Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Южный Федеральный Университет"

На правах рукописи

НАЗАРОВ Артур Карапетович

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЗАДАЧ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Левенштам В.Б.

Ростов-на-Дону — 2017 г.

Содержание

Введение

В диссертационной работе рассматриваются некоторые асимптотические задачи для гиперболических и параболических систем дифференциальных уравнений в частных производных с любым числом n пространственных переменных, содержащих осциллирующие по времени с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые. При этом амплитуды некоторых слагаемых большие — пропорциональны $\sqrt{\omega}$. Такие слагаемые называются большими высокочастотными. Для указанных задач применен и обоснован метод усреднения, который называют еще методом усреднения Крылова-Боголюбова, а также разработаны и обоснованы эффективные алгоритмы построения полных асимптотик решений (в классической теории метода усреднения частичные суммы асимптотик называют старшими приближениями).

Фундамент классической математической теории метода усреднения построен Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым (см., например, [1], [2], [3]). В дальнейшем теория Крылова - Боголюбова была распространена на новые классы не только обыкновенных дифференциальных уравнений, но и уравнений в частных производных. Результаты для обыкновенных дифференциальных уравнений изложены в целом ряде известных монографий: Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского [4], В.М. Волосова и Б.И. Моргунова [6], А.Н. Филатова [7], В.Ф. Журавлева и Д.М. Климова [8] и других авторов. С некоторыми результатами, относящимися к уравнениям с частными производными, можно познакомиться по монографиям Ю.А. Митропольского [5], И.Б. Симоненко [16] и другим. Отметим еще близкие к диссертационной теме работы Г.П. Хомы [9], [10] по гиперболическим системам, а также исследования по параболическим уравнениям и системам С.Д. Эйдельмана и З.Ф. Сирченко [12], Р.З. Хасьминского [11], И.Б. Симоненко [13]-[15], В.Б. Левенштама [21]-[27]. В работах [9]-[15], [21]-[27] представлены уравнения, содержащие быстро осциллирующие по времени слагаемые, амплитуды которых равномерно относительно $\omega \gg 1$ ограничены. Последнее обстоятельство и представляет существенное отличие этих систем от рассматриваемых в диссертации.

Родоначальницей задач об усреднении дифференциальных уравнений, содержащих высокочастотные слагаемые с большими амплитудами, является задача о перевернутом маятнике с быстро осциллирующей точкой подвеса, исследованная Н.Н. Боголюбовым [2] и П.Л. Капицей [17].

В 1991г. В.И. Юдович на своем семинаре в Ростовском государственном университете (ныне ЮФУ) приступил к развитию теории метода усреднения для дифференциальных уравнений, содержащих высокочастотные слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты (большие высокочастотные слагаемые). Он впервые рассмотрел отдельные классы эволюционных дифференциальных уравнений первого и второго порядков по времени, содержащих осциллирующие с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, пропорциональные $\sqrt{\omega}$ и ω соответственно. Следует отметить, что результаты В.И. Юдовича (см., например, [18]-[20]) носят в основном формальный характер, т.е. получены без строгого обоснования. Подробный текст основной части этих результатов см. в [20]. Позже В.Б. Левенштам со своими учениками, под влиянием лекций и работ В. И. Юдовича, также стал заниматься аналогичными задачами (см., например, [28]-[30]). При этом все проводимые исследования сопровождались математическим обоснованием. Часть этих исследований, к которым относятся и результаты для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, полученных совместно с соискателем, опубликована в монографии [31].

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 46 источников. Общий объем диссертации 123 страниц.

Глава 1 содержит 5 параграфов. В §1.1 доказана теорема об усреднении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми, которая обобщает теорему 1 [32]. Этот результат является вспомогательным и используется в последующих параграфах. Сформулируем его.

На множестве $\Omega = \{(x,t,\tau)\colon x = (x_1,\dots,x_n)^* \in D,\ t \in [0,T],\ \tau \in [0,+\infty)\}$[1], где D — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$,$T > 0$, рассматривается зависящая от большого параметра ω задача Коши для системы n нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t), t \in [0,T], \\ &x(t_0) = x^0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $t_0 \in [0,T]$, $x^0 \in D$. Здесь $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ — вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Предполагается, что

1) компоненты $f_i(x,t,\tau)$ и $\varphi_i(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ вектор-функций $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ вместе с их частными производными

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,t,\tau), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x,t,\tau), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t,\tau), \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k}(x,t,\tau)$$

[1]Символ $*$ означает операцию транспонирования

$(1 \leqslant i, j, k \leqslant n)$ определены и непрерывны на множестве Ω;

2) компоненты вектор-функций $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$,

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau) \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta)\, d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на Ω;

3) производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x,t,\tau)$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ удовлетворяют на множестве Ω равномерному условию Липшица по x, т. е. существует такая постоянная $L > 0$, что при всех $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0,T]$ и $\tau \in [0,+\infty)$ выполняются неравенства[1]

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_2,t,\tau) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,t,\tau) \right| \leqslant L|x_2 - x_1|$$

и аналогичные неравенства для $\partial\varphi_i/\partial x_j$ и $\partial\varphi_i/\partial t$;

4) компоненты вектор-функций $f(x,t,\tau)$ и $\chi(x,t,\tau)$ равномерно на множестве Ω непрерывны по $t \in [0,T]$, т. е. существует функция $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ такая, что $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t) = 0$ и при всех $x \in D$, $t_1, t_2 \in [0,T]$, $\tau \in [0,+\infty)$ справедливы оценки

$$|f_i(x,t_2,\tau) - f_i(x,t_1,\tau)| < \gamma(|t_2 - t_1|),$$

$$|\chi_i(x,t_2,\tau) - \chi_i(x,t_1,\tau)| < \gamma(|t_2 - t_1|), \quad 1 \leqslant i \leqslant n;$$

5) существует такая вектор-функция F, определенная на множестве $D \times [0,T]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$

$$F(x,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N \bigl(f(x,t,\tau) + \chi(x,t,\tau)\bigr)\, d\tau;$$

[1] Ниже символом $|a|$ для $a \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать какую-либо норму векторов пространства $\mathbb{R}^n$.

6) для всех $(x^0, t_0) \in D \times [0, T]$ усредненная задача

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t), \;\; t \in [0, T],$$
$$y(t_0) = x^0$$

имеет решение $\overset{\circ}{y}(t) \equiv \overset{\circ}{y}(x^0, t_0, t)$ со значениями в D;

7) равномерно относительно $(y, t) \in D \times [0, T]$ существуют пределы:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \varphi_i(y, t, \tau)\, d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y, t, \tau)\, d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(y, t, \tau)\, d\tau = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

При указанных условиях доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для любого замкнутого подмножества D_1 области D и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\omega_0 > 0$, что для произвольной точки $(x^0, t_0) \in D_1 \times [0, T]$ и произвольного $\omega > \omega_0$ существует единственное решение $x_\omega(t)$ задачи (0.1), и при этом для всех $t \in [0, T]$ справедлива оценка*

$$|x_\omega(t) - \overset{\circ}{y}(t)| < \varepsilon.$$

В §1.2 описан и обоснован метод усреднения для систем m дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с любым числом $n + 1$ независимых переменных, содержащих осциллирующие по времени с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, среди которых имеются большие — пропорциональные $\sqrt{\omega}$ — с нулевым средним. Приведем формулировку соответствующего результата.

В параллелепипеде $\Pi_0 = D_0 \times [0,T]$, где D_0 — любой открытый ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и $T > 0$, рассматривается зависящая от большого параметра ω задача

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\mu_j(x,t,\omega t)\right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ = f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \end{gathered} \tag{0.2}$$

$$u(x,0) = g(x), \tag{0.3}$$

где $t \in [0,T]$, $x = (x_1, ..., x_n)^* \in D_0$, $\lambda_j(x,t,\tau)$, $\mu_j(x,t,\tau)$, $f_i(x,t,\tau,u)$, $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ — известные функции $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$, $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$, u — искомая вектор-функция в $\mathbb{R}^m$, компоненты u_i которой зависят от переменных x и t.

Решение $u(x,t)$ задачи (0.2),(0.3) в Π_0 по определению удовлетворяет системе (0.2) в каждой точке $(x,t) = (\xi,\theta) \in \Pi_0$ и начальному условию (0.3) в точке $(x,0)$, в которую приходит проекция характеристики (0.2), выпущенная из точки (ξ,θ). В соответствии с этим зафиксируем произвольную точку $(x,t) = (\xi,\theta) \in \Pi_0$. Чтобы определить значение вектор-фунции $u(x,t)$ в этой точке, проведем через (ξ,θ) характеристику (проекцию характеристики) $x_\omega(t)$, которая для любого $\omega > 0$ является решением системы

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \lambda(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\,\mu\,(x,t,\omega t), \quad t \in [0,T], \\ &x(\theta) = \xi. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать такое $\omega_0 \gg 1$, что все характеристики $x_\omega(t)$ в силу предыдущей теоремы пересекут гиперплоскость $t = 0$ в точках $\overset{\circ}{x} = x_\omega(0)$, принадлежащих некоторому открытому параллелепипеду $D^0 \subset$

$\mathbb{R}^n$ (здесь $D_0 \subset D^0$). Рассмотрим задачу Коши, определяющую решение (0.2),(0.3) вдоль характеристики $x_\omega(t)$ (см. рис. 1):

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = f(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\,\varphi(x,t,\omega t,u), \quad t \in [0,T],\\
&\frac{dx}{dt} = \lambda(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\,\mu(x,t,\omega t), \quad t \in [0,T],\\
&x(0) = \overset{\circ}{x},\\
&u(0) = g(\overset{\circ}{x}).
\end{aligned}$$

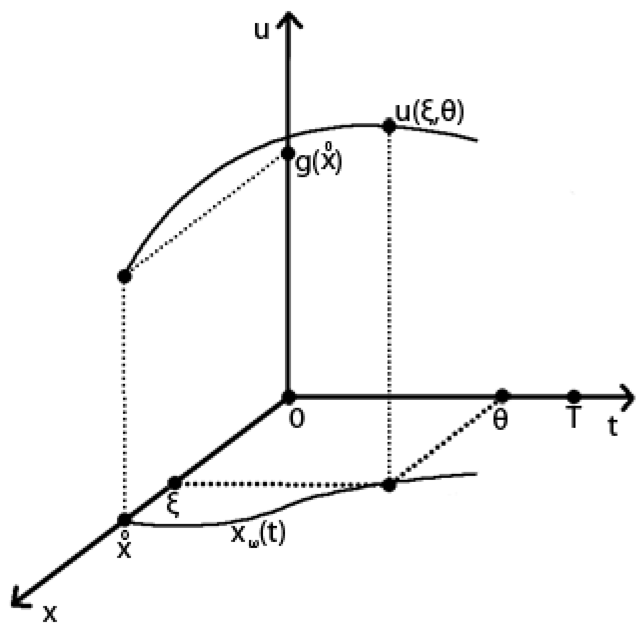

Рис. 1: Случай n=1, m=1

Решение данной задачи $u(t) = u(x_\omega(t),t)$ при $t = \theta$ будет решением $u(x,t)$ системы (0.2),(0.3) в точке $(x,t) = (\xi,\theta)$, т.е. $u(\xi,\theta) = u(x_\omega(\theta),\theta) = u(\theta)$. Таким образом, в силу произвольности выбора точки $(\xi,\theta) \in \Pi_0$ определим значение вектор-фунции $u(x,t)$ на всем множестве Π_0.

Предполагается, что выполняются следующие условия, в которых U_0 — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^m$, D и U — любые ограниченные параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $\Omega = \Pi \times [0, +\infty)$, $G = \Omega \times U_0$, $\Omega_1 = D \times [0, T] \times [0, +\infty)$, $G_1 = \Omega_1 \times U_0$:

1) компоненты $\lambda_j(x, t, \tau)$ и $\mu_j(x, t, \tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ вектор-функций $\lambda(x, t, \tau)$ и $\mu(x, t, \tau)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2 \mu_j}{\partial x_k \partial x_\ell}(x, t, \tau)$ $(1 \leqslant j, k, \ell \leqslant n)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве Ω;

2) компоненты $f_i(x, t, \tau, u)$ и $\varphi_i(x, t, \tau, u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ вектор-функций $f(x, t, \tau, u)$ и $\varphi(x, t, \tau, u)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_j \partial u_k}(x, t, \tau, u)$, $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_j \partial x_\ell}(x, t, \tau, u)$, $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\ell \partial x_r}(x, t, \tau, u)$, $(1 \leqslant i, j, k \leqslant m$, $1 \leqslant \ell, r \leqslant n)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве G;

3) компоненты вектор-функций $\lambda(x, t, \tau), \mu(x, t, \tau)$,

$$\chi(x, t, \tau) \equiv \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, t, \tau) \int_0^\tau \mu(x, t, \theta)\, d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial \lambda}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, t, \tau)$ равномерно ограничены на множестве Ω_1;

4) компоненты вектор-функций $f(x, t, \tau, u)$, $\varphi(x, t, \tau, u)$,

$$\psi(x, t, \tau, u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, t, \tau, u) \int_0^\tau \varphi(x, t, \theta, u)\, d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau, u) \int_0^\tau \mu(x, t, \theta)\, d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial f}{\partial u}(x, t, \tau, u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau, u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, t, \tau, u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau, u)$ равномерно ограничены на множестве G_1;

5) производные $\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \mu_j}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \mu_j}{\partial t}$ $(1 \leqslant j, k \leqslant n)$ удовлетворяют условиям Липшица по x с постоянной, не зависящей от $(x, t, \tau) \in \Omega_1$;

6) производные $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ удовлетворяют условиям Липшица по x, u с постоянной, не зависящей от $(x, t, \tau, u) \in G_1$;

7) функции $\lambda_j(x, t, \tau)$ и $\chi_j(x, t, \tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ непрерывны по $t \in [0, T]$ равномерно относительно $(x, t, \tau) \in \Omega_1$;

8) функции $f_i(x, t, \tau, u)$ и $\varphi_i(x, t, \tau, u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ непрерывны по $t \in [0, T]$ равномерно относительно $(x, t, \tau, u) \in G_1$;

9) равномерно относительно $(x, t) \in D \times [0, T]$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \mu_j(x, t, \tau)\, d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k}(x, t, \tau)\, d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_j}{\partial t}(x, t, \tau)\, d\tau = 0,$$

$1 \leqslant j, k \leqslant n$;

10) равномерно относительно $(x, t, u) \in D \times [0, T] \times U$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \varphi_i(x, t, \tau, u)\, d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(x, t, \tau, u)\, d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x, t, \tau, u)\, d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x, t, \tau, u)\, d\tau = 0,$$

$1 \leqslant i, j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

11) существует такая вектор-функция $\Lambda(x, t)$, определенная на Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x, t) \in D \times [0, T]$ справедливы предельные равенства для ее компонент Λ_j:

$$\Lambda_j(x, t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (\lambda_j(x, t, \tau) + \chi_j(x, t, \tau))\, d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

12) существует такая вектор-функция $F(x,t,u)$, определенная на множестве $\Pi \times U_0$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, что равномерно относительно $(x,t,u) \in D \times [0,T] \times U_0$ справедливы предельные равенства для ее компонент F_j:

$$F_j(x,t,u) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (f_j(x,t,\tau,u) + \psi_j(x,t,\tau,u))\, d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant m;$$

13) для любого начального условия $(\overset{\circ}{y}, t_0) \in \Pi$ задача

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(y,t), \quad y(t_0) = \overset{\circ}{y}$$

имеет на участке $t \in [0,T]$ решение $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^*$.

Наряду с возмущенной задачей (0.2),(0.3) в параллелепипеде Π_0 рассматривается во всем слое Π усредненная задача

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j(x,t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = F_i(x,t,v), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ &v(x,t)\Big|_{t=0} = g(x), \end{aligned}$$

относительно которой предполагается следующее:

14) данная задача имеет решение $v(x,t) \subset U_0$.

Доказано, что при указанных выше предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого открытого ограниченного параллелепипеда D_0 в $\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ существует единственное решение $u_\omega(x,t)$ задачи (0.2),(0.3) в Π_0, и для любых $(x,t) \in \Pi_0$ выполняется неравенство*

$$|u_\omega(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon.$$

В §1.3 рассматриваются системы того же вида, что и в §1.2, со следующим дополнительным ограничением: их члены периодичны по переменной $\tau = \omega t$ и бесконечно дифференцируемы вместе с начальной вектор-функцией по остальным переменным (см. 15)-17) ниже). Для этих систем разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики решения, который базируется на методе двухмасштабных разложений.

В §1.3 вначале построена формальная асимптотика в виде

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)), \quad (x,t) \in \Pi, \qquad (0.4)$$

частичные суммы которой имеют вид

$$\overset{p}{u}(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{p} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)),$$

где вектор-функции $v^k(x,t,\tau)$ по переменной τ являются l периодическими и обладают нулевым средним:

$$< v^k(x,t,\tau) >\equiv \frac{1}{l}\int_0^l v^k(x,t,\tau)d\tau = 0.$$

Определим два вида задач:

(A) - задача о l-периодическом с нулевым средним решением системы уравнений вида

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = f(\tau),$$

где $f(\tau)$ - известная l-периодическая с нулевым средним вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$;

(B) - задача Коши для системы m линеных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x,t)u + c(x,t), \quad (x,t) \in \Pi,$$

$$u(x,0)=d(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где коэффициенты $a_j(x,t), b(x,t), c(x,t)$ и $d(x)$ известны.

Предполагается, что данные задачи (0.2),(0.3) помимо приведенных выше условий 1)-14) удовлетворяют следующим:

15) вектор-функции $\lambda(x,t,\tau)$ и $\mu(x,t,\tau)$ вместе с их частными производными по (x,t) любого порядка определены и непрерывны на множестве Ω, а также $l(>0)$-периодичны по τ;

16) вектор-функции $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по (x,t,u) любого порядка определены и непрерывны на множестве G, а также l-периодичны по τ;

17) средние вектор-функций $\mu(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ по τ равны нулю:

$$<\mu(x,t,\tau)>\equiv\frac{1}{l}\int\limits_0^l\mu(x,t,\tau)d\tau=0, <\varphi(x,t,\tau,u)>=0.$$

При указанных предположениях доказаны следующие утверждения.

Теорема. *1. Построение любой частичной суммы формальной асимптотики (0.4) решения задачи (0.2),(0.3) в слое* Π *сводится к решению конечного числа линейных задач видов (A) и (B).*

2. Для любого $p=0,1,2,...$ *и любого ограниченного параллелепипеда* $\Pi_0=D_0\times[0,T], D_0\subset\mathbb{R}^n$, *найдутся такие положительные постоянные* c_p *и* ω_p, *что при* $\omega>\omega_p$ *для решения* $u_\omega(x,t)$ *задачи Коши (0.2),(0.3) равномерно в* Π_0 *выполняется оценка*

$$|u_\omega(x,t)-\overset{p}{u}(x,t)|\leqslant c_p\omega^{-(p+1)/2}.$$

В §1.4 обобщен результат из §1.2 на случай, когда коэффициенты при производных могут зависеть от номера уравнения.

Рассматривается задача Коши для системы m уравнений первого порядка, зависящих от большого параметра ω:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_{ij}(x,t,\omega t)+\sqrt{\omega}\mu_{ij}(x,t,\omega t)\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_j}= \\
=f_i(x,t,\omega t,u)+\sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u),\quad 1\leqslant i\leqslant m, \\
u(x,0)=g(x),
\end{gathered}\tag{0.5}$$

где $t\in[0,T]$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^*\in D_0$, $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x\in\mathbb{R}^n$ вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$, $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)^*$ — искомая вектор-функция, компоненты которой зависят от переменных x и t.

Предполагается, что данные задачи (0.5) удовлетворяют следующим условиям.

Пусть U_0 — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^m$, D — любой ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $\Pi=\mathbb{R}^n\times[0,T]$, $\Omega=\Pi\times[0,+\infty)$, $G=\Omega\times U_0$, $\Omega_1=D\times[0,T]\times[0,+\infty)$, $G_1=\Omega_1\times U_0$. Тогда:

1) компоненты $\lambda_{ij}(x,t,\tau)$ и $\mu_{ij}(x,t,\tau)$ $(1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant m)$ вектор-функций $\lambda_i(x,t,\tau)$ и $\mu_i(x,t,\tau)(1\leqslant i\leqslant m)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2\mu_{ij}}{\partial x_k\partial x_\ell}(x,t,\tau)$ $(1\leqslant j,k,\ell\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant m)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве Ω;

2) компоненты $f_i(x,t,\tau,u)$ и $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ вектор-функций $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial u_j\partial u_k}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial u_j\partial x_\ell}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\ell\partial x_r}(x,t,\tau,u)$, $(1\leqslant i,j,k\leqslant m,\ 1\leqslant \ell,r\leqslant n)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве G;

3) компоненты вектор-функций $\lambda_i(x,t,\tau), \mu_i(x,t,\tau)$,

$$\chi_i(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial \mu_i}{\partial x}(x,t,\tau) \int\limits_0^\tau \mu_i(x,t,\theta)\,d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \mu_i}{\partial x}(x,t,\tau) (1 \leqslant i \leqslant m)$ равномерно ограничены на множестве Ω_1;

4) компоненты вектор-функций $f(x,t,\tau,u)$, $\varphi(x,t,\tau,u)$,

$$\psi_i(x,t,\tau,u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u) \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u)\,d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau,u) \int\limits_0^\tau \mu_i(x,t,\theta)\,d\theta$$

$(1 \leqslant i \leqslant m)$ и матриц-функций $\frac{\partial f}{\partial u}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau,u)$,$\frac{\partial \psi_i}{\partial u}(x,t,\tau,u)$,$\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ равномерно ограничены на множестве G_1;

5) производные $\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial t}$ $(1 \leqslant j,k \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ удовлетворяют условиям Липшица по x с постоянной, не зависящей от $(x,t,\tau) \in \Omega_1$;

6) производные $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ удовлетворяют условиям Липшица по x, u с постоянной, не зависящей от $(x,t,\tau,u) \in G_1$;

7) функции $\lambda_{ij}(x,t,\tau)$ и $\chi_{ij}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ непрерывны по $t \in [0,T]$ равномерно относительно $(x,t,\tau) \in \Omega_1$;

8) функции $f_i(x,t,\tau,u)$ и $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ непрерывны по $t \in [0,T]$ равномерно относительно $(x,t,\tau,u) \in G_1$;

9) равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \mu_{ij}(x,t,\tau)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_k}(x,t,\tau)\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial t}(x,t,\tau)\,d\tau = 0,$$

$1 \leqslant j, k \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m;$

10) равномерно относительно $(x,t,u) \in D \times [0,T] \times U$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \varphi_i(x,t,\tau,u)\, d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(x,t,\tau,u)\, d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x,t,\tau,u)\, d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t,\tau,u)\, d\tau = 0,$$

$1 \leqslant i, j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

11) существуют такие вектор-функции $\Lambda_i(x,t)$, определенные на Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ справедливы предельные равенства для ее компонент Λ_{ij}:

$$\Lambda_{ij}(x,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (\lambda_{ij}(x,t,\tau) + \chi_{ij}(x,t,\tau))\, d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m;$$

12) существует такая вектор-функция $F(x,t,u)$, определенная на множестве $\Pi \times U_0$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, что для ее компонент F_i справедливы предельные равенства:

$$F_i(x,t,u) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (f_i(x,t,\tau,u) + \psi_i(x,t,\tau,u))\, d\tau, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

равномерно относительно $(x,t,u) \in D \times [0,T] \times U_0$;

13) для любого начального условия $(\overset{\circ}{y}, t_0) \in \Pi$ и любого i такого, что $1 \leqslant i \leqslant m$, задача

$$\frac{dy^i}{dt} = \Lambda_i(y^i, t), \quad y^i(t_0) = \overset{\circ}{y}$$

имеет на участке $t \in [0,T]$ решение $y^i(t)$.

Наряду с возмущенной задачей (0.5) в параллелепипеде $\Pi_0 = D_0 \times [0, T]$ рассматривается во всем слое Π усредненная задача

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ij}(x,t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = F_i(x,t,v), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\
&v(x,t)\big|_{t=0} = g(x),
\end{aligned}$$

относительно которой предполагается следующее:

14) данная задача имеет решение $v(x,t) \subset U_0$.

При указанных выше предположениях доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для любого открытого ограниченного параллелепипеда D_0 в $\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ существует единственное решение $u_\omega(x,t)$ задачи (0.5) в Π_0, и для любых $(x,t) \in \Pi_0$ выполняется неравенство*

$$|u_\omega(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon.$$

В §1.5 построена с обоснованием полная асимптотика решений в случае, когда коэффициенты при производных могут зависеть от номера уравнения. Однако в общем случае с помощью разработанного в §1.3 алгоритма асимптотику построить не удается. Поэтому в этом параграфе система (0.5) рассматривается при выполнении следующего дополнительного предположения, которое заключается в том, что большие коэффициенты $\sqrt{\omega}\mu_{ij}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ при производных не зависят от номера уравнения:

15) функции $\mu_{ij}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ удовлетворяют на мно-

жестве Ω условию:

$$\mu_{ij}(x,t,\tau) \equiv \mu_{kj}(x,t,\tau), \quad 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i,k \leqslant m.$$

Другими словами, в §1.5 вместо задачи (0.5) рассматривается система вида:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \big[\lambda_{ij}(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\eta_j(x,t,\omega t)\big] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ &= f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ &u(x,0) = g(x), \end{aligned} \tag{0.6}$$

где $x \in D_0$, $t \in [0,T]$, $\eta_j(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ - компоненты вектор-функции $\eta(x,t,\tau)$, определенной на множестве Ω следующим образом:

$$\eta(x,t,\tau) \equiv \mu_i(x,t,\tau), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Предполагается, что данные задачи (0.6) помимо приведенных выше из §1.4 условий 1)-14) и условия 15) удовлетворяют следующим:

16) вектор-функции $\lambda_i(x,t,\tau)$ и $\eta(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ вместе с их частными производными по (x,t) любого порядка определены и непрерывны на множестве Ω, а также $l(>0)$-периодичны по τ;

17) вектор-функции $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по (x,t,u) любого порядка определены и непрерывны на множестве G, а также l-периодичны по τ;

18) средние вектор-функций $\eta(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ по τ равны нулю:

$$< \eta(x,t,\tau) >\equiv \frac{1}{l}\int\limits_0^l \eta(x,t,\tau)d\tau = 0,$$

$$< \varphi(x,t,\tau,u) >= 0.$$

В §1.5 вначале построена формальная асимптотика в виде

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)), \quad (x,t) \in \Pi, \qquad (0.7)$$

частичные суммы которой имеют вид

$$\overset{p}{u}(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{p} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)),$$

где вектор-функции $v^k(x,t,\tau)$ по переменной τ являются l периодическими и обладают нулевым средним:

$$< v^k(x,t,\tau) > \equiv \frac{1}{l}\int_0^l v^k(x,t,\tau)d\tau = 0.$$

Определим два вида задач:

(A) - задача о l-периодическом с нулевым средним решением системы уравнений вида

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = f(\tau),$$

где $f(\tau)$ - известная l-периодическая с нулевым средним вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$;

(B) - задача Коши для системы m линеных уравнений вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^{m} b_{ir}(x,t)u_r + c_i(x,t), \quad (x,t) \in \Pi,$$

$$u_i(x,0) = d_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

где коэффициенты $a_{ij}(x,t), b_{ir}(x,t), c_i(x,t), d_i(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i,r \leqslant m)$ известны.

При указанных выше предположениях доказаны следующие утверждения.

Теорема. *1. Построение любой частичной суммы формальной асимптотики (0.7) решения задачи (0.6) в слое* Π *сводится к решению конечного числа линейных задач видов (A) и (B).*

2. Для любого $p = 0, 1, 2, \ldots$ *и любого ограниченного параллелепипеда* $\Pi_0 = D_0 \times [0, T], D_0 \subset \mathbb{R}^n$, *найдутся такие положительные постоянные* c_p *и* ω_p, *что при* $\omega > \omega_p$ *для решения* $u_\omega(x,t)$ *задачи Коши (0.6) равномерно в* Π_0 *выполняется оценка*

$$|u_\omega(x,t) - \overset{p}{u}(x,t)| \leqslant c_p \omega^{-(p+1)/2}.$$

Отметим еще раз работы Г.П. Хомы [9], [10]. В них метод усреднения обоснован для гиперболических систем с двумя переменными, не содержащих больших высокочастотных слагаемых. Вопрос о построении полной асимптотики решения (даже о частичной) в этих работах не рассматривался.

Перейдем к главе 2. Она содержит один параграф (§2.1), в котором построена с обоснованием полная асимптотика периодического по времени решения первой краевой задачи для системы параболических уравнений. Поскольку главный член асимптотики представлен решением усредненной задачи, то здесь также обоснован метод усреднения.

В цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, где Ω - ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с C^∞ - гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается зависящая от большого параметра ω задача о $\dfrac{2\pi}{\omega}$ -периодических по времени t решениях системы параболических уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \\
&+ \sum_{0\le|s|\le m} f_s(x,u)e^{is\omega t} + \sqrt{\omega} \sum_{0<|s|\le m} \varphi_s(x,u)e^{is\omega t}, \qquad (0.8) \\
u|_{\Gamma} &= 0,
\end{aligned}
$$

где $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}$, $a_{ij}(x)$ — вещественные числа, $L_j(x)$ — квадратные матрицы порядка N с вещественными элементами, $f_s(x,u)$ и $\varphi_s(x,u)$ — N-мерные векторы, удовлетворяющие условиям:

$$
\overline{f}_s(x,u) = f_{-s}(x,u), \quad \overline{\varphi}_s(x,u) = \varphi_{-s}(x,u),
$$
$$
(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N.
$$

Чертой сверху мы обозначаем операцию комплексного сопряжения.

Функции a_{ij}, элементы матриц-функций L_j и компоненты вектор-функций f_s и φ_s бесконечно дифференцируемы по своим аргументам и, кроме того, выполнены условия:

$$
a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \xi_i\xi_j > \alpha \sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2,
$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha > 0$ не зависит от ξ.

Наряду с возмущенной задачей (0.8) рассмотрим следующую задачу, которую будем называть усредненной:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\frac{\partial v}{\partial x_j} + \\
&+ f_0(x,v) + \sum_{1\le|s|\le m} is^{-1}\, \frac{\partial \varphi_s(x,v)}{\partial v}\, \varphi_{-s}(x,v), \qquad (0.9) \\
v|_{\Gamma} &= 0,
\end{aligned}
$$

где $\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial \varphi_{s_i}}{\partial v_j} \right)_{i,j=1}^{N}$ - матрица Якоби.

Предполагается, что эта задача имеет вещественное невырожденное стационарное решение $u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),\ \alpha \in (0,1)$. Невырожденность решения $u_0(x)$ означает, что эллиптическая задача

$$
\begin{aligned}
& L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \\
& + \frac{\partial f_0(x, u_0(x))}{\partial u} u + \sum_{1 \le |s| \le m} i s^{-1}\, \frac{\partial \varphi_s(x, u_0(x))}{\partial u} \times \\
& \times \frac{\partial \varphi_{-s}(x, u_0(x))}{\partial u} u + \sum_{1 \le |s| \le m} i s^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_s(x, u_0(x))}{\partial u^2} \times \\
& \times \varphi_{-s}(x, u_0(x)) u = \psi(x), \\
& u|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}
\tag{0.10}
$$

в области Ω однозначно разрешима при всех $\psi \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема. *1.Существуют такие положительные числа $\alpha \in (0,1)$, r и ω_0, что при $\omega > \omega_0$ задача (0.8) имеет единственное в шаре $||u - u_0||_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}} \le r$ вещественное $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодическое по времени t решение $u_\omega(x,t)$. Это решение бесконечно дифференцируемо по (x,t) и при всех $k \ge 0$ удовлетворяет неравенству*

$$||u_\omega - u_0||_{C^{k,\frac{k}{2}}} \le c_k\, \omega^{\frac{k-1}{2}},\ \ c_k = const > 0,$$

2. Для любого натурального числа M найдется такое положительное число ω_M, что при $\omega > \omega_M$ эффективно строится вектор-функция $\overset{M}{u}(x,t),\ (x,t) \in Q$, со значениями в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющая при всех $k \ge 0$

оценке

$$|| \; u_\omega - \overset{M}{u} ||_{C^{k,\frac{k}{2}}} \le c(M,k) \;\; \omega^{\frac{k-M-1}{2}},$$

$$c(M,k) = const > 0.$$

Здесь $C^{k,k/2}$ — банахово пространство, которое состоит из вектор-функций $u(x,t), (x,t) \in Q$, для которых определена норма

$$||u||_{C^{k,k/2}} = \sum_{j=0}^{[k]} \sum_{2\mu+|\nu|=j} \sup_{(x,t)\in Q} \left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(x,t) \right| +$$

$$+\delta_k \left(\sum_{2\mu+|\nu|=[k]} \sup_{\substack{(x,t),(y,t)\in Q \\ x\ne y}} \frac{\left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(x,t) - \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(y,t) \right|}{|x-y|^{k-[k]}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{0<k-2\mu-|\nu|<2} \sup_{\substack{(x,t),(x,\tau)\in Q \\ t\ne\tau}} \frac{\left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(x,t) - \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(x,\tau) \right|}{\left|t-\tau\right|^{\frac{k-2\mu-|\nu|}{2}}} \right),$$

где $[k]$ — целая часть k, указанные производные непрерывны в Q и $\delta_k = 0$ при целом k, $\delta_k = 1$ при k нецелом.

Под эффективностью понимается тот факт, что построение каждого приближения $\overset{M}{u}$ сводится к решению конечного числа линейных однозначно разрешимых задач двух видов: вида (A) из §1.5 (см. выше) на оси $t \in \mathbb{R}$ и вида (0.10).

Обоснование метода усреднения для параболических и абстрактных параболических уравнений (рассматриваемые здесь системы относятся к последним) с большими высокочастотными слагаемыми имеется в работе [30]. В [29] построена с обоснованием полная асимптотика периодического по времени решения первой краевой задачи для скалярных параболических уравнений. При этом скалярность существенно использовалась при обосновании асимптотики; конкретнее, при замене переменных с целью уничтожения в уравнении большого слагаемого. В §2.1 данной диссертации для достижения той же цели мы вынуждены действовать иначе, используя аналог (ср. с [14]) классической замены Крылова-Боголюбова [4]. На этом же пути в работе [40], выполненной после выхода нашей работы [35], аналогичные результаты получены для более широкого класса систем.

Теория, изложенная в главах 1 и 2, проиллюстрирована на примерах в главе 3. Глава 3 состоит из 3 параграфов. Так в §3.1 рассматривается задача для гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + (\cos x + \sqrt{\omega}\sin\omega t)\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sqrt{\omega}u_2\cos\omega t,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + \sqrt{\omega}\sin\omega t\frac{\partial u_2}{\partial x} = \sqrt{\omega}u_1\cos\omega t + u_1\sin\omega t + \sin t,\\
&u_1(x,0) = 0,\\
&u_2(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{0.11}$$

В этом параграфе проиллюстрирован алгоритм построения формальной асимптотики решения задачи (0.11) и получены несколько начальных ее членов:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}(\sin\tau - \sin\tau\cos t) + \frac{1}{2\omega}(t-\sin t)\sin\tau + ...,$$
$$u_2(x,t) = 1-\cos t + \frac{1}{2\sqrt{\omega}}(t-\sin t) + \frac{1}{2\omega}(\cos t - 1)\cos^2\tau + ...$$

При этом, согласно результатам главы 1 для любого ограниченного параллелепипеда $\Pi_0 = [a,b]\times[0,T]\subset\mathbb{R}^2$, найдутся такие положительные постоянные c_1 и ω_1, что при $\omega > \omega_1$ для решения $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^*$ задачи Коши (0.11) равномерно в Π_0 выполняются оценки

$$|u_1(x,t) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}(\sin\omega t - \sin\omega t\cos t)| \leqslant \frac{c_1}{\omega},$$

$$|u_2(x,t) - 1 + \cos t - \frac{1}{2\sqrt{\omega}}\,(t - \sin t)\,| \leqslant \frac{c_1}{\omega}.$$

В §3.2 рассматривается задача для параболических систем дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sqrt{\omega} u_2 \sin \omega t + \sin x, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_1 \sin \omega t, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{0.12}$$

В качестве граничных условий рассматривается условие 2π-периодичности с нулевыми средними функций $u_{1,2}$ по x и ставится задача о $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодических по времени t решениях (при такой замене классических однородных условий Дирихле рассуждения §2.1 главы 2 сохраняют силу)

$$\begin{aligned} & u_i(x, t + \frac{2\pi}{\omega}) = u_i(x,t), \\ & u_i(x + 2\pi, t) = u_i(x,t), \\ & < u_i(x,t) >_x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u_i(x,t) dx = 0, \end{aligned} \tag{0.13}$$

где $(x,t) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2.$

В данном параграфе проиллюстрирован алгоритм построения формальной асимптотики решения системы (0.12) с условиями периодичности (0.13) и получены несколько начальных ее членов:

$$u_1(x,t) = \sin x + \frac{\sin x \cos \tau}{4\omega^{3/2}} + ...,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{\sin x \cos \tau}{\omega} + \frac{\sin x \sin \tau}{\omega^2} + ...$$

При этом, согласно результатам главы 2 существуют положительные числа $\alpha \in (0,1)$, r и ω_0, такие что при $\omega > \omega_0$ задача (0.12),(0.13) имеет единственное в шаре $||u - u_0||_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}} \leq r$ вещественное $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодическое по времени t решение $u_\omega(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^*$. Это решение бесконечно дифференцируемо по (x,t) и при всех $\omega > \omega_0$, $k \geq 0$ выполняется оценка

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin x \\ \\ -\dfrac{\sin x \cos \omega t}{\omega} \end{pmatrix} \right\|_{C^{k,\frac{k}{2}}} \leq c_k\, \omega^{\frac{k-3}{2}}, \;\; c_k = const > 0.$$

В §3.3 рассматривается задача для параболических систем дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sqrt{\omega} u_2 \cos \omega t + u_1 u_2 \sin \omega t, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \sqrt{\omega} u_1 \sin x \cos \omega t + \cos x, \end{aligned} \tag{0.14}$$

где $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, с однородными граничными условиями Дирихле:

$$\begin{aligned} u_i(0,t) \; &= 0, \\ u_i(1,t) \; &= 0, i = 1,2. \end{aligned} \tag{0.15}$$

В этом параграфе проиллюстрирован алгоритм построения формальной асимптотики решения системы (0.14) с граничными условиями (0.15) и получены несколько начальных ее членов:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \Bigg(&-\frac{\sin x}{8} - \frac{C_1(x \sin x + 2\cos x)}{8} + \frac{\sin x \cos x}{32} + \frac{x^2}{4} + \frac{C_1 x^3}{6} + \\ &+ \frac{C_1^2 x^4}{24} - C_1(2 \sin x - x \cos x) + \cos x + \frac{x^2}{8} - \frac{\cos^2 x}{8} + C_3 x + C_2 + \\ &+ \sin \tau \, (1 - \cos x + C_1 x) \Bigg) + ..., \end{aligned}$$

$$u_2(x,t) = 1 - \cos x + C_1 x + ...,$$

где C_1, C_2 и C_3 - определенные в ходе построения асимптотики константы.

При этом, в силу главы 2 существуют такие положительные числа $\alpha \in (0,1)$, r и ω_0, что при $\omega > \omega_0$ задача $(0.14), (0.15)$ имеет единственное в шаре $||u-u_0||_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}} \le r$ вещественное $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодическое по времени t решение $u_\omega = (u_1(x,t), u_2(x,t))^*$. Это решение бесконечно дифференцируемо по (x,t) и при всех $\omega > \omega_0$, $k \ge 0$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overset{1}{u}_1(x,t) \\ \\ \overset{1}{u}_2(x,t) \end{pmatrix} \right\|_{C^{k,\frac{k}{2}}} \le c_k\, \omega^{\frac{k-2}{2}}, \quad c_k = const > 0,$$

где

$$\overset{1}{u}_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\Bigg(-\frac{\sin x}{8} - \frac{C_1(x\sin x + 2\cos x)}{8} + \frac{\sin x \cos x}{32} + \frac{x^2}{4} + \frac{C_1 x^3}{6} +$$
$$+ \frac{C_1^2 x^4}{24} - C_1(2\sin x - x\cos x) + \cos x + \frac{x^2}{8} - \frac{\cos^2 x}{8} + C_3 x + C_2 +$$
$$+ \sin\tau\,(1 - \cos x + C_1 x)\Bigg),$$

$$\overset{1}{u}_2(x,t) = 1 - \cos x + C_1 x,$$

C_1, C_2 и C_3 - константы, определенные в ходе построения асимптотики.

Основные результаты диссертации докладывались в Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (п. Абрау-Дюрсо, 2008г.), на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV"(г.Ростов-на-Дону, 2014г.), на Международной научной конференции "VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике"(г.Ростов-на-Дону, 2016г.), а также на семинаре кафедры вычислительной математики и математической физики под руководством М.Ю. Жукова (г.Ростов-на-Дону, ЮФУ, 2016г.) и семинаре "Асимптотические методы в нелинейном анализе" под руководством В.Б. Левенштама (г.Ростов-на-Дону, ЮФУ, 2017г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [33]-[39]. Из них работы [34], [35], [37] соответствуют перечню ВАК для кандидатских диссертаций. Работы [34], [35] выполнены совместно с научным руководителем В.Б. Левенштамом. В них В.Б. Левенштаму принадлежат постановка задачи, выбор методики исследования и общее руководство работой. А.К. Назарову принадлежит реализация этих методик.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук В.Б. Левенштаму за постановку задач, руководство и внимание к работе.

1 Гиперболические системы с большими высокочастотными слагаемыми

1.1 Вспомогательный результат

1°. Пусть D — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $\Omega = \{(x,t,\tau)\colon x = (x_1,\ldots,x_n)^* \in D,\ t \in [0,T],\ \tau \in [0,+\infty)\}$, где $*$ означает операцию транспонирования. Метрику в $\mathbb{R}^n$ выберем в виде: $|x| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. На множестве Ω рассмотрим зависящую от большого параметра ω задачу Коши для системы n нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t),\ t \in [0,T],\\ &x(t_0) = x^0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $t_0 \in [0,T]$, $x^0 \in D$. Здесь $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ — вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) компоненты $f_i(x,t,\tau)$ и $\varphi_i(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ вектор-функций $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ вместе с их частными производными

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,t,\tau), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x,t,\tau), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t,\tau), \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k}(x,t,\tau)$$

$(1 \leqslant i,j,k \leqslant n)$ определены и непрерывны на множестве Ω;

2) компоненты вектор-функций $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$,

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau) \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta)\,d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на Ω;

3) производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x,t,\tau)$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ удовлетворяют на множестве Ω равномерному условию Липшица по x, т. е.

существует такая постоянная $L > 0$, что при всех $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0, T]$ и $\tau \in [0, +\infty)$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_2, t, \tau) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, t, \tau)\right| \leqslant L|x_2 - x_1|$$

и аналогичные неравенства для $\partial\varphi_i/\partial x_j$ и $\partial\varphi_i/\partial t$;

4) компоненты вектор-функций $f(x, t, \tau)$ и $\chi(x, t, \tau)$ равномерно на множестве Ω непрерывны по $t \in [0, T]$, т. е. существует функция $\gamma\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ такая, что $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t) = 0$ и при всех $x \in D$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, $\tau \in [0, +\infty)$ справедливы оценки

$$|f_i(x, t_2, \tau) - f_i(x, t_1, \tau)| < \gamma(|t_2 - t_1|),$$

$$|\chi_i(x, t_2, \tau) - \chi_i(x, t_1, \tau)| < \gamma(|t_2 - t_1|), \quad 1 \leqslant i \leqslant n;$$

5) существует такая вектор-функция F, определенная на множестве $D \times [0, T]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x, t) \in D \times [0, T]$

$$F(x, t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (f(x, t, \tau) + \chi(x, t, \tau))\, d\tau;$$

6) для всех $(x^0, t_0) \in D \times [0, T]$ усредненная задача

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = F(y, t),\ \ t \in [0, T], \\ &y(t_0) = x^0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

имеет решение $\overset{\circ}{y}(t) \equiv \overset{\circ}{y}(x^0, t_0, t)$ со значениями в D;

7) равномерно относительно $(y, t) \in D \times [0, T]$ существуют пределы:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \varphi_i(y, t, \tau)\, d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}(y, t, \tau)\, d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(y,t,\tau)\,d\tau = 0, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

При указанных условиях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого замкнутого подмножества D_1 области D и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\omega_0 > 0$, что для произвольной точки $(x^0, t_0) \in D_1 \times [0,T]$ и произвольного $\omega > \omega_0$ существует единственное решение $x_\omega(t)$ задачи (1.1), и при этом для всех $t \in [0,T]$ справедлива оценка*

$$|x_\omega(t) - \overset{\circ}{y}(t)| < \varepsilon.$$

Данная теорема вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой фиксированной начальной точки $(x^0, t_0) \in D \times [0,T]$ найдется такая величина $\omega_0 = \omega_0(\varepsilon, x^0, t_0) > 0$, что при $\omega > \omega_0$ существует единственное решение $x_\omega(t)$ задачи (1.1), и при этом для всех $t \in [0,T]$ справедлива оценка*

$$|x_\omega(t) - \overset{\circ}{y}(t)| < \varepsilon.$$

Лемма 1 формулировалась ранее без доказательства в работе [32]. Здесь мы излагаем ее с доказательством (см. п. 2°).

Лемма 2. *Пусть множество D_1 — то же, что и в теореме 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ величина $\omega_0(\varepsilon, x^0, t_0)$, фигурирующая в лемме 1, может быть выбрана единой для всех $(x^0, t_0) \in D_1 \times [0,T]$.*

Доказательство леммы 2 изложено в п. 3°.

2°. Доказательству леммы 1 предпошлем следующие две леммы.

Лемма 3 ([43, с. 324]). *Пусть T_1, T_2 — действительные числа и $x_\omega \colon [T_1, T_2] \to \mathbb{R}^n$ — семейство вектор-функций, зависящих от параметра $\omega > 0$. Для того, чтобы равномерно относительно $t \in [T_1, T_2]$ имело место предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty} x_\omega(t) = \overset{\circ}{x}(t)$, где $\overset{\circ}{x} \colon [T_1, T_2] \to \mathbb{R}^n$ — некоторая вектор-функция, необходимо и достаточно, чтобы из каждой последовательности x_{ω_k}, $\omega_k \to \infty$, можно было бы выделить равномерно относительно $t \in [T_1, T_2]$ сходящуюся к $\overset{\circ}{x}(t)$ подпоследовательность.*

Лемма 4. *Пусть вектор-функция $\psi(x,t,\tau)$ определена на множестве Ω и принимает значения в $\mathbb{R}^n$. Допустим, что она ограничена, непрерывна по τ при фиксированных x, t и при некотором $\gamma > 0$ равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ удовлетворяет предельному равенству:*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^\gamma} \int\limits_0^N \psi(x,t,\tau)\, d\tau = 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_0 > 0$ такое, что при $\omega > \omega_0$ для всех $(x,t) \in D \times [0,T]$ выполняется неравенство:

$$\frac{1}{\omega^\gamma} \Big| \int\limits_0^{\omega t} \psi(x,t,\tau)\, d\tau \Big| < \varepsilon.$$

Доказательство леммы 4 несложно и опускается.

Доказательство леммы 1. Поскольку вектор-функция $\overset{\circ}{y}(t)$ по предположению непрерывна, то множество ее значений $P_0 \equiv \{\, \overset{\circ}{y}(t) \big|\ t \in [0,T]\}$ является замкнутым подмножеством области D. Обозначим через δ расстояние между P_0 и границей ∂D области D: $\delta = \min\limits_{\substack{x\in P_0 \\ y\in\partial D}} |x-y|$, и пусть $\delta_0 \in (0,\delta)$. Через D_0 обозначим область в D, содержащую множество P_0 и такую, что расстояние от P_0 до ее границы ∂D_0 равно δ_0. Через S_0 обозначим множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций $y \colon\ [0,T] \to D_0$.

Решение x задачи (1.1) будем искать в виде (замена Крылова–Боголюбова)

$$x(t) = y(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\limits_0^{\omega t} \varphi(y(t), t, \tau)\, d\tau \equiv y(t) + (K_\omega y)(t), \quad y \in S_0. \tag{1.3}$$

Тогда вектор $y(0) \equiv y_\omega(0) \equiv y^0$ удовлетворяет равенству

$$x^0 = y^0 + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\limits_0^{\omega t_0} \varphi(y^0, t_0, \tau)\, d\tau.$$

Обозначим $\frac{\partial}{\partial y}(K_\omega y)(t) = (M_\omega y)(t)$ и на основании леммы 4 будем далее считать значения $\omega > \omega_1$ столь большими, что при всех $t \in [0, T]$ для любой вектор-функции $y \in S_0$ справедлива оценка

$$|(M_\omega y)(t)| < \frac{1}{2}.$$

В результате замены (1.3) задача (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = f(y, t, \omega t) + \chi(y, t, \omega t) + R(y, t, \omega),\ \ t \in [0, T], \\ &y(t_0) = y^0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned} R(y, t, \omega) \ &= \ (E + (M_\omega y)(t))^{-1} f(y(t) + (K_\omega y)(t), t, \omega t) - f(y(t), t, \omega t) + \\ &+ \sqrt{\omega}(E + (M_\omega y)(t))^{-1} \Bigg(\varphi(y(t) + (K_\omega y)(t), t, \omega t) - \\ &- \varphi(y(t), t, \omega t) - \frac{1}{\omega} \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(y(t), s, \tau)\Big|_{s=t} d\tau \Bigg) - \\ &- \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y(t), t, \omega t) \int\limits_0^{\omega t} \varphi(y(t), t, \tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Из приведенной ниже леммы 5 следует существование функции $\alpha\colon (\omega_1, +\infty) \to R$ такой, что $\lim\limits_{\omega \to \infty} \alpha(\omega) = 0$, и при всех $y \in S_0$, $t \in [0, T]$ и $\omega > \omega_1$

$$|R(y, t, \omega)| < \alpha(\omega). \tag{1.6}$$

Положим

$$M = \sup_{\substack{y\in D_0\\ t\in[0,T]\\ \omega>\omega_1}} |f(y,t,\omega t)+\chi(y,t,\omega t)+R(y,t,\omega)|, \tag{1.7}$$

$$\alpha = \min\left(\frac{\delta_0}{M}, T\right). \tag{1.8}$$

Тогда согласно теореме Коши задача (1.4) при каждом $\omega > \omega_1$ имеет на временном участке $t \in [t_1, t_2]$, где $t_1 = \max\{0, t_0 - \alpha\}$, $t_2 = \min\{T, t_0 + \alpha\}$, единственное решение y_ω. Рассмотрим семейство вектор-функций $\{y_\omega\}$, $\omega > \omega_1$. Оно равномерно ограничено, поскольку векторы $y_\omega(t)$, $\omega > \omega_1$, $t \in [t_1, t_2]$, лежат в ограниченной области D_0, и равностепенно непрерывно, так как производные $\frac{dy_\omega(t)}{dt}$, $\omega > \omega_1$, $t \in (t_1, t_2)$, удовлетворяющие равенству (1.4), в силу условий теоремы и неравенства (1.6) равномерно ограничены. Согласно теореме Арцела из каждой последовательности $\{y_{\omega_k}\}$, $\omega_k \to \infty$, можно выделить подпоследовательность $\{y_{\omega_{i_k}}\}$, $\omega_{i_k} \to \infty$, которая равномерно на участке $t \in [t_1, t_2]$ сходится к некоторой вектор-функции $u: \ [t_1, t_2] \to D_0$. Докажем, что u —решение задачи (1.2), т. е. $u = \overset{\circ}{y}$.

Для определенности предположим, что $t_0 \neq T$, и покажем, что $u(t) \equiv \overset{\circ}{y}(t)$ на $[t_0, t_2]$. Обозначив для краткости

$$f(y,t,\tau) + \chi(y,t,\tau) = \psi(y,t,\tau), \quad y_{\omega_{i_k}} = y_k,$$

выпишем для решений y_k задачи (1.4) интегральные равенства:

$$y_k(t) = y_\omega^0 + \int_{t_0}^{t} \left(\psi(y_k(s), s, \omega_{i_k} s) + R(y_k(s), s, \omega_{i_k})\right) ds \tag{1.9}$$

при $t \in [t_0, t_2]$. Покажем, что переходя в (1.9) к пределу при $k \to \infty$, получим

$$u(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(u(s), s)\, ds, \quad t \in [t_0, t_2]. \tag{1.10}$$

Поскольку равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty} y^0 = x^0$ — очевидно, то остается доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное k_0, что при $k > k_0$ для всех $t \in [t_0, t_2]$ справедлива оценка

$$|I_k| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} (\psi(y_k(s), s, \omega_{i_k} s) + R(y_k(s), s, \omega_{i_k}) - F(u(s), s))\, ds \right| < \varepsilon. \tag{1.11}$$

Выбор значения k_0 осуществим в несколько этапов.

Вначале, воспользовавшись неравенством (1.6), подберем такое k_1, что при $k > k_1$ справедливо неравенство $\omega_{i_k} > \omega_2$ и выполняется оценка

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} R(y_k(s), s, \omega_{i_k})\, ds \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [t_0, t_2]. \tag{1.12}$$

Далее, учтем, что в силу условий теоремы существует такая постоянная $L_1 > 0$, что при всех $y_1, y_2 \in D$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, +\infty)$

$$\begin{gathered} |\psi(y_2, t, \tau) - \psi(y_1, t, \tau)| \leqslant L_1 |y_2 - y_1|, \\ |F(y_2, t) - F(y_1, t)| \leqslant L_1 |y_2 - y_1|, \end{gathered} \tag{1.13}$$

а также существует непрерывная в нуле функция $\gamma_1 \colon [0, T] \to \mathbb{R}$, $\gamma_1(0) = 0$, такая что при всех $y \in D$, $s_1, s_2 \in [0, T]$, $\tau \in [0, +\infty)$

$$|\psi(y, s_2, \tau) - \psi(y, s_1, \tau)| < \gamma_1(|s_2 - s_1|). \tag{1.14}$$

Отметим ещё, что при некотором $K_1 > 0$ для всех $t \in [t_0, t_2]$ и всех k выполнена оценка

$$\left| \frac{dy_k}{dt} \right| \leqslant K_1. \tag{1.15}$$

Разобьем теперь промежуток интегрирования $[t_0, t)$ на p равных частей: $[t_0, t) = \bigcup\limits_{\ell=0}^{p-1} [a_\ell, a_{\ell+1})$, где величина p будет определена позже, и воспользуемся представлением

$$\int\limits_{t_0}^{t} (\psi(y_k(s), s, \omega_{i_k} s) - F(u(s), s))\, ds = \sum_{\ell=0}^{p-1} \int\limits_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} \big(\psi(y_k(s), s, \omega_{i_k} s) -$$

$$-\psi(y_k(a_\ell), a_\ell, \omega_{i_k} s)\big) ds + \sum_{\ell=0}^{p-1} \int\limits_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} \big(\psi(y_k(a_\ell), a_\ell, \omega_{i_k} s) - \psi(u(a_\ell), a_\ell, \omega_{i_k} s)\big) ds +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{p-1} \int\limits_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} \big(\psi(u(a_\ell), a_\ell, \omega_{i_k} s) - F(u(a_\ell), a_\ell)\big)\, ds +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{p-1} \int\limits_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} \big(F(u(a_\ell), a_\ell) - F(u(a_\ell), s)\big)\, ds +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{p-1} \int\limits_{a_\ell}^{a_{\ell+1}} \big(F(u(a_\ell), s) - F(u(s), s)\big) ds \equiv I_{1k} + I_{2k} + I_{3k} + I_{4k} + I_{5k}. \quad (1.16)$$

Из соотношений (1.13)–(1.15) и формулы конечных приращений нетрудно вывести существование такого числа p_1, что при $p \geqslant p_1$

$$|I_{1k}| < \frac{\varepsilon}{10}, \quad t \in [t_0, t_2]. \quad (1.17)$$

Для выражения I_{4k} имеем оценку

$$|I_{4_k}| \leqslant T \max_{\substack{s_{1,2} \in [t_0, t_2] \\ |s_2 - s_1| \leqslant T/p}} |F(u(s_2), s_2) - F(u(s_2), s_1)|.$$

Следовательно, существует такое $p_2 \geqslant p_1$, что при $p \geqslant p_2$

$$|I_{4k}| < \frac{\varepsilon}{10}. \quad (1.18)$$

Из второго соотношения (1.13) вытекает оценка

$$|I_{5_k}| \leqslant T L_1 \max_{\substack{s_{1,2} \in [t_0, t_2] \\ |s_2 - s_1| \leqslant T/p}} |u(s_2) - u(s_1)|.$$

Поскольку вектор-функция $u(t)$, $t \in [0,T]$, равномерно непрерывна, то найдется $p_3 \geqslant p_2$ такое, что при $p = p_3$

$$|I_{5k}| < \frac{\varepsilon}{10}. \tag{1.19}$$

Зафиксировав $p = p_3$, перейдем ко второму этапу определения значения k_0. В силу первого неравенства (1.13)

$$|I_{2_k}| \leqslant L_1 \max_{t \in [t_0, t_2]} |y_k(t) - u(t)|.$$

Так как вектор-функция $u(t)$ является равномерным на участке $t \in [t_0, t_2]$ пределом последовательности вектор-функций $y_k \equiv y_{\omega_{i_k}}$, то найдется такое натуральное число $k_2 \geqslant k_1$, что при $k \geqslant k_2$

$$|I_{2k}| < \frac{\varepsilon}{10}. \tag{1.20}$$

Приступим к заключительному этапу нахождения величины k_0. Исходя из условия 5) подберем число N_0 так, чтобы при $N > N_0$ для всех $y \in D_0$, $t \in [0,T]$ выполнялась оценка:

$$\left| \frac{1}{N} \int_0^N \psi(y,t,\tau)\, d\tau - F(y,t) \right| < \frac{\varepsilon}{20Tp}.$$

После этого выберем $k_0 \geqslant k_2$ так, что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство $\omega_{i_k} t_0 > N_0$. Тогда, как легко видеть, при $k \geqslant k_0$ для всех $t \in [t_0, t_2]$ будет выполнена оценка:

$$|I_{3k}| < \frac{\varepsilon}{10}. \tag{1.21}$$

Из соотношений (1.12), (1.16)–(1.21) следует (1.11).

Итак, неравенство (1.11) верно для всех $t \in [t_0, t_2]$, поэтому равенство (1.9) в результате равномерного относительно $t \in [t_0, t_2]$ предельного перехода по $k \to \infty$ преобразуется в равенство (1.10). Следовательно, равномерный по $t \in [t_0, t_2]$ предел $u(t)$ последовательности вектор-функций

$y_k(t)$ является решением усредненной задачи (1.2), а в силу единственности решения последней $u(t) \equiv \overset{\circ}{y}(t)$. Таким образом, из любой последовательности вектор-функций $y_{\omega_i}(t)$, принадлежащих семейству $y_\omega(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, $\omega > \omega_2$, можно выделить подпоследовательность $y_{\omega_{i_k}}(t) \equiv y_k(t)$, которая равномерно относительно $t \in [t_0, t_2]$ сходится к $\overset{\circ}{y}(t)$. Тогда в силу леммы 3 равномерно относительно $t \in [t_0, t_2]$

$$\lim_{\omega \to \infty} y_\omega(t) = \overset{\circ}{y}(t). \tag{1.22}$$

Докажем, что предельное равенство (1.22) справедливо, на самом деле, равномерно на участке $t \in [t_0, T]$. Для этого, исходя из (1.22), выберем число $\omega_3 \geqslant \omega_2$ так, чтобы при $\omega > \omega_3$ и $t \in [t_0, t_2]$ выполнялось неравенство:

$$|y_\omega(t) - \overset{\circ}{y}(t)| \leqslant \frac{\delta_0}{2}.$$

Это условие позволяет нам снова применить к задаче (1.4) (но уже с новой начальной точкой $(t_2, y_\omega(t_2))$, где $\omega > \omega_3$) теорему Коши, и, тем самым, подобрать такое $\omega_4 \geqslant \omega_3$, что при $\omega > \omega_4$ на участке $[t_2, \min(t_2 + \alpha, T)]$, где α — то же, что и выше (см. (1.8)), существует единственное решение $y_\omega(t)$, являющееся продолжением вправо решения $y_\omega(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, $\omega > \omega_4$. Заметим, что значения указанного продолжения лежат в области D_0. Поэтому, рассматривая семейство вектор-функций $y_\omega(t)$ при $\omega > \omega_4$, мы, как и выше, установим равномерное предельное равенство (1.22) уже для $t \in [t_0, t_2 + \alpha]$. Ясно, что за конечное число шагов будет определено такое значение $\omega_5 \geqslant \omega_4$, что при каждом $\omega > \omega_5$ задача (1.4) имеет на участке $t \in [t_0, T]$ единственное решение $y_\omega(t)$, значения которого лежат в области D_0, и равномерно на этом временно участке справедливо предельное равенство (1.22). Но тогда при $\omega > \omega_5$ вектор-функция $x_\omega(t)$, которая выражается через $y_\omega(t)$ по формуле (1.3), является единственным решением задачи (1.1). При этом из формулы (1.3) и равномерного на участке $t \in [t_0, T]$ равенства (1.22) следует равномерное на том же временном участке равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} x_\omega(t) = \overset{\circ}{y}(t).$$

Аналогичным способом последнее равенство доказывается и на левом участке $[0, t_0]$. Лемма 1 доказана.

Лемма 5. *Пусть вектор-функции $f(y,t,\tau)$ и $\varphi(y,t,\tau)$ удовлетворяют условиям п. 1°. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что при всех $t \in [0,T]$, $y \in S_0$ и $\omega > \omega_0$ для вектор-функции R, заданной формулой (1.5), выполняется неравенство*

$$|R(y,t,\omega)| < \varepsilon. \tag{1.23}$$

Доказательство несложно и опускается.

3°. *Доказательство леммы 2.* Вначале напомним, что лемма 1 о решениях x_ω задачи (1.1), как следует из ее доказательства, была выведена из такого же утверждения о решениях y_ω задачи (1.4). При этом вывод был осуществлен на основании замены переменных (1.3) и леммы 4. Нетрудно понять, что на том же основании лемму 2 достаточно доказать в случае формальной замены в ее формулировке x_ω на y_ω. На доказательстве последнего утверждения мы и остановимся. Предположим, что это утверждение неверно. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$ и такие последовательности чисел $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $\{s_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ и векторов $\{y^k\}_{k=1}^\infty$, где $t_k, s_k \in [0,T]$ (пусть для определенности $s_k > t_k$), $y^k \in D_0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k = \infty, \tag{1.24}$$

при которых задача

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,\omega_k t) + \chi(y,t,\omega_k t) + R(y,t,\omega_k),$$
$$y(t_k) = y^k \tag{1.25}$$

имеет на участке $t \in [t_k, s_k]$ решение $y_{\omega_k}(t)$, причем

$$y_{\omega_k}(t) \in D_0, \quad t \in [t_k, s_k],$$
$$|y_{\omega_k}(s_k) - \overset{\circ}{y}_k(s_k)| > \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.26}$$

Здесь $\overset{\circ}{y}_k(t)$, $t \in [t_k, s_k]$ — решение задачи

$$\frac{dy}{dt} = F(y,t),$$
$$y(t_k) = z^k, \tag{1.27}$$

где

$$\lim_{k\to\infty} |z^k - y^k| = 0. \tag{1.28}$$

Из последовательности $\left\{(y^k, t_k, s_k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ выделим сходящуюся к некоторой точке (y^0, t_0, s_0) подпоследовательность, за которой сохраним обозначение исходной последовательности. Таким образом, будем считать, что выполнены предельные равенства:

$$\lim_{k\to\infty} y^k = y^0, \quad \lim_{k\to\infty} t_k = t_0, \quad \lim_{k\to\infty} s_k = s_0. \tag{1.29}$$

Рассмотрим задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t,\omega t) + \chi(y,t,\omega t) + R(y,t,\omega), \quad t \in [0,T],$$
$$y(t_0) = y^0. \tag{1.30}$$

По лемме 1 существует такое число $\omega^* > 0$, что при $\omega > \omega^*$ эта задача имеет единственное решение $y^*_\omega(t)$, и при всех $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$|y^*_\omega(t) - \overset{\circ}{y}{}^*(t)| < \frac{\varepsilon_0}{3}, \tag{1.31}$$

где $\overset{\circ}{y}{}^*(t)$ — решение задачи (1.27) при $t_k = t_0$, $z^k = y^0$. Из соотношений (1.28), (1.29) и теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения (1.27) от начальных данных найдется такое число k_1, что при $k > k_1$ справедливы неравенства

$$| \overset{\circ}{y}{}^*(s_k) - \overset{\circ}{y}{}_k(s_k)| < \frac{\varepsilon_0}{3}. \tag{1.32}$$

Оценим теперь разность $y_{\omega_k}(s_k) - y^*_{\omega_k}(s_k)$. Из (1.25), (1.30) имеем

$$y_{\omega_k}(t) - y^*_{\omega_k}(t) - \int\limits_{t_0}^{t} [f(y_{\omega_k}(\theta), \theta, \omega_k\theta) - f(y^*_{\omega}(\theta), \theta, \omega_k\theta) + \chi(y_{\omega_k}(\theta), \theta, \omega_k\theta) -$$

$$-\chi(y^*_{\omega_k}(\theta), \theta, \omega_k\theta)]\, d\theta = y^k - y^0 + \int\limits_{t_k}^{t_0} (f(y_{\omega_k}(\theta), \theta, \omega_k\theta) + \chi(y_{\omega_k}(\theta), \theta, \omega_k\theta))\, d\theta +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t} R(y_{\omega_k}(\theta), \theta, \omega_k)\, d\theta - \int\limits_{t_0}^{t} R(y^*_{\omega_k}(\theta), \theta, \omega_k)\, d\theta \equiv G_k(t), \quad t \in [0, T].$$

Отсюда в силу неравенства Беллмана–Гронуолла имеет место оценка

$$|y_{\omega_k}(t) - y^*_{\omega_k}(t)| \leqslant c \max_{t \in [0,T]} |G_k(t)|, \quad c = \text{const}\,.$$

Из (1.24), (1.29) и леммы 5 следует существование такого числа $k_2 \geqslant k_1$, что при $k > k_2$

$$\max_{t \in [0,T]} |G_k(t)| < \frac{\varepsilon_0}{3c},$$

а значит справедливо также соотношение

$$|y_{\omega_k}(s_k) - y^*_{\omega_k}(s_k)| < \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad k > k_2. \tag{1.33}$$

Из оценок (1.31)–(1.33) вытекают неравенства

$$|y_{\omega_k}(s_k) - \overset{\circ}{y}{}_k(s_k)| \leqslant |y_{\omega_k}(s_k) - \overset{\circ}{y}{}^*_{\omega_k}(s_k)| + | \overset{\circ}{y}{}^*_{\omega_k}(s_k) - \overset{\circ}{y}{}^*(s_k)| +$$

$$+| \overset{\circ}{y}{}^*(s_k) - \overset{\circ}{y}{}_k(s_k)| < \varepsilon_0, \quad k > k_2,$$

что противоречит оценке (1.26). Лемма 2 доказана.

1.2 Метод усреднения для системы полулинейных дифференциальных уравнений. Первый тип

Пусть числа m и n — натуральные, $T > 0$, $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$, D_0 — любой открытый ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу с начальным условием для системы m дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, зависящих от большого параметра ω:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \bigl[\lambda_j(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\mu_j(x,t,\omega t)\bigr] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$
$$= f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1.34}$$

$$u(x,0) = g(x), \tag{1.35}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^* \in D_0$, $t \in [0,T]$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^*$ — искомая вектор-функция, компоненты которой зависят от переменных x и t. Эту задачу будем называть задачей (1.34), (1.35) в параллелепипеде $\Pi_0 = D_0 \times [0,T]$.

Вектор-функцию $u = u(x,t)$, определенную и непрерывную в параллелепипеде $\Pi_0 = D_0 \times [0,T]$ и обладающую в $\widehat{\Pi}_0 = D_0 \times (0,T)$ непрерывными частными производными первого порядка по всем своим аргументам, будем называть решением задачи (1.34), (1.35) в параллелепипеде Π_0, если при подстановке ее в соотношения (1.34) и (1.35) мы получим тождества в $\widehat{\Pi}_0$ и D_0, соответственно. Значение вектор-функции $u(x,t)$ для произвольной точки $(x,t) \in \Pi_0$ будет определяться следующим образом. Зафиксируем произвольную точку $(x,t) = (\xi,\theta) \in \Pi_0$. Чтобы определить значение вектор-фунции $u(x,t)$ в этой точке, проведем через нее характеристику

$x_\omega(t)$, которая для любого $\omega > 0$ является решением системы

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \lambda(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\,\mu\,(x,t,\omega t), \quad t \in [0,T], \\
&x(\theta) = \xi.
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать такое $\omega_0 \gg 1$, что все характеристики $x_\omega(t)$ пересекут гиперплоскость $t = 0$ в точках $\overset{\circ}{x} = x_\omega(0)$, принадлежащих некоторому открытому параллелепипеду $D^0 \subset \mathbb{R}^n$ (здесь $D_0 \subset D^0$). Рассмотрим задачу Коши, определяющую решение (1.34), (1.35) вдоль ее характеристики $x_\omega(t)$, с начальным условием в точке $(\overset{\circ}{x}, g(\overset{\circ}{x}))$:

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = f(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\,\varphi(x,t,\omega t,u), \quad t \in [0,T], \\
&\frac{dx}{dt} = \lambda(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\,\mu(x,t,\omega t), \quad t \in [0,T], \\
&x(0) = \overset{\circ}{x}, \\
&u(0) = g(\overset{\circ}{x}).
\end{aligned}$$

Решение данной задачи $u(t) = u(x_\omega(t),t)$ при $t = \theta$ будет решением $u(x,t)$ системы (1.34), (1.35) в точке $(x,t) = (\xi,\theta)$, т.е. $u(\xi,\theta) = u(x_\omega(\theta),\theta) = u(\theta)$. Таким образом, в силу произвольности выбора точки $(\xi,\theta) \in \Pi_0$ определим значение вектор-фунции $u(x,t)$ во всем множестве Π_0. Построенное решение $u(x,t)$ задачи удовлетворяет системе (1.34) в каждой точке $(x,t) = (\xi,\theta) \in \Pi_0$ и начальному условию (1.35) в точке $(x,0)$, в которую приходит проекция характеристики (1.34), выпущенная из точки (ξ,θ).

Предположим, что данные задачи (1.34), (1.35) удовлетворяют следующим условиям, в которых U_0 — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^m$, D и U — любые ограниченные параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0,T]$, $\Omega = \Pi \times [0,+\infty)$, $G = \Omega \times U_0$, $\Omega_1 = D \times [0,T] \times [0,+\infty)$,

$G_1 = \Omega_1 \times U_0$:

1) компоненты $\lambda_j(x,t,\tau)$ и $\mu_j(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ вектор-функций $\lambda(x,t,\tau)$ и $\mu(x,t,\tau)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2 \mu_j}{\partial x_k \partial x_\ell}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j,k,\ell \leqslant n)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве Ω;

2) компоненты $f_i(x,t,\tau,u)$ и $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ вектор-функций $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_j \partial u_k}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_j \partial x_\ell}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\ell \partial x_r}(x,t,\tau,u)$, $(1 \leqslant i,j,k \leqslant m,\ 1 \leqslant \ell, r \leqslant n)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве G;

3) компоненты вектор-функций $\lambda(x,t,\tau), \mu(x,t,\tau)$,

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,t,\tau) \int\limits_0^\tau \mu(x,t,\theta)\,d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial \lambda}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве Ω_1;

4) компоненты вектор-функций $f(x,t,\tau,u)$, $\varphi(x,t,\tau,u)$,

$$\psi(x,t,\tau,u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u) \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u)\,d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau,u) \int\limits_0^\tau \mu(x,t,\theta)\,d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial f}{\partial u}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau,u)$ равномерно ограничены на множестве G_1;

5) производные $\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \mu_j}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \mu_j}{\partial t}$ $(1 \leqslant j,k \leqslant n)$ удовлетворяют условиям Липшица по x с постоянной, не зависящей от $(x,t,\tau) \in \Omega_1$;

6) производные $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ удовлетворяют условиям Липшица по x, u с постоянной, не зависящей от $(x,t,\tau,u) \in G_1$;

7) функции $\lambda_j(x,t,\tau)$ и $\chi_j(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ непрерывны по $t \in [0,T]$ равномерно относительно $(x,t,\tau) \in \Omega_1$;

8) функции $f_i(x,t,\tau,u)$ и $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ непрерывны по $t \in [0,T]$ равномерно относительно $(x,t,\tau,u) \in G_1$;

9) равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \mu_j(x,t,\tau)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k}(x,t,\tau)\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_j}{\partial t}(x,t,\tau)\,d\tau = 0,$$

$1 \leqslant j,k \leqslant n$;

10) равномерно относительно $(x,t,u) \in D \times [0,T] \times U$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \varphi_i(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0,$$

$1 \leqslant i,j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

11) существует такая вектор-функция $\Lambda(x,t)$, определенная на Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ справедливы предельные равенства для ее компонент Λ_j:

$$\Lambda_j(x,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (\lambda_j(x,t,\tau) + \chi_j(x,t,\tau))\,d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

12) существует такая вектор-функция $F(x,t,u)$, определенная на множестве $\Pi \times U_0$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, что равномерно относительно $(x,t,u) \in$

$D \times [0, T] \times U_0$ справедливы предельные равенства для ее компонент F_j:

$$F_j(x, t, u) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (f_j(x, t, \tau, u) + \psi_j(x, t, \tau, u))\, d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant m;$$

13) для любого начального условия $(\overset{\circ}{y}, t_0) \in \Pi$ задача

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(y, t), \quad y(t_0) = \overset{\circ}{y} \tag{1.36}$$

имеет на участке $t \in [0, T]$ решение $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^*$.

Наряду с возмущенной задачей (1.34), (1.35) в параллелепипеде Π_0 рассмотрим во всем слое Π усредненную задачу

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = F_i(x, t, v), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1.37}$$

$$v(x, t)\Big|_{t=0} = g(x), \tag{1.38}$$

относительно которой предположим следующее:

14) данная задача имеет решение $v(x, t) \subset U_0$.

Ниже символом $|a|$ будем обозначать какую-либо норму векторов $a \in \mathbb{R}^m$.

При указанных выше предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого открытого ограниченного параллелепипеда D_0 в $\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ существует единственное решение $u_\omega(x, t)$ задачи (1.34), (1.35) в Π_0, и для любых $(x, t) \in \Pi_0$ выполняется неравенство*

$$|u_\omega(x, t) - v(x, t)| < \varepsilon. \tag{1.39}$$

Замечание. Если в теореме 2 речь вести не о любом параллелепипеде D_0, а о фиксированном, то в условиях 1)-14) можно параллелепипед D и слой Π заменить фиксированными ограниченными параллелепипедами D^0 и $\Pi^1 = D^0 \times [0, T]$ соответственно. Здесь D^0-открыт, $D_0 \subset D^0 \subset \mathbb{R}^n$, и существует замкнутый параллелепипед $D^1 \subset D^0$, такой что решение y задачи (1.36) при $(\overset{\circ}{y}, t_0) \in \Pi_0$ удовлетворяет условию: $y(t) \in D^1, t \in [0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим две задачи Коши, определяющие характеристики двух задач (1.34), (1.35) в Π_0 и (1.37), (1.38) в Π:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \lambda(x, t, \omega t) + \sqrt{\omega}\, \mu\, (x, t, \omega t), \quad t \in (0, T), \\ &x(t_0) = \overset{\circ}{x}, \quad \overset{\circ}{x} \in D_0, \quad t_0 \in [0, T]; \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = \Lambda(y, t), \quad t \in (0, T), \\ &y(t_0) = \overset{\circ}{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad t_0 \in [0, T]. \end{aligned} \tag{1.41}$$

В силу условия 13) и теоремы 1, примененной к задачам (1.40) и (1.41) при $\overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{x}$, существуют число $\omega_1 > 0$ и параллелепипед D^0 в $\mathbb{R}^n$ такие, что при $\omega > \omega_1$ задача (1.40) разрешима и значения решений $x_\omega(t)$ и $y(t)$, $t \in [0, T]$ задач (1.40) и (1.41) принадлежат D^0. Пусть теперь (ξ, τ) — произвольная точка Π_0, а $\overset{\circ}{x}_\omega(t)$ — решение задачи (1.40) при $\omega > \omega_1$ и $\overset{\circ}{x} = \xi, t_0 = \tau$. Рассмотрим две задачи Коши, определяющие решения $u(x, t)$ и $v(x, t)$ задач (1.34), (1.35) в Π_0 и (1.37), (1.38) в Π вдоль их характеристик $x(t)$ и $y(t)$, выходящих из точки $(\overset{\circ}{x}_\omega(0), 0)$:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = f(x, t, \omega t, u) + \sqrt{\omega}\, \varphi(x, t, \omega t, u), \quad t \in (0, T), \\ &\frac{dx}{dt} = \lambda(x, t, \omega t) + \sqrt{\omega}\, \mu(x, t, \omega t), \quad t \in (0, T), \\ &x(0) = \overset{\circ}{\xi}, \quad u(0) = \overset{\circ}{u}\ ; \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dv}{dt} = F(y,t,v), \quad t \in (0,T), \\
&\frac{dy}{dt} = \Lambda(y,t), \quad t \in (0,T), \\
&y(0) = \overset{\circ}{\xi}, \quad v(0) = \overset{\circ}{u}\ ,
\end{aligned} \tag{1.43}
$$

где $u(t) = u[x(t),t]$, $v(t) = v[y(t),t]$, $\xi_0 = \overset{\circ}{x}_\omega(0)$, $\overset{\circ}{u} = g[\overset{\circ}{x}_\omega(0)]$. Обозначим через U^0 замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$, такой что при всех $x \in D^0$, $g(x) \in U^0 \subset U_0$. В силу условий 13), 14) и теоремы 1, примененной к задачам (1.42) и (1.43) при $\overset{\circ}{\xi} \in D^0$, $\overset{\circ}{u} \in U^0$, существует такое число $\omega_2 \geqslant \omega_1$, что при $\omega > \omega_2$ задача (1.42) разрешима при всех $(\xi,\tau) \in \Pi_0$. Следовательно, при $\omega > \omega_2$ разрешима и задача (1.34), (1.35) в Π_0. Установим теперь оценку (1.39) при $(x,t) = (\xi,\tau) \in \Pi_0$. Для этого воспользуемся неравенством треугольника

$$
\big|u(\xi,\tau) - v(\xi,\tau)\big| \leqslant \big|u(\tau) - v(\tau)\big| + \big|v[y(\tau),\tau] - v[x(\tau),\tau]\big|. \tag{1.44}
$$

В силу равномерной непрерывности вектор-функции $v(x,t)$ на параллелепипеде $(x,t) \in \Pi_0$ и теоремы 1, примененной к задачам (1.42) и (1.43), существует такое $\omega_0 \geqslant \omega_2$, что при $\omega > \omega_0$ выполняются оценки

$$
|u(\tau) - v(\tau)| < \varepsilon/2, \quad \big|v[y(\tau),\tau] - v[x(\tau),\tau]\big| < \varepsilon/2. \tag{1.45}
$$

Из (1.44), (1.45) следует неравенство (1.39). Теорема 2 доказана. □

Рассмотрим частный случай двух переменных x и t, т.е. случай n=1. Вместо параллелепипеда D_0 будем рассматривать отрезок $[a,b] \in \mathbb{R}$. Тогда параллелепипед Π_0 можно заменить полосой Π_ω в пространстве $\mathbb{R}^2$, ограниченной прямыми $t = 0, t = T$ и характеристиками $x_a(t), x_b(t)$, выходящими из точек $(t,x) = (0,a)$ и $(t,x) = (0,b)$ соответственно (см. рис. 2).

При этом все характеристики $x(t)$, выходящие при $t = 0$ из точек интервала (a,b), лежат внутри полосы Π_ω. Поэтому при выполнении условий

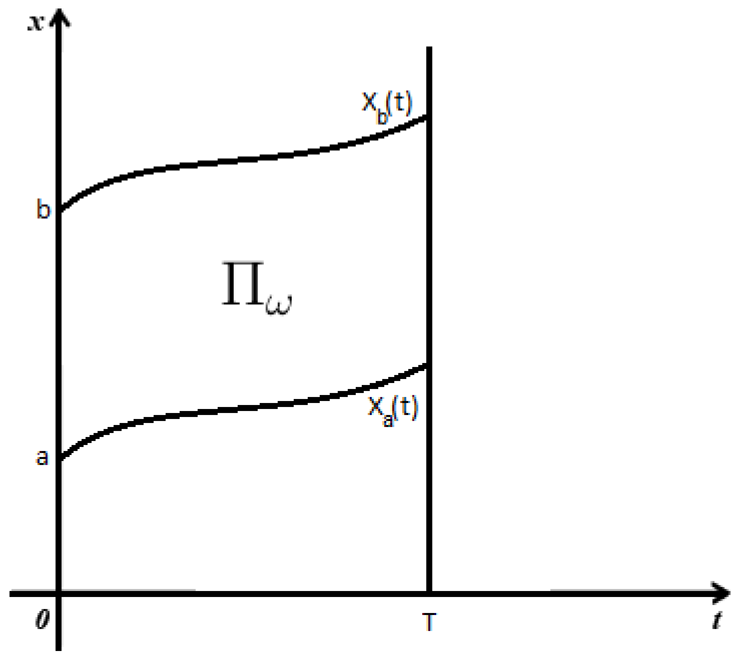

Рис. 2: Случай n=1

теоремы 2, следуя ее доказательству, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого отрезка* $[a, b] \in \mathbb{R}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\omega_0 > 0$, *что при* $\omega > \omega_0$ *существует решение* $u_\omega(x, t)$ *задачи (1.34), (1.35) в* Π_ω, *и для любых* $(x, t) \in \Pi_\omega$ *выполняется неравенство*

$$|u_\omega(x, t) - v(x, t)| < \varepsilon. \tag{1.46}$$

Заметим, что аналогичный результат получается, если вместо множества Π_ω рассмотреть множество Π_y, ограниченное прямыми $t = 0, t = T$ и усредненными характеристиками $y_a(t), y_b(t)$, которые выходят из начальных точек $(t, y) = (0, a)$ и $(t, y) = (0, b)$ соответственно. При этом множество Π_y в отличие от Π_ω не будет зависеть от параметра ω.

1.3 Полная асимптотика решения системы полулинейных дифференциальных уравнений. Первый тип

1°. В этом параграфе будем предполагать, что данные задач (1.34)-(1.35) помимо условий 1)-14) (см. §1.2) удовлетворяют следующим:

15) вектор-функции $\lambda(x,t,\tau)$ и $\mu(x,t,\tau)$ вместе с их частными производными по (x,t) любого порядка определены и непрерывны на множестве Ω, а также $l(>0)$-периодичны по τ;

16) вектор-функции $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по (x,t,u) любого порядка определены и непрерывны на множестве G, а также l-периодичны по τ;

17) средние вектор-функций $\mu(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ по τ равны нулю:

$$< \mu(x,t,\tau) >\equiv \frac{1}{l}\int\limits_0^l \mu(x,t,\tau)d\tau = 0, < \varphi(x,t,\tau,u) >= 0.$$

Задача (1.34)-(1.35), как установлено в §1.2, имеет в любом ограниченном параллелипипеде $\Pi_0 \equiv D_0 \times [0,T]$ при $\omega >> 1$ решение $u_\omega(x,t)$. Ниже будет построена полная обоснованная асимптотика таких решений, но начнем с построения формальной асимптотики решения задачи (1.34)-(1.35) в слое $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0,T]$. Будем искать ее в виде

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)), \quad (x,t) \in \Pi, \qquad (1.47)$$

где вектор-функции $v^k(x,t,\tau)$ по переменной τ являются l периодическими и обладают нулевым средним:

$$< v^k(x,t,\tau) >= 0. \qquad (1.48)$$

Определим два вида задач:

(A) - задача о l-периодическом с нулевым средним решением системы уравнений вида

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = f(\tau), \tag{1.49}$$

где $f(\tau)$ - известная l-периодическая с нулевым средним вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$;

(B) - задача Коши для системы m линеных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x,t)u + c(x,t), \quad (x,t) \in \Pi, \\ &u(x,0) = d(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.50}$$

где

$$a_j(x,t) =< \lambda_j(x,t,\tau) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \mu_j(x,t,\tau)}{\partial x_s} \int\limits_0^\tau \mu_s(x,t,\theta)d\theta >,$$

$$b(x,t) =< -\sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}}{\partial u \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\widetilde{\varphi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\mu}_j \frac{\partial u^0}{\partial x_j} >,$$

$$\widetilde{\varphi} \equiv \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u^0)d\theta - < \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u^0)d\theta >,$$

$$\widetilde{\mu} \equiv \int\limits_0^\tau \mu(x,t,\theta)d\theta - < \int\limits_0^\tau \mu(x,t,\theta)d\theta >,$$

а $c(x,t)$ и $d(x)$ известные вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^m$. Здесь использовано обозначение $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}w \equiv \left(\dfrac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_r^2}w_r\right)_{i,r=1}^{m}$.

Введем еще обозначения частичных сумм асимптотики (1.47)

$$\overset{p}{u}(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{p} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)). \tag{1.51}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *1. Построение любой частичной суммы формальной асимптотики (1.47) решения задачи (1.34)-(1.35) в слое* Π *сводится к решению конечного числа линейных задач видов (A) и (B).*

2. Для любого $p = 0, 1, 2, ...$ *и любого ограниченного параллелепипеда* $\Pi_0 = D_0 \times [0, T], D_0 \subset \mathbb{R}^n$, *найдутся такие положительные постоянные* c_p *и* ω_p, *что при* $\omega > \omega_p$ *для решения* $u_\omega(x,t)$ *задачи Коши (1.34)-(1.35) равномерно в* Π_0 *выполняется оценка*

$$|u_\omega(x,t) - \overset{p}{u}(x,t)| \leqslant c_p \omega^{-(p+1)/2}.$$

Доказательство теоремы изложено в пунктах $2^\circ, 3^\circ$.

2°. В этом разделе будет построена формальная асимптотика (1.47) решения $u(x,t)$ задачи Коши (1.34)-(1.35)

Подставляя ряд (1.47) в систему (1.34)-(1.35) и формально разлагая f и φ в ряды Тейлора по переменной u с центром $u = u^0(x,t)$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^0}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial t} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k + v^k) + \omega \dfrac{\partial}{\partial \tau} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2} v^k + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^{n} (\lambda_j + \sqrt{\omega}\mu_j) \left(\dfrac{\partial u^0}{\partial x_j} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2} \left(\dfrac{\partial u^k}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v^k}{\partial x_j} \right) \right) = \\ \qquad\qquad = f + \dfrac{\partial f}{\partial u} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k + v^k) + ... + \\ \qquad\qquad\qquad + \sqrt{\omega}\varphi + \sqrt{\omega} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k + v^k) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\sqrt{\omega} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k + v^k) \right)^2 + ... \\ u^0(x,0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k(x,0) + v^k(x,0,0)) = g(x). \end{cases} \tag{1.52}$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^{m}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \overset{1}{w} \overset{2}{w} = \sum\limits_{k,j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u_k \partial u_j} \overset{1}{w}_k \overset{2}{w}_j,$
$\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} w^2 = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j^2} w_j^2$. Приравняем в этих соотношениях коэффициенты при

одинаковых степенях ω. Начнем с наивысшей степени, т.е. с $\omega^{1/2}$:

$$\frac{\partial v^1}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x,t,\tau)\frac{\partial u^0}{\partial x_j} = \varphi(x,t,\tau,u^0).$$

В силу предположения 17) и условий (1.48) данная система имеет единственное решение:

$$\begin{gathered}
v^1(x,t,\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u^0)d\theta - < \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u^0)d\theta > - \\
- \sum_{j=1}^{n} \left(\int\limits_0^\tau \mu_j(x,t,\theta)d\theta - < \int\limits_0^\tau \mu_j(x,t,\theta)d\theta > \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_j} \equiv \\
\equiv \widetilde{\varphi}(x,t,\tau,u^0) - \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\mu}_j(x,t,\tau)\frac{\partial u^0}{\partial x_j},
\end{gathered} \tag{1.53}$$

зависящее от параметров x, t и $u^0 = u^0(x,t)$.

Равенства коэффициентов при ω^0 в (1.52) имеют вид

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u^0}{\partial t} + \dfrac{\partial v^2}{\partial \tau} + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j(x,t,\tau)\dfrac{\partial u^0}{\partial x_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x,t,\tau)\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v^1}{\partial x_j}\right) = \\
\qquad = f(x,t,\tau,u^0) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u^0)(u^1+v^1), \\
u^0(x,0) = g(x),
\end{cases}$$

Подставив в эти уравнения выражение (1.53) для v^1 и применяя затем операцию усреднения, получим задачу вида

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} < \lambda_j(x,t,\tau) > \frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} < \mu_j(x,t,\tau)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_j}(x,t,\tau,u^0) > + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} < \mu_j(x,t,\tau)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial u}(x,t,\tau,u^0) > \frac{\partial u^0}{\partial x_j} - \\
&\quad - \sum_{j,s=1}^{n} < \mu_j(x,t,\tau)\frac{\partial \widetilde{\mu}_s}{\partial x_j}(x,t,\tau) > \frac{\partial u^0}{\partial x_s} - \\
&\quad - \sum_{j,s=1}^{n} < \mu_j(x,t,\tau)\widetilde{\mu}_s(x,t,\tau) > \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_j \partial x_s} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=< f(x,t,\tau,u^0) > + < \frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u^0)\widetilde{\varphi}(x,t,\tau,u^0) > - \\
&- \sum_{j=1}^{n} < \frac{\partial\varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u^0)\widetilde{\mu}_j(x,t,\tau) > \frac{\partial u^0}{\partial x_j}, \\
u^0(x,0) &= g(x),
\end{aligned}
$$

или, после упрощения,

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u^0}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n} < \lambda_j(x,t,\tau) > \dfrac{\partial u^0}{\partial x_j} + \\
\quad + \sum\limits_{j,s=1}^{n} < \dfrac{\partial \mu_s(x,t,\tau)}{\partial x_j} \int\limits_0^\tau \mu_j(x,t,\theta)d\theta > \dfrac{\partial u^0}{\partial x_s} = \\
\qquad =< f(x,t,\tau,u^0) > + \sum\limits_{j=1}^{n} < \int\limits_0^\tau \mu_j(x,t,\theta)d\theta \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x,t,\tau,u^0) > + \\
\qquad + < \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u^0) \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u^0)d\theta >, \\
u^0(x,0) = g(x).
\end{cases}
$$

Здесь учтены простые равенства:

$$
\begin{aligned}
&< \mu_j(x,t,\tau)\widetilde{\mu}_s(x,t,\tau) + \mu_s(x,t,\tau)\widetilde{\mu}_j(x,t,\tau) >=< \frac{\partial\widetilde{\mu}_j}{\partial\tau}\widetilde{\mu}_s + \frac{\partial\widetilde{\mu}_s}{\partial\tau}\widetilde{\mu}_j >= \\
&\quad = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \frac{\partial(\widetilde{\mu}_j\widetilde{\mu}_s)}{\partial\tau}d\tau = 0, \\
&< \mu_j(x,t,\tau)\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_j}(x,t,\tau,u^0) >= - < \int\limits_0^\tau \mu_j(x,t,\theta)d\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x,t,\tau,u^0) >, \\
&< \mu_j\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial u} >= - < \widetilde{\mu}_j\frac{\partial\varphi}{\partial u} >, < \mu_j\frac{\partial\widetilde{\mu}_s}{\partial x_j} >= - < \frac{\partial\mu_s}{\partial x_j}\int\limits_0^\tau \mu_j(x,t,\theta)d\theta > .
\end{aligned}
$$

Таким образом, $u^0(x,t)$ является решением усредненной задачи (1.37)-(1.38).

Определим теперь коэффициенты $u^k, v^{k+1} (k = 0,1,2,...)$, предполагая, что все коэффициенты с меньшими номерами мы уже нашли. Для этого приравняем вначале коэффициенты в (1.52) при $\omega^{-(k-1)/2}$ и к полученному равенству применим операцию усреднения. Вычитая выведенное таким образом усредненное равенство из исходного, получим задачу для v^{k+1}

$$\frac{\partial v^{k+1}}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial u^k}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} u^k + A^{k+1}(x,t,\tau,u^0,...,u^{k-1},v^1,...,v^k), \qquad (1.54)$$

где A^{k+1}– известное выражение. Отсюда найдем

$$v^{k+1}(t,\tau) = -\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\mu_j} \frac{\partial u^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial u} u^k + \Psi_{k+1}(x,t,\tau). \qquad (1.55)$$

Приравняем теперь коэффициенты в (1.52) при $\omega^{-k/2}$, применим к полученному равенству операцию усреднения по τ и заменим v^{k+1} его выражением (1.55). В результате получим задачу для u^k:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^k}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(x,t) \frac{\partial u^k}{\partial x_j} = b(x,t) u^k + D^k(x,t,\tau,u^0,...,u^{k-1},v^1,...,v^k), \\ u^k(x,0) = -v^k(x,0,0), \end{cases} \qquad (1.56)$$

где D^k - известное выражение, а $a_j(x,t)$ и $b(x,t)$ - те же, что и в задаче (B), а потому (1.56) является задачей вида (B). Утверждение 1 теоремы доказано.

3°. В этом пункте мы докажем утверждение 2 теоремы 3.

Подставив полученное в предыдущем пункте асимптотическое приближение $\overset{p}{u}(x,t)$ (1.51) при $p = k+2$ в исходную систему (1.34) – (1.35), получим равенства

$$\begin{gathered} \frac{\partial \overset{k+2}{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\mu_j(x,t,\omega t)) \frac{\partial \overset{k+2}{u}}{\partial x_j} = \\ = f(x,t,\omega t, \overset{k+2}{u}) + \sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t,\overset{k+2}{u}) + \overset{k+2}{R}_{\omega}(x,t), \quad (x,t) \in \Pi, \end{gathered} \qquad (1.57)$$

$$\overset{k+2}{u}(x,0) = g(x). \tag{1.58}$$

Здесь $\overset{k+2}{R}_{\omega}-$ вектор-функция, которая для любого ограниченного параллелепипеда $\Pi_0 = D_0 \times [0,T]$ равномерно относительно $(x,t) \in \Pi_0$ удовлетворяет условию

$$|\overset{k+2}{R}_{\omega}| = O(\omega^{-(k+1)/2}), \omega \to \infty. \tag{1.59}$$

Положим

$$w(x,t) = u_\omega(x,t) - \overset{k+2}{u}(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_0 \tag{1.60}$$

где $u_\omega-$ решение задачи (1.34)-(1.35) в параллелепипеде Π_0 (см. §1.2). Вычитая из (1.34) и (1.35) соответственно (1.57) и (1.58), составим задачу для $w:$

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\mu_j(x,t,\omega t)\right) \frac{\partial w}{\partial x_j} = A_\omega(x,t,\omega t, w)w + \\ + \sqrt{\omega} B_\omega(x,t,\omega t,w)w - \overset{k+2}{R}_{\omega}(x,t),\end{gathered} \tag{1.61}$$

$$w(x,0) = 0, \tag{1.62}$$

где

$$\begin{gathered}A_\omega(x,t,\omega t,w) = \int_0^1 \frac{\partial f(x,t,\omega t, \overset{k+2}{u} + \theta w)}{\partial v} d\theta, \\ B_\omega(x,t,\omega t,w) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi(x,t,\omega t, \overset{k+2}{u} + \theta w)}{\partial v} d\theta, \\ < B_\omega(x,t,\tau,w) >= 0.\end{gathered} \tag{1.63}$$

Задачу (1.61)-(1.62) перепишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\frac{dw}{dt} = A_\omega(x,t,\omega t,w)w + \sqrt{\omega} B_\omega(x,t,\omega t,w)w - \overset{k+2}{R}_{\omega}(x,t), \tag{1.64}$$

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda_1(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega} M_1(x,t,\omega t), \quad t \in [0,T] \tag{1.65}$$

$$w(0) = 0, x(0) = x_0, \quad x_0 \in D_1. \tag{1.66}$$

Здесь Λ_1 и M_1 - вектор-функции с элементами λ_j и μ_j соответственно, $w(t) = w(x(t),t)$, а D_1- такой ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, что при некотором $\omega_0 > 0$ для любой точки $(x_1, t_1) \in \Pi_0$ решение $x(t)$ задачи Коши для уравнения (1.65) с начальным условием $x(t_1) = x_1$ удовлетворяет соотношению $x(0) = x_0$. Такие D_1 и ω_0 существуют в силу теоремы 1. На основании теоремы 1 будем еще считать, что решение задачи (1.64)-(1.66) при $\omega > \omega_0$ и $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценке

$$|w(t)| + |x(t)| \leqslant C_0, \quad C_0 = const > 0. \tag{1.67}$$

Произведя в уравнении (1.64) с $x = x(t)$ замену переменных Крылова-Боголюбова

$$w(t) = v(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\limits_0^{\omega t} B_\omega(x(t),t,\tau,w(t)) d\tau v(t) \equiv v + \frac{1}{\sqrt{\omega}} C(t) v, \tag{1.68}$$

придем к задаче

$$\frac{dv}{dt} = A_{1\omega}(t) v + r_\omega(t), v(0) = 0, \tag{1.69}$$

где

$$A_{1\omega}(t) = \left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}} C_\omega(t)\right)^{-1} \Bigg(A_\omega(x(t), t, \omega t, w(t))(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}} C_\omega(t)) +$$

$$+ B_\omega(x(t), t, \omega t, w(t)) \int\limits_0^{\omega t} B_\omega(x(t), t, \tau, w(t)) d\tau -$$

$$- \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial B_\omega(x(t), t, \tau, w(t))}{\partial v} d\tau \Big(B_\omega(x(t), t, \omega t, w(t)) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\omega}} A_\omega(x(t), t, \omega t, w(t)) \Big) w(t) - \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial B_\omega(x(t), t, \tau, w(t))}{\partial x} d\tau \Big(M_1(x(t), t, \omega t) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\omega}} \Lambda_1(x(t), t, \omega t) \Big) - \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial B_\omega(x(t), t, \tau, w(t))}{\partial t} d\tau \Bigg), \tag{1.70}$$

$$r_\omega(t) = \left(E + \frac{1}{\sqrt{\omega}} C_\omega(t)\right)^{-1} \overset{k+2}{R}_\omega(x(t), t). \tag{1.71}$$

Здесь символом $\dfrac{\partial S(y)}{\partial y} u$, где $S(y) = (S_{ij}(y))_{i,j=1}^m$, $y, u \in \mathbb{R}^n$, мы обозначаем матрицу $\left(\sum\limits_{k=1}^p \dfrac{\partial S_{ij}(y)}{\partial y_k} u_k \right)_{i,j=1}^m$.

Из представлений (1.70),(1.71),(1.63) и оценок (1.59),(1.67) следует существование такой постоянной $C > 0$, что при всех $\omega > \omega_0$, где ω_0 -достаточно велико, и $t \in [0, T]$ выполняются оценки

$$\|A_{1\omega}(t)\| \leqslant C, \tag{1.72}$$

$$|r_\omega(t)| \leqslant C\omega^{-(k+1)/2} \tag{1.73}$$

В силу (1.72) фундаментальная матрица $\Phi_\omega(t, \tau)$ однородного уравнения (1.69) ($r_\omega = 0$) при $\omega > \omega_0$ и $t, \tau \in [0, T]$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi_\omega(t, \tau)\| \leqslant C_1, \quad C_1 = const > 0. \tag{1.74}$$

Поскольку решение $v(t)$ уравнения (1.69) имеет вид

$$v(t) = \int\limits_0^t \Phi_\omega(t,\tau) r_\omega(\tau) d\tau,$$

то из соотношений (1.60),(1.67),(1.73) и (1.74) следует равномерная относительно $(x,t) \in \Pi_0$ и $\omega > \omega_0$ оценка

$$\|u_\omega(x,t) - \overset{k+2}{u}(x,t)\| \leqslant C_2 \omega^{-(k+1)/2}, \quad C_2 = const > 0.$$

Отсюда в силу неравенства треугольника

$$\|u_\omega(x,t) - \overset{k}{u}(x,t)\| \leqslant \|u_\omega(x,t) - \overset{k+2}{u}(x,t)\| + \|\overset{k+2}{u}(x,t) - \overset{k}{u}(x,t)\|.$$

вытекает при $\omega > \omega_0$ искомая оценка

$$\sup_{(x,t)\in\Pi_0} \|u_\omega(x,t) - \overset{k}{u}(x,t)\| \leqslant C_3 \omega^{-(k+1)/2}, \quad C_3 = const > 0.$$

Теорема 3 доказана.

1.4 Метод усреднения для системы полулинейных дифференциальных уравнений. Второй тип

Пусть m и n — натуральные числа, D_0 — любой открытый ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$. Рассмотрим задачу Коши для системы m уравнений первого порядка, зависящих от большого параметра ω:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_{ij}(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\mu_{ij}(x,t,\omega t)\right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$
$$= f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1.75}$$

$$u(x,0) = g(x), \tag{1.76}$$

где $t \in [0,T]$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^* \in D_0$ (звездочка означает операцию транспонирования), $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^*$ — искомая вектор-функция, компоненты которой зависят от переменных x и t. Эту задачу будем называть задачей (1.75), (1.76) в параллелепипеде $\Pi_0 = D_0 \times [0,T]$.

Будем предполагать, что данные задачи (1.75), (1.76) удовлетворяют следующим условиям.

Пусть U_0 — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^m$, D — любой ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0,T]$, $\Omega = \Pi \times [0,+\infty)$, $G = \Omega \times U_0$, $\Omega_1 = D \times [0,T] \times [0,+\infty)$, $G_1 = \Omega_1 \times U_0$. Тогда:

1) компоненты $\lambda_{ij}(x,t,\tau)$ и $\mu_{ij}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ вектор-функций $\lambda_i(x,t,\tau)$ и $\mu_i(x,t,\tau)(1 \leqslant i \leqslant m)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2 \mu_{ij}}{\partial x_k \partial x_\ell}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j,k,\ell \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве Ω;

2) компоненты $f_i(x,t,\tau,u)$ и $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ вектор-функций $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_j \partial u_k}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_j \partial x_\ell}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\ell \partial x_r}(x,t,\tau,u)$, $(1 \leqslant i,j,k \leqslant m,\ 1 \leqslant \ell, r \leqslant n)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве G;

3) компоненты вектор-функций $\lambda_i(x,t,\tau), \mu_i(x,t,\tau)$,

$$\chi_i(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial \mu_i}{\partial x}(x,t,\tau) \int\limits_0^\tau \mu_i(x,t,\theta)\, d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \mu_i}{\partial x}(x,t,\tau)(1 \leqslant i \leqslant m)$ равномерно ограничены на множестве Ω_1;

4) компоненты вектор-функций $f(x,t,\tau,u)$, $\varphi(x,t,\tau,u)$,

$$\psi_i(x,t,\tau,u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u) \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u)\, d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau,u) \int\limits_0^\tau \mu_i(x,t,\theta)\, d\theta$$

$(1 \leqslant i \leqslant m)$ и матриц-функций $\frac{\partial f}{\partial u}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau,u)$,$\frac{\partial \psi_i}{\partial u}(x,t,\tau,u)$,$\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ равномерно ограничены на множестве G_1;

5) производные $\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial t}$ $(1 \leqslant j,k \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ удовлетворяют условиям Липшица по x с постоянной, не зависящей от $(x,t,\tau) \in \Omega_1$;

6) производные $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ удовлетворяют условиям Липшица по x, u с постоянной, не зависящей от $(x,t,\tau,u) \in G_1$;

7) функции $\lambda_{ij}(x,t,\tau)$ и $\chi_{ij}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ непрерывны по $t \in [0,T]$ равномерно относительно $(x,t,\tau) \in \Omega_1$;

8) функции $f_i(x,t,\tau,u)$ и $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ непрерывны по $t \in [0,T]$ равномерно относительно $(x,t,\tau,u) \in G_1$;

9) равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \mu_{ij}(x,t,\tau)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_k}(x,t,\tau)\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial t}(x,t,\tau)\,d\tau = 0,$$

$1 \leqslant j,k \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m$;

10) равномерно относительно $(x,t,u) \in D \times [0,T] \times U$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \varphi_i(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0,$$

$1 \leqslant i,j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

11) существуют такие вектор-функции $\Lambda_i(x,t)$, определенные на Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ справедливы предельные равенства для ее компонент Λ_{ij}:

$$\Lambda_{ij}(x,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (\lambda_{ij}(x,t,\tau) + \chi_{ij}(x,t,\tau))\,d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m;$$

12) существует такая вектор-функция $F(x,t,u)$, определенная на множестве $\Pi \times U_0$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, что для ее компонент F_i справедливы предельные равенства:

$$F_i(x,t,u) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (f_i(x,t,\tau,u) + \psi_i(x,t,\tau,u))\,d\tau, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

равномерно относительно $(x,t,u) \in D \times [0,T] \times U_0$;

13) для любого начального условия $(\overset{\circ}{y}, t_0) \in \Pi$ и любого i такого, что $1 \leqslant i \leqslant m$, задача

$$\frac{dy^i}{dt} = \Lambda_i(y^i, t), \quad y^i(t_0) = \overset{\circ}{y} \tag{1.77}$$

имеет на участке $t \in [0, T]$ решение $y^i(t)$.

Наряду с возмущенной задачей (1.75), (1.76) в параллелепипеде Π_0 рассмотрим во всем слое Π усредненную задачу

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ij}(x,t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = F_i(x,t,v), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1.78}$$

$$v(x,t)\Big|_{t=0} = g(x), \tag{1.79}$$

относительно которой предположим следующее:

14) данная задача имеет решение $v(x,t) \subset U_0$.

Ниже символом $|a|$ будем обозначать какую-либо норму векторов $a \in \mathbb{R}^m$.

При указанных выше предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Для любого открытого ограниченного параллелепипеда* D_0 *в* $\mathbb{R}^n$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\omega_0 > 0$*, что при* $\omega > \omega_0$ *существует единственное решение* $u_\omega(x,t)$ *задачи (1.75), (1.76) в* Π_0*, и для любых* $(x,t) \in \Pi_0$ *выполняется неравенство*

$$|u_\omega(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon. \tag{1.80}$$

Замечание. Если в теореме 4 речь вести не о любом параллелепипеде D_0, а о фиксированном, то в условиях 1)-14) можно параллелепипед D и слой Π заменить фиксированными ограниченными параллелепипедами D' и $\Pi' = D' \times [0, T]$ соответственно. Здесь D'-открыт, $D_0 \subset D' \subset \mathbb{R}^n$, и существует замкнутый параллелепипед $D'' \subset D'$ такой, что решение y задачи (1.77) при $(\overset{\circ}{y}, t_0) \in \Pi_0$ удовлетворяет условию: $y(t) \in D'', t \in [0, T]$.

Доказательство. Определим характеристики двух задач (1.75), (1.76) в Π_0 и (1.78), (1.79) в Π. Они находятся соответственно как решения следующих двух задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{dx^i}{dt} = \lambda_i(x^i, t, \omega t) + \sqrt{\omega}\, \mu_i\,(x^i, t, \omega t), \quad t \in (0, T), \\ &x^i(t_0) = \overset{\circ}{x}, \quad \overset{\circ}{x} \in D_0, \quad t_0 \in [0, T]; \end{aligned} \tag{1.81}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dy^i}{dt} = \Lambda_i(y^i, t), \quad t \in (0, T), \\ &y^i(t_0) = \overset{\circ}{y}, \quad \overset{\circ}{y} \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \in [0, T], \end{aligned} \tag{1.82}$$

$1 \leqslant i \leqslant m$. В силу условия 13) и теоремы 1, примененной к этим задачам при $\overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{x}$, существуют число $\omega_1 > 0$ и параллелепипед $D^0 \supset D_0$ в $\mathbb{R}^n$ такие, что при $\omega > \omega_1$ задача (1.81) разрешима при всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и значения решений $x^i(t)$ и $y^i(t)$, $t \in [0, T]$ задач (1.81) и (1.82) принадлежат D^0. Зафиксируем произвольную точку (ξ, θ) в Π_0 и обозначим через $\overset{\circ}{x}{}^i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ решения задач (1.81) при $\omega > \omega_1$ и $\overset{\circ}{x} = \xi$, $t_0 = \theta$. Через $x^i(t)$ и $y^i(t)$ обозначим характеристики, отвечающие задачам (1.75), (1.76) и (1.78), (1.79) соответственно, выходящие из точки $(\overset{\circ}{x}{}^i(0), 0)$. Перепишем теперь эти задачи в виде задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{du_i}{dt} = f_i(x^i(t), t, \omega t, u_1, ..., u_m) + \sqrt{\omega}\, \varphi_i(x^i(t), t, \omega t, u_1, ..., u_m), \\ &\frac{dx^i}{dt} = \lambda_i(x^i, t, \omega t) + \sqrt{\omega}\, \mu_i(x^i, t, \omega t), \quad t \in (0, T), \\ &x^i(0) = \overset{\circ}{\xi}{}^i, \quad u_i(0) = \overset{\circ}{u}_i \end{aligned} \tag{1.83}$$

и

$$
\begin{aligned}
&\frac{dv_i}{dt} = F_i(y^i(t), t, v_1, ..., v_m),\\
&\frac{dy^i}{dt} = \Lambda_i(y^i, t), \quad t \in (0, T),\\
&y^i(0) = \overset{\circ}{\xi}{}^i, \quad v_i(0) = \overset{\circ}{u}_i\ ,
\end{aligned} \tag{1.84}
$$

где $u(t) = u(x(t), t)$, $v(t) = v(y(t), t)$, $\overset{\circ}{\xi}{}^i = \overset{\circ}{x}{}^i(0)$, $\overset{\circ}{u}_i = g_i(\overset{\circ}{x}{}^i(0)), 1 \leqslant i \leqslant m$ (см. рис. 3).

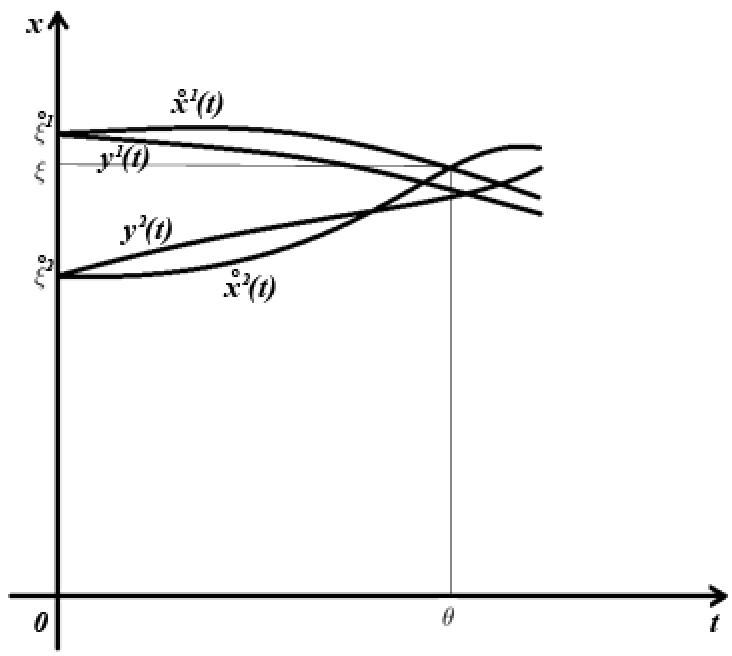

Рис. 3: Случай n=1, m=2

Пусть U^0 замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ такой, что $g(x) \in U^0 \subset U_0$ при всех $x \in D^0$. В силу условий 13), 14) и теоремы 1, примененной к задачам (1.83) и (1.84) при $\overset{\circ}{\xi}{}^i \in D^0$, $\overset{\circ}{u} = (\overset{\circ}{u}_1, ..., \overset{\circ}{u}_m)^* \in U^0$, существует такое число $\omega_2 \geqslant \omega_1$, что при $\omega > \omega_2$ задача (1.83) разрешима при всех $(\xi, \theta) \in \Pi_0$. Тогда при $\omega > \omega_2$ разрешима и задача (1.75), (1.76) в Π_0.

Докажем теперь оценку (1.80) при $(x,t)=(\xi,\theta)\in\Pi_0$. Согласно определению вектор-функции $\overset{\circ}{x}{}^i(t)$ имеем, что

$$u_i(\xi,\theta)-v_i(\xi,\theta)=u_i(\overset{\circ}{x}{}^i(\theta),\theta)-v_i(\overset{\circ}{x}{}^i(\theta),\theta)=$$

$$=u_i(\overset{\circ}{x}{}^i(\theta),\theta)-v_i(y^i(\theta),\theta)+v_i(y^i(\theta),\theta)-v_i(\overset{\circ}{x}{}^i(\theta),\theta),$$

где $y^i(t)$ определяется задачей (1.84), $1\leqslant i\leqslant m$. Отсюда в силу неравенства треугольника следует

$$\begin{aligned}&\big|u_i(\xi,\theta)-v_i(\xi,\theta)\big|\leqslant\big|u_i(\overset{\circ}{x}{}^i(\theta),\theta)-v_i(y^i(\theta),\theta)\big|+\big|v_i(y^i(\theta),\theta)-\\&-v_i(\overset{\circ}{x}{}^i(\theta),\theta)\big|=\big|u_i(\theta)-v_i(\theta)\big|+\big|v_i(y^i(\theta),\theta)-v_i(\overset{\circ}{x}{}^i(\theta),\theta)\big|\equiv\\&\equiv A_1+A_2,\end{aligned}\tag{1.85}$$

$1\leqslant i\leqslant m$.

Согласно теореме 1, примененной к задачам (1.83) и (1.84), получаем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\omega_3\geqslant\omega_2$, что при $\omega>\omega_3$

$$A_1\equiv|u_i(\theta)-v_i(\theta)|<\varepsilon/2,\tag{1.86}$$

$1\leqslant i\leqslant m$.

Установим аналогичную оценку для слагаемого A_2 в (1.85). А именно, докажем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\omega_4\geqslant\omega_3$, что при $\omega>\omega_4$ выполняется оценка

$$A_2\equiv|v_i(y^i(\theta),\theta)-v_i(\overset{\circ}{x}{}^i(\theta),\theta)|<\varepsilon/2,\tag{1.87}$$

$1\leqslant i\leqslant m$.

Зафиксируем произвольные точки (ξ_i',θ) и $(\xi_i'',\theta)\in\Pi_0$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ такие, что $|\xi_i'-\xi_i''|<\delta$ (здесь δ - любое малое положительное число), и проведем через них характеристики $y^i(\theta;\xi_i',\theta)$ и $y^i(\theta;\xi_i'',\theta)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}\left|v_i(\xi_i',\theta)-v_i(\xi_i'',\theta)\right| &\equiv \left|v_i(y^i(\theta;\xi_i',\theta),\theta)-v_i(y^i(\theta;\xi_i'',\theta),\theta)\right| \equiv\\ &\equiv \left|v_i'(\theta)-v_i''(\theta)\right|,\end{aligned} \tag{1.88}$$

где v_i' и v_i'' - решения следующих систем:

$$\begin{aligned}&\frac{dv_i'}{dt}=F_i(y^i(t;\xi_i',\theta),t,v_1',...,v_m'),\\ &\frac{dy^i}{dt}=\Lambda_i(y^i,t), \quad t\in(0,T),\\ &y^i(0)=y^i(0;\xi_i',\theta)\,, \quad v_i'(0)=g_i(y^i(0;\xi_i',\theta))\end{aligned} \tag{1.89}$$

и

$$\begin{aligned}&\frac{dv_i''}{dt}=F_i(y^i(t;\xi_i'',\theta),t,v_1'',...,v_m''),\\ &\frac{dy^i}{dt}=\Lambda_i(y^i,t), \quad t\in(0,T),\\ &y^i(0)=y^i(0;\xi_i'',\theta)\,, \quad v_i''(0)=g_i(y^i(0;\xi_i'',\theta))\end{aligned} \tag{1.90}$$

соответственно $(1 \leqslant i \leqslant m)$. В силу условий 2) и 4) по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части системы получим, что

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|v_i'(\theta)-v_i''(\theta)\right|=0, \qquad 1\leqslant i\leqslant m. \tag{1.91}$$

Положим теперь $\xi_i' \equiv y^i(\theta)$ и $\xi_i'' \equiv \overset{\circ}{x}{}^i(\theta)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Тогда по теореме 1, примененной для характеристик $\overset{\circ}{x}{}^i(\theta)$ и $y^i(\theta)$, получим, что при достаточно больших ω условие $|\xi_i'-\xi_i''| < \delta$ будет выполняться. Таким образом, для указанных ξ_i' и ξ_i'' верна оценка (1.91). Откуда с учетом (1.88) следует оценка (1.87).

Тогда из (1.85), (1.86) и (1.87) следует неравенство (1.80). Теорема доказана. $\square$

1.5 Полная асимптотика решения системы полулинейных дифференциальных уравнений. Второй тип

1°. Построение асимптотики для систем вида (1.75)-(1.76) по аналогичной изложенному в § 1.3 схеме не приводит к результату. Поэтому в этом параграфе будем предполагать, что данные задач (1.75)-(1.76) помимо условий 1)-14) (см. §1.4) удовлетворяют следующим:

15) функции $\mu_{ij}(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m)$ удовлетворяют на множестве Ω условию:

$$\mu_{ij}(x,t,\tau) \equiv \mu_{kj}(x,t,\tau), \quad 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i,k \leqslant m.$$

Другими словами, далее вместо задачи (1.75)-(1.76) будем рассматривать систему вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \big[\lambda_{ij}(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\eta_j(x,t,\omega t)\big] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$
$$= f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1.92}$$

$$u(x,0) = g(x), \tag{1.93}$$

где $x \in D_0$, $t \in [0,T]$, $\eta_j(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ - компоненты вектор-функции $\eta(x,t,\tau)$, определенной на множестве Ω следующим образом:

$$\eta(x,t,\tau) \equiv \mu_i(x,t,\tau), \quad 1 \leqslant i \leqslant m;$$

16) вектор-функции $\lambda_i(x,t,\tau)$ и $\eta(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ вместе с их частными производными по (x,t) любого порядка определены и непрерывны на множестве Ω, а также $l(>0)$-периодичны по τ;

17) вектор-функции $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по (x,t,u) любого порядка определены и непрерывны на множестве G, а также l-периодичны по τ;

18) средние вектор-функций $\eta(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ по τ равны нулю:

$$< \eta(x,t,\tau) >\equiv \frac{1}{l}\int\limits_0^l \eta(x,t,\tau)d\tau = 0,$$

$$< \varphi(x,t,\tau,u) >= 0.$$

Задача (1.75)-(1.76), а следовательно, и задача (1.92)-(1.93), как установлено в §1.4, имеет в любом ограниченном параллелипипеде $\Pi_0 \equiv D_0 \times [0,T]$ при $\omega >> 1$ решение $u_\omega(x,t)$. Ниже будет построена полная обоснованная асимптотика таких решений, но начнем с построения формальной асимптотики решения задачи (1.92)-(1.93) в слое $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0,T]$. Будем искать ее в виде

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)), \quad (x,t) \in \Pi, \qquad (1.94)$$

где вектор-функции $v^k(x,t,\tau)$ по переменной τ являются l периодическими и обладают нулевым средним:

$$< v^k(x,t,\tau) >= 0. \qquad (1.95)$$

Определим два вида задач:

(A) - задача о l-периодическом с нулевым средним решением системы уравнений вида

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = f(\tau), \qquad (1.96)$$

где $f(\tau)$ - известная l-периодическая с нулевым средним вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$;

(B) - задача Коши для системы m линеных уравнений вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\sum_{r=1}^{m}b_{ir}(x,t)u_r+c_i(x,t), \quad (x,t)\in\Pi,$$
$$u_i(x,0)=d_i(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ 1\leqslant i\leqslant m, \tag{1.97}$$

где

$$a_{ij}(x,t)=<\lambda_{ij}(x,t,\tau)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\eta_j(x,t,\tau)}{\partial x_s}\int\limits_0^\tau\eta_s(x,t,\theta)d\theta>,$$

$$b(x,t)=<-\sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial u\partial x_j}+\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial u}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\widetilde{\varphi}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\eta}_j\frac{\partial u^0}{\partial x_j},>$$

$$\widetilde{\varphi}\equiv\int\limits_0^\tau\varphi(x,t,\theta,u^0)d\theta-<\int\limits_0^\tau\varphi(x,t,\theta,u^0)d\theta>,$$

$$\widetilde{\eta}\equiv\int\limits_0^\tau\eta(x,t,\theta)d\theta-<\int\limits_0^\tau\eta(x,t,\theta)d\theta>,$$

а $c_i(x,t)$ и $d_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ известные функции со значениями в $\mathbb{R}$. Здесь использованы обозначения $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}w\equiv\left(\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial u_r^2}w_r\right)_{i,r=1}^m$, $b(x,t)\equiv\Big(b_{ir}(x,t)\Big)_{i,r=1}^m$.

Введем еще обозначения частичных сумм асимптотики (1.94)

$$\overset{p}{u}(x,t)=u^0(x,t)+\sum_{k=1}^{p}\omega^{-k/2}(u^k(x,t)+v^k(x,t,\omega t)). \tag{1.98}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *1. Построение любой частичной суммы формальной асимптотики (1.94) решения задачи (1.92)-(1.93) в слое Π сводится к решению конечного числа линейных задач видов (A) и (B).*

2. Для любого $p=0,1,2,\ldots$ и любого ограниченного параллелепипеда $\Pi_0=D_0\times[0,T], D_0\subset\mathbb{R}^n$, найдутся такие положительные постоянные

c_p и ω_p, что при $\omega > \omega_p$ для решения $u_\omega(x,t)$ задачи Коши (1.92)-(1.93) равномерно в Π_0 выполняется оценка

$$|u_\omega(x,t) - \overset{p}{u}(x,t)| \leqslant c_p \omega^{-(p+1)/2}.$$

2°. В этом разделе будет построена формальная асимптотика (1.94) решения $u(x,t)$ задачи Коши (1.92)-(1.93)

Подставляя ряд (1.94) в систему (1.92)-(1.93) и формально разлагая f и φ в ряды Тейлора по переменной u с центром $u = u^0(x,t)$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i^0}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial t}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega^{-k/2}(u_i^k + v_i^k) + \omega\dfrac{\partial}{\partial \tau}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega^{-k/2}v_i^k + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^{n}(\lambda_{ij} + \sqrt{\omega}\eta_j)\left(\dfrac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega^{-k/2}\left(\dfrac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_i^k}{\partial x_j}\right)\right) = \\ \qquad\qquad = f_i + \sum\limits_{r=1}^{m}\dfrac{\partial f_i}{\partial u_r}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega^{-k/2}(u_r^k + v_r^k) + \ldots + \\ \qquad\qquad\qquad + \sqrt{\omega}\varphi_i + \sqrt{\omega}\sum\limits_{r=1}^{m}\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_r}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega^{-k/2}(u_r^k + v_r^k) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\sqrt{\omega}\sum\limits_{r=1}^{m}\dfrac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_r^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega^{-k/2}(u_r^k + v_r^k)\right)^2 + \ldots \\ u_i^0(x,0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega^{-k/2}(u_i^k(x,0) + v_i^k(x,0,0)) = g_i(x), \end{cases} \tag{1.99}$$

где $1 \leqslant i \leqslant m$. Приравняем в этих соотношениях коэффициенты при одинаковых степенях ω. Начнем с наивысшей степени, т.е. с $\omega^{1/2}$:

$$\frac{\partial v_i^1}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{n}\eta_j(x,t,\tau)\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} = \varphi_i(x,t,\tau,u^0), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

В силу предположения 18) и условий (1.95) данная система имеет единственное решение:

$$
\begin{gathered}
v_i^1(x,t,\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi_i(x,t,\theta,u^0)d\theta - < \int\limits_0^\tau \varphi_i(x,t,\theta,u^0)d\theta > - \\
- \sum_{j=1}^n \left(\int\limits_0^\tau \eta_j(x,t,\theta)d\theta - < \int\limits_0^\tau \eta_j(x,t,\theta)d\theta > \right) \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} \equiv \\
\equiv \widetilde{\varphi}_i(x,t,\tau,u^0) - \sum_{j=1}^n \widetilde{\eta}_j(x,t,\tau) \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,
\end{gathered} \tag{1.100}
$$

зависящее от параметров x, t и $u^0 = u^0(x,t)$.

Равенства коэффициентов при ω^0 в (1.99) имеют вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i^0}{\partial t} + \dfrac{\partial v_i^2}{\partial \tau} + \sum\limits_{j=1}^n \lambda_{ij}(x,t,\tau) \dfrac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \sum\limits_{j=1}^n \eta_j(x,t,\tau) \left(\dfrac{\partial u_i^1}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \right) = \\
\qquad = f_i(x,t,\tau,u^0) + \sum\limits_{r=1}^m \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_r}(x,t,\tau,u^0)(u_r^1 + v_r^1), \\
u_i^0(x,0) = g_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.
\end{cases}
$$

Подставив в эти уравнения выражение (1.100) для v^1 и применяя затем операцию усреднения, получим задачу вида

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial u_i^0}{\partial t} + \sum_{j=1}^n < \lambda_{ij}(x,t,\tau) > \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n < \eta_j(x,t,\tau) \frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial x_j}(x,t,\tau,u^0) > + \\
& \quad + \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^n < \eta_j(x,t,\tau) \frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial u_r}(x,t,\tau,u^0) > \frac{\partial u_r^0}{\partial x_j} - \\
& \quad - \sum_{j,s=1}^n < \eta_j(x,t,\tau) \frac{\partial \widetilde{\eta}_s}{\partial x_j}(x,t,\tau) > \frac{\partial u_i^0}{\partial x_s} - \\
& \quad - \sum_{j,s=1}^n < \eta_j(x,t,\tau) \widetilde{\eta}_s(x,t,\tau) > \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_j \partial x_s} = \\
& \qquad = < f_i(x,t,\tau,u^0) > + < \sum_{r=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_r}(x,t,\tau,u^0) \widetilde{\varphi}_r(x,t,\tau,u^0) > - \\
& \qquad\quad - \sum_{j=1}^n < \sum_{r=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_r}(x,t,\tau,u^0) \widetilde{\eta}_j(x,t,\tau) > \frac{\partial u_r^0}{\partial x_j}, \\
& u_i^0(x,0) = g_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,
\end{aligned}
$$

или, после упрощения,

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i^0}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n} < \lambda_{ij}(x,t,\tau) > \dfrac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \\
\qquad + \sum\limits_{j,s=1}^{n} < \dfrac{\partial \eta_s(x,t,\tau)}{\partial x_j} \int\limits_0^\tau \eta_j(x,t,\theta)d\theta > \dfrac{\partial u_i^0}{\partial x_s} = \\
\qquad\quad = < f_i(x,t,\tau,u^0) > + \sum\limits_{j=1}^{n} < \int\limits_0^\tau \eta_j(x,t,\theta)d\theta \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x,t,\tau,u^0) > + \\
\qquad\quad + < \sum\limits_{r=1}^{m} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_r}(x,t,\tau,u^0) \int\limits_0^\tau \varphi_r(x,t,\theta,u^0)d\theta >, \\
u_i^0(x,0) = g_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.
\end{cases}
$$

Здесь учтены простые равенства:

$$
< \eta_j(x,t,\tau)\widetilde{\eta}_s(x,t,\tau) + \eta_s(x,t,\tau)\widetilde{\eta}_j(x,t,\tau) > = < \frac{\partial \widetilde{\eta}_j}{\partial \tau}\widetilde{\eta}_s + \frac{\partial \widetilde{\eta}_s}{\partial \tau}\widetilde{\eta}_j > =
$$

$$
= \frac{1}{l}\int\limits_0^l \frac{\partial(\widetilde{\eta}_j\widetilde{\eta}_s)}{\partial \tau}d\tau = 0,
$$

$$
< \eta_j(x,t,\tau)\frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial x_j}(x,t,\tau,u^0) > = - < \int\limits_0^\tau \eta_j(x,t,\theta)d\theta \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x,t,\tau,u^0) >,
$$

$$
< \eta_j \frac{\partial \widetilde{\varphi}_i}{\partial u_r} > = - < \widetilde{\eta}_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_r} >, < \eta_j \frac{\partial \widetilde{\eta}_s}{\partial x_j} > = - < \frac{\partial \eta_s}{\partial x_j} \int\limits_0^\tau \eta_j(x,t,\theta)d\theta > .
$$

Таким образом, в силу условия 15) вектор-функция $u^0(x,t)$ является решением усредненной задачи (1.78)-(1.79).

Определим теперь коэффициенты $u^k, v^{k+1} (k = 0, 1, 2, ...)$, предполагая, что все коэффициенты с меньшими номерами мы уже нашли. Для этого приравняем вначале коэффициенты в (1.99) при $\omega^{-(k-1)/2}$ и к полученному равенству применим операцию усреднения. Вычитая выведенное таким образом усредненное равенство из исходного, получим задачу для v^{k+1}

$$\frac{\partial v_i^{k+1}}{\partial \tau}+\sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j}=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_r}u_r^k+A_i^{k+1}(x,t,\tau,u^0,...,u^{k-1},v^1,...,v^k), \quad (1.101)$$

где $A_i^{k+1}-$ известные выражения ($1\leqslant i\leqslant m$). Отсюда найдем

$$v_i^{k+1}(t,\tau)=-\sum_{j=1}^{n}\tilde{\eta}_j\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j}+\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial u_r}u_r^k+\Psi_i^{k+1}(x,t,\tau), \qquad 1\leqslant i\leqslant m. \quad (1.102)$$

Приравняем теперь коэффициенты в (1.99) при $\omega^{-k/2}$, применим к полученному равенству операцию усреднения по τ и заменим v^{k+1} его выражением (1.102). В результате получим задачу для u^k:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i^k}{\partial t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j}=\sum_{r=1}^{m}b_{ir}(x,t)u_r^k+D_i^k(x,t,\tau,u^0,...,u^{k-1},v^1,...,v^k),\\ u_i^k(x,0)=-v_i^k(x,0,0), \qquad 1\leqslant i\leqslant m,\end{cases} \quad (1.103)$$

где D_i^k - известное выражение, а $a_{ij}(x,t)$ и $b_{ir}(x,t)$ - те же, что и в задаче (B), а потому (1.103) является задачей вида (B). Утверждение 1 теоремы доказано.

3°. В этом пункте мы докажем утверждение 2 теоремы 5.

Подставив полученное в предыдущем пункте асимптотическое приближение $\overset{p}{u}(x,t)$ (1.98) при $p=k+2$ в исходную систему (1.92) – (1.93), получим равенства

$$\frac{\partial \overset{k+2}{u}_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{ij}(x,t,\omega t)+\sqrt{\omega}\eta_j(x,t,\omega t))\frac{\partial \overset{k+2}{u}_i}{\partial x_j}=$$
$$=f_i(x,t,\omega t,\overset{k+2}{u})+\sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,\overset{k+2}{u})+\overset{k+2}{R}_{i\,\omega}(x,t), \quad (x,t)\in\Pi, \quad (1.104)$$

$$\overset{k+2}{u}_i(x,0)=g_i(x), \qquad 1\leqslant i\leqslant m. \quad (1.105)$$

Здесь $\overset{k+2}{R}_{i\,\omega}-$ функции, которые для любого ограниченного параллелепипеда $\Pi_0 = D_0 \times [0,T]$ равномерно относительно $(x,t) \in \Pi_0$ удовлетворяют условию

$$|\overset{k+2}{R}_{i\,\omega}| = O(\omega^{-(k+1)/2}), \omega \to \infty, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{1.106}$$

Положим

$$w(x,t) = u_\omega(x,t) - \overset{k+2}{u}(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_0 \tag{1.107}$$

где $u_\omega-$ решение задачи (1.92)-(1.93) в параллелепипеде Π_0 (см. §1.4). Вычитая из (1.92) и (1.93) соответственно (1.104) и (1.105), составим задачу для w :

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_{ij}(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\eta_j(x,t,\omega t)\right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^{m} A_{ir}(x,t,\omega t,w) w_r +$$
$$+\sqrt{\omega} \sum_{r=1}^{m} B_{ir}(x,t,\omega t,w) w_r - \overset{k+2}{R}_{i\,\omega}(x,t), \tag{1.108}$$

$$w_i(x,0) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1.109}$$

где

$$A_{ir}(x,t,\omega t,w) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f_i(x,t,\omega t, \overset{k+2}{u} + \theta w)}{\partial v_r} d\theta,$$
$$B_{ir}(x,t,\omega t,w) = \int\limits_0^1 \frac{\partial \varphi_i(x,t,\omega t, \overset{k+2}{u} + \theta w)}{\partial v_r} d\theta, \tag{1.110}$$
$$< B_{ir}(x,t,\tau,w) >= 0.$$

Задачу (1.108)-(1.109) перепишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_{r=1}^{m} A_{ir}(x,t,\omega t,w) w_r + \sqrt{\omega} \sum_{r=1}^{m} B_{ir}(x,t,\omega t,w) w_r - \overset{k+2}{R}_{i\,\omega}(x,t), \tag{1.111}$$

$$\frac{dx^i}{dt} = L_i^1(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega} M_i^1(x,t,\omega t), \quad t \in [0,T] \tag{1.112}$$

$$w_i(0) = 0, x^i(0) = x_0^i, \quad x_0^i \in D_1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{1.113}$$

Здесь L_i^1 и M_i^1 - n—мерные вектор-функции с элементами λ_{ij} и η_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ соответственно, $w(t) = w(x(t),t)$, а D_1- такой ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, что при некотором $\omega_0 > 0$ для любой точки $(x_1, t_1) \in \Pi_0$ решения $x^i(t)$ задач Коши для уравнений (1.112) с начальными условиями $x^i(t_1) = x_1$ удовлетворяют соотношениям $x^i(0) = x_0^i$. Такие D_1 и ω_0 существуют в силу теоремы 1. На основании теоремы 1 будем еще считать, что решение задачи (1.111)-(1.113) при $\omega > \omega_0$ и $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценке

$$|w(t)| + |x^i(t)| \leqslant C_0, \quad C_0 = const > 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{1.114}$$

Произведя в уравнениях (1.111) с $x = x^i(t) (1 \leqslant i \leqslant m)$ замену переменных Крылова-Боголюбова

$$\begin{aligned} w_i(t) &= v_i(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sum_{r=1}^m \int\limits_0^{\omega t} B_{ir}(x^i(t), t, \tau, w(t)) d\tau v_r(t) \equiv \\ &\equiv v_i(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sum_{r=1}^m C_{ir}(x^i(t), t, \omega t, w(t)) v_r(t), \end{aligned} \tag{1.115}$$

получим систему

$$\frac{dv_i}{dt} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sum_{r=1}^m \int\limits_0^{\omega t} B_{ir}(x^i(t), t, \tau, w(t)) d\tau \frac{dv_r}{dt} =$$

$$= -\sum_{r=1}^m \Bigg(\frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial B_{ir}(x^i(t), t, \tau, w(t))}{\partial t} d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int\limits_0^{\omega t} \frac{\partial B_{ir}(x^i(t), t, \tau, w(t))}{\partial x_j} d\tau \Big(\frac{1}{\sqrt{\omega}} \lambda_{ij}(x^i(t), t, \omega t) + \eta_j(x^i(t), t, \omega t) \Big) +$$

$$
\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{0}^{\omega t}\frac{\partial B_{ir}(x^i(t),t,\tau,w(t))}{\partial w_l}d\tau\ \Bigg(\sum_{s=1}^{m}\Big(\frac{1}{\sqrt{\omega}}A_{ls}(x^i(t),t,\omega t,w(t))+
$$

$$
+B_{ls}(x^i(t),t,\omega t,w(t))\Big)w_l-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\overset{k+2}{R}_{l\,\omega}(x^i(t),t)\Bigg)+
$$

$$
+\sqrt{\omega}B_{ir}(x^i(t),t,\omega t,w(t))\Bigg)v_r+
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m}A_{ir}(x^i(t),t,\omega t,w(t))v_r+\sqrt{\omega}\sum_{r=1}^{m}B_{ir}(x^i(t),t,\omega t,w(t))v_r+
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{\omega}}A_{ir}(x^i(t),t,\omega t,w(t))\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{0}^{\omega t}B_{il}(x^i(t),t,\tau,w(t))d\tau v_l+
$$

$$
+\sum_{r=1}^{m}B_{ir}(x^i(t),t,\omega t,w(t))\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{0}^{\omega t}B_{il}(x^i(t),t,\tau,w(t))d\tau v_l-\overset{k+2}{R}_{i\,\omega}(x^i(t),t),
\tag{1.116}
$$

с начальными условиями

$$
v_i(0)=0, \tag{1.117}
$$

где $1\leqslant i\leqslant m$. Упрощая полученные соотношения, придем к задаче для неизвестной вектор-функции $v(t)=(v_1(1),...,v_m(t))^*$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dv}{dt}=H_\omega(t)v-r_\omega(t),\\
&v(0)=0,
\end{aligned}
\tag{1.118}
$$

где

$$
\begin{aligned}
H_\omega(t) \ &= \left(E+\frac{1}{\sqrt{\omega}}C(t)\right)^{-1}\Bigg(A(t)+\frac{1}{\sqrt{\omega}}A(t)C(t)+B(t)C(t)-\\
&-\frac{1}{\sqrt{\omega}}C_t(t)-\frac{1}{\sqrt{\omega}}C_x(t)\Lambda(t)-C_x(t)M(t)-\\
&-\frac{1}{\sqrt{\omega}}C_w(t)A(t)w(t)-C_w(t)B(t)w(t)+\frac{1}{\sqrt{\omega}}C_w(t)\overset{k+2}{R}(t)\Bigg),\\
r_\omega(t) \ &= \left(E+\frac{1}{\sqrt{\omega}}C(t)\right)^{-1}\overset{k+2}{R}(t).
\end{aligned}
\tag{1.119}
$$

Здесь для сокращения записи использованы следующие обозначения:

$$A(t)=\Big(A_{ir}(x^i(t),t,\omega t,w(t))\Big)_{i,r=1}^{m},$$

$$C(t)=\Big(\int\limits_0^{\omega t}B_{ir}(x^i(t),t,\tau,w(t))d\tau\Big)_{i,r=1}^{m},$$

$$A(t)C(t)=\Big(\sum_{r=1}^{m}A_{ir}(x^i(t),t,\omega t,w(t))C_{il}(x^i(t),t,\omega t,w(t))\Big)_{i,l=1}^{m},$$

$$B(t)C(t)=\Big(\sum_{r=1}^{m}B_{ir}(x^i(t),t,\omega t,w(t))C_{il}(x^i(t),t,\omega t,w(t))\Big)_{i,l=1}^{m},$$

$$C_t(t)=\Big(\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial B_{ir}(x^i(t),t,\tau,w(t))}{\partial t}d\tau\Big)_{i,r=1}^{m},$$

$$C_x(t)\Lambda(t)=\Big(\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial B_{ir}(x^i(t),t,\tau,w(t))}{\partial x_j}d\tau\lambda_{ij}(x^i(t),t,\omega t)\Big)_{i,r=1}^{m},$$

$$C_x(t)M(t)=\Big(\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial B_{ir}(x^i(t),t,\tau,w(t))}{\partial x_j}d\tau\eta_{j}(x^i(t),t,\omega t)\Big)_{i,r=1}^{m},$$

$$C_w(t)A(t)w(t)=\Big(\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial B_{ir}(x^i(t),t,\tau,w(t))}{\partial w_l}d\tau\sum_{s=1}^{m}A_{ls}(x^i(t),t,\omega t,w(t))w_l\Big)_{i,r=1}^{m},$$

$$C_w(t)B(t)w(t) = \left(\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial B_{ir}(x^i(t),t,\tau,w(t))}{\partial w_l}d\tau\sum_{s=1}^{m}B_{ls}(x^i(t),t,\omega t,w(t))w_l\right)_{i,r=1}^{m},$$

$$C_w(t)\overset{k+2}{R}(t) = \left(\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial B_{ir}(x^i(t),t,\tau,w(t))}{\partial w_l}d\tau\overset{k+2}{R}_{l\,\omega}(x^i(t),t)\right)_{i,r=1}^{m},$$

$$\overset{k+2}{R}(t) = (\overset{k+2}{R}_{1\,\omega}(x^1(t),t),...,\overset{k+2}{R}_{m\omega}(x^m(t),t))^*.$$

Из представлений (1.119),(1.110) и оценок (1.106),(1.114) следует существование такой постоянной $C>0$, что при всех $\omega>\omega_0$, где ω_0 -достаточно велико, и $t\in[0,T]$ выполняются оценки

$$\|H_\omega(t)\| \leqslant C, \tag{1.120}$$

$$|r_\omega(t)| \leqslant C\omega^{-(k+1)/2} \tag{1.121}$$

В силу (1.120) фундаментальная матрица $\Phi_\omega(t,\tau)$ однородного уравнения (1.118) ($r_\omega=0$) при $\omega>\omega_0$ и $t,\tau\in[0,T]$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi_\omega(t,\tau)\| \leqslant C_1, \quad C_1 = const > 0. \tag{1.122}$$

Поскольку решение $v(t)$ уравнения (1.118) имеет вид

$$v(t) = \int\limits_0^t \Phi_\omega(t,\tau)r_\omega(\tau)d\tau,$$

то из соотношений (1.107),(1.114),(1.121) и (1.122) следует равномерная относительно $(x,t)\in\Pi_0$ и $\omega>\omega_0$ оценка

$$\|u_\omega(x,t)-\overset{k+2}{u}(x,t)\| \leqslant C_2\omega^{-(k+1)/2}, \quad C_2 = const > 0.$$

Отсюда в силу неравенства треугольника

$$\|u_\omega(x,t)-\overset{k}{u}(x,t)\| \leqslant \|u_\omega(x,t)-\overset{k+2}{u}(x,t)\| + \|\overset{k+2}{u}(x,t)-\overset{k}{u}(x,t)\|.$$

вытекает при $\omega > \omega_0$ искомая оценка

$$\sup_{(x,t)\in\Pi_0} \|u_\omega(x,t) - \overset{k}{u}(x,t)\| \leqslant C_3\omega^{-(k+1)/2}, \quad C_3 = const > 0.$$

Теорема 5 доказана.

2 Параболические системы с большими высокочастотными слагаемыми

2.1 Полная асимптотика периодического решения

1^0. Пусть N, m, n и p — натуральные числа и Ω - ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с C^∞ - гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим зависящую от большого параметра ω задачу о $\dfrac{2\pi}{\omega}$ -периодических по времени t решениях системы параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \\ + \sum_{0\le|s|\le m} f_s(x,u)e^{is\omega t} + \sqrt{\omega} \sum_{0<|s|\le m} \varphi_s(x,u)e^{is\omega t}, \qquad (2.1)$$

$$u|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\Gamma = \partial\Omega\times\mathbb{R}$, $a_{ij}(x)$ — вещественные числа, $L_j(x)$ — квадратные матрицы порядка N с вещественными элементами, $f_s(x,u)$ и $\varphi_s(x,u)$ — N-мерные векторы, удовлетворяющие условиям:

$$\overline{f}_s(x,u) = f_{-s}(x,u), \quad \overline{\varphi}_s(x,u) = \varphi_{-s}(x,u), \\ (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

Чертой сверху мы обозначаем операцию комплексного сопряжения.

Отметим еще, что независимость нелинейных вектор-функций f_s от первых производных неизвестной u по x (см. (2.1)) предполагается в работе лишь ради краткости и простоты изложения. Кроме того, можно было бы рассматривать систему (2.1), в которой $a_{ij}(x)$ зависят от номера уравнения. Далее, вместо рассматриваемых в работе уравнений второго порядка с главной частью дивергентного вида можно было бы аналогичным образом рассмотреть уравнения произвольного порядка 2k с недивергентной главной частью.

Функции a_{ij}, элементы матриц-функций L_j и компоненты вектор-функций f_s и φ_s бесконечно дифференцируемы по своим аргументам и, кроме того, выполнены условия:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \xi_i \xi_j > \alpha \sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2,$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha > 0$ не зависит от ξ.

Наряду с возмущенной задачей (2.1) рассмотрим следующую задачу, которую будем называть усредненной:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\ a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \\
&+ f_0(x, v) + \sum_{1 \le |s| \le m} i s^{-1}\ \frac{\partial \varphi_s(x, v)}{\partial v}\ \varphi_{-s}(x, v), \qquad (2.2) \\
&v|_{\Gamma} = 0,
\end{aligned}$$

где $\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial \varphi_{s_i}}{\partial v_j} \right)_{i,j=1}^{N}$ - матрица Якоби.

Предположим, что эта задача имеет вещественное невырожденное стационарное решение $u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),\ \alpha \in (0, 1)$. Невырожденность решения $u_0(x)$ означает, что эллиптическая задача

$$
\begin{aligned}
& L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \\
& + \frac{\partial f_0(x, u_0(x))}{\partial u} u + \sum_{1 \le |s| \le m} i s^{-1}\, \frac{\partial \varphi_s(x, u_0(x))}{\partial u} \times \\
& \times \frac{\partial \varphi_{-s}(x, u_0(x))}{\partial u} u + \sum_{1 \le |s| \le m} i s^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_s(x, u_0(x))}{\partial u^2} \times \\
& \times \varphi_{-s}(x, u_0(x)) u = \psi(x), \\
& u|_{\partial \Omega} = 0
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

в области Ω однозначно разрешима при всех $\psi \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Из классических априорных оценок следует, что $u_0 \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 6. *1.Существуют такие положительные числа $\alpha \in (0,1)$, r и ω_0, что при $\omega > \omega_0$ задача (2.1) имеет единственное в шаре $||u - u_0||_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}} \le r$ вещественное $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодическое по времени t решение $u_\omega(x,t)$. Это решение бесконечно дифференцируемо по (x,t) и при всех $k \ge 0$ удовлетворяет неравенству*

$$
||u_\omega - u_0||_{C^{k, \frac{k}{2}}} \le c_k\, \omega^{\frac{k-1}{2}}, \;\; c_k = const > 0,
$$

2. Для любого натурального числа M найдется такое положительное число ω_M, что при $\omega > \omega_M$ эффективно строится вектор-функция $\overset{M}{u}(x,t)$, $(x,t) \in Q$, со значениями в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющая при всех $k \ge 0$ оценке

$$
||\; u_\omega - \overset{M}{u}||_{C^{k, \frac{k}{2}}} \le c(M,k)\;\; \omega^{\frac{k-M-1}{2}},
$$

$$
c(M,k) = const > 0.
$$

Здесь $C^{k,k/2}$ — банахово пространство, которое состоит из вектор-функций $u(x,t), (x,t) \in Q$, для которых определена норма

$$||u||_{C^{k,k/2}} = \sum_{j=0}^{[k]} \sum_{2\mu+|\nu|=j} \sup_{(x,t)\in Q} \left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(x,t) \right| +$$

$$+\delta_k \left(\sum_{2\mu+|\nu|=[k]} \sup_{\substack{(x,t),(y,t)\in Q \\ x\neq y}} \frac{\left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(x,t) - \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(y,t) \right|}{|x-y|^{k-[k]}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{0<k-2\mu-|\nu|<2} \sup_{\substack{(x,t),(x,\tau)\in Q \\ t\neq \tau}} \frac{\left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(x,t) - \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} D^\nu u(x,\tau) \right|}{|t-\tau|^{\frac{k-2\mu-|\nu|}{2}}} \right),$$

где $[k]$ — целая часть k, указанные производные непрерывны в Q и $\delta_k = 0$ при целом k, $\delta_k = 1$ при k нецелом.

Под эффективностью понимается тот факт, что построение каждого приближения $\overset{M}{u}$ сводится к решению M линейных однозначно разрешимых задач вида (2.3).

2^0. В данном пункте будет построена формальная асимптотика решения задачи (2.1).

Для этого предварительно в замыкании $\overline{\Omega}_\eta$ пограничной подобласти Ω_η, области Ω, толщины η введем криволинейную систему координат следующим образом.

Определим отображение $\partial\Omega \times [0,\eta] \to \overline{\Omega}_\eta$ по закону $(\psi, r) \to \psi + n_\psi r$, где ψ- точка на $\partial\Omega$, имеющая местную координату ψ, а n_ψ - вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке ψ. Число η выбирается столь малым, что указанные нормали в Ω_η не пересекаются.

Согласно методу пограничного слоя [45] сделаем в задаче (2.1) замену переменных

$$x = x(\psi, r) = x(\psi, \frac{\rho}{\sqrt{\omega}}),$$

где $\rho = r\sqrt{\omega}$. При этом появятся представления

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + L_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}\big(\psi, \frac{\rho}{\sqrt{\omega}}\big) \frac{\partial}{\partial x_j} + L_j\big(\psi, \frac{\rho}{\sqrt{\omega}}\big) \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ &= \omega \Bigg[\alpha_{ij}(\psi) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \sum_{k=1}^{N_0} \omega^{-\frac{k}{2}} M_{i,j,k}(\psi, \rho) + \\ &+ \omega^{-\frac{N_0+1}{2}} M_{i,j,N_0+1}(\psi, \rho, r) \Bigg], \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $M_{i,j,k},\ {\scriptstyle 1 \le i,j \le n,\ 1 \le k \le N_0+1}$, - дифференциальные выражения относительно ψ, ρ, коэффициенты которых - полиномы по ρ. Асимптотическое разложение решения $u_\omega(x,t)$ задачи (2.1) будем строить в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} (u_k(x) + v_k(x, \tau) + \\ &+\ w_k(\psi, \rho) + z_k(\psi, \rho, \tau)), \quad \tau = \omega t, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где вектор-функции $v_k(x,\tau)$ и $z_k(\psi,\rho,\tau)$ предполагаются 2π-периодическими по τ с нулевыми средними. Коэффициенты u_k и v_k называются [45] регулярными, а w_k и z_k - погранслойными. Подставляя выражение (2.5) в равенство (2.1), и, учитывая представление (2.4), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \omega^{\frac{2-k}{2}} \tfrac{\partial}{\partial \tau} \big(v_k(x,\tau) + z_k(\psi,\rho,\tau) \big) = \\ &= \left[\sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\ a_{ij}(x) \tfrac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x) \tfrac{\partial}{\partial x_j} \right] \times \\ &\times \left[u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \Big(u_k(x) + v_k(x,\tau) \Big) \right] + \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} \Big[\omega \alpha_{ij} \tfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Big(w_k(\psi,\rho) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+z_k(\psi,\rho,\tau)\Big)+\sqrt{\omega}M_{i,j,1}(\psi,\rho)\Big(w_k(\psi,\rho)+\\
&+z_k(\psi,\rho,\tau)\Big)+M_{i,j,2}(\psi,\rho)\Big(w_k(\psi,\rho)+\\
&+z_k(\psi,\rho,\tau)\Big)+\tfrac{1}{\sqrt{\omega}}M_{i,j,3}(\psi,\rho)\Big(w_k(\psi,\rho)+\\
&+z_k(\psi,\rho,\tau)\Big)+\ldots\Big]+\sum_{0\le|s|\le m}\Big[f_s(x,u_0(x))+\\
&+\tfrac{\partial f_s(x,u_0(x))}{\partial u}\tfrac{1}{\sqrt{\omega}}\Big(u_1(x)+v_1(x,\tau)+\\
&+z_1(\psi,\rho,\tau)+\ldots\Big)+\ldots\Big]e^{is\tau}+\\
&+\sum_{1\le|s|\le m}\Big[\sqrt{\omega}\varphi_s(x,u_0(x))+\tfrac{\partial\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u}\times\\
&\times\Big(u_1(x)+v_1(x,\tau)+z_1(\psi,\rho,\tau)+\ldots\Big)+\\
&+\sqrt{\omega}\quad\tfrac{1}{2}\quad\tfrac{\partial^2\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u^2}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{\omega}}(u_1(x)+v_1(x,\tau)+\\
&+z_1(\psi,\rho,\tau)+\ldots\Big)^2+\ldots\Big]e^{is\tau},
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-\frac{k}{2}}\Big(u_k(x)+v_k(x,0)+w_k(\psi,\rho)+\\
&+z_k(\psi,\rho,0)\Big)=0,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$x\in\partial\Omega.$

В (2.6), (2.7) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω, причем в (2.6) отдельно для регулярных и погранслойных слагаемых. Приравнивая регулярные коэффициенты в (2.6) при старшей степени $\omega^{\frac{1}{2}}$, получим систему дифференциальных уравнений

$$
\frac{\partial v_1(x,\tau)}{\partial\tau}=\sum_{1\le|s|\le m}\varphi_s(x,u_0(x))e^{is\tau}.
$$

Так как среднее по τ вектор-функции $v_1(x,\tau)$ равно нулю, то отсюда однозначно находим

$$v_1(x,\tau) = -\sum_{1\le|s|\le m} is^{-1}\varphi_s(x,u_0(x))e^{is\tau}. \tag{2.8}$$

Приравнивая регулярные коэффициенты в (2.6) и коэффициенты в (2.7) при нулевой степени ω, и, применяя к первой из полученных систем, которую обозначим (*), операцию усреднения по τ, получим

$$\begin{aligned}
&< \frac{\partial v_2(x,\tau)}{\partial \tau} >\equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial v_2(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau = \\
&=< \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\times \\
&\times u_0(x) + \sum_{0\le|s|\le m} f_s(x,u_0(x))e^{is\tau}+ \\
&+\sum_{1\le|s|\le m} \frac{\partial\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u} u_1(x)e^{is\tau}- \\
&-\sum_{1\le|s|\le m} \frac{\partial\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u}\times \\
&\times \sum_{1\le|r|\le m} ir^{-1}\varphi_r(x,u_0(x))e^{i(s+r)\tau} >,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

т. е. получим усредненную задачу (2.2), которая по предположению имеет невырожденное стационарное решение $u_0(x)$. Подставив $u_0(x)$ в (2.8), найдем $v_1(x,\tau)$. Разность систем (*) и (2.9) имеет вид

$$\frac{\partial v_2(x,\tau)}{\partial\tau} = \sum_{1\le|s|\le m} f_s(x,u_0(x))e^{is\tau} +$$
$$+ \sum_{1\le|s|\le m} \frac{\partial\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u} u_1(x)e^{is\tau} -$$
$$- \sum_{1\le|s|\le m} \frac{\partial\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u} \times$$
$$\times \sum_{\substack{1\le|r|\le m\\ r\ne -s}} ir^{-1}\varphi_r(x,u_0(x))e^{i(s+r)\tau},$$
$$< v_2 >= 0.$$

Отсюда находим

$$v_2(x,\tau) = A_2(x,\tau) +$$
$$+ \sum_{1\le|s|\le m} \frac{1}{is} \quad \frac{\partial\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u} u_1(x)e^{is\tau},$$

где $A_2(x,\tau)$— известная вектор-функция с нулевым по τ средним. Далее, приравнивая в системе (2.6), (2.7) коэффициенты при $\omega^{-\frac{1}{2}}$ с учетом последнего представления v_2, найдем

$$L_0 u_1 = \psi_1(x),$$
$$u_1|_{\partial\Omega} = 0,$$

где L_0 — определенное в (2.3) эллиптическое дифференциальное выражение, а $\psi_1(x)$ — известная вектор-функция.

Перейдем теперь к определению погранслойных коэффициентов $z_k(\psi,\rho,\tau)$ и $w_k(\psi,\rho)$. Вектор-функция $z_1(\psi,\rho,\tau)$ является решением задачи Коши:

$$\frac{\partial z_1(\psi,\rho,\tau)}{\partial\tau} = \beta(\psi)\frac{\partial^2 z_1(\psi,\rho,\tau)}{\partial\rho^2}$$
$$z_1|_\Gamma = -v_1|_\Gamma, \quad z_1|_{\rho=\infty} = 0,$$

где $\beta(\psi) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\psi)$. Отсюда

$$z_1(\psi, \rho, \tau) = \sum_{1 \le |s| \le m} c_s(\psi, \rho) e^{is\tau},$$

где

$$\begin{aligned} & is\ c_s(\psi, \rho) = \beta(\psi)\ \frac{\partial^2 c_s(\psi, \rho)}{\partial \rho^2}, \\ & c_s\big|_\Gamma = is^{-1} \varphi_s(x, u_0(x))\big|_\Gamma \equiv d_s(\psi), \\ & c_s\big|_{\rho=\infty} = 0, \quad s = \pm 1, \pm 2, \dots \pm m. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Обозначим через $\lambda_s(\psi)$ корни уравнений

$$\beta(\psi)\lambda^2 - is = 0, \tag{2.11}$$

удовлетворяющие условию $Re\lambda_s < 0$. Тогда решение задачи (2.10) можно представить в виде

$$c_s(\psi, \rho) = d_s(\psi) e^{\lambda_s \rho}, \tag{2.12}$$

а значит

$$\begin{aligned} z_1(\psi, \rho, \tau) = & \sum_{1 \le |s| \le m} d_s(\psi) e^{\lambda_s \rho} e^{is\tau} \equiv \\ & \equiv \sum_{1 \le |s| \le m} d_s(\psi, \rho) e^{is\tau} \end{aligned}$$

Отметим, что из определения $d_s(\psi)$ и соотношений (2.11), (2.12) вытекают равенства

$$\overline{d}_s = d_{-s}, \quad \overline{\lambda}_s = \lambda_{-s}, \quad \overline{c}_s = c_{-s}, \tag{2.13}$$

а из (2.13) после этого следует вещественность z_1.

Для нахождения $w_2(\psi,\rho)$ приравняем в (2.17) погранслойные коэффициенты при нулевой степени ω:

$$\begin{aligned}
&\beta(\varphi)\quad \frac{\partial^2 w_2(\psi,\rho)}{\partial\rho^2}=\\
&=<\sum_{1\le|s|\le m}\frac{\partial\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u}\bigg|_{r=0} z_1(\psi,\rho,\tau)e^{is\tau}>\equiv\\
&\equiv\sum_{1\le|s|\le m} e_s(\psi)e^{\lambda_s\rho},\\
&w_2\,|_{\rho=\infty}=0.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

Отсюда находим

$$w_2(\psi,\rho)=\sum_{1\le|s|\le m} g_s(\psi)e^{\lambda_s\rho},\tag{2.15}$$

где

$$g_s(\psi)=\frac{e_s(\psi)}{\beta(\psi)\lambda_s^2(\psi)}.\tag{2.16}$$

Из (2.14), (2.13) и (2.15) следуют равенства:

$$\overline{e}_s=e_{-s},\quad \overline{g}_s=g_{-s},$$

а из (2.16) после этого вытекает вещественность вектор-функции w_2. Легко также проследить, что все построенные регулярные и погранслойные коэффициенты бесконечно дифференцируемы.

Таким образом можно найти любые коэффициенты асимптотического разложения (2.5), причем все они бесконечно дифференцируемые вещественные вектор-функции.

3^0. Перейдем к доказательству теоремы. Относительно ее первого утверждения отметим следующее. Существование $2\pi\omega^{-1}$-периодического по времени t решения $u_\omega(x,t)$, удовлетворяющего указанной в теореме оценке, устанавливается в ходе доказательства второго утверждения этой теоремы. Относительная единственность $u_\omega(x,t)$ доказывается так же, как аналогичное утверждение теоремы 1.1 работы [30]. В отличие от последней, где рассматривалась задача об ограниченных на ней оси $t \in R$ решениях, здесь, при переходе от дифференциального к интегральному уравнению, используется функция Грина задачи о периодических по времени t решениях (см. (2.24) ниже), но это совершенно несущественно при выводе соответствующих оценок. Кроме того, здесь используется известный результат о непрерывном вложении* $B_0^{2\delta} \subset C^\alpha(\overline{\Omega})$, где $p > 1,\ \delta > \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2p}$, а $B_p^{2\delta}$ - банахово пространство, элементами которого служат вектор-функции u, принадлежащие области определения дробной степени (см., например, [46]) A_0^δ, с нормой $||x||_{B_0^{2\delta}} = ||A_0^\delta u||_{L_p(\Omega)}$. Здесь α — то же, что и в п.1. теоремы, A_0 — линейный оператор в $L_p(\Omega)$ с областью определения $D(A_0)$, являющейся замыканием по норме $W_p^2(\Omega)$ множества гладких финитных в Ω вектор-функций, действующий по правилу $A_0 u = -\triangle u$.

Приступим к доказательству второго утверждения теоремы. Положим для любого натурального M

$$\overset{M}{u}(x,t) = u_0(x) + \omega^{-\frac{1}{2}}\Big(u_1(x) + v_1(x) + z_1(x)\Big) + \\ + \sum_{k=2}^{M} \omega^{-\frac{k}{2}}\Big[u_k(x) + \mathrm{v}_k(x,\omega t) + z_k(\psi,\rho,\omega t) + \\ + w_k(\psi,\rho)\Big].$$

*Банаховы пространства вектор-функций с компонентами из $C^\alpha(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ и т. д. (и естественными нормами) мы также обозначаем через $C^\alpha(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ и т. д.

Тогда $\overset{M}{u}(x,t)$, согласно ее построению, является решением задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overset{M}{u}}{\partial t} = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial \overset{M}{u}}{\partial x_j} + \sum_{0\le|s|\le m} f_s(x, \overset{M}{u}) e^{is\omega t} + \\
&+ \sqrt{\omega} \sum_{0<|s|\le m} \varphi_s(x, \overset{M}{u}) e^{is\omega t} + R_{1\omega}(x,t) \\
&\overset{M}{u}\Big|_{\Gamma} = 0,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $||R_{1\omega}||_{C(\overline{Q})} = O(\omega^{-\frac{M-1}{2}}), \quad \omega \to \infty.$

Вычитая из равенств (2.1) равенства (2.17) и обозначая $\mathrm{w} = u - \overset{M}{u}$, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} - A_1 \mathrm{w} = \sqrt{\omega} \sum_{0<|s|\le m} \frac{\partial \varphi_s(x, u_0(x))}{\partial u} e^{is\omega t} \mathrm{w} + \\
&+ \psi_1(x, \omega t)\mathrm{w} + S(x,t,\mathrm{w}) + R_{1\omega}(x,t) \\
&\mathrm{w}\,|_{\Gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_1 \mathrm{w} = &\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x) \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x_j} + \\
&+ \frac{\partial f_0(x,u_0)}{\partial u} \mathrm{w} + \sum_{0\le|s|\le m} \frac{i}{s} \frac{\partial^2 \varphi(x,u_0)}{\partial u^2} \varphi_{-s}(x,u_0) \mathrm{w},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x,\tau)\mathrm{w} = \sum_{0\le|s|\le m} \frac{\partial f_s(x,u_0)}{\partial u} \mathrm{w} e^{is\omega t} + \\
&+ \sum_{0\le|s|\le m} \frac{\partial^2 \varphi_s(x,u_0)}{\partial u^2} u_1 \mathrm{w} e^{is\omega t} + \\
&+ \sum_{0\le|s1|\le m} \frac{\partial^2 \varphi_{s_1}(x,u_0)}{\partial u^2} \sum_{\substack{0\le|s_2|\le m \\ s_2\ne -s_1}} \frac{1}{is_2} \varphi_{s_2}(x,u_0) \mathrm{w} e^{i(s_1+s_2)\omega t},
\end{aligned}$$

$$S(x,t,\mathrm{w}) =$$
$$= \sum_{0\le|s|\le m} \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial f_s(x,\overset{M}{u}+\theta\mathrm{w})}{\partial u} - \frac{\partial f_s(x,u_0}{\partial u}) \right] d\theta \mathrm{w} e^{is\omega t} +$$
$$+ \sum_{0\le|s_1|\le m} \frac{\partial^2\varphi_{s_1}(x,u_0)}{\partial u^2} \sum_{0<|s_2|\le m} d_s(\psi,\rho) e^{i(s_1+s_2)\omega t} +$$
$$+ \sum_{0\le|s|\le m} \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial^2\varphi_s(x,u_0+\theta(u_1+v_1+z_1)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi_s(x,u_0}{\partial u^2} \right] d\theta \times$$
$$\times u_1 \mathrm{w} e^{is\omega t} + \sum_{0\le|s_1|\le m} \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial^2\varphi_{s_1}\Big(x,u_0+\theta(u_1+v_1+z_1)\Big)}{\partial u^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2\varphi_{s_1}(x,u_0)}{\partial u^2} \right] d\theta \times \sum_{0\le|s_2|\le m} \left[\frac{1}{is_2} \varphi_{s_2}(x,u_0) + \right.$$
$$\left. + d_{s_2}(\psi,\rho) \right] \mathrm{w} e^{i(s_1+s_2)\omega t} + \sum_{0\le|s|\le m} \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial\varphi_s(x,\overset{M}{u}+\theta\mathrm{w})}{\partial u} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial\varphi_s(x,\overset{1}{u}}{\partial u} \right] d\theta \mathrm{w} e^{is\omega t},$$

Ниже символом A_1 будем обозначать оператор в $L_p(\Omega), p > 1$, с областью определения $D(A_1) = D(A_0)$, действующий по формуле (2.19). Легко видеть, что A_1 порождает в $L_p(\Omega)$ аналитическую полугруппу (см. [46]). В задаче (2.18) сделаем замену переменных

$$\mathrm{w}(x,t) = v(x,t) + \\ + \sqrt{\omega} \sum_{1\le|s|\le m} \Big(is\omega - A_1 \Big)^{-1} \frac{\partial\varphi_s}{\partial u} e^{is\omega t} v(x,t) \equiv \\ \equiv \Big(E + \alpha_\omega(x,t) \Big) v(x,t), \quad \mathrm{w} = u - \overset{M}{u}. \tag{2.20}$$

Поскольку оператор A_1, как отмечалось выше, порождает в $L_p(\Omega)$ аналитическую полугруппу, то существуют положительные числа ω_1 и c_1, такие что при $\omega > \omega_1$ выполняется оценка

$$||\alpha_\omega(x,t)||_{C(R,L_p(\Omega))} \le c_1 \omega^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.21}$$

Символом $C(\mathcal{J},B)$, где $\mathcal{J}$ — числовая ось или ее отрезок, а B - банахово пространство, мы называем банахово пространство непрерывных вектор-функций $u\colon \mathcal{J}\to B$, удовлетворяющих условию $||u||_{C(\mathcal{J},B)}=\sup\limits_{t\in\mathcal{J}}||u(t)||_B<\infty$. Аналогично определяется банахово пространство $C_\mu(\mathcal{J},B)$, $\mu\in(0,1]$, вектор-функций $u\colon \mathcal{J}\to B$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем μ.

Задача (2.18) в результате замены (2.20) с учетом (2.21) примет вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}-Av=f(x,t,v,\frac{\partial v}{\partial x},\omega)+R_\omega(x,t),\\ &v\big|_\Gamma=0,\end{aligned}\tag{2.22}$$

где

$$\begin{aligned}Av=\Bigg[&A_1+\\ &+\sum_{1\le|s|\le m}\frac{i}{s}\,\frac{\partial\varphi_s(x,u_0(x))}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi_{-s}(x,u_0(x))}{\partial u}\Bigg]v,\\ R_\omega=&(E+\alpha_\omega)^{-1}R_{1\omega}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Легко видеть (см. [46]), что оператор A с областью определения $D(A)=D(A_0)$, действующий в $L_p(\Omega)$ в соответствии с равенством (2.23), порождает аналитическую полугруппу. Обозначим $T_\omega=2\pi\omega^{-1}[t_0(2\pi)^{-1}\omega]$, где t_0 удовлетворяет условию $e^\lambda t_0\neq1$ при всех λ , принадлежащих спектру оператора A, $[a]$ - целая часть числа a. Тогда, как известно (см., например, [29]), задача о T_ω-периодических по времени t решениях системы (2.22) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(\cdot,t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\Big[f(\cdot,s,v(\cdot,s),\frac{\partial v(\cdot,s)}{\partial s},w)+ \\ + R_\omega(\cdot,s)\Big]ds + (E-e^{T_\omega A})^{-1}\times \\ \times\int_0^{T_\omega} e^{(T_\omega+t-s)A}\Big[f(\cdot,s,v(\cdot,s),\frac{\partial v(\cdot,s)}{\partial s},w)+ \\ + R_\omega(\cdot,s)\Big]ds \equiv [M_\omega(v)](t), t\in[0,t_0]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Точнее говоря, всякое T_ω-периодическое по времени t решение системы (2.22) удовлетворяет уравнению (2.24) и, наоборот, всякое решение $v \in C([0,t_0],C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})), \alpha > 0$, уравнения (2.24), будучи T_ω-периодическим образом продолжено на ось $t \in R$, удовлетворяет (2.22).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Существуют такие положительные числа $\alpha,\mu \in (0,1), r$ и ω_0, что при $\omega > \omega_0$ оператор M_ω(см. (2.24)) в шаре $||v||_{C_\mu\left([0,t_0],C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})\right)} \leq r\omega^{-\frac{M-1}{2}}$ является оператором сжатия.*

Доказательство этой леммы базируется на результатах и методах монографии [16]. Из леммы и соотношений (2.20), (2.21) вытекает существование T_ω -периодического по времени t решения $u_\omega(x,t)$ задачи (2.1) и некоторая грубая оценка разности $u_\omega - \overset{M}{u}$ в слабой норме. Доведение этого результата до сформулированного в теореме осуществляется точно так же, как в [29].

3 Приложения. Некоторые иллюстративные примеры

В этой главе проиллюстрируем изложенную теорию на примерах.

3.1 Системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + (\cos x + \sqrt{\omega}\sin\omega t)\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sqrt{\omega}u_2\cos\omega t,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + \sqrt{\omega}\sin\omega t\frac{\partial u_2}{\partial x} = \sqrt{\omega}u_1\cos\omega t + u_1\sin\omega t + \sin t,\\
&u_1(x,0) = 0,\\
&u_2(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Асимптотику решения данной задачи будем искать в виде ряда:

$$\begin{aligned}
&u_1(x,t) = u_{10}(x,t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\Big(u_{11}(x,t) + v_{11}(x,t,\omega t)\Big) + \\
&+ \frac{1}{\omega}\Big(u_{12}(x,t) + v_{12}(x,t,\omega t)\Big) + \omega^{-3/2}\Big(u_{13}(x,t) + v_{13}(x,t,\omega t)\Big) + ...,\\
&u_2(x,t) = u_{20}(x,t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\Big(u_{21}(x,t) + v_{21}(x,t,\omega t)\Big) + \\
&+ \frac{1}{\omega}\Big(u_{22}(x,t) + v_{22}(x,t,\omega t)\Big) + \omega^{-3/2}\Big(u_{23}(x,t) + v_{23}(x,t,\omega t)\Big) + ...,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставляя ряд (3.2) в исходную систему (3.1), получим следующую задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{10}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial v_{11}}{\partial t}\right) + \sqrt{\omega}\frac{\partial v_{11}}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \frac{\partial v_{12}}{\partial t}\right) + \frac{\partial v_{12}}{\partial \tau} + \\
&\quad + \frac{1}{\omega^{3/2}}\left(\frac{\partial u_{13}}{\partial t} + \frac{\partial v_{13}}{\partial t}\right) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial v_{13}}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial u_{14}}{\partial t} + \frac{\partial v_{14}}{\partial t}\right) + \frac{1}{\omega}\frac{\partial v_{14}}{\partial \tau} +
\end{aligned}$$

$$
+\cos x\frac{\partial u_{10}}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\cos x\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\cos x\frac{\partial v_{11}}{\partial x}+\frac{1}{\omega}\cos x\frac{\partial u_{12}}{\partial x}+\frac{1}{\omega}\cos x\frac{\partial v_{12}}{\partial x}+
$$

$$
+\sqrt{\omega}\sin\tau\frac{\partial u_{10}}{\partial x}+\sin\tau\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\sin\tau\frac{\partial v_{11}}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\tau\frac{\partial u_{12}}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\tau\frac{\partial v_{12}}{\partial x}+
$$

$$
+\frac{1}{\omega}\sin\tau\frac{\partial u_{13}}{\partial x}+\frac{1}{\omega}\sin\tau\frac{\partial v_{13}}{\partial x}+...=
$$

$$
=\sqrt{\omega}\cos\tau u_{20}+\cos\tau u_{21}+\cos\tau v_{21}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\cos\tau u_{22}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\cos\tau v_{22}+
$$

$$
+\frac{1}{\omega}\cos\tau u_{23}+\frac{1}{\omega}\cos\tau v_{23}+...,
$$

$$
\frac{\partial u_{20}}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial t}+\frac{\partial v_{21}}{\partial t}\right)+\sqrt{\omega}\frac{\partial v_{21}}{\partial \tau}+\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial u_{22}}{\partial t}+\frac{\partial v_{22}}{\partial t}\right)+\frac{\partial v_{22}}{\partial \tau}+
$$

$$
+\frac{1}{\omega^{3/2}}\left(\frac{\partial u_{23}}{\partial t}+\frac{\partial v_{23}}{\partial t}\right)+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial v_{23}}{\partial \tau}+\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial u_{24}}{\partial t}+\frac{\partial v_{24}}{\partial t}\right)+\frac{1}{\omega}\frac{\partial v_{24}}{\partial \tau}+
$$

$$
+\sqrt{\omega}\sin\tau\frac{\partial u_{20}}{\partial x}+\sin\tau\frac{\partial u_{21}}{\partial x}+\sin\tau\frac{\partial v_{21}}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\tau\frac{\partial u_{22}}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\tau\frac{\partial v_{22}}{\partial x}+
$$

$$
+\frac{1}{\omega}\sin\tau\frac{\partial u_{23}}{\partial x}+\frac{1}{\omega}\sin\tau\frac{\partial v_{23}}{\partial x}+...=
$$

$$
=\sqrt{\omega}\cos\tau u_{10}+\cos\tau u_{11}+\cos\tau v_{11}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\cos\tau u_{12}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\cos\tau v_{12}+
$$

$$
+\frac{1}{\omega}\cos\tau u_{13}+\frac{1}{\omega}\cos\tau v_{13}+
$$

$$
+\sin\tau u_{10}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\tau u_{11}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\tau v_{11}+\frac{1}{\omega}\sin\tau u_{12}+\frac{1}{\omega}\sin\tau v_{12}+\sin t+..., \tag{3.3}
$$

с начальными условиями

$$
\begin{aligned}
&u_{10}(x,0)=0,\\
&u_{20}(x,0)=0,\\
&u_{1s}(x,0)=-v_{1s}(x,0,0),\\
&u_{2s}(x,0)=-v_{2s}(x,0,0), \quad s=1,2,3...
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Приравнивая коэффициенты при старшей степени $\omega^{1/2}$, получим

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial \tau} + \sin\tau \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = u_{20}\cos\tau,$$
$$\frac{\partial v_{21}}{\partial \tau} + \sin\tau \frac{\partial u_{20}}{\partial x} = u_{10}\cos\tau.$$

Откуда находим

$$\begin{aligned} v_{11} &= u_{20}\sin\tau + \cos\tau \frac{\partial u_{10}}{\partial x}, \\ v_{21} &= u_{10}\sin\tau + \cos\tau \frac{\partial u_{20}}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Далее, приравнивая коэффициенты при степени ω^0, получим следующую систему

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_{10}}{\partial t} + \frac{\partial v_{12}}{\partial \tau} + \cos x \frac{\partial u_{10}}{\partial x} + \sin\tau \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \sin\tau \frac{\partial v_{11}}{\partial x} = \\ &\qquad = u_{21}\cos\tau + v_{21}\cos\tau, \\ &\frac{\partial u_{20}}{\partial t} + \frac{\partial v_{22}}{\partial \tau} + \sin\tau \frac{\partial u_{21}}{\partial x} + \sin\tau \frac{\partial v_{21}}{\partial x} = \\ &\qquad = u_{11}\cos\tau + v_{11}\cos\tau + u_{10}\sin\tau + \sin t. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Усредняя данные соотношения, находим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_{10}}{\partial t} + \cos x \frac{\partial u_{10}}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial u_{20}}{\partial t} = \sin t, \\ &u_{10}(x,0) = 0, \\ &u_{20}(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{10} &= 0, \\ u_{20} &= 1 - \cos t. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Тогда с учетом (3.5) находим

$$\begin{aligned} v_{11} &= \sin\tau - \sin\tau\cos t, \\ v_{21} &= 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Вычитая из (3.6) усредненные уравнения (3.7), получим следующие соотношения

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_{12}}{\partial \tau} + \sin\tau\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = u_{21}\cos\tau,\\
&\frac{\partial v_{22}}{\partial \tau} + \sin\tau\frac{\partial u_{21}}{\partial x} = u_{11}\cos\tau + \cos\tau\sin\tau - \cos\tau\sin\tau\cos t.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Решая данную систему, получаем, что

$$
\begin{aligned}
&v_{12} = \cos\tau\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + u_{21}\sin\tau,\\
&v_{22} = \cos\tau\frac{\partial u_{21}}{\partial x} + u_{11}\sin\tau + \frac{1}{2}\Big(\cos t - 1\Big)\cos^2\tau.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Приравнивая в (3.3)-(3.4) коэффициенты при степени $\omega^{-1/2}$, имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial v_{11}}{\partial t} + \frac{\partial v_{13}}{\partial \tau} + \cos x\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \cos x\frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \sin\tau\frac{\partial u_{12}}{\partial x} + \sin\tau\frac{\partial v_{12}}{\partial x} = \\
= \cos\tau u_{22} + \cos\tau v_{22},\\
\frac{\partial u_{21}}{\partial t} + \frac{\partial v_{21}}{\partial t} + \frac{\partial v_{23}}{\partial \tau} + \sin\tau\frac{\partial u_{22}}{\partial x} + \sin\tau\frac{\partial v_{22}}{\partial x} = \\
= \cos\tau u_{12} + \cos\tau v_{12} + \sin\tau u_{11} + \sin\tau v_{11}.
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

Далее, получим из нее усредненную систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \cos x\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_{21}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_{21}}{\partial x},\\
&\frac{\partial u_{21}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t,\\
&u_{11}(x,0) = 0,\\
&u_{21}(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Откуда после упрощения получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \cos x\frac{\partial u_{11}}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial u_{21}}{\partial t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t,\\
&u_{11}(x,0) = 0,\\
&u_{21}(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Решая данную систему, находим

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0, \\ u_{21} &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Подставляя эти решения в (3.11), определяем, что

$$\begin{aligned} v_{12} &= \frac{1}{2}(t - \sin t)\sin\tau, \\ v_{22} &= \frac{1}{2}(\cos t - 1)\cos^2\tau. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Тогда из соотношений (3.12), (3.13) получаем, что

$$\begin{aligned} &\sin\tau\sin t + \frac{\partial v_{13}}{\partial\tau} + \sin\tau\frac{\partial u_{12}}{\partial x} = \\ &\qquad = \cos\tau u_{22} + \frac{1}{2}\left(\cos t - 1\right)\cos^3\tau, \\ &\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{\partial v_{23}}{\partial\tau} + \sin\tau\frac{\partial u_{22}}{\partial x} = \\ &\qquad = \cos\tau u_{12} + \frac{1}{2}\left(t - \sin t\right)\sin\tau\cos\tau + \sin^2\tau - \sin^2\tau\cos t. \end{aligned}$$

Откуда, интегрируя, находим следующие соотношения

$$\begin{aligned} v_{13} &= \sin\tau u_{22} + \cos\tau\frac{\partial u_{21}}{\partial x} + \cos\tau\sin t + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\cos t - 1\right)\left(\frac{3}{4}\sin\tau + \frac{1}{4}\sin\tau - \frac{1}{3}\sin^3\tau\right), \\ v_{23} &= \sin\tau u_{12} + \cos\tau\frac{\partial u_{22}}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t\right)\tau + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t\right)\pi - \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(t - \sin t\right)\cos^2\tau + \left(1 - \cos t\right)\left(\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2}\sin\tau\cos\tau\right). \end{aligned}$$

Приравнивая в (3.3)-(3.4) коэффициенты при более младших степенях ω и следуя вышеприведенной схеме, можно найти любое количество начальных членов асимптотики решения задачи (3.1).

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\sin\tau - \sin\tau\cos t\right) + \frac{1}{2\omega}(t - \sin t)\sin\tau + ..., \\ u_2(x,t) &= 1 - \cos t + \frac{1}{2\sqrt{\omega}}\left(t - \sin t\right) + \frac{1}{2\omega}(\cos t - 1)\cos^2\tau + ... \end{aligned}$$

При этом, согласно теореме 5 из §1.5, в частности, для $p = 1$ получим, что для любого ограниченного параллелепипеда $\Pi_0 = [a, b] \times [0, T] \subset \mathbb{R}^2$, найдутся такие положительные постоянные c_1 и ω_1, что при $\omega > \omega_1$ для решения $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^*$ задачи Коши (3.1) равномерно в Π_0 выполняются оценки

$$|u_1(x,t) - \frac{1}{\sqrt{\omega}} (\sin\omega t - \sin\omega t \cos t) \,| \leqslant \frac{c_1}{\omega},$$
$$|u_2(x,t) - 1 + \cos t - \frac{1}{2\sqrt{\omega}} (t - \sin t) \,| \leqslant \frac{c_1}{\omega}.$$

3.2 Параболические системы. Условие периодичности

В данном параграфе мы рассмотрим задачу, в котором граничные условия заменены условием периодичности решения. Такая постановка позволяет избежать появления в решении пограничных слагаемых.

Рассмотрим параболическую систему, заданную в пространстве $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sqrt{\omega} u_2 \sin\omega t + \sin x, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_1 \sin\omega t. \end{aligned} \tag{3.17}$$

В качестве граничных условий возьмём условие 2π-периодичности с нулевыми средними $u_{1,2}$ по x и поставим задачу о $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодических по времени t решениях

$$\begin{aligned} & u_i(x, t + \frac{2\pi}{\omega}) = u_i(x,t), \\ & u_i(x + 2\pi, t) = u_i(x,t), \\ & < u_i(x,t) >_x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u_i(x,t) dx = 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $(x,t) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2.$

Тогда будем искать вектор-функции

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}, (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

такие, что

$$\begin{aligned} u_i(x,t) = u_{i0}(x,t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\Big(u_{i1}(x) + v_{i1}(x,\omega t)\Big) + \\ + \frac{1}{\omega}\Big(u_{i2}(x) + v_{i2}(x,\omega t)\Big) + \omega^{-3/2}\Big(u_{i3}(x) + v_{i3}(x,\omega t)\Big) + ..., \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{ik}(x,\tau)d\tau = 0, \tag{3.20}$$

где $i = 1, 2, k \in \mathbb{N}, \tau = \omega t.$

Подставляя выражение (3.19) в исходную систему (3.17), получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega}\frac{\partial v_{11}}{\partial \tau} + \frac{\partial v_{12}}{\partial \tau} + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial v_{13}}{\partial \tau} + ... = \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x^2}\right) + \\ + \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{12}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\omega^{3/2}}\left(\frac{\partial^2 u_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{13}}{\partial x^2}\right) + ... + \\ + \sqrt{\omega}u_{20}\sin\tau + (u_{21} + v_{21})\sin\tau + \frac{1}{\sqrt{\omega}}(u_{22} + v_{22})\sin\tau + \\ + \frac{1}{\omega}(u_{23} + v_{23})\sin\tau + ... + \sin x, \\ \sqrt{\omega}\frac{\partial v_{21}}{\partial \tau} + \frac{\partial v_{22}}{\partial \tau} + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial v_{23}}{\partial \tau} + ... = \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{21}}{\partial x^2}\right) + \\ + \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\omega^{3/2}}\left(\frac{\partial^2 u_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{23}}{\partial x^2}\right) + ... + \\ + u_{10}\sin\tau + \frac{1}{\sqrt{\omega}}(u_{11} + v_{11})\sin\tau + \frac{1}{\omega}(u_{12} + v_{12})\sin\tau + \\ + \frac{1}{\omega^{3/2}}(u_{13} + v_{13})\sin\tau + ..., \end{aligned} \tag{3.21}$$

где $\tau = \omega t$.

Приравняем в (3.21) коэффициенты при одинаковых степенях ω. Для $\omega^{1/2}$ получим:

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial \tau} = u_{20} \sin \tau,$$
$$\frac{\partial v_{21}}{\partial \tau} = 0.$$

С учетом (3.20) однозначно находим

$$v_{11} = -u_{20} \cos \tau, \qquad v_{21} = 0. \tag{3.22}$$

При ω^0 имеем:

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} + u_{21} \sin \tau + \sin x, \qquad \frac{\partial v_{22}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} + u_{10} \sin \tau. \tag{3.23}$$

Усредняя, получим

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} + \sin x = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} = 0. \tag{3.24}$$

В силу условий (3.18) выводим

$$u_{10} = \sin x,$$
$$u_{20} = 0.$$

Тогда в виду (3.22)

$$v_{11} = 0.$$

Вычитая из (3.23) равенства (3.24), получим

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial \tau} = u_{21} \sin \tau,$$
$$\frac{\partial v_{22}}{\partial \tau} = \sin x \sin \tau.$$

Откуда

$$v_{12} = -u_{21}\cos\tau, \qquad v_{22} = -\sin x\cos\tau. \tag{3.25}$$

Выпишем теперь равенства, которые получаются при $\omega^{-1/2}$:

$$\frac{\partial v_{13}}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x^2} + (u_{22} + v_{22})\sin\tau,$$
$$\frac{\partial v_{23}}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{21}}{\partial x^2} + (u_{11} + v_{11})\sin\tau.$$

С учетом (3.25) эта система примет следующий вид

$$\frac{\partial v_{13}}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} + u_{22}\sin\tau - \sin x\sin\tau\cos\tau, \qquad \frac{\partial v_{23}}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2} + u_{11}\sin\tau. \tag{3.26}$$

Усредняя, получим

$$0 = \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} - \sin x\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\tau\cos\tau d\tau, \qquad 0 = \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2}. \tag{3.27}$$

Откуда

$$u_{11} = 0, \qquad u_{21} = 0. \tag{3.28}$$

Следовательно

$$v_{12} = 0.$$

Вычитая из (3.26) соотношения (3.27), имеем

$$\frac{\partial v_{13}}{\partial\tau} = u_{22}\sin\tau - \sin x\sin\tau\cos\tau,$$
$$\frac{\partial v_{23}}{\partial\tau} = 0.$$

Интегрируя, находим

$$
\begin{aligned}
&v_{13} = -u_{22}\cos\tau + \frac{1}{4}\sin x\cos\tau,\\
&v_{23} = 0.
\end{aligned}
$$

Далее рассмотрим равенства, которые получаются при ω^{-1}:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_{14}}{\partial\tau} &= \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{12}}{\partial x^2},\\
\frac{\partial v_{24}}{\partial\tau} &= \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x^2} + u_{12}\sin\tau.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Применив операцию усреднения к этим соотношениям, выводим

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x^2} &= 0,\\
\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x^2} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Откуда

$$
\begin{aligned}
u_{12} &= 0,\\
u_{22} &= 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
v_{13} = \frac{1}{4}\sin x\cos\tau.
$$

Рассмотрим теперь разность (3.29) и (3.30):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_{14}}{\partial\tau} &= \frac{\partial^2 v_{12}}{\partial x^2},\\
\frac{\partial v_{24}}{\partial\tau} &= \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x^2}.
\end{aligned}
$$

Учитывая равенства (3.25), находим

$$
\begin{aligned}
v_{14} &= 0,\\
v_{24} &= \sin x\sin\tau.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$u_1(x,t) = \sin x + \frac{\sin x \cos \tau}{4\omega^{3/2}} + ...,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{\sin x \cos \tau}{\omega} + \frac{\sin x \sin \tau}{\omega^2} + ...$$

Ясно, что, следуя вышеизложенной схеме нахождения неизвестных функций $u_{ij}, v_{ik}, j \geqslant 0, k \geqslant 1, i = 1,2$, можно найти любое количество членов рядов (3.19).

При этом, согласно результатам главы 2 существуют положительные числа $\alpha \in (0,1)$, r и ω_0, такие что при $\omega > \omega_0$ задача (3.17) имеет единственное в шаре $||u - u_0||_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}} \leq r$ вещественное $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодическое по времени t решение $u_\omega(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^*$. Это решение бесконечно дифференцируемо по (x,t) и при $\omega > \omega_0$, $k \geq 0$ выполняется оценка

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin x \\ \\ -\dfrac{\sin x \cos \omega t}{\omega} \end{pmatrix} \right\|_{C^{k,\frac{k}{2}}} \leq c_k\, \omega^{\frac{k-3}{2}}, \quad c_k = const > 0.$$

3.3 Параболические системы. Условие Дирихле

Рассмотрим теперь параболическую систему вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sqrt{\omega} u_2 \cos \omega t + u_1 u_2 \sin \omega t, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \sqrt{\omega} u_1 \sin x \cos \omega t + \cos x, \end{aligned} \tag{3.31}$$

где $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, с следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= 0, \\ u_i(1,t) &= 0, i = 1,2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Введем новые координаты:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= x\sqrt{\omega},\\ \rho_2 &= (1-x)\sqrt{\omega}.\end{aligned}$$

Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i0}(x) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\Bigg(u_{i1}(x) + v_{i1}(x,\omega t) + w^-_{i1}(\rho_1) + w^+_{i1}(\rho_2) + \\ &+ z^-_{i1}(\rho_1,\omega t) + z^+_{i1}(\rho_2,\omega t)\Bigg) + \frac{1}{\omega}\Bigg(u_{i2}(x) + v_{i2}(x,\omega t) + \\ &+ w^-_{i2}(\rho_1) + w^+_{i2}(\rho_2) + z^-_{i2}(\rho_1,\omega t) + z^+_{i2}(\rho_2,\omega t)\Bigg) + \\ &+ \frac{1}{\omega^{3/2}}\Bigg(u_{i3}(x) + v_{i3}(x,\omega t) + w^-_{i3}(\rho_1) + w^+_{i3}(\rho_2) + \\ &+ z^-_{i3}(\rho_1,\omega t) + z^+_{i3}(\rho_2,\omega t)\Bigg) + \dots, \end{aligned} \tag{3.33}$$

где $\lim\limits_{\rho_i\to\infty} w^+_{jk}(\rho_i) = \lim\limits_{\rho_i\to\infty} w^-_{jk}(\rho_i) = 0,\ k \geqslant 1, i, j = 1, 2.$

Подставляя выражения (3.33) в исходную задачу(3.31),(3.32), получим

$$\begin{gathered} \sqrt{\omega}\left(\frac{\partial v_{11}}{\partial\tau} + \frac{\partial z^-_{11}}{\partial\tau} + \frac{\partial z^+_{11}}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial v_{12}}{\partial\tau} + \frac{\partial z^-_{12}}{\partial\tau} + \frac{\partial z^+_{12}}{\partial\tau} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial v_{13}}{\partial\tau} + \frac{\partial z^-_{13}}{\partial\tau} + \frac{\partial z^+_{13}}{\partial\tau}\right) + \dots = \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x^2}\right) + \\ + \sqrt{\omega}\left(\frac{\partial^2 w^-_{11}}{\partial\rho_1^2} + \frac{\partial^2 w^+_{11}}{\partial\rho_2^2} + \frac{\partial^2 z^-_{11}}{\partial\rho_1^2} + \frac{\partial^2 z^+_{11}}{\partial\rho_2^2}\right) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{12}}{\partial x^2}\right) + \\ + \frac{\partial^2 w^-_{12}}{\partial\rho_1^2} + \frac{\partial^2 w^+_{12}}{\partial\rho_2^2} + \frac{\partial^2 z^-_{12}}{\partial\rho_1^2} + \frac{\partial^2 z^+_{12}}{\partial\rho_2^2} + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial^2 w^-_{13}}{\partial\rho_1^2} + \frac{\partial^2 w^+_{13}}{\partial\rho_2^2} + \frac{\partial^2 z^-_{13}}{\partial\rho_1^2} + \frac{\partial^2 z^+_{13}}{\partial\rho_2^2}\right) + \\ + \dots + \sqrt{\omega}u_{20}\cos\tau + \left(u_{21} + v_{21} + w^-_{21} + w^+_{21} + z^-_{21} + z^+_{21}\right)\cos\tau + \\ + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(u_{22} + v_{22} + w^-_{22} + w^+_{22} + z^-_{22} + z^+_{22}\right)\cos\tau + \\ + \frac{1}{\omega}\left(u_{23} + v_{23} + w^-_{23} + w^+_{23} + z^-_{23} + z^+_{23}\right)\cos\tau + \dots + u_{20}u_{10}\sin\tau + \end{gathered}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(u_{20}u_{11}+u_{20}v_{11}+u_{20}w_{11}^{-}+u_{20}w_{11}^{+}+u_{20}z_{11}^{-}+u_{20}z_{11}^{+}\right)\sin\tau+$$
$$+\frac{1}{\omega}\left(u_{20}u_{21}+u_{20}v_{12}+u_{20}w_{12}^{-}+u_{20}w_{12}^{+}+u_{20}z_{12}^{-}+u_{20}z_{12}^{+}\right)\sin\tau+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(u_{10}u_{21}+u_{10}v_{21}+u_{10}w_{21}^{-}+u_{10}w_{21}^{+}+u_{10}z_{21}^{-}+u_{10}z_{21}^{+}\right)\sin\tau+$$
$$+\frac{1}{\omega}\Big(u_{21}u_{11}+u_{21}v_{11}+u_{21}w_{11}^{-}+u_{21}w_{11}^{+}+u_{21}z_{11}^{-}+u_{21}z_{11}^{+}+$$
$$+v_{21}u_{11}+v_{21}v_{11}+v_{21}w_{11}^{-}+v_{21}w_{11}^{+}+v_{21}z_{11}^{-}+v_{21}z_{11}^{+}+$$
$$+w_{21}^{-}u_{11}+w_{21}^{-}v_{11}+w_{21}^{-}w_{11}^{-}+w_{21}^{-}w_{11}^{+}+w_{21}^{-}z_{11}^{-}+w_{21}^{-}z_{11}^{+}+$$
$$+w_{21}^{+}u_{11}+w_{21}^{+}v_{11}+w_{21}^{+}w_{11}^{-}+w_{21}^{+}w_{11}^{+}+w_{21}^{+}z_{11}^{-}+w_{21}^{+}z_{11}^{+}+$$
$$+z_{21}^{-}u_{11}+z_{21}^{-}v_{11}+z_{21}^{-}w_{11}^{-}+z_{21}^{-}w_{11}^{+}+z_{21}^{-}z_{11}^{-}+z_{21}^{-}z_{11}^{+}+$$
$$+z_{21}^{+}u_{11}+z_{21}^{+}v_{11}+z_{21}^{+}w_{11}^{-}+z_{21}^{+}w_{11}^{+}+z_{21}^{+}z_{11}^{-}+z_{21}^{+}z_{11}^{+}\Big)\sin\tau+$$
$$+\frac{1}{\omega}\left(u_{10}u_{22}+u_{10}v_{22}+u_{10}w_{22}^{-}+u_{10}w_{22}^{+}+u_{10}z_{22}^{-}+u_{10}z_{22}^{+}\right)\sin\tau+...,$$
$$\sqrt{\omega}\left(\frac{\partial v_{21}}{\partial\tau}+\frac{\partial z_{21}^{-}}{\partial\tau}+\frac{\partial z_{21}^{+}}{\partial\tau}\right)+\frac{\partial v_{22}}{\partial\tau}+\frac{\partial z_{22}^{-}}{\partial\tau}+\frac{\partial z_{22}^{+}}{\partial\tau}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial v_{23}}{\partial\tau}+\frac{\partial z_{23}^{-}}{\partial\tau}+\frac{\partial z_{23}^{+}}{\partial\tau}\right)+...=\frac{\partial^2u_{20}}{\partial x^2}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial^2u_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_{21}}{\partial x^2}\right)+$$
$$+\sqrt{\omega}\left(\frac{\partial^2w_{21}^{-}}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial^2w_{21}^{+}}{\partial\rho_2^2}+\frac{\partial^2z_{21}^{-}}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial^2z_{21}^{+}}{\partial\rho_2^2}\right)+\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2u_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_{22}}{\partial x^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2w_{22}^{-}}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial^2w_{22}^{+}}{\partial\rho_2^2}+\frac{\partial^2z_{22}^{-}}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial^2z_{22}^{+}}{\partial\rho_2^2}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\frac{\partial^2w_{23}^{-}}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial^2w_{23}^{+}}{\partial\rho_2^2}+\frac{\partial^2z_{23}^{-}}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial^2z_{23}^{+}}{\partial\rho_2^2}\right)+$$
$$+...+\sqrt{\omega}u_{10}\cos\tau\sin x+\left(u_{11}+v_{11}+w_{11}^{-}+w_{11}^{+}+z_{11}^{-}+z_{11}^{+}\right)\cos\tau\sin x+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(u_{12}+v_{12}+w_{12}^{-}+w_{12}^{+}+z_{12}^{-}+z_{12}^{+}\right)\cos\tau\sin x+$$
$$+\frac{1}{\omega}\left(u_{13}+v_{13}+w_{13}^{-}+w_{13}^{+}+z_{13}^{-}+z_{13}^{+}\right)\cos\tau\sin x+...+\cos x, \quad (3.34)$$

где $\tau=\omega t$.

Приравнивая коэффициенты при разных степенях ω, для $\omega^{1/2}$ получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_{11}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{11}^{-}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{11}^{+}}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 w_{11}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 w_{11}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\frac{\partial^2 z_{11}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 z_{11}^{+}}{\partial \rho_2^2}+u_{20}\cos\tau,\\
&\frac{\partial v_{21}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{21}^{-}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{21}^{+}}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 w_{21}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 w_{21}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\frac{\partial^2 z_{21}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 z_{21}^{+}}{\partial \rho_2^2}+u_{10}\cos\tau\sin x.
\end{aligned}\tag{3.35}$$

Аналогично, выпишем соотношения, которые получаются при ω^0:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_{12}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{12}^{-}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{12}^{+}}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_{12}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 w_{12}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\frac{\partial^2 z_{12}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 z_{12}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\\
&\qquad+\Big(u_{21}+v_{21}+w_{21}^{-}+w_{21}^{+}+z_{21}^{-}+z_{21}^{+}\Big)\cos\tau+u_{20}u_{10}\sin\tau,\\
&\frac{\partial v_{22}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{22}^{-}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{22}^{+}}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_{22}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 w_{22}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\frac{\partial^2 z_{22}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 z_{22}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\\
&\qquad+\Big(u_{11}+v_{11}+w_{11}^{-}+w_{11}^{+}+z_{11}^{-}+z_{11}^{+}\Big)\cos\tau\sin x+\cos x
\end{aligned}\tag{3.36}$$

и при $\omega^{-1/2}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_{13}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{13}^{-}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{13}^{+}}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_{13}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 w_{13}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\\
&+\frac{\partial^2 z_{13}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 z_{13}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\Big(u_{22}+v_{22}+w_{22}^{-}+w_{22}^{+}+z_{22}^{-}+z_{22}^{+}\Big)\cos\tau+\\
&+\Big(u_{20}u_{11}+u_{20}v_{11}+u_{20}w_{11}^{-}+u_{20}w_{11}^{+}+u_{20}z_{11}^{-}+u_{20}z_{11}^{+}\Big)\sin\tau+\\
&+\Big(u_{10}u_{21}+u_{10}v_{21}+u_{10}w_{21}^{-}+u_{10}w_{21}^{+}+u_{10}z_{21}^{-}+u_{10}z_{21}^{+}\Big)\sin\tau,\\
&\frac{\partial v_{23}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{23}^{-}}{\partial \tau}+\frac{\partial z_{23}^{+}}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_{21}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_{23}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 w_{23}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\\
&+\frac{\partial^2 z_{23}^{-}}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial^2 z_{23}^{+}}{\partial \rho_2^2}+\Big(u_{12}+v_{12}+w_{12}^{-}+w_{12}^{+}+z_{12}^{-}+z_{12}^{+}\Big)\cos\tau\sin x.
\end{aligned}\tag{3.37}$$

Из начальных условий следует, что

$$
\begin{aligned}
&u_{10}(0) = u_{20}(0) = 0,\\
&u_{10}(1) = u_{20}(1) = 0,\\
&u_{is}(0) = -w_{is}^{-}(0),\\
&u_{is}(1) = -w_{is}^{+}(0),\\
&v_{is}(0,\tau) = -z_{is}^{-}(0,\tau),\\
&v_{is}(1,\tau) = -z_{is}^{+}(0,\tau),
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

где $s \geqslant 1, i = 1, 2$.

Из (3.35) находим, что

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial \tau} = u_{20} \cos \tau.$$

Следовательно,

$$v_{11} = u_{20} \sin \tau.$$

Также из (3.35) получаем

$$\frac{\partial v_{21}}{\partial \tau} = u_{10} \cos \tau \sin x.$$

Откуда

$$v_{21} = u_{10} \sin x \sin \tau.$$

Далее, из соотношений

$$\frac{\partial^2 w_{11}^{-}}{\partial \rho_1^2} = 0,$$

$$\lim_{\rho \to \infty} w_{11} = 0$$

определяем, что

$$w_{11}^{-} = 0.$$

Аналогично,

$$w_{11}^{+} = w_{21}^{-} = w_{21}^{+} = 0.$$

Из равенств

$$\frac{\partial z_{11}^{-}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z_{11}^{-}}{\partial \rho_1^2},$$

$$z_{11}^{-}(0,\tau) = -v_{11}(0,\tau) = u_{20}(0)\sin\tau = 0,$$

$$\lim_{\rho\to\infty} z_{11}^{-} = 0.$$

получим, что

$$z_{11}^{-} = 0.$$

Так же найдем

$$z_{11}^{+} = z_{21}^{-} = z_{21}^{+} = 0.$$

При ω^0 усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &0 = \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{21}\cos\tau d\tau, \\ &u_{10}(0) = u_{10}(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Так как интеграл в первом равенстве равен нулю, то решение $u_{10} = 0$. Следовательно $v_{21} = 0$.

Составим теперь задачу для нахождения u_{20}.

$$\begin{aligned} &0 = \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} + \frac{\sin x}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{11}\cos\tau d\tau + \cos x \equiv \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} + \cos x, \\ &u_{20}(0) = u_{20}(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Решая (3.40), находим, что

$$u_{20} = -\cos x + C_1 x + C_0 \equiv -\cos x + (\cos 1 - 1)x + 1. \tag{3.41}$$

Вычитая из системы (3.36) соответствующие усредненные задачи (3.39), (3.40), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_{12}}{\partial \tau} = u_{21}\cos\tau,\\
&\frac{\partial v_{22}}{\partial \tau} = u_{11}\cos\tau\sin x + \Big(-\cos x + (\cos 1 - 1)x + 1\Big)\sin\tau\cos\tau\sin x,\\
&v_{12}(0,\tau) = -z_{12}^{-}(0,\tau),\\
&v_{12}(1,\tau) = -z_{12}^{+}(0,\tau),
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Отсюда находим

$$
\begin{aligned}
&v_{12} = u_{21}\sin\tau,\\
&v_{22} = u_{11}\sin\tau\sin x - \frac{1}{4}\Big(-\cos x + (\cos 1 - 1)x + 1\Big)\sin x\cos\tau.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Для погранслойных функций имеем

$$0 = \frac{\partial^2 w_{12}^{-}}{\partial \rho_1^2},$$

$$\lim_{\rho\to\infty} w_{12}^{-} = 0.$$

Следовательно

$$w_{12}^{-} = 0.$$

Аналогично

$$w_{12}^{+} = w_{22}^{-} = w_{22}^{+} = 0.$$

Далее, имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z_{12}^{-}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z_{12}^{-}}{\partial \rho_1^2} + z_{21}^{-}\cos\tau \equiv \frac{\partial^2 z_{12}^{-}}{\partial \rho_1^2},\\
&z_{12}^{-}(0,\tau) = -v_{12}(0,\tau) = u_{21}(0)\sin\tau \equiv -w_{21}^{-}(0)\sin\tau = 0.
\end{aligned}
$$

Откуда следует, что

$$z_{12}^{-} = 0.$$

Аналогично можно установить, что

$$z_{12}^{+} = z_{22}^{-} = z_{22}^{+} = 0.$$

Усредняя равенства (3.37), получим систему

$$0 = \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{22}\cos\tau d\tau + u_{20}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{11}\sin\tau d\tau + u_{10}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{21}\sin\tau d\tau,$$

$$0 = \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2} + \sin x\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_{12}\cos\tau d\tau.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} - \frac{\sin x}{8\pi}\left(1 + C_1 x - \cos x\right)\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\tau d\tau + u_{20}^2\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\tau d\tau + 0, \\ 0 &= \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2} + \sin x\frac{1}{2\pi}u_{21}\int\limits_0^{2\pi}\sin\tau\cos\tau d\tau \equiv \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Так как

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos\tau d\tau = \int\limits_0^{2\pi}\sin\tau d\tau = 0,$$

то, интегрируя равенства (3.44), получим следующую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} =& \frac{\sin x}{8} + \frac{C_1 x\sin x}{8} - \frac{\sin x\cos x}{8} + \frac{1}{2} + C_1 x + \\ &+ \frac{1}{2}C_1^2 x^2 - C_1 x\cos x - \cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x, \\ \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2} =& 0 \end{aligned} \tag{3.45}$$

с следующими начальными условиями (см. (3.38))

$$\begin{aligned} u_{11}(0) &= -w_{11}^{-}(0) = 0, \\ u_{21}(0) &= -w_{21}^{-}(0) = 0, \\ u_{11}(1) &= -w_{11}^{+}(0) = 0, \\ u_{21}(1) &= -w_{21}^{+}(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Решая данную систему, найдем

$$u_{11} = -\frac{\sin x}{8} - \frac{C_1(x\sin x + 2\cos x)}{8} + \frac{\sin x\cos x}{32} + \frac{x^2}{4} + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_1^2x^4}{24} -$$

$$-C_1(2\sin x - x\cos x) + \cos x + \frac{x^2}{8} - \frac{\cos^2 x}{8} + C_3x + C_2 \equiv$$

$$\equiv I(x) + C_3x + C_2,$$

$$u_{21} = 0,$$

где

$$C_2 = -\frac{2\cos 1 + 5}{8}, \tag{3.47}$$

$$C_3 = \frac{2\cos 1 + 5}{8} - I(1). \tag{3.48}$$

Вычитая из равенств (3.37) усредненные (3.45), получим систему

$$\frac{\partial v_{13}}{\partial \tau} = \sin\tau\cos x + u_{22}\cos\tau + u_{11}\sin x\sin\tau\cos\tau -$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\cos x + C_1x + 1\right)\sin x\cos^2\tau +$$

$$+ u_{20}u_{11}\sin\tau + u_{20}^2\sin^2\tau + u_{21}u_{10}\sin\tau + u_{10}^2\sin x\sin^2\tau,$$

$$\frac{\partial v_{23}}{\partial \tau} = u_{12}\cos\tau\sin x + u_{21}\sin\tau\cos\tau\sin x$$

откуда найдем решения v_{13}, v_{23}.

Далее, составим систему для нахождения погранслойных функций

$$0 = \frac{\partial^2 w_{13}^-}{\partial \rho_1^2} + w_{22}^-\cos\tau + u_{20}w_{11}^-\sin\tau + w_{21}^-u_{10}\sin\tau \equiv \frac{\partial^2 w_{13}^-}{\partial \rho_1^2},$$

$$\lim_{\rho\to\infty} w_{13}^- = 0.$$

Следовательно

$$w_{13}^- = 0.$$

Аналогично можно доказать, что

$$w_{13}^+ = w_{23}^- = w_{23}^+ = 0.$$

Далее, выпишем задачу для погранслойной функии z_{13}^{-}

$$\frac{\partial z_{13}^{-}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z_{13}^{-}}{\partial \rho_1^2} + z_{22}^{-} \cos\tau + u_{20} z_{11}^{-} \sin\tau + z_{21}^{-} u_{10} \sin\tau \equiv \frac{\partial^2 z_{13}^{-}}{\partial \rho_1^2},$$

$$z_{13}^{-}(0,\tau) = -v_{13}(0,\tau),$$

$$\lim_{\rho\to\infty} z_{13}^{-} = 0.$$

Таким образом, мы получаем очередную разрешимую задачу. Следуя далее вышеизложенной схеме, можно получить любое количество начальных членов асимптотики

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\Bigg(-\frac{\sin x}{8} - \frac{C_1(x\sin x + 2\cos x)}{8} + \frac{\sin x\cos x}{32} + \frac{x^2}{4} + \frac{C_1 x^3}{6} + \\ + \frac{C_1^2 x^4}{24} - C_1(2\sin x - x\cos x) + \cos x + \frac{x^2}{8} - \frac{\cos^2 x}{8} + C_3 x + C_2 + \\ + \sin\tau\,(1 - \cos x + C_1 x)\Bigg) + ...,$$

$$u_2(x,t) = 1 - \cos x + C_1 x + ...,$$

где константы C_1, C_2 и C_3 определены в (3.41),(3.47) и (3.48) соответственно.

При этом, в силу главы 2 существуют такие положительные числа $\alpha \in (0,1)$, r и ω_0, что при $\omega > \omega_0$ задача (3.31), (3.32) имеет единственное в шаре $||u - u_0||_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}} \le r$ вещественное $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодическое по времени t решение $u_\omega = (u_1(x,t), u_2(x,t))^*$. Это решение бесконечно дифференцируемо по (x,t) и при всех $\omega > \omega_0$, $k \ge 0$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overset{1}{u}_1(x,t) \\ \overset{1}{u}_2(x,t) \end{pmatrix} \right\|_{C^{k,\frac{k}{2}}} \le c_k\, \omega^{\frac{k-2}{2}}, \;\; c_k = const > 0,$$

где

$$\overset{1}{u}_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\Bigg(-\frac{\sin x}{8} - \frac{C_1(x\sin x + 2\cos x)}{8} + \frac{\sin x\cos x}{32} + \frac{x^2}{4} + \frac{C_1 x^3}{6} +$$
$$+\frac{C_1^2 x^4}{24} - C_1(2\sin x - x\cos x) + \cos x + \frac{x^2}{8} - \frac{\cos^2 x}{8} + C_3 x + C_2 +$$
$$+\sin\tau\,(1 - \cos x + C_1 x)\Bigg),$$

$$\overset{1}{u}_2(x,t) = 1 - \cos x + C_1 x,$$

C_1, C_2 и C_3 - константы, определенные в ходе построения асимптотики.

Список литературы

[1] Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд. АН УССР, 1945. 139 с.

[2] Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. института строит. механики АН УССР. 1950. Вып. 4. С. 9–34.

[3] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев: Изд. АН УССР, 1937. 366 с.

[4] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

[5] Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев.: Наукова думка, 1971. 440 с.

[6] Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд. МГУ, 1971. 507 с.

[7] Филатов А. Н. Метод усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент: Изд. Фан, 1971. 279 с.

[8] Журавлёв В. Ф. Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.

[9] Хома Г. П. Теорема об усреднении для гиперболических систем первого порядка // Укр. мат. журн. 1970. Т. 22, № 5. С. 699–704.

[10] Хома Г. П. Про непреревну залежність розв’язку гіперболічної системи від параметра // Доповіді АН УРСР. 1970. сер. А 7, С. 615–617.

[11] Хасьминский Р.З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теор. вероят. и ее прим. 1963. Т. 8, № 1. С. 3–25.

[12] Эйдельман С. Д., Сирченко З.Ф. О применимости принципа усреднения к решениям задачи Коши для параболических уравнений из классов неограниченных функций // Аналит. мет. исслед. реш. нелин. диф. ур. Киев. 1975. С. 189–197.

[13] Симоненко И. Б. Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений // Матем. сб., 1970. Т. 81(123), № 3, С. 53–61

[14] Симоненко И. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстроосциллирующих сил и для других параболических уравнений // Матем. сб. 1972. Т. 87, № 2. С. 236-253.

[15] Симоненко И. Б. Старшие приближения метода осреднения для абстрактных параболических уравнений // Матем. сб., 1973. Т. 92(134), № 4, С. 541–549

[16] Симоненко И. Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1989. 111 с.

[17] Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21, № 5. С. 588–599.

[18] Юдович В. И. Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. Т. 354, № 5. С. 622–624.

[19] Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. С. 304–325.

[20] Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 3. С. 26-158.

[21] Левенштам В. Б. Усреднение квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью. Экспоненциальная дихотомия // Изв. РАН. Сер. матем., 1992. Т. 56, № 4. С. 813–851.

[22] Левенштам В. Б. Старшие приближения метода усреднения для квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью в случае задачи Коши // Матем. заметки, 1999. Т. 65, № 4. С. 562–572.

[23] Левенштам В. Б. Принцип усреднения в случае задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений с переменной главной частью // Сиб. матем. журн., 2000. Т. 41, № 4. С. 839–857.

[24] Левенштам В. Б. О методе усреднения для квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // Изв. вузов. Матем., 2000. № 7. С. 22–30.

[25] Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующими по времени коэффициентами // Изв. вузов. Матем., 2002. № 5. С. 36–43

[26] Левенштам В. Б. Старшие приближения метода усреднения для параболических начально-краевых задач с быстро осциллирующими коэффициентами // Дифференц. уравнения, 2003. Т. 39, № 10. С. 1395–1403

[27] Левенштам В. Б. Построение старших приближений метода усреднения для параболических начально-краевых задач методом пограничного слоя // Изв. вузов. Матем., 2004. № 3. С. 41–45.

[28] Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами. I, II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 6, 8. С. 761–770, 1084–1091.

[29] Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование параболических задач с большими высокочастотными слагаемыми // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 805-821.

[30] Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН. Сер. мат. 2006. Т. 70, № 2. С. 25–56.

[31] Левенштам В. Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. Ростов-н/Д: Изд. ЮФУ, 2008.

[32] Басистая Д. А., Левенштам В. Б. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. 2004. С. 46–48.

[33] Капикян А. К. Усреднение уравнений в частных производных первого порядка: труды участ. международн. школы-семинара по геом. и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо: ЮФУ, 2008. С. 224-226.

[34] Капикян А. К., Левенштам В. Б. Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми // Жур. выч. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 11. С. 2024–2041.

[35] Капикян А. К., Левенштам В. Б. Асимптотика периодического решения системы параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы матем. гидродин. 2009. С. 106–112.

[36] Назаров А. К. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений 1-го порядка с большим параметром: тез. докл. международн. науч. конф. "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - IV". Ростов н/Д: ЮФУ, 2014. С. 101-102.

[37] Назаров А. К. Усреднение уравнений в частных производных первого порядка // Эколог. вестник науч. центров ЧЭС. 2015. №4. С. 62-68.

[38] Назаров А. К. Полная асимптотика решения системы полулинейных дифференциальных уравнений первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми: материалы конференции "VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике". Ростов н/Д: ДГТУ, 2016. С. 35.

[39] Назаров А. К. Системы дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Асимптотика решения: сбор. тез. международн. конф. "XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-

симпозиум по спектральным и эволюционным задачам". Батилиман: КФУ, 2016. С. 52-53.

[40] Ивлева Н.С., Левенштам В.Б. Асимптотическое интегрирование параболических систем с большим параметром // Изв. вуз. Сев.-Кавк. регион. Естеств. Науки. 2012. №6. С.26-30.

[41] Хатламаджиян Г.Л. Развитие теории метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Хатламаджиян Гаспар Лусгенович, Южный федеральный университет. - Ростов-н/Д, 2008. - 167 с.

[42] Хатламаджиян Г.Л. Обоснование метода усреднения для одного класса параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Эколог. вестник науч. центров ЧЭС. 2013. №1. С. 68-75.

[43] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

[44] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 272 с.

[45] Вишик М. И.,Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. Наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3-122.

[46] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. П., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.