$$

Предположим, что мы нашли все $c_j, j \le j_0$, тогда для нахождения вектора c_{j_0+1} рассмотрим равенство при $\omega^{-\frac{j_0+1}{2}}$, которое имеет вид

$$\sum_{k=0}^{j_0+1} \left(P_k(0) + H_k(0,0)\right) c_{j_0+1-k} + v_{j_0+1}(0) + w_{j_0+1}(0,0) = 0,$$

откуда получаем

$$c_{j_0+1} = P_0^{-1}(0) \left(-\sum_{k=1}^{j_0+1} \left(P_k(0) + H_k(0,0)\right) c_{j_0+1-k} - v_{j_0+1}(0) - w_{j_0+1}(0,0)\right)$$

Итак, асимптотика задачи (2.35)-(2.36) построена.

Отметим, что аналогично можно построить (подробного изложения мы здесь приводить не будем) асимптотику решения задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \left[\omega^{\frac{1}{2}} A(t,\omega) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)\right] x(t) + \\ + e^{\omega^{\frac{1}{2}} g_0(t) + g_1(t)} \left[f(t,\omega) + d(t,\omega t,\omega)\right], \quad (2.40)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.41)$$

где g_0 и g_1 – бесконечно дифференцируемые по t функции, а вектор-функции

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-1}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad d(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-1}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} d_k(t,\tau), \langle d_k \rangle = 0.$$

При этом следует предполагать, что выполняются условия

$$\dot{g}_0(t) \ne \lambda_k(t), k = 1, 2, .., n, \quad (2.42)$$

где $\lambda_k(t)$ – характеристические числа матрицы A_0, и условие

$$g_0(0) = 0$$

.

Асимптотическое разложение решения задачи Коши (2.40)-(2.41) можно искать в виде:$Xc + x_r$, где X – асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений однородной системы, $c = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} c_j, c_j = (c_{j1}, c_{j2}, ... c_{jn})^T$, где c_{ji} – пока ещё неизвестные постоянные, а x_r - асимптотическое разложение частного решения данной неоднородной системы. Формальное частное решение будет иметь вид

$$x(t) = e^{\omega^{\frac{1}{2}} g_0(t) + g_1(t)} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left[v_j(t) + w_j(t, \omega t) \right], \tag{2.43}$$

где w_j – 2π-периодические по τ вектор-функции с нулевым средним.

3 Нормальная система второго типа. Асимптотика фундаментальной матрицы решений.

§1. Однородная система. Случай различных характеристических корней

$$\dot{x}(t) = \omega A(t,\omega)x(t) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)x(t), \omega >> 1$$

1°. **Построение формальной асимптотики.** Рассмотрим систему вида

Уравнение вида

$$\dot{x}(t) = \omega A(t,\omega)x(t) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)x(t), \omega >> 1. \tag{3.1}$$

Пусть числа m, n и T – те же, что в §1. На участке $t \in [0,T]$ рассмотрим систему (3.1), где

$$A(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} A_k(t), B(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau).$$

Будем предполагать, что матрицы $A_k(t), B_k(t,\tau)$ удовлетворяют всем требованиям §1 и дополнительно условию $\lambda_k - \lambda_j \neq si, s \in Z - \{0\}$.

При построении асимптотических разложений решений системы (3.1) будем опираться на следующее известное утверждение, относящееся к системам вида

$$\dot{x} - Ax = f(t), t \in R. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть правая часть $f(t)$ системы (3.2) является непрерывной 2π-периодичной с нулевым средним ($< f >= 0$) вектор-функцией, а собственные значения постоянной матрицы A не равны ki, где $k \in Z - \{0\}$. Тогда эта система имеет единственное 2π-периодическое с нулевым средним решение.*

Доказательство леммы ввиду его простоты опускаем.

Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений системы (3.1) будем строить в виде

$$X(t) = \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(P_j(t) + H_j(t, \omega t)\right)\right] e^{Q(t,\omega)}, \tag{3.3}$$

где

$$Q(t,\omega) = \omega Q_{-2}(t) + \omega^{\frac{1}{2}} Q_{-1}(t) + Q_0(t), Q_k(t) = (q_{ij}^k(t)), k = -2, -1, 0,$$

– диагональные матрицы, удовлетворяющие условиям $Q_k(0) = 0$, матрицы $P_0(t)$ - невырождены, диагональные элементы матриц $S_0(t) = P_0^{-1}(0)P_j(0)$ -нулевые, а матрицы $H_j(t,\tau), j = 1, 2, ...,$ являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним. Продифференцируем формально (3.3):

$$\dot{X}(t) = \dot{P}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} [\dot{P}_j(t) + \dot{H}_j(t,\tau) + \omega H_j^{'}(t,\tau)] e^{Q(t,\omega)} +$$

$$\left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (P_j(t) + H_j(t,\tau))\right] [\omega \dot{Q}_{-2}(t) + \omega^{\frac{1}{2}} \dot{Q}_{-1}(t) + \dot{Q}_0(t)] e^{Q(t,\omega)}, \tau = \omega t. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.1), получим равенство (3.5).

$$\dot{P}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} [\dot{P}_j(t) + \dot{H}_j(t,\tau) + \omega H_j^{'}(t,\tau)] +$$

$$+ P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} [(P_j(t) + H_j(t,\tau)] [\omega \dot{Q}_{-2}(t) + \omega^{\frac{1}{2}} \dot{Q}_{-1}(t) + \dot{Q}_0(t)] =$$

$$= \omega \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} A_k(t) \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (P_j(t) + H_j(t,\tau)\right] + \tag{3.5}$$

$$+ \omega^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau) \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} (P_j(t) + H_j(t,\tau))\right],$$

где, как и в §1, точкой обозначена операция дифференцирования по t, а штрихом - по τ. Приравнивая в нём коэффициенты при одинаковых степенях ω, придём к бесконечной цепочке уравнений, первое из которых (равенство коэффициентов при ω) имеет вид:

$$P_0\dot{Q}_{-2} = A_0P_0,$$

так что

$$\dot{Q}_{-2}(t) = P_0^{-1}(t)A_0(t)P_0(t).$$

Таким образом, P_0 - матрица, приводящая A_0 к диагональному виду $\dot{Q}_{-2}$, и мы можем считать P_0 и Q_{-2} найдеными. Приравнивая в равенстве (3.5) коэффициенты при $\omega^{\frac{1}{2}}$, получим

$$H_1^{'} + P_0\dot{Q}_{-1} + P_1\dot{Q}_{-2} + H_1\dot{Q}_{-2} = A_0P_1 + A_0H_1 + A_1P_0 + B_0P_0. \qquad (3.6)$$

Применяя к уравнению (3.6) операцию усреднения по τ и умножая полученное равенство слева на P_0^{-1}, получим

$$S_1\dot{Q}_{-2} - \dot{Q}_{-2}S_1 = M_1 - \dot{Q}_{-1},$$

где $M_1 = P_0^{-1}A_1P_0$. Внедиагональные элементы матрицы S_1 определяются теперь однозначно из равенств

$$s_{ij}^{(1)}(\lambda_j - \lambda_i) = m_{ij}^{(1)},$$

а элементы диагональной матрицы Q_{-1} путём решения задач

$$\dot{q}_{ii}^{(-1)} = -m_{ii}^{(1)}, q_{ii}^{(-1)}(0) = 0, i, j = \overline{1, n}.$$

Применяя к уравнению (3.6) введённую в §1 операцию R_τ, получим

$$H_1^{'} + H_1\dot{Q}_{-2} - A_0 H_1 = B_0 P_0. \tag{3.7}$$

Умножая [1] уравнение (2.7) слева на P_0^{-1} и обозначая $P_0^{-1}H_k = F_k = (f_{ij}^{(k)})$, придём к равенству

$$F_1^{'} + F_1\dot{Q}_{-2} - \dot{Q}_{-2}F_1 = N_1,$$

где $N_1 = P_0^{-1}B_0P_0$. Внедиагональные элементы матрицы F_1, с учётом леммы 2, однозначно находятся из равенств

$$f_{ij}^{(1)'} + f_{ij}^{(1)}(\lambda_j - \lambda_i) = n_{ij}^{(1)}(t, \tau),$$

а диагональные - из равенств

$$f_{ii}^{(1)'} = n_{ii}^{(1)}(t, \tau),$$

где $n_{ij}^{(1)}$ – элементы 2π - периодичной по τ матрицы N_1. Определив F_1, найдём затем $H_1 = P_0F_1$.

Следующее равенство коэффициентов (при ω^0) имеет вид:

$$\dot{P}_0 + H_2^{'} + (P_2 + H_2)\dot{Q}_{-2} + (P_1 + H_1)\dot{Q}_{-1} + P_0\dot{Q}_0 =$$

$$= A_0(P_2 + H_2) + A_1(P_1 + H_1) + A_2P_0 + B_0(P_1 + H_1) + B_1P_0. \tag{3.8}$$

Применяя к уравнению (3.8) операцию R_τ, получим равенство

$$H_2^{'} + H_2\dot{Q}_{-2} - A_0H_2 = N_2 + B_0P_1, \tag{3.9}$$

[1] Однозначная разрешимость уравнения (2.7) в пространстве непрерывных 2π-периодических с нулевым средним матриц-функций вытекает из того факта, что спектр оператора $AH_1 \equiv H_1\dot{Q}_{-2} - A_0H_1$ состоит из чисел $\lambda_i - \lambda_j, i, j = 1, 2, ..., n$. Последний известный факт устанавливается, например, с использованием тензорных произведений матриц, и мы не будем на него опираться, применяя более элементарный и конструктивный подход.

где $N_2(t,\tau)$ – известная 2π-периодическая по τ с нулевым средним матрица. Уравнение (2.9) аналогично уравнению (3.7), поэтому легко находим

$$H_2 = U_1(t,\tau) + R(t,\tau)\widehat{S}_1(t), \tag{3.10}$$

где $U_1(t,\tau)$ и $R(t,\tau)$ – известные 2π-периодические по τ с нулевым средним матрицы.

Приравнивая в равенстве (3.5) коэффициенты при $\omega^{-\frac{1}{2}}$, получим

$$\dot{P}_1 + \dot{H}_2 + H_3' + P_3\dot{Q}_{-2} + H_3\dot{Q}_{-2} + (P_2 + H_2)\dot{Q}_{-1} + (P_1 + H_1)\dot{Q}_0 =$$

$$= A_0(P_3+H_3)+(A_1+B_0)(P_2+H_2)+(A_2+B_1)(P_1+H_1)+(A_3+B_3)P_0. \tag{3.11}$$

Применяя к (3.11) операцию $< ... >$, учитывая использовавшееся выше равенство

$$P_0^{-1}\dot{P}_1 = \dot{S}_1 - \dot{P_0^{-1}}P_0S_1$$

и представление (3.10), получим

$$S_3\dot{Q}_{-2} - \dot{Q}_{-2}S_3 + S_2\dot{Q}_{-1} - \dot{Q}_{-1}S_2 =$$

$$= [P_0^{-1} < B_1R > + P_0^{-1}A_2P_0 + \dot{P_0^{-1}}P_0]\widehat{S}_1 - \widehat{S}_1\dot{Q}_0 - \widehat{S}_1 + T_3(t),$$

где $T_3(t)$ – известная матрица. Отсюда приходим к задаче для $\widehat{S}_1$:

$$\dot{\widehat{S}}_1 + \widehat{S}_1\dot{Q}_0 - [...]\widehat{S}_1 - \widehat{T}_3(t) = 0, \widehat{S}_1(0) = 0.$$

Определив из неё $\widehat{S}_1$, найдём после этого матрицы $S_1 = \overline{S}_1 + \widehat{S}_1$ и $P_1 = P_0S_1$, а из формулы (3.10) - матрицу H_2. Далее, применяя к уравнению (3.8) операцию усреднения и умножая полученное равенство слева на P_0^{-1}, получим

$$S_2\dot{Q}_2 - \dot{Q}_2S_2 = T_2 + G_2\widehat{S}_1 - \widehat{S}_1\dot{Q}_1 - \dot{Q}_0, \tag{3.12}$$

где $T_2(t)$- известная матрица. Из (3.12) находим $\overline{S}_2$ и Q_0.

Допустим теперь, что при некотором натуральном k мы нашли все P_j и $H_{j+1}, 0 \leq j \leq k$, а также $\overline{S}_{j+1}$. Покажем, что тогда аналогичным образом мы сможем найти P_{k+1} , H_{k+2} и $\overline{S}_{k+2}$. Для этого в равенстве (3.5) приравняем коэффициенты при $\omega^{-\frac{k}{2}}$:

$$\dot{P}_k + \dot{H}_k + H'_{k+2} + (P_{k+2} + H_{k+2})\dot{Q}_{-2} + (P_{k+1} + H_{k+1})\dot{Q}_{-1} + (P_k + H_k)\dot{Q}_0 =$$

$$= A_0(P_{k+2} + H_{k+2}) + \sum_{l+r=k+2, l\neq 0} A_l(P_r + H_r) + \sum_{l+r=k+1} B_l(P_r + H_r). \quad (3.13)$$

Применяя к (3.13) операцию $\{...\}$, получим

$$H'_{k+2} + H_{k+2}\dot{Q}_{-2} - A_0 H_{k+2} = N_{k+2} + B_0 P_{k+1}, \quad (3.14)$$

где $N_{k+2}(t,\tau)$ – известная 2π-периодическая по τ с нулевым средним матрица. Уравнение (3.14) аналогично (3.7) и (3.9). Из него определяется

$$H_{k+2}(t,\tau) = U_k(t,\tau) + R(t,\tau)\widehat{S}_{k+1}(t), \quad (3.15)$$

где $U_k(t,\tau)$ и $R(t,\tau)$ – известные 2π-периодические по τ с нулевым средним матрицы. Для нахождения матрицы $\widehat{S}_{k+1}$, приравняем в (3.5) коэффициенты при степени $\omega^{-\frac{k+1}{2}}$:

$$\dot{P}_{k+1} + \dot{H}_{k+1} + H'_{k+3} + P_{k+3}\dot{Q}_{-2} + H_{k+3}\dot{Q}_{-2} + P_{k+2}\dot{Q}_{-1} + H_{k+2}\dot{Q}_{-1} =$$

$$A_0 P_{k+3} + A_0 H_{k+3} + \sum_{l+r=k+3, l\neq 0} A_l(P_r + H_r) + \sum_{l+r=k+2} B_l(P_r + H_r). \quad (3.16)$$

Применив к уравнению (3.16) операцию усреднения по τ, умножив слева полученное равенство на матрицу P_0^{-1} и воспользовавшись соотношением

$$P_0^{-1}\dot{P}_k = \dot{S}_k - \dot{P_0^{-1}} P_0 S_k,$$

придём к равенству

$$(S_{k+3}\dot{Q}_{-2} - \dot{Q}_{-2}S_{k+3}) + (S_{k+2}\dot{Q}_{-1} - \dot{Q}_{-1}S_{k+2}) =$$

$$= T_{k+3} + [\dot{P_0^{-1}}P_0 + P_0^{-1}A_2P_0 + P_0^{-1} + B_0R_k]\widehat{S}_{k+1} + \left\langle P_0^{-1}B_l\right\rangle \widehat{S}_{k+1},$$

где $T_{k+3}(t)$ – известная матрица. Отсюда приходим к задаче для $\widehat{S}_{k+1}$

$$\dot{\widehat{S}}_{k+1} - [...]\widehat{S}_{k+1} - \widehat{T}_{k+1} = 0, \widehat{S}_{k+1}(0) = 0.$$

Определив из неё $\widehat{S}_{k+1}$, найдём после этого матрицы $S_{k+1} = \overline{S}_{k+1} + \widehat{S}_{k+1}$ и $P_{k+1} = P_0S_{k+1}$, а из формулы (3.15) - матрицу H_{k+2}. Далее, применяя к уравнению (3.13) операцию усреднения по τ и умножая полученное равенство слева на P_0^{-1}, получим

$$S_{k+2}(t)\dot{Q}_{-2}(t) - \dot{Q}_{-2}(t)S_{k+2}(t) = M_{k+2}(t),$$

где $M_{k+2}(t)$ – известная матрица. Из него находим $\overline{S}_{k+2}$. Итак , установлено, что описанным выше способом можно найти коэффициенты, а значит – построить асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений (3.2).

2°. **Обоснование.** Справедливо следующее утверждение

Теорема 3.1. *Существует* $\omega_0 > 0$, *такое что при* $\omega > \omega_0$ *для каждого* $k = \overline{1, n}$ *найдётся решение* φ^k *системы уравнений* (3.1), *для которых при всех целых неотрицательных* l *выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^k e^{-q_k} - \varphi_l^k| \leq \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2}}},$$

где $c = c(l)$ *– не зависящая от* ω *константа. Доказательство теоремы.*

Так как $(P(t,\omega)+H(t,\omega t,\omega))e^{Q(t,\omega)}$ формальное асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений системы (3.1), то справедливо формальное равенство:

$$(\dot{P}+\dot{H}+\omega H^{'}+P\dot{Q}+H\dot{Q})=\omega(A+\omega^{-\frac{1}{2}}B)(P+H). \qquad (3.17)$$

Для каждого натурального l зададим при $\omega >> 1$ матрицу $C_l = C_l(t,\omega t,\omega)$ равенством

$$\dot{P}^l+\dot{H}^l+\omega(H^l)^{'}+P^l\dot{Q}+H^l\dot{Q}=\omega C_l(P^l+H^l). \qquad (3.18)$$

При этом C_l определена однозначно, так как матрица P^l+H^l при всех $t\in[0,T]$ и $\omega >> 1$ невырожденная. Вычитая последнее равенство из очевидного (в силу (3.17)) соотношения

$$\dot{P}^l+\dot{H}^l+\omega(H^l)^{'}+P^l\dot{Q}+H^l\dot{Q}=\omega(A+\omega^{-\frac{1}{2}}B)(P^l+H^l)+R_1(\omega),$$

где

$$\sup_{t\in[0,T]}\|R_1(\omega)\|=O(\omega^{\frac{-l+1}{2}}),\omega\to\infty,$$

получим

$$\omega(A+\omega^{-\frac{1}{2}}B-C_l)(P^l+H^l)=-R_1(\omega),$$

Таким образом

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|A+\omega^{-\frac{1}{2}}B-C_l\right\|\le c_1\omega^{-\frac{l+1}{2}}, \qquad (3.19)$$

где $c_1 = const > 0$.

Уравнение (3.1) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt}-\omega C_l x=\omega(A+\omega^{-\frac{1}{2}}B-C_l)x, \qquad (3.20)$$

и будем далее учитывать, что матрица-функция

$$V_l(t,\omega)=(P_l(t,\omega)+H_l(t,\omega t,\omega))e^{Q(t,\omega)}$$

в силу (3.18) является фундаментальной матрицей решений системы

$$\frac{dx}{dt} - \omega C_l(t, \omega t, \omega)x = 0.$$

Для любого $k, k = \overline{1, n}$, положим $P^l + H^l = W_{1k} + W_{2k}$, где j-ый столбец матрицы W_{1k} совпадает с j-ым столбцом матрицы $(P^l + H^l)$, если

$$\lambda_j(t) - \lambda_k(t) < 0, 0 \le t \le T, \tag{3.21}$$

а остальные столбцы W_{1k} – нулевые. Согласно (3.18) и лемме 1, некоторое решение уравнения (3.20) представимо в виде

$$\varphi^k(t) = (p_l^k(t, \omega) + h_l^k(t, \omega t, \omega))e^{q_k(t)} +$$

$$+\omega W_{1k}(t, \omega) \int\limits_0^t e^{Q(t,\omega)-Q(s,\omega)}(P^l(s, \omega) + H^l(s, \omega s, \omega))^{-1}(A(s, \omega) + \omega^{-\frac{1}{2}}B(s, \omega s, \omega) -$$

$$-C_l(s, \omega s, \omega))\varphi^k(s)ds - \tag{3.22}$$

$$-\omega W_{2k}(t, \omega) \int\limits_t^T e^{Q(t,\omega)-Q(s,\omega)}(P^l(s, \omega) + H^l(s, \omega s, \omega))^{-1}(A(s, \omega) + \omega^{-\frac{1}{2}}B(s, \omega s, \omega) -$$

$$-C_l(s, \omega s, \omega))\varphi^k(s)ds \equiv [T_\omega(\varphi^k)](t).$$

Докажем, что интегральное уравнение (3.22) имеет непрерывное решение $\varphi^k(t)$, и тем самым установим, что вектор-функция φ^k в силу леммы 1 является решением системы (3.1).

Пусть

$$K_1 = W_{1k}e^{Q(t,\omega)-Q(s,\omega)}(P^l + H^l)^{-1}(A + \omega^{-\frac{1}{2}}B - C_l) \tag{3.23}$$

и

$$K_2 = W_{2k}e^{Q(t,\omega)-Q(s,\omega)}(P^l + H^l)^{-1}(A + \omega^{-\frac{1}{2}}B - C_l). \tag{3.24}$$

При $0 \le s \le t$, для каждого j, удовлетворяющего (3.21) , справедлива оценка

$$e^{q_j(t,\omega)-q_j(s,\omega)-q_k(t,\omega)+q_k(s,\omega)} = e^{-\int\limits_t^s (q_j'(\sigma,\omega)-q_k'(\sigma,\omega))d\sigma} \le 1.$$

Для остальных j и $t \le s \le T$ имеет место оценка

$$e^{q_j(t,\omega)-q_j(s,\omega)-q_k(t,\omega)+q_k(s,\omega)} = e^{-\int\limits_t^s (q_j'(\sigma,\omega)-q_k'(\sigma,\omega))d\sigma} \le 1.$$

Из этих оценок и соотношений (3.18), (3.23) при $\omega >> 1$ и $0 \le \tau \le t$, следует неравенство

$$\omega^{\frac{l+1}{2}} \left\| K_1 e^{q_k(\tau,\omega)-q_k(t,\omega)} \right\| \le c_2, \tag{3.25}$$

а при $t \le \tau \le T$ - неравенство

$$\omega^{\frac{l+1}{2}} \left\| K_2 e^{q_k(\tau,\omega)-q_k(t,\omega)} \right\| \le c_3, \tag{3.26}$$

где c_2 и c_3 – некоторые не зависящие от τ, t и ω постоянные.Покажем, применяя метод последовательных приближений, что интегральное уравнение (3.22) имеет решение. В связи с этим будем рассматривать итерации, определяемые соотношениями

$$\varphi_{s+1}^k = T_\omega(\varphi_s^k), s = 0, 1, ...,$$

$$\varphi_0^k = 0.$$

Уравнения (3.26) в результате замены переменных

$$\psi_s^k(t) = \varphi_s^k(t) e^{-q_k(t)}$$

перепишем в виде

$$\psi_{s+1}^k(t) = (p_l^k(t) + h_l^k(t)) + \omega \int\limits_0^t K_1 e^{q_k(\tau)-q_k(t)} \psi_s^k(\tau) d\tau -$$

$$-\omega \int\limits_{t}^{T} K_2 e^{q_k(\tau)-q_k(t)} \psi_s^k(\tau) d\tau. \qquad (3.27)$$

Из соотношений (3.25), (3.26) для больших ω следует неравенство

$$|\psi_{s+1}^k(t) - \psi_s^k(t)| \leq \frac{T(c_2+c_3)}{\omega^{\frac{l-1}{2}}} \max_{t\in[0,T]} |\psi_s^k(t) - \psi_{s-1}^k(t)|.$$

Если при $t \in [0,T]$ выполнена оценка $|p_l^k(t) - h_l^k(t)| \leq c_0$ и ω_0 настолько велико, что при $\omega > \omega_0$ имеет место неравенство $T(c_2+c_3) \leq \frac{1}{2}\omega^{\frac{l-1}{2}}$, то

$$\left\|\psi_{s+1}^k(t) - \psi_s^k(t)\right\| \leq \frac{c_0}{2^s}.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности φ_s^k к пределу φ^k, который является решением интегрального уравнения (3.22). Кроме того, очевидно, что

$$\max|\psi^k(t)| \leq 2c_0.$$

Переходя в уравнении (3.27) к пределу по $s \to \infty$, найдём оценку

$$\left\|\psi^k - (p_l^k + h_l^k)\right\| \leq \frac{2cN}{\omega^{\frac{l-1}{2}}}, c = \max(c_2, c_3). \qquad (3.28)$$

В силу неравенства треугольника и оценки (3.28) находим

$$|\psi^k - (p_l^k + h_l^k)| \leq |\psi^k - (p_{l+2}^k + h_{l+2}^k)| + |(p_{l+2}^k + h_{l+2}^k) - (p_l^k + h_l^k)| \leq \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2}}}.$$

Линейная независимость решений φ^k при $\omega >> 1$ вытекает из линейной независимости векторов φ_s^k (это легко следует из их структуры) и установленных в теореме асимптотических оценок. *Теорема доказана.*

3°. Неоднородная система в случае различных характеристических корней.

В заключении этого параграфа рассмотрим неоднородную систему дифференциальных уравнений и остановимся на построении формальной асимптотики ее частного решения.

Рассмотрим на участке $t \in [0, T]$ неоднородную задачу Коши вида

$$\dot{x}(t) = \left[\omega A(t,\omega) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)\right] x(t) + \left[f(t,\omega) + d(t,\omega t,\omega)\right], \qquad (3.29)$$

$$x(0) = x_0, \qquad (3.30)$$

здесь $A(t,\omega)$ и $B(t,\tau,\omega)$, – те же матрицы, что и в п.1^0 §1,

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-2}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad d(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-2}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} d_k(t,\tau), \langle d_k \rangle = 0,$$

m - натуральное число, а $f(t,\omega), d(t,\tau,\omega)$-бесконечно дифференцируемые по t вектор-функции.

Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений однородной системы было построено в предыдущем параграфе. В этом же параграфе сначала построим асимптотическое разложение для частного решения неоднородной системы, а затем решим вопрос о задаче Коши.

Итак, асимптотику частного решения будем искать в виде

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(v_j(t) + w_j(t,\omega t)\right), \qquad (3.31)$$

где $v_j(t), w_j(t,\tau)$ — непрерывно дифференцируемые вектор-функции, причем w_j – 2π-периодична по τ с нулевым средним.

Подставляя (3.31) в (3.29), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ω, установим следующую цепочку уравнений.

При ω^1 получится уравнение

$$w_0^{'}(t,\tau) = A_0(t)(v_0(t) + w_0(t,\tau)) + f_0(t) + d_0(t,\tau), \qquad (3.32)$$

где штрихом, как и ранее, обозначается производная по τ. Применяя к (3.32) операцию усреднения по τ, получим

$$A_0(t)v_0(t) = f_0(t),$$

которое имеет единственное решение

$$v_0 = A_0(t)^{-1} f_0(t).$$

Применяя затем к (3.32) операцию $\{...\}$, получим уравнение

$$w_0^{'}(t,\tau) + A_0(t) w_0(t,\tau) = d_0(t,\tau),$$

которое также однозначно разрешимо

Предположим, что найдены все $v_j(t)$ и $w_j(t,\tau), j \leq j_0$. Покажем, что аналогичным образом могут быть найдены $v_{j_0+1}(t)$ и $w_{j_0+1}(t,\tau)$. Для этого рассмотрим равенство коэффициентов при $\omega^{\frac{2-j_0-1}{2}}$:

$$\begin{aligned} &w_{j_0+1}^{'}(t,\tau) + \dot{v}_{j_0-1}(t) + \dot{w}_{j_0-1} = \\ &\quad = A_0(t)(v_{j_0+1}(t) + w_{j_0+1}(t,\tau)) + \sum_{l+k=j_0+1, l\neq 0} A_l(t)(v_k(t) + w_k(t,\tau)) + \\ &\qquad + \sum_{l+k=j_0} B_l(v_k(t) + w_k(t,\tau)) + f_{j_0+1}(t) + d_{j_0+1}(t,\tau). \quad (3.33) \end{aligned}$$

Применяя к (3.33) операцию $\langle ... \rangle$ получим уравнение из которого будет найдено

$$v_{j_0+1}(t) = A_0(t)^{-1}(f_{j_0+1}(t) + m_{j_0}(t)),$$

где $m_{j_0}(t)$ – известная вектор функция. А применяя к (3.33) операцию $\{...\}$, получим уравнение

$$w_{j_0+1}^{'}(t,\tau) - A_0(t) w_{j_0+1} = d_{j_0+1}(t,\tau) - n_{j_0}(t,\tau),$$

где $n_{j_0}(t,\tau)$ – известная 2π-периодическая по τ вектор-функция с нулевым средним.

Итак, показали, что можно найти все коэффициенты разложения. Теперь перейдём к вопросу о решении задачи Коши.

Для решения задачи Коши необходимо найти такие постоянные $c_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} c_{ij}, i = 1, 2, ..., n$, чтобы выполнялось

$$c_1 x^1(0) e^{\omega q_{-2}^1(0) + \omega^{\frac{1}{2}} q_{-1}^1(0) + q_0^1(0)} + c_2 x^2(0) e^{\omega q_{-2}^2(0) + \omega^{\frac{1}{2}} q_{-1}^2(0) + q_0^2(0)} +$$
$$+ ... + c_n x^n(0) e^{\omega q_{-2}^n(0) + \omega^{\frac{1}{2}} q_{-1}^n(0) + q_0^n(0)} + \sum_{j=0}^{\infty} (v_j(0) + w_j(0,0)) = x_0, \quad (3.34)$$

где $x^k, q_l^k, l = -2, -1, 0, k = 1, 2, ..., n,$ – есть k-ые столбцы соответственно матриц X, Q_l. Напомним, что

$$X(t) = \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(P_j(t) + H_j(t, \omega t) \right) \right] e^{Q(t,\omega)},$$

а $Q(t,\omega) = \omega^{\frac{1}{2}} Q_{-1}(t) + Q_0(t), Q_{-1}(t) = \left(q_{ij}^{(-1)}(t) \right)$ и $Q_0(t) = \left(q_{ij}^{(0)}(t) \right)$ – диагональные матрицы порядка n, удовлетворяющие условиям $Q_{-1}(0) = Q_0(0) = 0$.

При ω^0 получим выражение

$$c_{10} p_0^1(0) e^{\omega q_{-2}^1(0) + \omega^{\frac{1}{2}} q_{-1}^1(0) + q_0^1(0)} + c_{20} p_0^2(0) e^{\omega q_{-2}^2(0) + \omega^{\frac{1}{2}} q_{-1}^2(0) + q_0^2(0)} +$$
$$+ ... + c_{n0} p_0^n(0) e^{\omega q_{-2}^n(0) + \omega^{\frac{1}{2}} q_{-1}^n(0) + q_0^n(0)} + v_0(0) + w_0(0,0) = x_0. \quad (3.35)$$

Учитывая, что $Q_l(0) = 0$, получим

$$c_{10} p_0^1(0) + c_{20} p_0^2(0) + ... + c_{n0} p_0^n(0) + v_0(0) + w_0(0,0) = x_0. \quad (3.36)$$

Выражение (3.36) можно переписать в виде

$$P_0(0) C_0 = x_0 - v_0(0) - w_0(0,0),$$

а так как $P_0(t)$ (как известно из §1) – невырожденная матрица, то решение последнего имеет вид

$$C_0 = P_0^{-1}(0)(x_0 - v_0(0) - w_0(0,0)).$$

При $\omega^{-\frac{1}{2}}$ получим выражение вида

$$c_{10}(p_1^1(0)+h_1^1(0,0))+c_{11}p_0^1(0)+c_{20}(p_1^2(0)+h_1^2(0,0))+c_{21}p_0^2(0)+$$
$$+\ldots+c_{n0}(p_1^n(0)+h_1^n(0,0))+c_{n1}p_0^n(0)+v_1(0)+w_1(0,0)=0, \quad (3.37)$$

Последнее можно записать в матричном виде

$$P_1(0)C_0+H_1(0,0)C_0+P_0(0)C_1+v_1(0)+w_1(0,0)=0,$$

откуда получаем

$$C_1=P_0^{-1}(0)\left(-P_1(0)C_0-H_1(0,0)C_0-v_1(0)-w_1(0,0)\right)$$

Предположим, что мы нашли все $C_j, j\le j_0$, тогда для нахождения вектора C_{j_0+1} рассмотрим равенство при $\omega^{-\frac{j_0+1}{2}}$, которое имеет вид

$$\sum_{k=0}^{j_0+1}\left(P_k(0)+H_k(0,0)\right)_{j_0+1-k}+v_{j_0+1}(0)+w_{j_0+1}(0,0)=0,$$

откуда получим

$$C_{j_0+1}=$$
$$=P_0^{-1}(0)\left(-\sum_{k=1}^{j_0+1}\left(P_k(0)+H_k(0,0)\right)c_{j_0+1-k}-v_{j_0+1}(0)+w_{j_0+1}(0,0)\right)$$

Итак, асимптотика задачи (3.29)-(3.30) построена.

Отметим, что аналогично можно построить асимптотику решения задачи Коши

$$\dot{x}(t)=\left[\omega A(t,\omega)+\omega^{\frac{1}{2}}B(t,\omega t,\omega)\right]x(t)+$$
$$+e^{\omega g_0(t)+\omega^{\frac{1}{2}}g_1(t)+g_2(t)}\left[f(t,\omega)+d(t,\omega t,\omega)\right], \quad (3.38)$$

$$x(0)=x_0, \quad (3.39)$$

где $A(t,\omega)$ и $B(t,\tau,\omega)$, – те же матрицы, что и в п.1^0 §1,

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-2}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad d(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-2}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} d_k(t,\tau), \langle d_k \rangle .$$

Вектор-функции $f_k(t), d_k(t,\tau)$ и функции $g_0(t), g_1(t), g_2(t)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми по t. Будем ещё предполагать, что выполняются условия

$$\dot{g}_0(t) - \lambda_k(t) \neq il, k = 1, 2, .., n, l \in Z, \tag{3.40}$$

где $\lambda_k(t)$ – характеристические числа матрицы A_0, и дополнительное условие

$$g_0(0) = g_1(0) = 0$$

Асимптотика частного решения имеет в этом случае вид

$$x(t) = e^{\omega g_0(t) + \omega^{\frac{1}{2}} g_1(t) + g_2(t)} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left[v_j(t) + w_j(t,\omega t) \right], \tag{3.41}$$

где $v_j(t), w_j(t,\tau)$ — непрерывно дифференцируемые вектор-функции, причем w_j – 2π-периодична по τ с нулевым средним.

§2.Однородная система. Случай кратных характеристических корней.

1°. **Построение формальной асимптотики.** Пусть m – натуральное, T – положительное число. На участке $t \in [0,T]$ рассмотрим нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \omega \left[\mu(t) E + J_1 \right] x + \omega^{\frac{1}{2}} \left[A(t) + B(t,\omega t) \right] x, \omega >> 1. \tag{3.42}$$

Здесь $\mu(t), t \in [0,T]$, – непрерывная комплекснозначная функция, A и B – квадратные матрицы порядка m с комплексными, вообще говоря, коэффициентами, E – единичная матрица, J_1 – первый единичный косой ряд (так что матрица в скобках при ω в (3.42) – верхняя жорданова клетка порядка m с характеристическим числом $\mu(t)$). Элементы матриц A и B определены и непрерывны на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty)$ соответственно. Матрица $B(t,\tau)$ является 2π-периодической по τ с нулевым средним:

$$\langle B(t,\tau) \rangle := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} B(t,\tau) d\tau = 0.$$

По аналогии с [12-14] фундаментальную матрицу решений системы (3.42) будем искать в виде

$$X = \Lambda(\omega) \left(U(\omega,t) + \omega^{-\beta} V(\omega,t,\omega t) \right) \times e^{\int\limits_0^t (\omega\mu(s)E + \omega^\alpha \Phi) ds}, \qquad (3.43)$$

где Λ, U, V и Φ – искомые матрицы, причём Λ, Φ – диагональные, а элементами матрицы V являются 2π-периодические по последнему аргументу $\tau = \omega t$ функции с нулевыми средними, α и β – искомые положительные числа.

В дальнейшем точкой будет обозначается производная по t, а штрихом - производная по τ.

Подставим (3.43) в (3.42) и сократим полученное равенство на экспоненту:

$$\begin{aligned} \Lambda\dot{U} + \omega^{-\beta}\Lambda\dot{V} + \omega^{-\beta+1}\Lambda V' + \omega^\alpha \Lambda \left(U + \omega^{-\beta} V \right) \Phi = \\ = \omega J_1 \Lambda U + \omega^{-\beta+1} J_1 \Lambda V + \omega^{\frac{1}{2}} A\Lambda U + \\ + \omega^{\frac{1}{2}} B\Lambda U + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}} A\Lambda V + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}} B\Lambda V. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Следуя [12-14], учтём равенства $J_1\Lambda = \delta\Lambda J_1$, где $\Lambda = diag[1, \delta, ..., \delta^{m-1}]$ и положим $\delta = \omega^{\alpha-1}$. Тогда, после умножения (3.44) слева на Λ^{-1} получим уравнение

$$\dot{U} + \omega^{-\beta}\dot{V} + \omega^{-\beta+1}V' + \omega^{\alpha}U\Phi + \omega^{-\beta+\alpha}V\Phi =$$
$$= \omega^{\alpha}J_1U + \omega^{-\beta+\alpha}J_1V + \omega^{\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}A\Lambda U +$$
$$+ \omega^{\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}B\Lambda U + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}A\Lambda V + \omega^{-\beta+\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}B\Lambda V. \quad (3.45)$$

В дальнейшем для любой матрицы порядка m положим (см. [39])

$$C = \sum_{j=1-m}^{m-1} C_{(j)},$$

где $C_{(j)}$ – матрица порядка m, у которой j-ая диагональ совпадает с j-ой диагональю матрицы C, а все остальные элементы равны нулю.

Воспользуемся разложениями:

$$\Lambda^{-1}A\Lambda = \left(\left(\delta^{k-i}a_{i,k}\right)\right) = \sum_{j=p}^{m-1}\delta^j A_{(j)},$$
$$\Lambda^{-1}B\Lambda = \left(\left(\delta^{k-i}b_{i,k}\right)\right) = \sum_{j=q}^{m-1}\delta^j B_{(j)}, \quad (3.46)$$
$$1 - m \le p, q \le m - 1.$$

Будем рассматривать невырожденный случай (см.[12-14]): $p = 1 - m$.

Применяя к (3.45) операцию усреднения по τ и учитывая (3.46), получим

$$\dot{U} + \omega^{\alpha}U\Phi = \omega^{\alpha}J_1U +$$
$$+ \sum_{j=1-m}^{m-1}\omega^{\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}A_{(j)}U + \sum_{j=1-m}^{m-1}\omega^{-\beta+\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}\left\langle B_{(j)}V\right\rangle. \quad (3.47)$$

Здесь $B_{(j)} = 0$ при $j \le q$.

Число α найдём из условия

$$\omega^{\alpha} = \omega^{\frac{1}{2}+(1-m)(\alpha-1)},$$

так что $\alpha = \frac{2m-1}{2m}$.

Вычитая из (3.45) (3.47), придём к равенству

$$\omega^{-\beta}\dot{V} + \omega^{-\beta+1}V' + \omega^{-\beta+\alpha}V\Phi = \omega^{-\beta+\alpha}J_1V + \sum_{j=1-m}^{m-1}\omega^{\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}B_{(j)}U +$$

$$+ \sum_{j=1-m}^{m-1}\omega^{-\beta+\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}A_{(j)}V + \sum_{j=1-m}^{m-1}\omega^{-\beta+\frac{1}{2}+j(\alpha-1)}\left\{B_{(j)}V\right\}.$$

Здесь и ниже для 2π-периодических матриц $P(\tau)$ используется обозначение

$$\left\{P(\tau)\right\}_\tau = P(\tau) - \langle P(\tau)\rangle .$$

Требуя выполнение равенства

$$\omega^{-\beta+1} = \omega^{\frac{1}{2}+(1-m)(\alpha-1)},$$

найдём $\beta = \frac{1}{2m}$.

Таким образом, если обозначить $2m = k$, фундаментальная матрица (3.43) примет вид

$$X = \Lambda(\omega)\Big(U(\omega,t) + \omega^{-\frac{1}{k}}V(\omega,t,\omega t)\Big) \times e^{\int\limits_0^t\left(\omega\mu(s)E+\omega^{\frac{k-1}{k}}\Phi(\omega,s)\right)ds}, \qquad (3.48)$$

где $\Lambda = diag[1, \omega^{-\frac{1}{k}}, ..., \omega^{-\frac{m-1}{k}}]$. Положим далее

$$U(\omega,t) = \sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}U_j(t),$$

$$V(\omega,t,\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}V_j(t,\tau),$$

$$\Phi(\omega,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\omega^{-\frac{l}{k}}\Phi_l(t).$$

Уравнение (3.45) с учётом (3.48) и последних разложений примет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\dot{U}_j+\omega^{-\frac{1}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}\dot{V}_j+\omega^{\frac{k-1}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}V_j'+$$

$$+\omega^{\frac{k-1}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}U_j\sum_{l=0}^{\infty}\omega^{-\frac{l}{k}}\Phi_l+\omega^{\frac{k-2}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}V_j\sum_{l=0}^{\infty}\omega^{-\frac{l}{k}}\Phi_l=$$

$$=\omega^{\frac{k-1}{k}}J_1\left(\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}U_j+\omega^{-\frac{1}{k}}\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}V_j\right)+$$

$$+\left(\sum_{d=1}^{k-1}\omega^{\frac{k-d}{k}}A_{(d-m)}+\sum_{d=1}^{k-1}\omega^{\frac{k-d}{k}}B_{(d-m)}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}U_j+$$

$$+\left(\sum_{d=1}^{k-1}\omega^{\frac{k-d-1}{k}}A_{(d-m)}+\sum_{d=1}^{k-1}\omega^{\frac{k-d-1}{k}}B_{(d-m)}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{k}}V_j. \quad (3.49)$$

Здесь $B_{(j)}=0$ при $j\le q$.

Приравняем в (3.49) коэффициенты при одинаковых степенях ω. Получим цепочку уравнений, первое из которых (при $\omega^{\frac{k-1}{k}}$) имеет вид

$$V_0'+U_0\Phi_0=J_1U_0+A_{(1-m)}U_0+B_{(1-m)}U_0. \quad (3.50)$$

Применяя к (3.50) операцию усреднения по τ, получим

$$U_0\Phi_0=\left(J_1+A_{(1-m)}\right)U_0. \quad (3.51)$$

Так как матрица $\left(J_1+A_{(1-m)}\right)$ имеет различные характеристические числа (см.[?]) , то найдётся матрица T, такая что

$$T^{-1}\left(J_1+A_{(1-m)}\right)T=diag[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m]=S_0,$$

где λ_i – характеристические числа матрицы $\left(J_1+A_{(1-m)}\right)$. Тогда, умножая (3.51) слева на T^{-1} и обозначив

$$F_j=T^{-1}U_j, \quad (3.52)$$

получим уравнение

$$F_0\Phi_0=S_0F_0,$$

которому удовлетворяют

$$F_0 = E, \quad \Phi_0 = S_0,$$

а значит $U_0 = T$.

Вычитая из (3.50) (3.51), придём к уравнению

$$V_0^{'} = B_{(1-m)}U_0 = B_{(1-m)}T,$$

которое имеет решение

$$V_0(t,\tau) = \left\{ \int\limits_0^\tau B_{(1-m)}(t,s)ds \right\}_\tau T(t).$$

Следующее равенство при $\omega^{\frac{k-2}{k}}$ имеет вид

$$V_1^{'} + U_1\Phi_0 + U_0\Phi_1 + V_0\Phi_0 = J_1U_1 + J_1V_0 + A_{(1-m)}U_1 + A_{(2-m)}U_0 + \\ + B_{(1-m)}U_1 + B_{(2-m)}U_0 + A_{(1-m)}V_0 + B_{(1-m)}V_0. \quad (3.53)$$

Для определённости мы здесь считаем, что $m \geq 2$.

Применяя к (3.53) операцию $\langle \cdots \rangle$, найдём

$$U_1\Phi_0 + U_0\Phi_1 = J_1U_1 + A_{(1-m)}U_1 + A_{(2-m)}U_0 + \left\langle B_{(1-m)}V_0 \right\rangle.$$

Умножая последнее выражение слева на T^{-1} и учитывая обозначение (3.52), придём к равенству

$$F_1S_0 - S_0F_1 = T^{-1}\left\langle B_{(1-m)}V_0 \right\rangle + T^{-1}A_{(2-m)}T - \Phi_1. \quad (3.54)$$

Далее будем использовать представление

$$F = \widehat{F} + \widetilde{F},$$

где $\widehat{F}$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой совпадают с соответствующими элементами матрицы F, лежащими на главной диагонали. Из формулы (3.54) следует, что элементы матрицы $\widetilde{F}_1 = \left(f_{ij}^{(1)}\right)$ находятся из соотношений

$$f_{i,j}^{(1)} = \frac{k_{i,j}^{(1)}}{\lambda_j - \lambda_i}, i \neq j,$$

где $k_{i,j}^{(1)}$ – элементы известной матрицы $K_1 = T^{-1}\left\langle B_{(1-m)}V_0\right\rangle + T^{-1}A_{(2-m)}T$. Положим $\widehat{F}_1 = 0$, а $\Phi_1 = \widehat{K}_1$. Зная F_1, найдём и U_1.

Применяя к (3.53) операцию $\{\cdots\}_\tau$ получим

$$V_1^{'} = J_1V_0 + B_{(1-m)}U_1 + B_{(2-m)}U_0 + \\ + A_{(1-m)}V_0 + \left\{B_{(1-m)}V_0\right\}_\tau - V_0\Phi_0,$$

Откуда найдём V_1.

Легко видеть, что описанным способом можно найти U_j, V_j и Φ_l с любым номером j.

1°. **Обоснование**

В этом пункте для соответствующих решений системы (3.42) будет обоснована полная асимптотика.

Введём следующие обозначения:

$$U^l(t,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} U_j(t),$$

$$V^l(t,\tau,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} V_j(t,\tau),$$

$$\Phi^l(t,\tau,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} \Phi_j(t,\tau),$$

где $l \in N$ или $l = \infty, U^\infty \equiv U, V^\infty \equiv V$; u_l^k и v_l^k – k-тые столбцы матриц U^l и V^l соответственно, $q_k = \int\limits_0^t \left(\omega\mu(s) + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\lambda_k\right) ds$.

Теорема 3.2. *Существует $\omega_0 > 0$, такое что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k = \overline{1, m}$ найдётся решение φ^k системы уравнений (3.42), для которого при всех целых неотрицательных l выполняется оценка*

$$\sup_{t \in [0,T]} |\varphi^k(t)e^{-q_k} - \varphi_l^k(t)| \le \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2m}}},$$

где $c = c(l)$ – не зависящая от ω константа.

Доказательство теоремы. Так как

$$\Lambda\left(U + \omega^{-\frac{1}{2m}}V\right) e^{\int\limits_0^t \left(\omega\mu(s)E + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\Phi\right) ds}$$

– формальное асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений (3.42), то справедливо формальное равенство

$$\Lambda\left(\dot{U} + \omega^{-\frac{1}{2m}}\dot{V} + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}V'\right) + \Lambda\left(U + \omega^{-\frac{1}{2m}}V\right)\left(\omega\mu(t)E + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\Phi\right) =$$
$$= \omega\left(\mu E + J_1\right)\Lambda\left(U + \omega^{-\frac{1}{2m}}V\right) + +\omega^{\frac{1}{2}}\left(A + B\right)\Lambda\left(U + \omega^{-\frac{1}{2m}}V\right). \quad (3.55)$$

Умножая (3.55) слева на Λ^{-1}, получим

$$\dot{U} + \omega^{-\frac{1}{2m}}\dot{V} + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}V' + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(U + \omega^{\frac{-1}{2m}}V\right)\Phi =$$
$$= \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\overline{A}(\omega, t) + \overline{B}(\omega, \tau, t)\right)\left(U + \omega^{-\frac{1}{2m}}V\right),$$

где

$$\overline{A} + \overline{B} = J_1 + \omega^{\frac{1-m}{2m}}\left(\Lambda^{-1}A\Lambda + \Lambda^{-1}B\Lambda\right).$$

Для каждого натурального l найдём матрицу $C_l(\omega) \equiv C_l$, при которой имеет место соотношение

$$\dot{U}^l + \omega^{-\frac{1}{2m}}\dot{V}^l + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(V^l\right)' + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}U^l\Phi^l + \omega^{\frac{2m-2}{2m}}V^l\Phi^l =$$
$$= \omega^{\frac{2m-1}{2m}}C_l\left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}}V^l\right).$$

Вычитая последнее равенство из очевидного соотношения

$$\dot{U}^l + \omega^{-\frac{1}{2m}}\dot{V}^l + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(V^l\right)' + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}U^l\Phi^l + \omega^{\frac{2m-2}{2m}}V^l\Phi^l =$$
$$= \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\overline{A}(\omega,t) + \overline{B}(\omega,\tau,t)\right)\left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}}V^l\right) +$$
$$+ R_1(\omega),$$

где

$$\sup_{t\in[0,T]}\|R_1(\omega)\| = O\left(\omega^{\frac{4m-l}{2m}}\right), \quad \omega\to\infty,$$

получим

$$\omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\overline{A} + \overline{B} - C_l\right)\left(U_l + \omega^{-\frac{1}{2m}}V^l\right) = -R_1(\omega).$$

Таким образом,

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\overline{A} + \overline{B} - C_l\right\| \le c_1\omega^{-\frac{2m-l+1}{2m}}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} - \omega^{\frac{2m-1}{2m}}C_l x = \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\left(\overline{A} + \overline{B} - C_l\right)x. \tag{3.56}$$

Будем учитывать тот факт, что матрица-функция

$$W^l = \left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}}V^l\right)e^{\int\limits_0^t\left(\omega\mu(s)E + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\Phi^l\right)ds} \equiv \left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}}V^l\right)e^{Q^l(t,\omega)},$$

$$Q^l(t,\omega) \equiv diag[q_{1l}, q_{2l}, ..., q_{ml}],$$

является фундаментальной матрицей решений системы

$$\dot{x} - \omega^{\frac{2m-1}{2m}}C_l x = 0.$$

Для любого $k, k = \overline{1, m}$, положим

$$U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}} V^l = H_{1,k} + H_{2,k},$$

где j-ый столбец матрицы $H_{1,k}$ совпадает с j-ым столбцом матрицы $\left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}} V^l\right)$ если $\lambda_j - \lambda_k < 0, 0 \le t \le T$, а остальные столбцы $H_{1,k}$ нулевые.

Как известно, некоторое решение (3.56) представимо в виде

$$\phi^k(t) = \left(u_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_l^k\right) e^{q_k(t,\omega)} +$$
$$+ \omega^{\frac{2m-1}{2m}} H_{1,k} \int\limits_0^t e^{Q^l(t,\omega) - Q^l(s,\omega)} \left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}} V^l\right)^{-1} \times \left(\overline{A} + \overline{B} - C_l\right) \phi^k(s) ds -$$
$$- \omega^{\frac{2m-1}{2m}} H_{2,k} \int\limits_t^T e^{Q^l(t,\omega) - Q^l(s,\omega)} \left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}} V^l\right)^{-1} \times \left(\overline{A} + \overline{B} - C_l\right) \phi^k(s) ds \equiv$$
$$\equiv \left[T_\omega(\phi^k)\right](t). \quad (3.57)$$

Пусть

$$K_1 = H_{1,k} e^{Q^l(t,\omega) - Q^l(s,\omega)} \times \left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}} V^l\right)^{-1} \left(\overline{A} + \overline{B} - C_l\right),$$
$$K_2 = H_{2,k} e^{Q^l(t,\omega) - Q^l(s,\omega)} \times \left(U^l + \omega^{-\frac{1}{2m}} V^l\right)^{-1} \left(\overline{A} + \overline{B} - C_l\right).$$

При $\omega >> 1$ и $0 \le \tau \le t$ имеет место неравенство

$$\omega^{\frac{l}{2m}} \left\| K_1 e^{q_k(\tau,\omega) - q_k(t,\omega)} \right\| \le c_2,$$

а при $t \le \tau \le T$ – неравенство

$$\omega^{\frac{l}{2m}} \left\| K_2 e^{q_k(\tau,\omega) - q_k(t,\omega)} \right\| \le c_3,$$

где c_2 и c_3 – некоторые не зависящие от t, τ и ω постоянные.

Покажем, применяя метод последовательных приближений, что интегральное уравнение (3.57) имеет решение. Рассмотрим итерации, определяемые соотношениями

$$\phi_{s+1}^k = T_\omega(\phi_s^k), \quad s = 0, 1,$$

$$\phi_0^k = 0.$$

Уравнение (3.57) в результате замены переменных

$$\psi_s^k(t) = \phi_s^k e^{-q_{kl}(t)},$$

перепишем в виде

$$\psi_{s+1}^k = \left(u_s^k + v_s^k\right) + +\omega^{\frac{2m-1}{2m}} \int\limits_0^t K_1 e^{q_{kl}(\tau) - q_{kl}(t)} \psi_s^k(\tau) ds - -\omega^{\frac{2m-1}{2m}} \int\limits_t^T K_2 e^{q_{kl}(\tau) - q_{kl}(t)} \psi_s^k(\tau) ds \tag{3.58}$$

Для больших ω, очевидно, имеем

$$\left|\psi_{s+1}^k(t) - \psi_s^k(t)\right| \leq \ \leq \frac{T(c_2 + c_3)}{\omega^{\frac{l-1-2m}{2m}}} \max_{t \in [0,T]} \left|\psi_s^k(t) - \psi_{s-1}^k(t)\right|.$$

Если при $t \in [0, T]$ выполняется оценка

$$\left|u_l^k(t) - \omega^{-\frac{1}{2m}} v_l^k(t)\right| \leq c_0$$

и ω_0 настолько велико, что при $\omega > \omega_0$ имеет место неравенство

$$T(c_2 + c_3) \leq \frac{1}{2} \omega^{\frac{2m-l-1}{2m}},$$

то

$$\left\|\psi_{s+1}^k(t) - \psi_s^k(t)\right\| \leq \frac{c_0}{2^s}.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности ϕ_s^k к пределу ϕ^k, который является решением интегрального уравнения (3.57).

Переходя в (3.58) к пределу при $s \to \infty$, находим оценку

$$\left\|\psi^k - \left(u_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_l^k\right)\right\| \leq \frac{2cT}{\omega^{\frac{l+1-2m}{2m}}},$$

$$c = \max(c_2, c_3).$$

В силу неравенства треугольника и оценок, находим

$$\left\|\psi^k - \left(u_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_l^k\right) \leq \left\|\psi^k - \left(u_{l+2m}^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_{l+2m}^k\right)\right\| + \\ + \left\|\left(u_{l+2m}^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_{l+2m}^k\right) - \left(u_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_l^k\right)\right\| \leq c\omega^{-\frac{l+1}{2m}}.$$

Теорема доказана.

4 Приложение. Доказательство теоремы 1.2

Докажем теорему 1.2.

Рассмотрим три случая в соответствии с условием (1.70)

1°. **Первый случай.** В этом пункте рассмотрим первый случай (1.70), когда функции $\mu_1(t) \pm a(t)$ при $t \in [0, T]$, не принимают целых значений

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (1.68), (1.69) в этом случае будем строить, как уже говорилось, в виде ряда (1.72) при $r = 0$.

Для нахождения неизвестных коэффициентов асимптотического разложения подставим этот ряд в уравнение (1.68) и приравняем в левой и правой частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых функциях вида

$$\omega^{\frac{l}{2}} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds}, \quad k = 1, 2,$$

и

$$\omega^{\frac{l}{2}} e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds}, \quad l = 4, 3, \ldots.$$

В результате получим бесконечную цепочку уравнений.

При ω^2 имеют место три равенства

$$\left(\lambda_{1k}^2(t)+a^2(t)\right)\left(u_{0k}(t)+v_{0k}(t,\tau)\right)+2\lambda_{1k}(t)v_{0k}^{'}(t,\tau)+v_{0k}^{''}(t,\tau) = 0, \quad k = 1, 2; \tag{4.1}$$

$$\left(a^2(t) - \mu_1^2(t)\right)\left(p_0(t) + q_0(t,\tau)\right) + 2i\mu_1(t)q_0^{'}(t,\tau) + q_0^{''}(t,\tau) = f_{-4}(t) + g_{-4}(t,\tau). \tag{4.2}$$

Применяя к (4.1) операцию усреднения по τ, придем к уравнениям

$$\left(\lambda_{1k}^2(t) + a^2(t)\right)u_{0k}(t) = 0, \quad k = 1, 2, \tag{4.3}$$

в которых положим

$$\lambda_{11}(t) = a(t)i, \quad \lambda_{12}(t) = -a(t)i.$$

Вычитая из равенств (4.1) равенства (4.3), получим уравнения

$$v_{0k}^{''}(t,\tau) + 2\lambda_{1k}(t)v_{0k}^{'}(t,\tau) = 0,$$

которые имеют нулевые решения $v_{0k}(t,\tau) = 0, k = 1, 2$. Из равенства (4.2), с помощью усреднения, найдём

$$p_0(t) = \frac{f_{-4}(t)}{a^2(t) - \mu_1^2(t)}$$

и уравнение для $q_0(t,\tau)$:

$$q_0^{''}(t,\tau) + 2i\mu_1(t)q_0^{'}(t,\tau) + (a^2(t) - \mu_1^2(t))q_0(t,\tau) = g_{-4}(t,\tau).$$

Последнее можно записать в виде системы

$$y^{'}(t,\tau) + A(t)y(t,\tau) = d(t,\tau),$$

где

$$y(t,\tau) = \begin{pmatrix} q_0(t,\tau) \\ q_0^{'}(t,\tau) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a^2(t) - \mu_1^2(t) & 2i\mu_1(t) \end{pmatrix},$$

$$d(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_{-4}(t,\tau) \end{pmatrix}.$$

Поскольку, собственные значения матрицы $A(t)$ равны $\lambda_{1,2} = (\mu_1 \pm a)i \neq ni, n \in Z$, то решение этой системы вычисляется по формуле:

$$y(t,\tau) = (E - e^{-2\pi A(t)})^{-1} \int\limits_0^{2\pi} e^{A(s-2\pi-\tau)} d(t,s)ds + \int\limits_0^{\tau} e^{A(s-\tau)} d(t,s)ds.$$

Первая компонента вектор-функции $y(t,\tau)$ и определяет $q_0(t,\tau)$.

Следующие три равенства (для $\omega^{\frac{3}{2}}$) имеют вид

$$(2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3)\, u_{0k} + \left(\lambda_{1k}^2 + a^2\right)(u_{1k} + v_{1k}) + 2\lambda_{1k}v_{1k}^{'} + v_{1k}^{''} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{4.4}$$

$$q_1^{''} + 2i\mu_1 q_1^{'} + 2i\mu_2 q_0^{'} + \left(a^2 - \mu_1^2\right)(p_1 + q_1) + (b_3 - \mu_1\mu_2)(p_0 + q_0) = f_{-3} + g_{-3}. \tag{4.5}$$

Применяя к (4.4) операцию $\langle \ldots \rangle$, получим

$$\lambda_{21}(t) = -\frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle\, i}{2a(t)}, \quad \lambda_{22}(t) = \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle\, i}{2a(t)}.$$

Применяя к равенствам (4.4) операцию $\{\ldots\}_\tau$, придем к уравнениям

$$v_{1k}^{''} + 2\lambda_{1k}v_{1k}^{'} + \{b_3\}_\tau\, u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{4.6}$$

сделав в которых замену

$$v_{1k}^{'} = w_{1k}u_{0k}, \quad \langle w_{1k}\rangle = 0, \quad k = 1, 2,$$

получим уравнения вида

$$w_{1k}^{'} + 2\lambda_{1k}w_{1k} = -\{b_3\}_\tau, \quad k = 1, 2.$$

Последние имеют решения

$$w_{1k}(t,\tau) = \left(1 - e^{\mp 4a(t)\pi i}\right)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \{b_3(t,s)\}_s\, e^{\pm 2a(t)i(s-\tau-2\pi)}ds +$$

$$+ \int\limits_0^{\tau} \{b_3(t,s)\}_s\, e^{\pm 2a(t)i(s-\tau)}ds \equiv \alpha_k(t,\tau), \quad k = 1, 2,$$

где $\qquad \alpha_k(t,\tau+2\pi)=\alpha_k(t,\tau), \qquad \langle\alpha_k(t,\tau)\rangle=0.$

Из сказанного выше следует, что исходные уравнения (4.6) имеют решения

$$v_{1k}(t,\tau)=\beta_k(t,\tau)u_{0k}(t),$$

где

$$\beta_k(t,\tau)=\int\limits_0^\tau \alpha_k(t,s)ds-\left\langle\int\limits_0^\tau \alpha_k(t,s)ds\right\rangle.$$

Применяя последовательно операции $\langle\ldots\rangle$ и $\{\ldots\}_\tau$ к равенству (4.5), получим представление

$$p_1=\frac{f_{-3}+(\mu_1\mu_2-\langle b_3\rangle)\,p_0-\langle b_3q_0\rangle}{a^2-\mu_1^2},$$

а также уравнение для $q_1(t,\tau)$:

$$q_1''+2i\mu_1q_1'+(a^2-\mu_1^2)q_1=g_{-3}-\{b_3(p_0+q_0)\}_\tau-2i\mu_2q_0'+\mu_1\mu_2q_0,$$

в правой части которого стоит известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним. Последнее уравнение решается так же, как и уравнение для q_0.

Равенства коэффициентов при ω^1 имеют вид

$$\begin{gathered}\left(\lambda_{1k}^2+a^2\right)(u_{2k}+v_{2k})+(2\lambda_{1k}\lambda_{2k}+b_3)(u_{1k}+v_{1k})+\\+\left(\lambda_{2k}^2+b_2+\dot\lambda_{1k}\right)u_{0k}+2\lambda_{1k}\dot u_{0k}+v_{2k}''=0,\quad k=1,2.\end{gathered}\tag{4.7}$$

$$\begin{gathered}\left(a^2-\mu_1^2\right)(p_2+q_2)+(b_3-\mu_1\mu_2)(p_1+q_1)+\left(i\dot\mu_1-\mu_2^2\right)(p_0+q_0)+\\+2i\mu_1(\dot p_0+\dot q_0)+q_2''+2i\mu_1q_2'+2i\mu_2q_1'+2\dot q_0'=f_{-2}+g_{-2}.\end{gathered}\tag{4.8}$$

Усредняя по τ равенства (4.7), получим уравнения

$$\pm2a(t)i\dot u_{0k}(t)+\left(\langle b_2(t,\tau)+b_3(t,\tau)\beta_k\rangle\pm\dot a(t)i-\frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)}\right)u_{0k}=0,\quad k=1,2,\tag{4.9}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u_{01}(0) + u_{02}(0) = x_0 - p_0(0) - q_0(0), \\ \lambda_{11} u_{01}(0) + \lambda_{12} u_{02}(0) = x_1 - i\mu_1(0)\left(p_0(0) + q_0(0)\right) - q_0^{'}(0). \end{cases} \tag{4.10}$$

Найдя из (4.9) и (4.10) u_{01}, u_{02}, найдём и v_{11}, v_{12}.

После последовательного применения операций $\langle \ldots \rangle$ и $\{\ldots\}_\tau$ к равенству (4.8), найдем

$$p_2 = \frac{f_{-2} + (\mu_1\mu_2 - \langle b_3 \rangle)\, p_1 - \langle b_3 q_1 \rangle - \left(i\dot{\mu}_1 - \mu_2^2\right) p_0 - 2i\mu_1 \dot{p}_0}{a^2 - \mu_1^2},$$

а также уравнение для $q_2(t,\tau)$:

$$q_2^{''} + 2i\mu_1 q_2^{'} + (a^2 - \mu_1^2) q_2 =$$

$$= g_{-2} - \{b_3(p_1 + q_1)\}_\tau - 2i\mu_2 q_1^{'} + \mu_1\mu_2 q_1 - \left(i\dot{\mu}_1 - \mu_2^2\right) q_0 - 2i\mu_1 \dot{q}_0 - 2\dot{q}_0{}',$$

в правой части которого стоит известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним.

Предположим, что для некоторого натурального N найдены коэффициенты $u_{j,k}$, $v_{j+1,k}$ $(k = 1, 2)$ и p_{j+2}, q_{j+2}, $0 \le j \le N$. Покажем, что тогда могут быть найдены неизвестные $u_{N+1,k}$, $v_{N+2,k}$, $k = 1, 2$, и p_{N+3}, q_{N+3}. Для этого рассмотрим уравнения, полученные приравниванием коэффициентов при $\omega^{\frac{2-N}{2}} e^{\int\limits_0^\tau (\omega\lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s))ds}$

$$\begin{gathered} \left(\lambda_{1k}^2(t) + a^2(t)\right)(u_{N+2,k} + v_{N+2,k}) + (2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3(t,\tau))(u_{N+1,k} + v_{N+1,k}) + \\ \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + b_2(t,\tau)\right)(u_{N,k} + v_{N,k}) + \left(\dot{\lambda}_{2k} + b_1(t,\tau)\right)(u_{N-1,k} + v_{N-1,k}) + \\ + 2\lambda_{1k}\left(\dot{u}_{N,k} + \dot{v}_{N,k} + v_{N+2,k}^{'}\right) + 2\lambda_{2k}\left(\dot{u}_{N-1,k} + \dot{v}_{N-1,k} + v_{N+1,k}^{'}\right) + \\ + \ddot{u}_{N-2,k} + \ddot{v}_{N-2,k} + 2\dot{v}_{N,k}^{'} + v_{N+2,k}^{''} + b_0(u_{N-2,k} + v_{N-2,k}) = 0, \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Применяя к ним операцию усреднения по τ, получим равенства

$$\lambda_{2k}^2 u_{N,k} + \dot{\lambda}_{1k} u_{N,k} + \dot{\lambda}_{2k} u_{N-1,k} + 2\lambda_{1k}\dot{u}_{N,k} + 2\lambda_{2k}\dot{u}_{N-1,k} + \ddot{u}_{N-2,k} +$$
$$+ \langle b_3(t,\tau) v_{N+1,k}\rangle + \langle b_2(t,\tau)\rangle u_{N,k} + \langle b_2(t,\tau) v_{N,k}\rangle + \tag{4.12}$$
$$+ \langle b_1(t,\tau)\rangle u_{N-1,k} + \langle b_1(t,\tau) v_{N-1,k}\rangle + \langle b_0(t,\tau)\rangle u_{N-2,k} +$$
$$+ \langle b_0(t,\tau) v_{N-2,k}\rangle = 0, \quad k = 1,2.$$

Эти равенства используются при определении коэффициентов $u_{N,k}$. Поскольку последние по предположению найдены, то здесь этими уравнениями заниматься не будем.

Разность уравнений (4.11) и (4.12) имеет вид

$$v''_{N+2,k} + 2\lambda_{1k} v'_{N+2,k} + \{b_3\}_\tau u_{N+1,k} = \langle b_3 v_{N+1,k}\rangle - (2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3)\, v_{N+1,k} -$$
$$-2\lambda_{2k} v'_{N+1,k} - \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + b_2\right) v_{N,k} - 2\lambda_{1k}\dot{v}_{N,k} + \langle b_2 v_{N,k}\rangle + \langle b_1 v_{N-1,k}\rangle -$$
$$-\dot{\lambda}_{2k} v_{N-1,k} - \ddot{v}_{N-2,k} - b_0 v_{N-2,k} + \langle b_0 v_{N-2,k}\rangle - \tag{4.13}$$
$$- \{b_2\}_\tau u_{N,k} - \{b_1\}_\tau u_{N-1,k} - \{b_0\}_\tau u_{N-2,k} \equiv \psi_{N+2,k}, \quad k = 1,2,$$

где $\psi_{N+2,k}$ — известные 2π-периодические по τ функции с нулевыми средними. То есть, получили выражение подобное уравнению (4.6). Действуя по описанному для нахождения v_{1k} алгоритму, будут найдены

$$v_{N+2,k} = \left\{ \int_0^\tau \left(\alpha_k(t,s) u_{N+1,k}(t) + \gamma_{N+2,k}(t,s)\right) ds \right\}_\tau \equiv$$
$$\equiv \beta_k(t,\tau) u_{N+1,k}(t) + \eta_{N+2,k}(t,\tau), \quad k = 1,2, \tag{4.14}$$

где β_k и $\eta_{N+2,k}$ — известные 2π-периодические по τ функции с нулевым средним.

Уравнения для p_{N+2} и q_{N+2} опущены, так как они по предположению уже найдены.

Следующая тройка уравнений рассматриваемой нами последовательности имеет вид

$$
\begin{gathered}
\left(\lambda_{1k}^2 + a_2\right)\left(u_{N+3,k} + v_{N+3,k}\right) + \left(2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3\right)\left(u_{N+2,k} + v_{N+2,k}\right) + \\
+\left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + b_2\right)\left(u_{N+1,k} + v_{N+1,k}\right) + \left(\dot{\lambda}_{2k} + b_1\right)\left(u_{N,k} + v_{N,k}\right) + \\
+2\lambda_{1k}\left(\dot{u}_{N+1,k} + \dot{v}_{N+1,k} + v'_{N+3,k}\right) + 2\lambda_{2k}\left(\dot{u}_{N,k} + \dot{v}_{N,k} + v'_{N+2,k}\right) \\
+\ddot{u}_{N-1,k} + \ddot{v}_{N-1,k} + 2\dot{v}'_{N+1,k} + v''_{N+3,k} + \\
+b_0\left(u_{N-1,k} + v_{N-1,k}\right) = 0, \quad k = 1, 2,
\end{gathered} \tag{4.15}
$$

$$
\begin{gathered}
q''_{N+3} + 2i\mu_1 q'_{N+3} + \left(a^2 - \mu_1^2\right)\left(p_{N+3} + q_{N+3}\right) = f_{N-1} + g_{N-1} + \\
+\left(\mu_1\mu_2 - b_3\right)\left(p_{N+2} + q_{N+2}\right) + \left(\mu_2^2 - i\dot{\mu}_1 - b_2\right)\left(p_{N+1} + q_{N+1}\right) - \\
-\left(i\dot{\mu}_2 + b_3\right)\left(p_N + q_N\right) - b_0\left(p_{N-1} + q_{N-1}\right) - 2i\mu_1\left(\dot{p}_{N+1} + \dot{q}_{N+1}\right) - \\
-2i\mu_2\left(\dot{p}_N + \dot{q}_N\right) - 2i\mu_2 q'_{N+2} - \ddot{p}_{N-1} - \ddot{q}_{N-1} - 2\dot{q}'_{N+1}.
\end{gathered} \tag{4.16}
$$

Применяя к уравнениям (4.15) операцию усреднения, получим соотношения

$$
\begin{gathered}
2\lambda_{1k}\dot{u}_{N+1,k} + \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + \langle b_2\rangle\right) u_{N+1,k} + \langle b_3 v_{N+2,k}\rangle = \\
= -\dot{\lambda}_{2k}u_{N,k} - 2\lambda_{2k}\dot{u}_{N,k} - \ddot{u}_{N-1,k} - \langle b_2 v_{N+1,k}\rangle - \langle b_1 v_{N,k}\rangle - \\
-\langle b_0 v_{N-1,k}\rangle - \langle b_1\rangle u_{N,k} - \langle b_0\rangle u_{N-1,k}, \quad k = 1, 2.
\end{gathered} \tag{4.17}
$$

Отсюда, учитывая (4.14), найдём уравнения

$$2\lambda_{1k}\dot{u}_{N+1,k} + \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + \langle b_2\rangle + \langle b_3\beta_k\rangle\right) u_{N+1,k} = -\langle b_3\eta_{N+1,k}\rangle -$$

$$-\dot{\lambda}_{2k}u_{N,k} - 2\lambda_{2k}\dot{u}_{N,k} - \ddot{u}_{N-1,k} - \langle b_2 v_{N+1,k}\rangle - \langle b_1 v_{N,k}\rangle - \tag{4.18}$$

$$-\langle b_0 v_{N-1,k}\rangle - \langle b_1\rangle u_{N,k} - \langle b_0\rangle u_{N-1,k}, \quad k = 1, 2,$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u_{N+1,1}(0) + u_{N+1,2}(0) = \nu_{N+1}, \\ \lambda_{11}(0)u_{N+1,1}(0) + \lambda_{12}(0)u_{N+1,2}(0) = \sigma_{N+1}, \end{cases} \tag{4.19}$$

где

$$\nu_{N+1} = -v_{N+1,1}(0,0) - v_{N+1,2}(0,0) - p_{N+1}(0) - q_{N+1}(0,0),$$

$$\sigma_{N+1} = -\lambda_{11}(0)v_{N+1,1}(0,0) - \lambda_{12}(0)v_{N+1,2}(0,0) - \lambda_{21}(0)u_{N,1}(0) - \lambda_{22}(0)u_{N,2}(0) -$$

$$-\lambda_{21}(0)v_{N,1}(0,0) - \lambda_{22}(0)v_{N,2}(0,0) - v'_{N+1,1}(0,0) - v'_{N+1,2}(0,0) - \dot{p}_{N-1}(0) -$$

$$-\dot{q}_{N-1}(0,0) - i\mu_1(0)\left(p_{N+1}(0) + q_{N+1}(0,0)\right) - i\mu_2(0)\left(p_N(0) + q_N(0,0)\right) - q'_{N+1}(0,0)$$

Из (4.18) и (4.19) однозначно определяются $u_{N+1,1}$ и $u_{N+1,2}$.

Применяя операцию усреднения по τ к уравнению (4.16), получим выражение

$$p_{N+3}(t) = \frac{\sigma(t)}{a^2(t) - \mu_1^2(t)},$$

где $\sigma(t)$ — известная непрерывная функция.

Применяя к равенству (4.16) операцию $\{\ldots\}$, найдём уравнение

$$q''_{N+3} + 2i\mu_1 q'_{N+3} + \left(a^2 - \mu_1^2\right) q_{N+3} = \zeta(t,\tau),$$

где $\zeta(t,\tau)$ — известная 2π - периодическая по τ функция с нулевым средним. Последнее уравнение решается так же как и уравнение для q_0.

Итак, показано, что описанным способом можно найти все коэффициенты разложения (1.71).

2°. **Второй случай.** Рассмотрим теперь задачу Коши (1.68), (1.69) при втором условии (1.70), то есть когда

$$a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau)\rangle \neq \mu_1(t)\mu_2(t). \tag{4.20}$$

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (1.68), (1.69) в этом случае, как уже говорилось, будем строить в виде ряда

$$\begin{aligned} x_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j-1}{2}} \Bigg(\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) \\ + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} (p_j(t) + q_j(t,\omega t)) \Bigg), \end{aligned} \tag{4.21}$$

где $v_{jk}(t,\tau)$ и $q_j(t,\tau)$ — 2π-периодические по τ функции с нулевыми средними.

Соответствующее n-ое приближение имеет вид

$$\begin{aligned} x^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \omega^{-\frac{j-1}{2}} \Bigg(\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) \\ + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} (p_j(t) + q_j(t,\omega t)) \Bigg), \end{aligned} \tag{4.22}$$

Справедливость сохраняет Теорема 2, доказательству которой во втором случае и посвящена остальная часть 3^0.

Для нахождения неизвестных коэффициентов асимптотического разложения подставим ряд (4.21) в уравнение (1.68) и приравняем в левой и правой частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых функциях вида

$$\omega^{\frac{l}{2}} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds}, \quad k = 1, 2, \text{ и } \quad \omega^{\frac{l}{2}} e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds}, \quad l = 5, 4, \ldots.$$

В результате получим бесконечную цепочку уравнений.

Приравнивая коэффициенты при старшей степени – $\omega^{\frac{5}{2}}$, получим

$$\Big(\lambda_{1k}^2(t)+a^2(t)\Big)\Big(u_{0k}(t)+v_{0k}(t,\tau)\Big)+2\lambda_{1k}(t)v_{0k}'(t,\tau)+v_{0k}''(t,\tau)=0, \quad k=1,2; \tag{4.23}$$

$$\left(a^2(t)-\mu_1^2(t)\right)\left(p_0(t)+q_0(t,\tau)\right)+2i\mu_1(t)q_0'(t,\tau)+q_0''(t,\tau)=0. \tag{4.24}$$

Применяя к (4.23) операцию усреднения по τ, найдём уравнения

$$\left(\lambda_{1k}^2(t)+a^2(t)\right)u_{0k}(t)=0, \quad k=1,2, \tag{4.25}$$

в которых положим

$$\lambda_{11}(t)=a(t)i, \quad \lambda_{12}(t)=-a(t)i.$$

Вычитая из равенств (4.23) равенства (4.25), получим следующие уравнения

$$v_{0k}''(t,\tau)+2\lambda_{1k}(t)v_{0k}'(t,\tau)=0,$$

которые имеют нулевые решения:$v_{0k}(t,\tau)=0$.

Из равенства (4.24) при условии (1.92) следует уравнение

$$q_0''(t,\tau)+2i\mu_1(t)q_0'(t,\tau)=0,$$

которое как и уравнение для v_{0k} имеет нулевое решение.

Следующие три равенства (для ω^2) имеют вид

$$\left(2\lambda_{1k}\lambda_{2k}+b_3\right)u_{0k}+\left(\lambda_{1k}^2+a^2\right)\left(u_{1k}+v_{1k}\right)+2\lambda_{1k}v_{1k}'+v_{1k}''=0, \quad k=1,2, \tag{4.26}$$

$$q_1''+2i\mu_1q_1'+2i\mu_2q_0'+\left(a^2-\mu_1^2\right)\left(p_1+q_1\right)+\left(b_3-\mu_1\mu_2\right)\left(p_0+q_0\right)=f_{-4}+g_{-4}. \tag{4.27}$$

Применяя к (4.26) операцию $\langle\ldots\rangle$, получим

$$\lambda_{21}(t) = -\frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle\, i}{2a(t)}, \quad \lambda_{22}(t) = \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle\, i}{2a(t)}.$$

Применяя к равенствам (4.26) операцию $\{\ldots\}_\tau$, придем к уравнениям

$$v_{1k}^{''} + 2\lambda_{1k} v_{1k}^{'} + \{b_3\}_\tau\, u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{4.28}$$

сделав в которых замену

$$v_{1k}^{'} = w_{1k} u_{0k}, \quad \langle w_{1k}\rangle = 0, \quad k = 1, 2,$$

получим уравнения вида

$$w_{1k}^{'} + 2\lambda_{1k} w_{1k} = -\{b_3\}_\tau\,, \quad k = 1, 2.$$

Последние имеют решения

$$w_{1k}(t,\tau) = \left(1 - e^{\mp 4a(t)\pi}\right)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \{b_3(t,s)\}_s\, e^{\pm 2a(t)i(s-\tau-2\pi)} ds +$$
$$+ \int\limits_0^{\tau} \{b_3(t,s)\}_s\, e^{\pm 2a(t)i(s-\tau)} ds \equiv \alpha_k(t,\tau), \quad k = 1, 2,$$

где $\qquad \alpha_k(t, \tau + 2\pi) = \alpha_k(t,\tau), \qquad \langle \alpha_k(t,\tau)\rangle = 0.$

Из сказанного ранее следует, что исходные уравнения (4.28) имеют решения

$$v_{1k}(t,\tau) = \beta_k(t,\tau) u_{0k}(t),$$

где

$$\beta_k(t,\tau) = \int\limits_0^{\tau} \alpha_k(t,s) ds - \left\langle \int\limits_0^{\tau} \alpha_k(t,s) ds \right\rangle.$$

Применяя последовательно операции $\langle\ldots\rangle$ и $\{\ldots\}_\tau$ к равенству (4.27), получим

$$p_0(t) = \frac{f_{-4}(t)}{\langle b_3(t,\tau)\rangle - \mu_1(t)\mu_2(t)}.$$

а также уравнение

$$q_1^{''} + 2i\mu_1 q_1^{'} = g_{-4} - \{b_3\}_\tau p_0,$$

где в правой части стоит известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним. Это уравнение решается аналогично уравнению для v_{1k}, рассмотренному в первом случае.

Равенства коэффициентов при $\omega^{\frac{3}{2}}$ имеет вид

$$\begin{gathered}\left(\lambda_{1k}^2 + a^2\right)(u_{2k} + v_{2k}) + (2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3)(u_{1k} + v_{1k}) + \\ + \left(\lambda_{2k}^2 + b_2 + \dot{\lambda}_{1k}\right) u_{0k} + 2\lambda_{1k}\dot{u}_{0k} + \\ + v_{2k}^{''} + 2\lambda_{1k} v_{2k}^{'} + 2\lambda_{2k} v_{1k}^{'} = 0, \quad k = 1, 2.\end{gathered} \tag{4.29}$$

$$\begin{gathered}\left(a^2 - \mu_1^2\right)(p_2 + q_2) + (b_3 - 2\mu_1\mu_2)(p_1 + q_1) + \\ + \left(i\dot{\mu}_1 - \mu_2^2\right)(p_0 + q_0) + 2i\mu_1(\dot{p}_0 + \dot{q}_0) + \\ + q_2^{''} + 2i\mu_1 q_2^{'} + 2i\mu_2 q_1^{'} + 2\dot{q}_0^{'} = f_{-3} + g_{-3}.\end{gathered} \tag{4.30}$$

Усредняя по τ равенства (4.29), получим уравнения

$$\pm 2a(t)i\dot{u}_{0k}(t) + \left(\langle b_2(t,\tau) + b_3(t,\tau)\beta_k\rangle \pm \dot{a}(t)i - \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)}\right) u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{4.31}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u_{01}(0) + u_{02}(0) = -p_0(0), \\ \lambda_{11}u_{01}(0) + \lambda_{12}u_{02}(0) = -i\mu_1(0)p_0(0). \end{cases} \tag{4.32}$$

Найдя из (4.9) и (4.10) u_{01}, u_{02}, найдём и v_{11}, v_{12}.

Применяя к равенству (4.29) операцию $\{...\}$ получим уравнение

$$v_{2k}^{''} + 2\lambda_{1k} v_{2k}^{'} + \{b_3\}_\tau u_{1k} = \varphi_{2k}(t,\tau), \quad k = 1, 2, \tag{4.33}$$

где $\varphi_{2k}(t,\tau)$ –известная 2π-периодическая по τ –функция с нулевым средним.

Решение уравнения (4.33)находится аналогично v_{1k} и выражается через u_{1k}.

Из уравнения (4.30) находим

$$p_1(t)=\frac{\phi_1(t)}{\langle b_3(t,\tau)\rangle-\mu_1(t)\mu_2(t)}.$$

и

$$q_2^{''}+2i\mu_1 q_2^{'}=\psi_2(t,\tau),$$

где $\phi_1(t)$ и $\psi_2(t,\tau)$ – известные функции, причем $\psi_2(t,\tau)$ – 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Перейдем к следующей тройке уравнений при степени ω

$$\begin{gathered}\left(\lambda_{1k}^2+a^2\right)(u_{3k}+v_{3k})+(2\lambda_{1k}\lambda_{2k}+b_3)(u_{2k}+v_{2k})+\\+\left(\lambda_{2k}^2+b_2+\dot\lambda_{1k}\right)(u_{1k}+v_{1k})+2\lambda_{1k}(\dot u_{1k}+\dot v_{1k})+\\+2\lambda_{2k}\dot u_{0k}+2\lambda_{1k}v_{3k}^{'}+2\lambda_{2k}v_{2k}^{'}+\dot\lambda_{2k}u_{0k}+\\+2\dot v_{1k}^{'}+v_{3k}^{''}=0,\quad k=1,2.\end{gathered}\tag{4.34}$$

$$\begin{gathered}\left(a^2-\mu_1^2\right)(p_3+q_3)+(b_3-2\mu_1\mu_2)(p_2+q_2)+\\\left(i\dot\mu_1-\mu_2^2\right)(p_1+q_1)+2i\mu_1(\dot p_1+\dot q_1)+\\+2i\mu_2(\dot p_0+\dot q_0)+q_3^{''}+2i\mu_1 q_3^{'}+\\+2i\mu_2 q_2^{'}+2\dot q_1^{'}+i\dot\mu_2(p_0+q_0)=f_{-2}+g_{-2}.\end{gathered}\tag{4.35}$$

Применяя операцию усреднения по τ к выражению (4.34), получим уравнение

$$\pm 2a(t)i\dot{u}_{0k}(t) + \left(\langle b_2(t,\tau) + b_3(t,\tau)\beta_k \rangle \pm \dot{a}(t)i - \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)} \right) u_{1k} =$$

$$= 2\lambda_{2k}\dot{u}_{0k} + \dot{\lambda}_{2k}u_{0k} - \langle b_3 v_{1k}\rangle, \quad k = 1,2, \tag{4.36}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u_{11}(0) + u_{12}(0) = x_0 - v_{11}(0,0) - v_{12}(0,0) - p_1(0) - q_1(0), \\ \lambda_{11}u_{11}(0) + \lambda_{12}u_{12}(0) = x_1 - \lambda_{11}(0)v_{11}(0,0) - \\ -\lambda_{12}(0)v_{12}(0,0) - \lambda_{21}(0)u_{01}(0) - \lambda_{22}(0)u_{02}(0) - v'_{11}(0,0) - v'_{12}(0,0) - \\ -i\mu_1(0)p_1(0) - i\mu_1(0)q_1(0,0) - i\mu_2(0)p_0(0) - q'_2(0,0). \end{cases} \tag{4.37}$$

Найдя из (4.36) и (4.37) u_{11}, u_{12}, найдём и v_{21}, v_{22}.

Аналогичным образом будут найдены все коэффициенты разложения (4.21)

3°. **Третий случай.** Рассмотрим теперь задачу Коши (1.68), (1.69)для которой выполняется условие (1.70), то есть

$$a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \quad \langle b_3(t,\tau)\rangle \equiv \mu_1(t)\mu_2(t). \tag{4.38}$$

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (1.68), (1.69) в этом случае будем строить в виде

$$x_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j-2}{2}} \left(\sum_{k=1}^{2} e^{\int_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) + e^{i\int_0^t \left(\omega\mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} (p_j(t) + q_j(t,\omega t)) \right), \tag{4.39}$$

где $v_{jk}(t,\tau)$ и $q_j(t,\tau)$ — 2π-периодические по τ функции с нулевыми средними.

Соответствующее n-ое приближение имеет вид

$$x^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \omega^{-\frac{j-2}{2}} \left(\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)\right) \right.$$
$$\left. + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds} \left(p_j(t) + q_j(t,\omega t)\right) \right). \tag{4.40}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов асимптотического разложения подставим ряд (1.71) в уравнение (1.68) и приравняем в левой и правой частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых функциях вида
$$\omega^{\frac{l}{2}} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right)ds}, \quad k = 1,2, \text{ и } \quad \omega^{\frac{l}{2}} e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds}, \quad l = 6,5,....$$
В результате получим бесконечную цепочку уравнений.

В случае $l = 6$ имеем три равенства:

$$\left(\lambda_k^2(t) + a^2(t)\right)\left(u_{0k}(t) + v_{0k}(t,\tau)\right) + 2\lambda_{1k}(t)v_{0k}^{'}(t,\tau) + v_{0k}^{''}(t,\tau) = 0, \quad k = 1,2; \tag{4.41}$$

$$\left(a^2(t) - \mu_1^2(t)\right)\left(p_0(t) + q_0(t,\tau)\right) + 2i\mu_1(t)q_0^{'}(t,\tau) + q_0^{''}(t,\tau) = 0. \tag{4.42}$$

Применяя к (4.41) операцию усреднения по τ, найдём уравнения

$$\left(\lambda_{1k}^2(t) + a^2(t)\right)u_{0k}(t) = 0, \quad k = 1,2, \tag{4.43}$$

в которых положим $\lambda_{11}(t) = a(t)i, \quad \lambda_{12}(t) = -a(t)i$. Вычитая из равенств (4.41) равенства (4.43), получим следующие уравнения

$$v_{0k}^{''}(t,\tau) + 2\lambda_{1k}(t)v_{0k}^{'}(t,\tau) = 0,$$

которые в силу наложенных на v_{0k} ограничений имеют нулевые решения. Из равенства (4.42), найдём уравнение

$$2i\mu_1(t)q_0^{'}(t,\tau) + q_0^{''}(t,\tau) = 0,$$

которое имеет нулевое решение.

Следующие три равенства (для $\omega^{\frac{5}{2}}$) имеют вид

$$(2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3)\, u_{0k} + \left(\lambda_{1k}^2 + a^2\right)(u_{1k} + v_{1k}) + 2\lambda_{1k}v_{1k}^{'} + v_{1k}^{''} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{4.44}$$

$$q_1^{''} + 2i\mu_1 q_1^{'} + 2i\mu_2 q_0^{'} + \left(a^2 - \mu_1^2\right)(p_1 + q_1) + (b_3 - \mu_1\mu_2)(p_0 + q_0) = 0. \tag{4.45}$$

Применяя к (4.44) операцию $\langle \ldots \rangle$, получим

$$\lambda_{21}(t) = -\frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle\, i}{2a(t)}, \quad \lambda_{22}(t) = \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle\, i}{2a(t)}.$$

Применяя к равенствам (4.44) операцию $\{\ldots\}_\tau$, найдём уравнения

$$v_{1k}^{''} + 2\lambda_{1k}v_{1k}^{'} + \{b_3\}_\tau\, u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{4.46}$$

сделав в которых замену

$$v_{1k}^{'} = w_{1k}u_{0k}, \quad \langle w_{1k}\rangle = 0, \quad k = 1, 2,$$

получим уравнения вида

$$w_{1k}^{''} + 2\lambda_{1k}w_{1k}^{'} = -\{b_3\}_\tau\,, \quad k = 1, 2.$$

Последние имеют решения

$$w_{1k}(t,\tau) = \left(1 - e^{\mp 4a(t)\pi}\right)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \{b_3(t,s)\}_s\, e^{\pm 2a(t)i(s-\tau-2\pi)}ds +$$
$$+ \int\limits_0^{\tau} \{b_3(t,s)\}_s\, e^{\pm 2a(t)i(s-\tau)}ds \equiv \alpha_k(t,\tau), \quad k = 1, 2,$$

где

$$\alpha_k(t,\tau + 2\pi) = \alpha_k(t,\tau), \qquad \langle \alpha_k(t,\tau)\rangle = 0.$$

Из вышесказанного следует, что исходные уравнения (4.46) имеют решения

$$v_{1k}(t,\tau) = \beta_k(t,\tau)u_{0k}(t),$$

где

$$\beta_k(t,\tau) = \int\limits_0^\tau \alpha_k(t,s)ds - \left\langle \int\limits_0^\tau \alpha_k(t,s)ds \right\rangle.$$

Перейдем к рассмотрению уравнения (4.45). Применяя к нему операцию усреднения по переменной τ, получим

$$(\langle b_3 \rangle - \mu_1\mu_2)\, p_0 = 0.$$

По условию $\langle b_3 \rangle \equiv \mu_1\mu_2$, а следовательно последнее равенство выполняется при любых значения p_0.

Применяя операцию $\{\ldots\}_\tau$ к равенству (4.45), получим

$$q_1^{''}(t,\tau) + 2i\mu_1(t)q_1^{'}(t,\tau) = -\{b_3(t,\tau)\}p_0(t),$$

где в правой части стоит известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним.Это уравнение решается аналогично уравнению (1.2.118) для v_{1k}. В этом случае функцию q_1 можно представить в виде

$$q_1(t,\tau) = l(t,\tau)p_0(t) + m_1(t,\tau),$$

где $l(t,\tau)$ и $m_1(t,\tau)$ – известные 2π-периодические по τ функции с нулевым средним.

Равенства коэффициентов при ω^2 имеют вид

$$\begin{gathered} \left(\lambda_{1k}^2 + a^2\right)(u_{2k} + v_{2k}) + (2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3)(u_{1k} + v_{1k}) + \\ + \left(\lambda_{2k}^2 + b_2 + \dot{\lambda}_{1k}\right) u_{0k} + 2\lambda_{1k}\dot{u}_{0k} + v_{2k}^{''} = 0, \quad k = 1,2. \end{gathered} \tag{4.47}$$

$$\begin{gathered} \left(a^2 - \mu_1^2\right)(p_2 + q_2) + (b_3 - \mu_1\mu_2)(p_1 + q_1) + \left(i\dot{\mu}_1 - \mu_2^2\right)(p_0 + q_0) + \\ +2i\mu_1(\dot{p_0} + \dot{q_0}) + q_2^{''} + 2i\mu_1 q_2^{'} + 2i\mu_2 q_1^{'} + 2\dot{q}_0^{'} = f_{-4} + g_{-4}. \end{gathered} \tag{4.48}$$

Усредняя по τ равенства (4.47), получим уравнения

$$\pm 2a(t)i\dot{u}_{0k}(t)+\left(\langle b_2(t,\tau)+b_3(t,\tau)\beta_k\rangle \pm \dot{a}(t)i-\frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)}\right)u_{0k}=0,\quad k=1,2, \tag{4.49}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u_{01}(0)+u_{02}(0) \;=\; -p_0(0), \\ \lambda_{11}u_{01}(0)+\lambda_{12}u_{02}(0) \;=\; -\mu_1(0)p_0(0). \end{cases} \tag{4.50}$$

Из (4.49) и (4.50) будут найдены выражения функций u_{01} и u_{02} через функцию p_0, а вернувшись к (4.46) найдём и представление v_{11} и v_{12} через p_0.

Вычитая из (4.47) равенство (4.49), получим уравнение

$$v_{2k}^{''}+2\lambda_{1k}v_{1k}^{'}+b_3u_{1k}=\psi_{1k},\quad k=1,2,$$

где ψ_{1k} – известная 2π-периодическая по τ функция с нулевым средним. Решения последних уравнений можно выразить через функции $u_{1k}, k=1,2$.

Перейдём к рассмотрению уравнения (4.48), которое после усреднения примет вид

$$2i\mu_1\dot{p}_0+(i\dot{\mu}_1-\mu_2^2+\langle b_2\rangle)p_0+\langle b_3q_1\rangle=f_{-4}.$$

подставляя в последнее уравнение представление q_1 через p_0, получим

$$2i\mu_1\dot{p}_0+(i\dot{\mu}_1-\mu_2^2+\langle b_2\rangle+\langle b_3\cdot l\rangle)p_0=f_{-4}$$

При начальном условии $p_0(0)=0$ последнее однозначно разрешимо. Зная p_0, будет найдено и q_1, u_{01}, u_{02} и v_{11}, v_{12}.

Действуя подобным образом будут найдены все коэффициенты разложения.

Замечание 4.1. В 3^0 нахождение асимптотического разложения решения задачи Коши неоднородного уравнения можно было разбить на построения асимптотического разложения решения однородного уравнения и асимптотического разложения частного решения неоднородного уравнения. В условиях п.п. 1^0 и 2^0, как нам кажется, нахождение решения (в рамках используемой методики) возможно только путём построения коэффициентов сразу для суммы асимптотических разложений.

Список литературы

[1] *Liouville J.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными meme//J.Math. Pure Appl., 1837, L.P. 16-35.

[2] *Sparre* Асимптотическое интегрирование Sur le monvement des proyectiles oblongs. Jnp. Rational, 1893.

[3] *Horn J.* // Cryst, J., 1910, 198

[4] *Fowler A., Lock C.* Approximate solution of linear differential equations// Proc. Lond. Math. Soc., 1921. 20, 2, P. 127-147

[5] *Bikhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parametr //Trans. Amer. Math. Soc., 1908, 9 P. 219-231

[6] *Schlesinger* Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer Differential Systemeable Funktionen eines Parametere //Math. Ann., 1907, 63, P. 207-300

[7] *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Питербург 1917, 308 с

[8] *Tryizinski W. Y.* Theory of linear differential equations Containing aparametr //Acta math. 1936, 67. P. 1-50.

[9] *Пугачев В. С.* Об асимптотических представлениях интегралов систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр //Матем. сб., 1944, Т.15, №1, с. 13-46

[10] *Дородницын А. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМК, 1952, Т VII, вып. 6

[11] *Раппопорт И. М.* О некоторыхасимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд. АН УССР, 1954

[12] *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.

[13] *Моисеев Н. Н.* Асимптотические представления решений линейных дифференциальных уравнений в случае кратных элементарных делителей характеристического уравнения // ДАН СССР, 1966, Т. 170, №4, с. 780-782

[14] *Turritin H. L.* -Amer. J. Math., 1936, 58. P. 364-376.

[15] *Территин Х. Л.* Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр //Математика:С. пер., 1957, 1, №2. С. 29-59.

[16] *Sibuya Ir. Y.*Some Global properties of Matrices of Functions of jne variable // Math. Ann., 1956, 161, №1. P.67-77.

[17] *Фещенко С. Ф.*Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн., 1949, 7, №4. С. 99-155

[18] *Фещенко С. Ф.*Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн., 1955, 7, №4. С. 443-452.

[19] *Шкиль Н. И.* Асимптотическое поведение решений линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения //Укр. мат. журн., 1975, 27, №1. С. 137-140.

[20] *Шкиль Н. И.* Построение общего асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром //Изв. вызов. Математика, 1966, №1, С. 163-169.

[21] *Шкиль Н. И.* Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр //Докл. АН СССР. 1963, 150, №5. С. 1005-1008.

[22] *Щкіль М. I.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. И.Выща шк., 1971, 226 с.

[23] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Мир, 1968, 464 с.

[24] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Изд-во Иностранной литературы, 1956, 474 с

[25] *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Наука, 1983. 352 с.

[26] *Далецкий Ю. Л.* Асимптотические методы для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами //ДАН СССР. 1962, т.143, №5.

[27] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[28] *Левенштам В. Б.*Обоснование метода усреднения для задачи конвенции при высокочастотной вибрации // Сибирский математический журнал. 1993, №2, с. 92-109

[29] *Басистая Д. А., Левенштам В. Б.*Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. 2004, с.46-48.

[30] *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // ДАН. 2005, Т.405, №2, с. 169-172.

[31] *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2006, Т.70, №2, с. 25-56.

[32] *Левенштам В. Б., Хатламаджиян Г. Л.*Распространиение теории усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Задача о периодических решениях// Известия высших учебных заведений. 2006, №6, с. 35-47

[33] *Левенштам В. Б.* Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с бошими высокочастотными слагаемыми // Дифференциальные уравнения. 2008, Т.44, №1, с. 52-68

[34] *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б.* Асимптотический анализ некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с большим параметром // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2009, Т.49, №12, с. 1-13

[35] *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б.*Асимптотика решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с большими слагаемыми // Сибирский математический журнал. 2010, Т.51, №1, с. 74-89

[36] *Левенштам В. Б.* Асимптотический анализ линейных дифференциальных уравнений с большим параметром. Резонансный случай // Сибирский математический журнал. 2012, Т.53, №1, с. 124-131

[37] *Крутенко Е. В.* Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Высокочастотные асимптотики //Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2012, №6, с.31-33.

[38] *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование системы линейных дифференциальных уравнений с высокочастотными членами и старшим матричным коэффициентом - жордановой клеткой // Экологический вестник научногых центров ЧЭС. 2013, №1, с. 47-53.

[39] *Евельсон Р. Л.* Матричный метод асимптотического интегрирования системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с одним элементарным делителем произвольной кратности // Дифференциальные уравнения. 2011, Т.47, №5, с. 621-627