На правах рукописи

Крутенко Елена Владимировна

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2019 г.

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Южный Федеральный Университет".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Левенштам Валерий Борисович

Официальные оппоненты: *Мирзоев Карахан Агахан оглы*
доктор физико-математических наук, доцент,
Московский государственный
университет им. М.В.Ломоносова,
профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета

Рудаков Игорь Алексеевич
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО "Московский государственный
технический университет им. Н.Э.Баумана
(национальный исследовательский университет)"
профессор кафедры прикладной математики

Ведущая организация: ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет"

Защита диссертации состоится "18"июня 2019 г. в 17 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Южном федеральном университете по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 21-ж и на сайте Южного федерального университета по адресу : http://hub.sfedu.ru/media/diss/a4dd0fa7-30ea-49d0-a6b0-de17719e1770/Krutenko_dissertation.pdf

Автореферат разослан ” ” 2019 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 212.208.29 Кряквин Вадим Донатович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена развитию теории асимптотического интегрирования эволюционных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с плавными и быстро осциллирующими (высокочастотными) коэффициентами, пропорциональными определённым – в том числе положительным – степеням высокой частоты осцилляций. Математическое моделирование многих физических и технических процессов сводится к исследованию линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от параметров. Лишь в редких (исключительных) случаях для таких уравнений можно получить точные решения. Во многих же случаях для их исследования требуется применять приближенные методы, к которым относятся численные и асимптотические методы. Для рассматриваемых в диссертации дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими членами, которые, кроме того, могут иметь большие амплитуды, при непосредственном применении численных методов — в частности, разностных — возникают известные проблемы. Поэтому здесь необходимо использовать асимптотические методы (как правило, в сочетании с численными).

История зарождения и развития асимптотических методов применительно к линейным дифференциальным уравнениям связана с именем Лиувилля. В 1837 году им были построены асимптотические разложения фундаментальной системы решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, зависящего от большого параметра. В начале XX века первые важнейшие результаты об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с большим параметром были получены Биркгофом Г.Д., Шлезингером Л. и Тамаркиным Я.Д.. Первые работы данного направления были, как правило, связаны с исследованием сходимости разложений "произвольных" функций в ряды по собственным функциям линейных операторов. В дальнейшем развивающийся асимптотический анализ стал применяться и во многих задачах иного рода, включая прикладные задачи. В 1936 г. Тржитзинский обобщил теорию Шлезингера-Биркгофа-Тамаркина на интегро-дифференциальные уравнения. В военные и послевоенные годы теория асимптотического интегрирования уравнений с большим параметром получила дальнейшее развитие в работах В.С.Пугачёва , А.А. Дородницина, И.М. Раппопорта , Н.Н. Моисеева и других авторов. Важные результаты, относящиеся к асимптотическому анализу линейных дифференциальных уравнений с большим параметром получены также Г.Вентцелем, Х.А.Крамерсом, Л.Бриллюэном(метод ВКБ), С.В.Фещенко, В.Вазовым, , Э.Коддингтоном, Н.Левинсоном, М.В.Федорюком и многими другими исследователями. В работах упомянутых выше авторов коэффициенты уравнений являются, как правило, произведениями степеней асимптотического параметра и зависящих от времени функций (плавные коэффициенты). Вплоть до недавнего времени единственной работой об асимптотическом интегрировании линейных дифференциальных уравнений, в которых помимо плавных присутствуют и высокочастотные коэффициенты, являлась работа Ю.А. Далецкого (ДАН, 1962), где рассматриваются линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с ограниченными операторными коэффициентами. Полученные в настоящей диссертации результаты развивают и дополняют соответствующие результаты Моисеева Н.Н., Коддингтона Э. и Левинсона Н., Далецкого Ю.Л., Эвельсона Р.Л.. Из сказанного выше следует актуальность темы диссертации.

Цель работы состоит в разработке и обосновании эффективных алгоритмов построения полных асимптотических разложений решений линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений с плавными и высокочастотными коэффициентами, пропорциональными определенным степеням — включая положительные — высокой частоты осцилляций. Речь идет об асимптотиках фундаментальных матриц решений линейных однородных нормальных систем дифференциальных уравнений и решений задач Коши для таких неоднородных систем, а также об асимптотиках решений задач Коши для дифференциальных уравнений второго порядка.

Методы исследования. В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и, прежде всего, асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна и основные результаты, выносимые на защиту. В работе получены следующие новые результаты для линейных дифференциальных уравнений второго порядка и систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка (нормальных систем) с плавными и быстро осциллирующими (высокочастотными) коэффициентами, пропорциональными определенным степеням — в том числе положительным — высокой частоты:

- построены и обоснованы полные асимптотические разложения решений задачи Коши для обыкновенных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, включая уравнения произвольного ранга;

- построены и обоснованы полные асимптотические разложения фундаментальных матриц решений для двух классов нормальных систем однородных обыкновенных дифференциальных уравнений в случае различных характеристических корней;

- построены и обоснованы полные асимптотические разложения фундаментальной матрицы решений в случае одного кратного характеристического корня — жорданова клетка;

- построены и обоснованы полные асимптотические разложения решений задачи Коши для некоторых неоднородных дифференциальных уравнений и систем со специальной правой частью.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут применяться при построении асимптотик решений различных задач с быстро осциллирующими членами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология посвященной 100-летию со дня рождения Льва Семёновича Понтрягина (17-22 июня 2008г., Москва, Россия); на КРОМШ-2010 (17-29 сентября 2010г., Ласпи-Батилиман, Крым, Украина);на "VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике"(11-16 сентября 2016 года, г.Ростов-на-Дону, Россия); на семинаре "Асимптотические методы в нелинейном анализе"(рук. В.Б. Левенштам) в ЮФУ 2018г..

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, приложения и библиографии, содержащей 39 наименование. Объем диссертации — 144 страницы, включая приложение -19 страниц.

Публикации.По теме диссертации опубликовано 8 работ. Четыре из них ([3], [4],[7], [8]) опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий ВАК РФ. Все выносимые на защиту результаты получены автором самостоятельно. Работы [3],[4],[8] опубликованы в соавторстве с научным руководителем. В этих работах В.Б. Левенштаму принадлежит общий план исследования и постановка задачи, полученные результаты принадлежат соискателю.

Основное содержание работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы.

В первой главе исследуются дифференциальные уравнения второго порядка.

В §1 на участке $t \in [0, T]$ рассматривается обыкновенное однородное дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t, \omega t) + \omega b_2(t, \omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t, \omega t) + b_0(t, \omega t)\right] x = 0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega x_1. \quad (2)$$

Здесь $T > 0$, $a(t)$ и $b_k(t,\tau), k = 0, 1, 2, 3,$ — заданные на множествах $t \in [0, T]$ и $(t, \tau) \in [0, T] \times [0, \infty) \equiv \Pi$, соответственно, вещественные непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка. Будем предполагать, что $a(t)$ не принимает целых и полуцелых значений ($a(t) \neq \frac{n}{2}$ при всех $t \in [0, T]$ и $n \in Z$), а функции

$b_k(t,\tau), k = 0,1,2,3$, являются 2π-периодическими по τ, причём $b_k(t,\tau)$ имеют непрерывные на Π производные по τ первого порядка, ω — большой вещественный параметр, а x_0 и x_1 — заданные вещественные числа.

Для формулировки основных результатов этой главы введём в рассмотрение следующие задачи.

Задачей типа (A) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ с нулевым средним решения уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varphi(t,\tau),$$

где $t \in [0,T]$ — параметр, а $\varphi(t,\tau)$ — непрерывная на множестве $\Pi \equiv \{(t,\tau) : t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)\}$ функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(B_\pm)$ назовём задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ решения уравнения

$$\frac{\partial w(t,\tau)}{\partial \tau} \pm 2ia(t)w(t,\tau) = \psi(t,\tau),$$

где $t \in [0,T]$ - параметр, а $\psi(t,\tau)$ - непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(C_\pm)$ назовём задачу Коши на отрезке $t \in [0,T]$ вида

$$\pm 2ia(t)\dot{u} + \left(\langle b_2(t,\tau) + b_3(t,\tau)\beta_\pm(t,\tau)\rangle \pm i\dot{a}(t) - \frac{\langle b_3(t,\tau)\rangle^2}{4a^2(t)} \right) u = \chi(t),$$

$$u(0) = u_0,$$

где $\chi(t), u_0$ — непрерывная функция и число, а $\beta_\pm(t,\tau) - 2\pi$-периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \beta_\pm}{\partial \tau^2} \pm 2ia(t)\frac{\partial \beta \pm}{\partial \tau} = \{b_3(t,\tau)\}_\tau \,.$$

Легко видеть, что задачи $A, B_\pm$ и $C_\pm$ однозначно разрешимы, а потому решения задач B_- и C_-в которых ψ, χ и u_0 заменены их комплексно сопряженными, связаны с соответствующими решениями задач B_+ и C_+ операцией комплексного сопряжения.

Скажем теперь коротко о процессе построения формального асимптотического разложения решения. Такое разложение, представленное в виде соответствующего асимптотического ряда, подставляется в исходное уравнение и в полученном равенстве приравниваются коэффициенты при одинаковых функциях. В результате приходим к бесконечной последовательности равенств, каждое из которых разбивается затем с помощью операции усреднения $\langle ... \rangle$ по быстрой переменной $\tau = \omega t$ на два уравнения: для медленных и быстрых переменных. Для однозначного определения медленных переменных потребуются начальные условия (для быстрых имеется условие периодичности), которые определяются путём подстановки асимптотического ряда в заданные начальные условия и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ω.

Процесс обоснования формального асимптотического разложения можно разбить на три пункта. В первом пункте производятся необходимые преобразования, во втором - доказывается вспомогательная лемма, в которой установлены априорные оценки решений, в третьем - доказываются оценки разности решений и частичных сумм отвечающих им асимптотик.

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (1), (2) ищется в виде ряда

$$x(t)=\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t(\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))ds}\left(u_{0k}(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(u_{jk}(t)+v_{jk}(t,\omega t)\right)\right), \quad (3)$$

где функции $v_{jk}(t,\tau)$ являются 2π — периодическими функциями по τ с нулевым средним.

Частичную сумму ряда (3)

$$x^n(t)=\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t(\omega\lambda_k(s)+\sqrt{\omega}\mu_k(s))ds}\left(u_{0k}(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega^{-\frac{j}{2}}(u_{jk}(t)+v_{jk}(t,\omega t))\right),$$

$$(n=0,1,2,...)$$

будем называть n-ым приближением решения $x_\omega(t)$ задачи (1), (2).

Основным результатом первого параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при $\omega>\omega_n$ эффективно строится n-ое приближение $x^n(t)$ решения $x_\omega(t)$ задачи (1), (2), которое является вещественным, и при всех $t\in[0,T]$ удовлетворяет оценкам*

$$|x_\omega(t)-x^n(t)|\le C_n\omega^{\frac{-n-1}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega(t)-\dot{x}^n(t)|\le C_n\omega^{\frac{-n+1}{2}}.$$

Под эффективностью понимается тот факт, что построение приближения $x^n(t)$ сводится к решению конечного, зависящего от n, числа задач каждого из типов : A, B_+, C_+.

Во втором параграфе на участке $t\in[0,T]$ рассматривается неоднородное уравнение вида

$$\begin{aligned}\ddot{x}+\left[\omega^2a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}b_3(t,\omega t)+\omega b_2(t,\omega t)+\omega^{\frac{1}{2}}b_1(t,\omega t)+b_0(t,\omega t)\right]x=\\=e^{i\int\limits_0^t\left(\omega\mu_1(s)+\omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right)ds}\left(f(t,\omega)+g(t,\omega,\omega t)\right),\end{aligned} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega x_1, \tag{5}$$

где

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-4}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad g(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-4}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} g_k(t,\tau), \quad < g_k >_\tau = 0,$$

ω — большой вещественный параметр, а x_0 и x_1 — заданные числа.

Здесь $T > 0, m \in Z$, $a(t), \mu_1(t), \mu_2(t), f_k(t)$ и $b_l(t,\tau), g_k(t,\tau), l = \overline{0,3}, k = \overline{-4,m}$, — заданные на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty) \equiv \Pi$, соответственно, непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка. Будем предполагать, что $a(t)$ и $\mu_1(t), \mu_2(t)$ – вещественные, а остальные функции могут быть комплекснозначными. Кроме того, $a(t)$ и $\mu_1(t)$ не принимают целых и полуцелых значений, а $b_l(t,\tau)$ и $g_k(t,\tau)$ – 2π-периодические по τ функции.

Положим

$$r = \begin{cases} 0, & a(t) \pm \mu_1(t) \neq n, n \in Z, t \in [0,T]; \\ -1, & a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau) \rangle \neq \mu_1(t)\mu_2(t), t \in [0,T]; \\ -2, & a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t,\tau) \rangle \equiv \mu_1(t)\mu_2(t), t \in [0,T]; \end{cases}$$

Асимптотическое разложение решения этой задачи ищется в виде

$$x_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j-r}{2}} \left[\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right) ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) + \right.$$
$$\left. + e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right) ds} (p_j(t) + q_j(t,\omega t)) \right].$$

где функции $v_{jk}(t,\tau)$ и $q_j(t,\tau)$ — 2π - периодичны по τ с нулевым средним.

Соответствующее n-ое приближение имеет вид

$$x_\omega^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \omega^{-\frac{j-r}{2}} \left[\sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega\lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\lambda_{2k}(s)\right) ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t)) + \right.$$
$$\left. + \, e^{i\int\limits_0^t \left(\omega\mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}}\mu_2(s)\right) ds} \omega^{(p_j(t) + q_j(t,\omega t))} \right],$$

Для формулировки основного результата наряду с указанными выше задачами типа $A, B_\pm, C_\pm$ требуется ещё одна задача типа D.

Задачей типа (D) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0,\infty)$ о нахождении 2π-периодического по τ решения уравнения

$$q^{''}(t,\tau) + 2i\mu_1(t)q^{'}(t,\tau) + (a^2(t) - \mu_1^2(t))q(t,\tau) = g(t,\tau),$$

где $t \in [0,T]$ - параметр, а $g(t,\tau)$ - непрерывная на множестве Π функция, 2π-периодическая по τ с нулевым средним.

Справедлив следующий результат.

Теорема 1.2. *Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ эффективно строится n-ое приближение $x^n(t)$ решения $x_\omega(t)$ задачи (4), (5), котороепри всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценкам*

$$|x_\omega(t) - x^n(t)| \le C_n \omega^{\frac{-n-1-r}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega(t) - \dot{x}^n(t)| \le C_n \omega^{\frac{-n+1-r}{2}}.$$

Под эффективным построением приближения решения в этой теореме понимается тот факт, что нахождение каждого слагаемого приближения сводится к решению конечного числа линейных однозначно разрешимых задач без асимптотического параметра типов $A, B_\pm, C_\pm$, а в первом случаи ещё и типа D.

В третьем параграфе для любого натурального числа $p > 2$ (случай $p = 2$ исследован в первом параграфе) рассматривается задача Коши

$$\ddot{x}(t) + \omega^{\frac{2p-1}{2}} \left(\omega^{\frac{1}{2}} a_0^2(t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \omega^{-\frac{i}{2}} b_i(t,\omega t) \right) x(t) = 0, \quad t \in [0,T] \tag{6}$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega^{\frac{p}{2}} x_1 \tag{7}$$

с вещественными данными, где $a_0(t) \neq 0$ при всех $t \in [0,T]$, число p называют рангом уравнения.

Асимптотическое разложение решения задачи Коши (6) - (7) ищется в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega^{\frac{p}{2}} \lambda_{1,k}(s) + \sum\limits_{l=1}^{p-2} \omega^{\frac{p-l}{2}} \mu_{lk}(s,\omega s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s) \right) ds} \times$$
$$\times \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t) \right) \right),$$

где функции $v_{jk}(t,\tau), j = 1,2,..., k = 1,2,$ и $\mu_{lk}(t,\tau), l = 1,2,...,p-2, k = 1,2$ являются 2π-периодическими по τ, и $v_{jk}(t,\tau), j = 1,2,..., k = 1,2,$ имеют нулевые среднии.

Частичную сумму

$$x^n(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int\limits_0^t \left(\omega^{\frac{p}{2}} \lambda_{1,k}(s) + \sum\limits_{l=1}^{p-2} \omega^{\frac{p-l}{2}} \mu_{lk}(s,\omega s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s) \right) ds} \times$$
$$\times \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{n} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t) \right) \right), n \in N,$$

ряда $x(t)$ будем называть n-ым приближением решения задачи Коши (6)-(7).

Имеет место следующий результат.

Теорема 1.3. *Для любого натурального n построение приближения x^n решения задачи Коши (6)-(7) сводится к решению конечного числа задач типов A и C_+. При этом вектор-функция x^n вещественна, и справедливы оценки*

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t) - x^n(t)| \le C_1 \omega^{-\frac{n+1}{2}},$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\dot{x}(t) - \dot{x}^n(t)| \le C_2 \omega^{-\frac{n+1-p}{2}},$$

где C_1 и C_2 – не зависимые от ω постоянные.

В §4 рассматривается неоднородное уравнение произвольного ранга $p > 2$

$$\ddot{x}(t) + \omega^{\frac{2p-1}{2}} \left(\omega^{\frac{1}{2}} a_0^2(t) + \sum_{i=0}^{2p-1} \omega^{-\frac{i}{2}} b_i(t, \omega t) \right) x(t) = \\ = e^{i\omega^{\frac{p}{2}} \int_0^t r(s)ds} (f(t,\omega) + g(t,\tau,\omega)), \quad (8)$$

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-2p}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad g(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-2p}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} g_k(t,\tau),$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \omega^{\frac{p}{2}} x_1, \quad (9)$$

где параметр $\omega >> 1, m \in Z$. Вещественные функции $a_0(t), r(t),\ b_i(t,\tau)$ и комплекснозначные $f_k(t)$и $g_k(t,\tau)$ определены и непрерывны на множествах $t \in [0,T], (t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty)$ соответственно, причём b_i, g_k – 2π-периодичные по τ , а g_k имеет нулевое среднее по τ, $a_0(t) \neq 0,\ \ a_0^2(t) \neq r^2(t), \forall t \in [0,T]$, x_0 и x_1 – некоторые комплексные заданные числа.

Асимптотическое разложение решения данной задачи Коши ищется в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} e^{\int_0^t \left(\omega^{\frac{p}{2}} \lambda_{1,k}(s) + \sum_{l=1}^{p-2} \omega^{\frac{p-l}{2}} \mu_{lk}(s,\omega s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s) \right) ds} \times \\ \times \left(u_{0k}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(u_{jk}(t) + v_{jk}(t,\omega t) \right) \right) + \\ + e^{i\omega^{\frac{p}{2}} \int_0^t r(s)ds} \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(p_j(t) + q_j(t,\omega t) \right),$$

где функции $v_{jk}(t,\tau), j=1,2,...,k=1,2,$ и $q_j(t,\tau), l=1,2,...,p-2, k=1,2$ являются 2π-периодическими по τ с нулевыми средними.

Справедлив следующий результат.

Теорема 1.4. *Для любого $n \in N$ найдутся такие положительные числа c_n и ω_n, что при $\omega > \omega_n$ эффективно строится n-ое приближение x^n решения задачи Коши (8)-(9), которое при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценкам*

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(t) - x^n(t)| \le C_1\omega^{\frac{-n-1}{2}},$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |\dot{x}(t) - \dot{x}^n(t)| \le C_2\omega^{\frac{-n-1+p}{2}},$$

где C_1 и C_2 – не зависимые от ω постоянные.

Перейдём ко второй главе.

В первом параграфе этой главы рассматривается нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \omega^{\frac{1}{2}}\left(A(t,\omega)x(t) + B(t,\omega t,\omega)\right)x(t), \omega >> 1, \tag{10}$$

где

$$A(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m}\omega^{-\frac{k}{2}}A_k(t), B(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{m}\omega^{-\frac{k}{2}}B_k(t,\tau),$$

A_k и $B_k, k = \overline{0,m}$ – квадратные матрицы порядка n. Будем предполагать, что элементы последних определены и непрерывны на множествах $t\in[0,T]$ и $(t,\tau)\in[0,T]\times[0,\infty)$, причём элементы матриц A_k имеют на интервале $t\in(0,T)$ производные любого порядка, которые продолжимы до непрерывных на отрезке $t\in[0,T]$ функций, а матрицы $B_k(t,\tau)$ – 2π -периодичны по τ с нулевым средним: $\langle B_k(t,\tau)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} B_k(t,\tau)d\tau = 0$. Предположим ещё, что матрица $A_0(t)$ имеет различные характеристические корни $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t), t\in[0,T]$.

Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений системы (10) ищется в виде

$$X(t) = \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\omega^{-\frac{j}{2}}\left(P_j(t) + H_j(t,\omega t)\right)\right]e^{Q(t,\omega)},$$

где $P_j(t)$ и $H_j(t,\tau)$ – квадратные матрицы порядка n, причём $H_j(t,\tau)$ – 2π-периодичны по τ с нулевым средним, $P_0(t)$ – невырождены, диагональные элементы матриц $P_0^{-1}(0)P_j(0), j\ge 1$, равны нулю, $Q(t,\omega) = \omega^{\frac{1}{2}}Q_{-1}(t) + Q_0(t), Q_{-1}(t) = \left(q_{ij}^{(-1)}(t)\right)$ и $Q_0(t) = \left(q_{ij}^{(0)}(t)\right)$ – диагональные матрицы порядка n, удовлетворяющие условиям $Q_{-1}(0) = Q_0(0) = 0$.

Введем обозначения:

$$P^l(t,\omega) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{l} \omega^{-\frac{j}{2}} P_j(t),$$

$$H^l(t,\tau,\omega) = \sum_{j=1}^{l} \omega^{-\frac{j}{2}} H_j(t,\tau);$$

p_l^k *и* h_l^k *—* k*-ые столбцы матриц* P^l *и* H^l *соответственно;*

$$\varphi_l^k = (p_l^k + h_l^k);$$

q_k *—* k*-ый диагональный элемент матрицы* Q*. Имеет место следующий результат*

Теорема 2.1. *Существует* $\omega_0 > 0$*, такое что при* $\omega > \omega_0$ *для каждого* $k = \overline{1,n}$ *находится решение* φ^k *системы уравнений* (10)*, для которого при всех целых неотрицательных* l *выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^k(t)e^{-q_k} - \varphi_l^k(t)| \leq \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2}}},$$

где $c = c(l)$ *– не зависящая от* ω *константа.При этом столбцы* $\varphi^k, k = \bar{1,n}$*, составляют фундаментальную матрицу решений.*

В заключении этой главы рассматривается построение формальной асимптотики частного решения неоднородной задачи Коши вида

$$\dot{x}(t) = \left[\omega^{\frac{1}{2}} A(t,\omega) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)\right] x(t) + f(t,\omega) + d(t,\omega t,\omega), \tag{11}$$

$$x(0) = x_0, \tag{12}$$

где вектор-функции

$$f(t,\omega) = \sum_{k=-1}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} f_k(t), \quad d(t,\tau,\omega) = \sum_{k=-1}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} d_k(t,\tau), \langle d_k\rangle = 0,$$

m*- натуральное число.*

Элементы вектор-функций $f_k(t)$ *и* $d_k(t,\tau)$ *относятся к тем же классам функций , что и элементы матриц* $A_k(t)$ *и* $B_k(t,\tau)$ *соответственно.*

Асимптотическое разложение решения задачи Коши (11)-(12) *может быть найдено затем в виде:* $Xc + x_r$*, где* X *– асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений однородной системы,* $c = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} c_j, c_j = (c_{j1}, c_{j2}, ...c_{jn})^T$*, где* c_{ji} *– пока ещё неизвестные постоянные.*

Формальная асимптотика частного решения x_r *ищется в виде*

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left[v_j(t) + w_j(t,\omega t)\right], \tag{13}$$

где w_j – 2π-периодические по τ вектор-функции с нулевым средним.

Перейдём к третьей главе.

В первом параграфе этой главы рассматривается нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \omega A(t,\omega)x(t) + \omega^{\frac{1}{2}} B(t,\omega t,\omega)x(t), \omega >> 1, \tag{14}$$

где

$$A(t,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} A_k(t), \quad B(t,\tau,\omega) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t,\tau),$$

в случае когда характеристические числа матрицы A_0 удовлетворяют условию $\lambda_k - \lambda_j \neq si, s \in Z$.

Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений системы (14) построено в виде

$$X(t) = \left[P_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} \left(P_j(t) + H_j(t,\omega t) \right) \right] e^{Q(t,\omega)},$$

где

$$Q(t,\omega) = \omega Q_{-2}(t) + \omega^{\frac{1}{2}} Q_{-1}(t) + Q_0(t), Q_k(t) = (q_{ij}^k(t)), k = -2,-1,0,$$

– диагональные матрицы, удовлетворяющие условиям $Q_k(0) = 0$, матрицы $P_0(t)$ - невырождены, диагональные элементы матриц $S_0(t) = P_0^{-1}(0)P_j(0)$ -нулевые, а матрицы $H_j(t,\tau), j = 1,2,...,$ являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним.

При обозначениях, аналогичных введённым во второй главе, имеет место следующий результат.

Теорема 3.1. *Существует $\omega_0 > 0$, такое что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k = \overline{1,n}$ находится решение φ^k системы уравнений (14), для которого при всех целых неотрицательных l выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^k e^{-q_k} - \varphi_l^k| \leq \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2}}},$$

где $c = c(l)$ – не зависящая от ω константа.

В §2 этой главы рассматривается система вида (14) в случае, когда матрица A_0 имеет единственный характеристический корень кратности n.

Таким образом, здесь рассматривается нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \omega \left[\mu(t)E + J_1 \right] x + \omega^{\frac{1}{2}} \left[A(t) + B(t,\omega t) \right] x, \omega >> 1. \tag{15}$$

Здесь $\mu(t), t \in [0,T],$ – непрерывная комплекснозначная функция, A и B – квадратные матрицы порядка m с комплексными, вообще говоря, *коэффициентами, E – единичная матрица, J_1 – первый единичный косой ряд (так что матрица в скобках при ω в (15) – верхняя жорданова клетка порядка m с характеристическим числом $\mu(t)$). Элементы матриц A и B определены и непрерывны на множествах $t \in [0,T]$ и $(t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty)$ соответственно. Матрица $B(t,\tau)$ является 2π-периодической по τ с нулевым средним:*

$$\langle B(t,\tau)\rangle := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} B(t,\tau)d\tau = 0.$$

Фундаментальную матрицу решений системы (15) *представим в виде (аналог формулы Эвельсона Р.Л. – ДУ, 2011)*

$$X = \Lambda(\omega)\left(U(\omega,t) + \omega^{-\beta}V(\omega,t,\omega t)\right) \times e^{\int\limits_0^t (\omega\mu(s)E + \omega^{\alpha}\Phi)ds},$$

где Λ, U, V и Φ – искомые матрицы, причём Λ, Φ – диагональные, а элементами матрицы V являются 2π-периодические по последнему аргументу $\tau = \omega t$ функции с нулевыми средними, α и β – искомые положительные числа.

Справедлив следующий результат.

Введём следующие обозначения:

$$U^l(t,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} U_j(t),$$

$$V^l(t,\tau,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} V_j(t,\tau),$$

$$\Phi^l(t,\tau,\omega) = \sum_{j=0}^{l} \omega^{-\frac{j}{2m}} \Phi_j(t,\tau),$$

где $l \in N$ или $l = \infty, U^\infty \equiv U, V^\infty \equiv V$; u_l^k и v_l^k – k-тые столбцы матриц U^l и V^l соответственно, $q_k = \int\limits_0^t \left(\omega\mu(s) + \omega^{\frac{2m-1}{2m}}\lambda_k\right) ds$, где функции λ_k определяются посредством матрицы A, $\varphi_l^k(t) = \left(u_l^k + \omega^{-\frac{1}{2m}} v_l^k\right)$.

Теорема 3.2 *Существует $\omega_0 > 0$, такое что при $\omega > \omega_0$ для каждого $k = \overline{1,m}$ найдётся решение φ^k системы уравнений (15), для которого при всех целых неотрицательных l выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi^k(t)e^{-q_k} - \varphi_l^k(t)| \le \frac{c}{\omega^{\frac{l+1}{2m}}},$$

где $c = c(l)$ – не зависящая от ω константа.

Список литературы

[1] *Власова Е. В., Левенштам В. Б.. Асимптотика решения дифференциального уравнения второго порядка с большим высокочастотным слагаемым // Тезисы докладов международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология"посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, 17 - 22 июня 2008 года, 112 С.*

[2] *Власова Е. В., Левенштам В. Б.. Асимптотический анализ линейных систем дифференциальных уравнений с большим параметром // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, Абрау-Дюрсо, база отдыха ЮФУ "Лиманчик 9-15 сентября 2008 года.*

[3] *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б. Асимптотический анализ некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с большим параметром // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2009, Т.49, №12, с. 1-13*

[4] *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б. Асимптотика решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с большими слагаемыми // Сибирский математический журнал. 2010, Т.51, №1, с. 74-89*

[5] *Крутенко Е. В. Асимптотическое интегрирование линейных неоднородных уравнений второго порядка с большим параметром // Труды научной школы И.Б. Симоненко, Ростов-на-Дону, 2010 год, 126-136 С.*

[6] *Крутенко Е. В. Асимптотическое интегрирование линейных неоднородных уравнений второго порядка с большим параметром // Сборник тезисов Крымской Осенней Математической Школы-Симпозиума (КРОМШ-2010), Украина, Крым, Ласпи-Батилиман, 17-29 сентября 2010 года.*

[7] *Крутенко Е. В. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Высокочастотные асимптотики //Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2012, №6, с.31-33.*

[8] *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование системы линейных дифференциальных уравнений с высокочастотными членами и старшим матричным коэффициентом - жордановой клеткой // Экологический вестник научногых центров ЧЭС. 2013, №1, с. 47-53.*