Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Южный Федеральный Университет"

На правах рукописи

НАЗАРОВ Артур Карапетович

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЗАДАЧ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2017 г.

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Южный Федеральный Университет".

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент

Левенштам Валерий Борисович

Официальные оппоненты:

Глушак Александр Васильевич,

доктор физико-математических наук, профессор,

ВГАОУ ВО "Белгородский государственный

национальный исследовательский университет",

профессор

Кудрявцев Олег Евгеньевич,

доктор физико-математических наук, доцент,

Ростовский филиал ГКОУ ВО

"Российская таможенная академия",

заведующий кафедрой информатики и

информационных таможенных технологий

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО "Воронежский государственный университет"**

Защита диссертации состоится 20 февраля 2018г. в 17:00 на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЮФУ по адресу: 344103, г. Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 21-ж, и в сети "Интернет"по адресу:
http://hub.sfedu.ru/diss/announcement/8fac4cab-1d62-49ef-bfa5-7f7133e9ab7f/

Автореферат разослан "____" ____________ 201__ г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 212.208.29 Кряквин Вадим Донатович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертационной работе рассматриваются некоторые асимптотические задачи для полулинейных гиперболических систем уравнений первого порядка и параболических систем уравнений второго порядка с любым числом пространственных переменных, содержащих осциллирующие по времени с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые. При этом амплитуды некоторых слагаемых большие — пропорциональны $\sqrt{\omega}$. Такие слагаемые называются большими высокочастотными. Для указанных задач применен и обоснован метод усреднения[1], который называют еще методом усреднения Крылова-Боголюбова, а также разработаны и обоснованы эффективные алгоритмы построения полных асимптотик решений (в классической теории метода усреднения частичные суммы асимптотик называют старшими приближениями).

Фундамент классической математической теории метода усреднения построен Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым. В дальнейшем теория Крылова - Боголюбова была распространена на новые классы не только обыкновенных дифференциальных уравнений, но и уравнений в частных производных[2]. Результаты для обыкновенных дифференциальных уравнений изложены в целом ряде известных монографий: Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского 1974г., В.М. Волосова и Б.И. Моргунова 1971г., А.Н. Филатова

[1]См. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд. АН УССР, 1945. 139 с.; Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

[2]См., например, Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев.: Наукова думка, 1971; Симоненко И.Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1989. 111 с. и библиографии в этих монографиях.

1971г., В.Ф. Журавлева и Д.М. Климова 1988г. и других авторов. С некоторыми результатами, относящимися к уравнениям с частными производными, можно познакомиться по указанным в сноске 2 на стр. 2 монографиям Ю.А. Митропольского 1971г., И.Б. Симоненко 1989г. и другим. Отметим еще близкие к диссертационной теме работы Г.П. Хомы[3] по гиперболическим системам, а также исследования по параболическим уравнениям и системам С.Д. Эйдельмана и З.Ф. Сирченко 1975г., Р.З. Хасьминского 1963г., И.Б. Симоненко 1970-1973г., В.Б. Левенштама 1976-2004г. В этих работах представлены, в основном, уравнения, содержащие быстро осциллирующие по времени слагаемые, амплитуды которых равномерно относительно $\omega \gg 1$ ограничены (исключение составляют некоторые результаты И.Б. Симоненко и В.Б. Левенштама, относящиеся к задаче конвекции в высокочастотном силовом поле — там в уравнении Навье-Стокса для скорости присутствует слагаемое, зависящее от температуры и пропорциональное высокой частоте осцилляций). Последнее обстоятельство (ограниченность амплитуд) и представляет существенное отличие этих систем от рассматриваемых в диссертации.

Родоначальницей задач об усреднении дифференциальных уравнений, содержащих высокочастотные слагаемые с большими амплитудами, является задача о перевернутом маятнике с быстро осциллирующей точкой подвеса, исследованная Н.Н. Боголюбовым[4] и П.Л. Капицей[5].

[3]См. Хома Г. П. Теорема об усреднении для гиперболических систем первого порядка // Укр. мат. журн. 1970. Т. 22, № 5. С. 699–704.; Хома Г. П. Про непреревну залежність розв'язку гіперболічної системи від параметра // Доповіді АН УРСР. 1970. сер. А 7, С. 615–617.

[4]См. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. института строит. механики АН УССР. 1950. Вып. 4. С. 9–34.

[5]См. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса //

В 1991г. В.И. Юдович на своем семинаре в Ростовском государственном университете (ныне ЮФУ) приступил к развитию теории метода усреднения для дифференциальных уравнений, содержащих высокочастотные слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты (большие высокочастотные слагаемые). Он впервые рассмотрел отдельные классы эволюционных дифференциальных уравнений первого и второго порядков по времени, содержащих осциллирующие с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, пропорциональные $\sqrt{\omega}$ и ω соответственно. Позже В.Б. Левенштам со своими учениками, под влиянием лекций и работ В. И. Юдовича[6], также стал заниматься аналогичными задачами. При этом все проводимые исследования сопровождались математическим обоснованием. Часть этих исследований, к которым относятся и результаты для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, полученные совместно с соискателем, опубликована в монографии В.Б. Левенштама[7].

Цели работы состоят в развитии теории метода усреднения Крылова-Боголюбова для полулинейных систем уравнений в частных производных, содержащих большие высокочастотные слагаемые: для гиперболических систем уравнений первого порядка и параболических систем уравнений второго порядка.

Научная новизна и практическая значимость. Все результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, являются новыми, носят теоретический характер. Полученные результаты можно применять (в со-

ЖЭТФ. 1951. Т. 21, № 5. С. 588–599.

[6]См., например, Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 3. С. 26-158.

[7]См. Левенштам В. Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2008.

четании с численными методами) для приближенного решения соответствующих классов систем дифференциальных уравнений в частных производных с большими высокочастотными слагаемыми. Их можно использовать также при чтении спецкурсов по асимптотическим методам.

Методы исследования. В диссертационной работе используются, в основном, следующие методы: классические подходы теории метода усреднения Крылова-Боголюбова, методы теории уравнений в частных производных, метод двухмасштабных разложений, метод пограничного слоя Вишика-Люстерника, а также методы функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

1. В пространственно-временной полосе $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ рассмотрим полулинейную гиперболическую систему уравнений первого порядка с быстро осциллирующими по времени членами, среди которых имеются большие — пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций с нулевым средним. При этом коэффициенты при производных по пространственным переменным могут а) не зависеть от номера уравнения, а могут б) зависеть от него. Для этой системы с начальным условием (Коши) при определенных дополнительных условиях построена усредненная (предельная) задача, не содержащая большого параметра (частоты). Предполагается, что усредненная задача разрешима. Тогда в каждом конечном пространственно-временном параллелепипеде $\Pi_0 = D_0 \times [0,T]$, где $D_0 \subset \mathbb{R}^n$, однозначно разрешима возмущенная задача, и решения возмущенной и усредненной задач равномерно в Π_0 асимптотически близки, т.е. обоснован метод усреднения.

Рассмотрим указанную в предыдущем абзаце задачу для гиперболической системы, для которой, как там отмечено, может быть выполнено условие а), а может — условие б). Предполагается, что входные данные системы удовлетворяют определенным дополнительным условиям периодичности по быстрому времени и гладкости по остальным переменным. В случае б), кроме того, предполагается, что большие слагаемые коэффициентов при производных не зависят от номера уравнения. Для рассматриваемой задачи разработан эффективный алгоритм построения полной асимптотики решения возмущенной задачи в каждом конечном пространственно-временном параллелепипеде Π_0. Указанный алгоритм обоснован, т.е. получены равномерные в Π_0 асимптотические оценки близости решения возмущенной задачи и частичных сумм его асимптотики.

2. В цилиндре $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, где Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с бесконечно гладкой границей, рассматривается система полулинейных параболических уравнений 2-го порядка с быстро осциллирующими по времени (осцилляции в виде тригонометрического полинома) сколь угодно гладкими слагаемыми, среди которых имеются большие — пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций и обладающие нулевым средним. Поставлена задача о периодических по времени решениях с однородными граничными условиями Дирихле. По исходной задаче построена усредненная задача. В предположении существования стационарного невырожденного решения $u_0(x)$ последней доказано существование и относительная единственность решения $u_\omega(x,t)$ исходной задачи, разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики решения u_ω. При этом в гёльдеровых нормах установлены соответствующие асимптотические оценки разностей: $u_\omega - u_0$ (обоснование метода усреднения) и $u_\omega - \overset{M}{u}$, $M \in \mathbb{N}$, где $\overset{M}{u}$ — частичные суммы асимптотики (обоснование асимптотики).

Отметим, что в диссертации результаты первого абзаца п.1 установлены даже немного в более общей ситуации. Здесь ради краткости и наглядности мы незначительно их огрубили.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались в Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (п. Абрау-Дюрсо, 2008г.), на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения IV"(г.Ростов-на-Дону, 2014г.), на Международной научной конференции "VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике"(г.Ростов-на-Дону, 2016г.), а также на семинаре кафедры вычислительной математики и математической физики под руководством М.Ю. Жукова (г.Ростов-на-Дону, ЮФУ, 2016г.) и семинаре "Асимптотические методы в нелинейном анализе" под руководством В.Б. Левенштама (г.Ростов-на-Дону, ЮФУ, 2017г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[7]. Работы [1], [2] выполнены совместно с научным руководителем В.Б. Левенштамом. В них В.Б. Левенштаму принадлежат постановка задачи, выбор методики исследования и общее руководство работой. А.К. Назарову принадлежит реализация этих методик.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 46 источников. Общий объем диссертации 123 страницы.

Содержание работы

Во введении дается общая характеристика работы и приводятся основные результаты диссертации.

Глава 1 содержит 5 параграфов. В §1.1 доказана теорема об усреднении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми, которая обобщает теорему, доказанную Басистой Д. А. и Левенштамом В. Б.[8] Этот результат является вспомогательным и используется в последующих параграфах. Сформулируем его.

Пусть $D-$ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. На множестве $\Omega = \{(x,t,\tau)\colon x \in D,\ t \in [0,T] \subset \mathbb{R},\ \tau \in [0,+\infty)\}$ рассматривается зависящая от большого параметра ω задача Коши для системы n нелинейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t), t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0, \tag{2}$$

где $t_0 \in [0,T]$, $x^0 \in D$. Здесь $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ — вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Предполагается, что

а) существует такая вектор-функция F, определенная на множестве $D\times [0,T]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x,t) \in D\times[0,T]$

$$F(x,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (f(x,t,\tau) + \chi(x,t,\tau))\, d\tau,$$

[8]См. Басистая Д. А., Левенштам В. Б. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. 2004. С. 46–48.

где

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta)\,d\theta;$$

б) для всех $(x^0,t_0)\in D\times[0,T]$ усредненная задача

$$\frac{dy}{dt}=F(y,t),\;\; t\in[0,T],$$
$$y(t_0)=x^0$$

имеет решение $\overset{\circ}{y}(t)\equiv\overset{\circ}{y}(x^0,t_0,t)$ со значениями в D;

в) равномерно относительно $(y,t)\in D\times[0,T]$ существуют пределы:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{1/4}}\int\limits_0^N \varphi_i(y,t,\tau)\,d\tau=0,\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{1/4}}\int\limits_0^N \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}(y,t,\tau)\,d\tau=0,$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{1/2}}\int\limits_0^N \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(y,t,\tau)\,d\tau=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

При указанных и некоторых естественных дополнительных условиях доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для любого замкнутого подмножества D_1 области D и любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\omega_0>0$, что для произвольной точки $(x^0,t_0)\in D_1\times[0,T]$ и произвольного $\omega>\omega_0$ существует единственное решение $x_\omega(t)$ задачи (1), (2), и при этом для всех $t\in[0,T]$ справедлива оценка*

$$|x_\omega(t)-\overset{\circ}{y}(t)|<\varepsilon.$$

В §1.2 описан и обоснован метод усреднения для систем m дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с любым числом $n+1$ независимых переменных, содержащих осциллирующие по времени с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, среди которых имеются большие — пропорциональные $\sqrt{\omega}$ — с нулевым средним. Приведем формулировку соответствующего результата.

В параллелепипеде $\Pi_0 = D_0 \times [0, T]$, где D_0 — любой открытый ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и $T > 0$, рассматривается зависящая от большого параметра ω задача

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j(x, t, \omega t) + \sqrt{\omega} \mu_j(x, t, \omega t) \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ &= f_i(x, t, \omega t, u) + \sqrt{\omega} \varphi_i(x, t, \omega t, u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \end{aligned} \tag{3}$$

$$u(x, 0) = g(x), \tag{4}$$

где $t \in [0, T]$, $\lambda_j(x, t, \tau)$, $\mu_j(x, t, \tau)$, $f_i(x, t, \tau, u)$, $\varphi_i(x, t, \tau, u)$ — известные функции ($1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m$), $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$, u — искомая вектор-функция в $\mathbb{R}^m$, компоненты u_i которой зависят от переменных x и t. Решение $u(x, t)$ задачи (3),(4) в Π_0 естественным образом строится (определяется) методом характеристик (в рассматриваемых нами случаях каждая, начинающаяся в Π_0 проекция характеристики "идет назад"до прихода в некоторую точку $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}^n$).

Предполагается, что выполняются следующие условия, в которых U_0 — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^m$, D и U — любые ограниченные параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $\Omega = \Pi \times [0, +\infty)$, $G = \Omega \times U_0$, $\Omega_1 = D \times [0, T] \times [0, +\infty)$, $G_1 = \Omega_1 \times U_0$:

1) компоненты $\lambda_j(x, t, \tau)$ и $\mu_j(x, t, \tau)$ ($1 \leqslant j \leqslant n$) вектор-функций $\lambda(x, t, \tau)$ и $\mu(x, t, \tau)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2 \mu_j}{\partial x_k \partial x_\ell}(x, t, \tau)$ ($1 \leqslant j, k, \ell \leqslant n$) 2-го порядка опре-

делены и непрерывны на множестве Ω;

2) компоненты $f_i(x,t,\tau,u)$ и $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ вектор-функций $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial u_j \partial u_k}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial u_j \partial x_\ell}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\ell \partial x_r}(x,t,\tau,u)$, $(1 \leqslant i,j,k \leqslant m,\ 1 \leqslant \ell, r \leqslant n)$ 2-го порядка определены и непрерывны на множестве G;

3) компоненты вектор-функций $\lambda(x,t,\tau), \mu(x,t,\tau)$,

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,t,\tau) \int\limits_0^\tau \mu(x,t,\theta)\, d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial \lambda}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве Ω_1;

4) компоненты вектор-функций $f(x,t,\tau,u)$, $\varphi(x,t,\tau,u)$,

$$\psi(x,t,\tau,u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u) \int\limits_0^\tau \varphi(x,t,\theta,u)\, d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau,u) \int\limits_0^\tau \mu(x,t,\theta)\, d\theta$$

и матриц-функций $\frac{\partial f}{\partial u}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x,t,\tau,u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau,u)$ равномерно ограничены на множестве G_1;

5) производные $\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \mu_j}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \mu_j}{\partial t}$ $(1 \leqslant j,k \leqslant n)$ удовлетворяют условиям Липшица по x с постоянной, не зависящей от $(x,t,\tau) \in \Omega_1$;

6) производные $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ удовлетворяют условиям Липшица по x, u с постоянной, не зависящей от $(x,t,\tau,u) \in G_1$;

7) функции $\lambda_j(x,t,\tau)$ и $\chi_j(x,t,\tau)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ непрерывны по $t \in [0,T]$ равномерно относительно $(x,t,\tau) \in \Omega_1$;

8) функции $f_i(x,t,\tau,u)$ и $\varphi_i(x,t,\tau,u)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ непрерывны по $t \in [0,T]$ равномерно относительно $(x,t,\tau,u) \in G_1$;

9) равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \mu_j(x,t,\tau)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k}(x,t,\tau)\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \mu_j}{\partial t}(x,t,\tau)\,d\tau = 0,$$

$1 \leqslant j,k \leqslant n$;

10) равномерно относительно $(x,t,u) \in D \times [0,T] \times U$ существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \varphi_i(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int\limits_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t,\tau,u)\,d\tau = 0,$$

$1 \leqslant i,j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

11) существует такая вектор-функция $\Lambda(x,t)$, определенная на Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x,t) \in D \times [0,T]$ справедливы предельные равенства для ее компонент Λ_j:

$$\Lambda_j(x,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (\lambda_j(x,t,\tau) + \chi_j(x,t,\tau))\,d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

12) существует такая вектор-функция $F(x,t,u)$, определенная на множестве $\Pi \times U_0$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, что равномерно относительно $(x,t,u) \in D \times [0,T] \times U_0$ справедливы предельные равенства для ее компонент F_j:

$$F_j(x,t,u) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N (f_j(x,t,\tau,u) + \psi_j(x,t,\tau,u))\,d\tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant m;$$

13) для любого начального условия $(\overset{\circ}{y}, t_0) \in \Pi$ задача

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(y, t), \quad y(t_0) = \overset{\circ}{y}$$

имеет на участке $t \in [0, T]$ решение $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^*$.

Наряду с возмущенной задачей (3),(4) в параллелепипеде Π_0 рассматривается во всем слое Π усредненная задача

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = F_i(x, t, v), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$
$$v(x, t)\big|_{t=0} = g(x),$$

относительно которой предполагается следующее:

14) данная задача имеет решение $v(x, t) \subset U_0$.

Теорема. *Для любого открытого ограниченного параллелепипеда D_0 в $\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ существует единственное решение $u_\omega(x, t)$ задачи (3),(4) в Π_0, и для любых $(x, t) \in \Pi_0$ выполняется неравенство*

$$|u_\omega(x, t) - v(x, t)| < \varepsilon.$$

В §1.3 рассматриваются системы того же вида, что и в §1.2, со следующим дополнительным ограничением: их члены периодичны по переменной $\tau = \omega t$ и бесконечно дифференцируемы вместе с начальной вектор-функцией по остальным переменным (см. 15)-17) ниже). Для этих систем разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики решения, который базируется на методе двухмасштабных разложений.

В §1.3 вначале построена формальная асимптотика в виде

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)), \quad (x,t) \in \Pi, \qquad (5)$$

частичные суммы которой имеют вид

$$\overset{p}{u}(x,t) = u^0(x,t) + \sum_{k=1}^{p} \omega^{-k/2}(u^k(x,t) + v^k(x,t,\omega t)),$$

где вектор-функции $v^k(x,t,\tau)$ по переменной τ являются l периодическими и обладают нулевым средним:

$$< v^k(x,t,\tau) > \equiv \frac{1}{l}\int\limits_0^l v^k(x,t,\tau)d\tau = 0.$$

Определим два вида задач:

(A) - задача о l-периодическом с нулевым средним решением системы уравнений вида

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = f(\tau),$$

где $f(\tau)$ - известная l-периодическая с нулевым средним вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$;

(B) - задача Коши для системы m линеных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x,t)u + c(x,t), \quad (x,t) \in \Pi,$$

$$u(x,0) = d(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где коэффициенты $a_j(x,t), b(x,t), c(x,t)$ и $d(x)$ известны.

Предполагается, что данные задачи (3),(4) помимо приведенных выше условий 1)-14) удовлетворяют следующим:

15) вектор-функции $\lambda(x,t,\tau)$ и $\mu(x,t,\tau)$ вместе с их частными производными по (x,t) любого порядка определены и непрерывны на множестве Ω, а также $l(>0)$-периодичны по τ;

16) вектор-функции $f(x,t,\tau,u)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ вместе с их частными производными по (x,t,u) любого порядка определены и непрерывны на множестве G, а также l-периодичны по τ;

17) средние вектор-функций $\mu(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau,u)$ по τ равны нулю:

$$< \mu(x,t,\tau) >\equiv \frac{1}{l}\int\limits_0^l \mu(x,t,\tau)d\tau = 0, < \varphi(x,t,\tau,u) >= 0.$$

Теорема. *1. Построение любой частичной суммы формальной асимптотики (5) решения задачи (3),(4) в слое* Π *сводится к решению конечного числа линейных задач видов (A) и (B).*

2. Для любого $p = 0,1,2,...$ *и любого ограниченного параллелепипеда* $\Pi_0 = D_0 \times [0,T], D_0 \subset \mathbb{R}^n$, *найдутся такие положительные постоянные* c_p *и* ω_p, *что при* $\omega > \omega_p$ *для решения* $u_\omega(x,t)$ *задачи Коши (3),(4) равномерно в* Π_0 *выполняется оценка*

$$|u_\omega(x,t) - \overset{p}{u}(x,t)| \leqslant c_p \omega^{-(p+1)/2}.$$

В §1.4 обобщен результат из §1.2 на случай, когда коэффициенты при производных могут зависеть от номера уравнения. А именно, при выполнении некоторых естественных дополнительных условий для систем вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \big[\lambda_{ij}(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\mu_{ij}(x,t,\omega t)\big]\frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$
$$= f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{6}$$

$$u(x,0) = g(x), \tag{7}$$

где $t \in [0,T]$, u — искомая вектор-функция, обоснован метод усреднения.

В §1.5 построена с обоснованием полная асимптотика решений в случае, когда коэффициенты при производных могут зависеть от номера уравнения. Однако в общем случае с помощью разработанного в §1.3 алгоритма асимптотику построить не удается, поэтому в этом параграфе рассматривается система вида:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \big[\lambda_{ij}(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\mu_j(x,t,\omega t)\big] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$
$$= f_i(x,t,\omega t,u) + \sqrt{\omega}\varphi_i(x,t,\omega t,u), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$
$$u(x,0) = g(x),$$

для которой построена с обоснованием полная асимптотика решения.

Отметим, что в рассматриваемых в главе 1 системах коэффициенты при производных $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, неизвестной вектор-функции $u(x,t)$ являются диагональными матрицами с вещественными элементами (функциями). В связи с этим мы говорим о гиперболических системах.

Отметим еще раз две работы Г.П. Хомы (см. сноску 3 на странице 3). В них метод усреднения обоснован для гиперболических систем с двумя переменными, не содержащих больших высокочастотных слагаемых. Вопрос о построении полной асимптотики решения (даже о втором ее члене) в этих работах не рассматривался.

Перейдем к главе 2. Она содержит один параграф (§2.1), в котором обоснован метод усреднения и построена с обоснованием полная асимптотика периодического по времени решения первой краевой задачи для системы параболических уравнений.

В цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, где Ω - ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с C^∞ - гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается зависящая от большого параметра ω задача о $\dfrac{2\pi}{\omega}$ -периодических по времени t решениях системы параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{0\le|s|\le m} f_s(x,u)e^{is\omega t} + \sqrt{\omega} \sum_{0<|s|\le m} \varphi_s(x,u)e^{is\omega t}, \tag{8}$$

$$u|_\Gamma = 0,$$

где $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}$, $a_{ij}(x)$ — вещественные числа, $L_j(x)$ — квадратные матрицы порядка N с вещественными элементами, $f_s(x,u)$ и $\varphi_s(x,u)$ — N-мерные векторы, удовлетворяющие условиям:

$$\overline{f}_s(x,u) = f_{-s}(x,u), \quad \overline{\varphi}_s(x,u) = \varphi_{-s}(x,u),$$

$$(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

Чертой сверху мы обозначаем операцию комплексного сопряжения.

Функции a_{ij}, элементы матриц-функций L_j и компоненты вектор-функций f_s и φ_s бесконечно дифференцируемы по своим аргументам и, кроме того, выполнены условия:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\; \xi_i\xi_j > \alpha \sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2,$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha > 0$ не зависит от ξ.

Наряду с возмущенной задачей (8) рассмотрим следующую задачу, которую будем называть усредненной:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\frac{\partial v}{\partial x_j} +$$

$$+ f_0(x,v) + \sum_{1\le|s|\le m} is^{-1}\, \frac{\partial \varphi_s(x,v)}{\partial v}\, \varphi_{-s}(x,v), \tag{9}$$

$$v|_\Gamma = 0,$$

где $\dfrac{\partial \varphi_s}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial \varphi_{s_i}}{\partial v_j}\right)_{i,j=1}^{N}$ - матрица Якоби.

Предполагается, что эта задача имеет вещественное невырожденное стационарное решение $u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),\ \alpha \in (0,1)$.

Теорема. *1.Существуют такие положительные числа $\alpha \in (0,1)$, r и ω_0, что при $\omega > \omega_0$ задача (8) имеет единственное в шаре $||u - u_0||_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}} \le r$ вещественное $\dfrac{2\pi}{\omega}$ - периодическое по времени t решение $u_\omega(x,t)$. Это решение бесконечно дифференцируемо по (x,t) и при всех $k \ge 0$ удовлетворяет неравенству*

$$||u_\omega - u_0||_{C^{k,\frac{k}{2}}} \le c_k\ \omega^{\frac{k-1}{2}},\ \ c_k = const > 0,$$

2. Для любого натурального числа M найдется такое положительное число ω_M, что при $\omega > \omega_M$ эффективно строится вектор-функция $\overset{M}{u}(x,t),\ (x,t) \in Q$, со значениями в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющая при всех $k \ge 0$ оценке

$$||\ u_\omega - \overset{M}{u}||_{C^{k,\frac{k}{2}}} \le c(M,k)\ \ \omega^{\frac{k-M-1}{2}}, \quad c(M,k) = const > 0.$$

Здесь $C^{k,k/2}$ — обычное гёльдерово пространство вектор-функций, заданных в Q, гладкости k по пространству и $k/2$ — по времени.

Под эффективностью понимается тот факт, что построение каждого приближения $\overset{M}{u}$ сводится к решению M линейных эллиптических однозначно разрешимых задач описанного перед формулировкой теоремы вида.

Отметим, что для параболических и абстрактных параболических уравнений (системы гл. 2 относятся к последним) с большими высокочастотными слагаемыми обоснование метода усреднения по определенным нормам имеется в работе В.Б. Левенштама[9]. В его же работе[10] построена с обоснованием полная асимптотика периодического по времени решения первой краевой задачи для скалярных параболических уравнений.

В главе 3 содержатся иллюстративные примеры к теории глав 1,2.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук В.Б. Левенштаму за постановку задач, руководство и внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

Статьи в научных журналах из перечня ВАК

[1] Капикян А. К., Левенштам В. Б. Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми // Жур. выч. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48, № 11. С. 2024–2041.

[2] Капикян А. К., Левенштам В. Б. Асимптотика периодического решения системы параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы матем. гидродин. 2009. С. 106–112.

[3] Назаров А. К. Усреднение уравнений в частных производных первого порядка // Эколог. вестник науч. центров ЧЭС. 2015, №4. С. 62-68.

Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

[9] Левенштам В.Б. Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН сер. мат. 2006. Т. 70, № 2. С. 25-56.

[10] Левенштам В.Б. Асимптотическое интегрирование параболических задач с большими высокочастотными слагаемыми // Сиб. мат. жур. 2005. Т. 46, № 1. С. 805-821.

[4] Капикян А. К. Усреднение уравнений в частных производных первого порядка: труды участ. международн. школы-семинара по геом. и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо: ЮФУ, 2008. С. 224-226.

[5] Назаров А. К. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений 1-го порядка с большим параметром: тез. докл. международн. науч. конф. "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - IV". Ростов н/Д: ЮФУ, 2014. С. 101-102.

[6] Назаров А. К. Полная асимптотика решения системы полулинейных дифференциальных уравнений первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми: материалы конференции "VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике". Ростов н/Д: ДГТУ, 2016. С. 35.

[7] Назаров А. К. Системы дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми. Асимптотика решения: сбор. тез. международн. конф. "XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам". Батилиман: КФУ, 2016. С. 52-53.