КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

На правах рукописи

БАРАН ИННА ВИКТОРОВНА

СИММЕТРИЧЕСКИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Орлов Игорь Владимирович

Симферополь – 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Диссертация посвящена построению основ теории симметрических компактных субдифференциалов отображений в банаховых пространствах. Рассмотрены приложения построенной теории к некоторым вопросам теории тригонометрических рядов, теории вероятностей и теории экстремальных задач.

Симметрические локальные характеристики отображений, с самого их возникновения, занимают особую позицию в вещественном анализе. Их появление связано со знаменитым методом Римана обобщенного суммирования тригонометрических рядов (1860 г.), основанным на вычислении симметрических производных второго порядка. Результаты Б. Римана, Г. Шварца, Г. Кантора, Ш.–Ж. Валле-Пуссена, на протяжении последующих десятилетий, позволили существенно продвинуться в исследовании вопроса о единственности разложения функции в тригонометрический ряд.

В 1908 г. Ш.–Ж. Валле-Пуссен [185] ввел понятие обобщенных симметрических производных высших порядков, которое в дальнейшем нашло некоторые применения, в частности, в работах Р. Джеймса ([151], 1954 г.). Упомянутые работы концентрировались вокруг методов обобщенного суммирования тригонометрических и других рядов ([4], [52], [55], [56], [117], [190]).

На протяжении последних пяти десятилетий конечномерный симметрический анализ регулярно привлекает к себе внимание математиков из различных стран. Отметим, в частности, работы C. E. Aull ([130], 1967), B. S. Thomson ([183], 1994), P. Sahoo, T. Riedel ([178], 1998), S. O. Hockett, D. Bock ([149], 2005), P. D. Lax, M. S. Terrell ([155], 2014), A. M. Brito da Cruz, N. Martins, D. F. Torres ([136], 2013), C. L. Belna, M. J. Evans, P. D. Humke ([134], 1978), P. R. Mercer ([157], 2014) и другие.

В то же время в дискретном анализе на протяжении XX века получили широкое применение симметрические, или так называемые центральные, разностные отношения (central differences) как первого так и высших порядков (см., например, [137], [163], [188]).

Однако симметрическое дифференциальное исчисление, в отличие от классического (см., например, [1], [57], [189]), не получило обобщения на бесконечномерный случай — аналог исчисления Гато–Адамара–Фреше для симметрического случая не был построен. Как представляется, одной из причин этого служит очевидная невозможность обобщить классические условия локального экстремума (начиная с леммы Ферма) на симметрические производные функционалов.

Такая тенденция сохранилась и после появления, в связи с задачами негладкой оптимизации, субдифференциального исчисления. Исследование классов выпуклых функций и функций максимума привело к развитию выпуклого анализа и теории минимакса. Важным средством для изучения таких отображений послужили различные виды субдифференциалов ([18], [42], [65], [66], [67] – [70], [135], [138], [145], [176]).

Широко известны разработки в области негладкого анализа Р. Рокафеллара [101, 174], Ф. Мишеля и Ж.-П. Пено [159], Ф. Кларка [60, 138], А.Д. Иоффе и Ж.-П. Пено [150], Ж.-П. Обена [80], Х. Сассманна [181] и др. В настоящее время негладкий анализ является хорошо развитой областью математики ([39], [40], [43], [44], [74], [140] – [142], [158] – [162], [174], [175]).

Различные типы субдифференциалов, начиная с классических работ Ж. Моро, Р. Рокафеллара, Ф. Кларка и других ученых в 70-х гг. прошлого века, вводились и применялись многими авторами. Отметим, в частности, работы таких отечественных математиков и математиков отечественного происхождения, как В. М. Тихомиров, А. Д. Иоффе, Б. Н. Пшеничный, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, В. Н. Малоземов, М. Л. Гольдман, Е. С. Половинкин, Б. Ш. Мордухович, А. В. Арутюнов и другие ([2], [34], [35], [40], [43], [54], [66], [67], [156], [76], [96], [98], [114]). Особо отметим работы В.Ф. Демьянова [42], Дж. Борвейна [135], а также монографии Б. Ш. Мордуховича [161, 162] и А. Визинтина [186], в которых рассматриваются приложения субдифференциального исчисления.

В последнее десятилетие в работах И. В. Орлова и его учеников Ф. С. Стонякина, З. И. Халиловой (см. [81] – [94], [104] – [109], [119] – [123], [164] – [171]) была построена и нашла значимые применения теория так называемых компактных субдифференциалов, основным моментом которой является использование для отображений в банаховых пространствах в качестве субдифференциалов многозначных сублинейных и полисублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями.

Вначале был рассмотрен случай скалярного аргумента, что дало возможность получить полезные результаты в теории векторного интегрирования (проблема Радона-Никодима) и нашло отражение в монографиях И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина (см. [84], [89]).

В работах Орлова И. В. и Халиловой З. И. теория компактных субдифференциалов была распространена на случай векторного аргумента, что дало возможность построить компактные субдифференциалы второго и более высоких порядков в нормированных пространствах (см., например, [87], [88], [120], [121], [168]). Данные результаты основаны на понятии банахова выпуклого конуса. Такой подход позволил найти негладкие условия экстремума, в том числе для интересного класса вариационных задач с так называемым субгладким интегрантом.

Отметим, в связи с этим, что специальные типы выпуклых конусов в функциональных пространствах активно исследуются в работах отечественных математиков М. Л. Гольдмана ([34], [35], [147]), П. П. Забрейко ([49], [50]), В. Д. Степанова ([103], [180]), Э. Г. Бахтигареевой ([19], [48]) и других.

Следует отметить также тесную связь субдифференциального анализа с негладкими задачами вариационного исчисления и оптимального управления ([21], [22], [28], [39], [40], [44], [47], [53], [55], [58], [60], [62], [77], [99], [112], [126], [138], [140], [141], [142], [154], [173], [187], [190]).

Отметим также серьезные трудности в применении субдифференциальных методов высших порядков. Эти трудности связаны, прежде всего, со сложными коническими операторными структурами, возникающими при индуктивном определении субдифференциалов высших порядков.

В связи с этим, наше внимание было обращено на то обстоятельство, что классические симметрические производные высших порядков не требуют индуктивного определения и определяются через «однократный предел». Это позволяет в данном случае переход от дифференциалов к субдифференциалам также осуществлять для любого порядка по единой схеме, минуя «встроенные» проблемы индуктивного подхода.

В прикладном плане целесообразность построения симметрической версии субдифференциального исчисления мы связываем со следующими возможностями приложений, которые реализуются в данной работе. Первая из них связана с заменой в известном методе суммирования Римана второй симметрической производной от функции Римана на второй симметрический субдифференциал с соответствующим многозначным результатом обобщенного суммирования.

Вторая возможность связана с применением симметрических характеристик в экстремальных задачах «на втором этапе»: для уже найденной точки экстремума определить оптимальное (в некотором смысле) линейное направление движения к точке экстремума. В этой связи следует упомянуть о двух известных подходах в негладком случае. Первый из них (метод Демьянова–Рубинова) известен также как «метод наискорейшего спуска» (по радиусу) ([36], [38], [41], [43]) к точке минимума и в вычислительном плане близок к градиентному методу поиска минимума. Второй подход, известный как «метод оврагов Гельфанда» ([27], [31], [32]), связан с переходом через точку экстремума по диаметру.

В нашей работе понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами, что позволяет применить для исследования подобных экстремальных задач симметрический анализ.

В связи с вышеизложенным диссертационная работа содержит следующие основные блоки:

1. Построение основ симметрического дифференциального исчисления в банаховых пространствах (как необходимой базы для следующего этапа работы).

2. Построение основ симметрического субдифференциального исчисления в банаховых пространствах.

3. Приложения в гармоническом анализе, в теории вероятностей и теории экстремальных задач.

При реализации этого плана мы исходили из симметрического аналога компактного субдифференциала, однако, ввиду неиндуктивности симметрического подхода, дальнейшая конструкция симметрического исчисления существенно отличается от «точного» случая, рассмотренного в упомянутых выше работах И. В. Орлова, Ф. С. Стонякина, З. И. Халиловой.

Цель и задачи работы.

Объектом исследования в работе являются симметрические дифференциалы и симметрические субдифференциалы первого и высших порядков в скалярном и векторном случае.

Предмет исследования. Основные аналитические свойства симметрических дифференциалов Фреше, основные аналитические свойства симметрически субдифференцируемых отображений.

Целью исследования является построение развитой теории симметрических дифференциалов и субдифференциалов первого и высшего порядков с приложениями к гармоническому анализу, теории вероятностей и к теории экстремальных задач.

Для реализации поставленной цели в диссертационной работе были сформулированы такие *задачи*:

1. Доказать ряд новых свойств симметрических производных, вплоть до теоремы о среднем и формулы Тейлора.

2. Построить основы теории симметрических дифференциалов в банаховых пространствах.

3. Построить основы теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков в банаховых пространствах.

4. Получить оценки симметрических вариаций и субвариаций первого и высших порядков для одномерного вариационного функционала.

5. Обобщить классический метод Римана суммирования рядов Фурье на случай симметрических субдифференциалов.

6. Рассмотреть применение симметрических характеристик к негладким распределениям вероятностей случайных величин.

7. Сформулировать и рассмотреть на примерах общую экстремальную задачу поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы выпуклого и негладкого анализа, теории вероятностей, вариационного исчисления, теории многозначных операторов, бесконечномерного дифференциального исчисления, функционального анализа, гармонического анализа.

Методы дифференциального исчисления и негладкого анализа применяются при построении развитого исчисления симметрических субдифференциалов отображений в банаховых пространствах.

Методы гармонического анализа используются при обобщении классического метода Римана-Шварца суммирования рядов Фурье.

Методы вариационного исчисления и теории вероятностей применяются при вычислении симметрических вариаций и субвариаций вариационных функционалов, а также при поиске оптимального направления, минимизирующего (по модулю) локальную асимметрию либо локальный эксцесс в негладкой точке экстремума.

Научная новизна. В диссертационной работе все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Построена развитая теория симметрических дифференциалов Фреше и симметрических субдифференциалов Фреше первого и высших порядков, включающая, в частности теорему о среднем и формулу Тейлора. Найдены простые достаточные условия симметрической субдифференцируемости. Рассмотрены некоторые приложения к рядам Фурье и вариационным функционалам.

Теоретическая и практическая ценность. В диссертационной работе все результаты относятся к области фундаментальных исследований и имеют в основном теоретическое значение. Полученные результаты развивают теорию симметрических дифференциалов и субдифференциалов для случая скалярного и векторного аргументов, позволяют исследовать обобщение классического метода Римана–Шварца суммирования рядов Фурье и задачу минимизации локальной асимметрии и локального эксцесса в негладкой точке экстремума.

Возможно применение результатов работы в проблематике современной негладкой оптимизации, а также в негладких вариационных задачах.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертационной работы докладывались на различных конференциях и семинарах: на семинаре кафедры математического анализа Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, 20 октября 2016 г., 14 июня 2017 г., г. Ростов-на-Дону; на семинаре по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO» Санкт-Петербургского Государственного университета, 30 ноября 2017 г., г. Санкт-Петербург; на I-II научных конференциях профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых «Дни науки Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского» (Симферополь, 2015-2016 гг.); на кафедральном семинаре кафедры алгебры и функционального анализа Таврической академии КФУ им. В. И. Вернадского; на международных научных конференциях VIII международной научной конференции для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в информационных технологиях и естественных науках», 17-28 апреля 2013 г., г. Харьков, Украина; «Крымская международная математическая конференция» (КММК-2013), 22 сентября – 4 октября 2013 г., г. Судак; International Conference Analysis and mathematical physics (Kharkiv, Ukraine, 24-28 June, 2013); «XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам», 21 сентября – 30 сентября 2014 г., г. Судак; «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-V», 26 апреля – 1 мая 2015 г., г. Ростов-на-Дону; «Современные проблемы теории функций и их приложения», 27 января – 3 февраля 2016 г., г. Саратов; «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI», 24 – 29 апреля 2016 г., г. Ростов-на-Дону; «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова, 22 – 27 мая

2017 г., г. Санкт-Петербург.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [5], [6], [7], [10], [16], [132], из которых [5], [7], [10], [16], [132] входят в перечень ВАК Минобрнауки РФ; 9 — в тезисах докладов [8], [9], [11] – [15], [17], [133].

Структура работы. Работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы, включающего 190 наименований.

Автор выражает сердечную благодарность своему научному руководителю, И. В. Орлову, за постановку задач, полезные обсуждения и всестороннюю поддержку.

ГЛАВА 1

Симметрические производные и симметрические дифференциалы Фреше

В данной главе рассмотрен вопрос о построении теории симметрических производных и симметрических дифференциалов Фреше первого и высших порядков. Получена теорема о среднем для симметрического случая. Это позволило распространить на данный случай и асимптотическую форму полной формулы Тейлора с несколько ослабленной оценкой по сравнению с классическим случаем.

Вначале мы рассматриваем случай скалярного аргумента. В разделе 1.1 получены теорема о среднем для симметрически дифференцируемых отображений (теорема 1.1.4) и асимптотическая формула Тейлора для симметрических производных (теорема 1.1.6) в случае абсолютно непрерывных отображений. В разделе 1.2 представлена взаимосвязь полученных результатов со свойствами обобщенных симметрических производных Ш.-Ж. Валле-Пуссена, исследованных в работах Р. Джеймса.

В разделе 1.3 мы переходим, следуя, по возможности, классической схеме Гато–Адамара–Фреше, к определению симметрических дифференциалов первого и высших порядков в банаховых пространствах.

Основные результаты данной главы исследованы в работах [5], [7] – [10], [16], [17].

1.1 Симметрические производные первого и высших порядков: случай скалярного аргумента. Теорема о среднем и формула Тейлора

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$, определенное в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$, где F — произвольное вещественное банахово пространство. Напомним классические определения первой и высших симметрических производных (см. [4], [52], [117]), которые без труда распространяются на отображения со значениями в банаховых пространствах.

Определение 1.1.1. Первой симметрической производной f в точке x называется предел

$$f^{[\prime]}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} = \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Определение 1.1.2. *Симметрической производной n–го порядка* отображения f в точке x называется величина

$$f^{[n]}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \lim_{h \to +0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big).$$

Вначале получим формулу конечных приращений для симметрического случая. Здесь, в отличие от случая обычной производной (см. [57]), мы добавляем требование абсолютной непрерывности.

Теорема 1.1.3. *Пусть отображения $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ и $g : \mathbb{R} \supset [a;b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывны на $[a;b]$ и симметрически дифференцируемы на $(a;b)$, причем g возрастает. Если на некотором замкнутом выпуклом множестве $B \subset F$ выполнена оценка $f^{[\prime]}(x) \in g^{[\prime]}(x) \cdot B$ $(a < x < b)$, то справедлива оценка:*

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{1.1}$$

Доказательство. 1) Фиксируем $\varepsilon > 0$. Применяя определение симметрической производной, выберем такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ для каждого $x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]$, что

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \in U_\varepsilon(g^{[\prime]}(x)\cdot B) \\ \dfrac{g(x+h)-g(x-h)}{2h} \in U_\varepsilon(g^{[\prime]}(x)) \end{cases};$$

(здесь U_ε — ε-окрестность множества). Отсюда получаем:

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \left(\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \in U_{2\varepsilon}\left(\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}\cdot B\right)\right). \tag{1.2}$$

2) Система сегментов $\{\overline{U}_\delta(x)\}_{x\in[a+\varepsilon;b-\varepsilon]}$, $\delta < \delta(\varepsilon, x)$, очевидно, образует покрытие Витали (см. [79], [102]) множества $[a+\varepsilon; b-\varepsilon]$. По второй теореме Витали о покрытиях (см. [79]), для любого заданного $\eta > 0$ из данного покрытия можно выделить такую конечную систему сегментов $\left\{\overline{U}_{\delta_i}(x_i)\right\}_{i=1}^n$, что $mes\Big(S = [a+\varepsilon; b-\varepsilon] \backslash \bigcup\limits_{i=1}^n \overline{U}_{\delta_i}(x_i)\Big) < \eta$. Последнее множество S состоит из конечного числа отрезков $[\alpha_j; \beta_j]$, $j = \overline{1, n+1}$. В силу абсолютной непрерывности отображений f и g на $[a; b]$ можно подобрать такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$\left(mes\, S = \sum_{j=1}^{n+1}(\beta_j - \alpha_j) < \eta\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n+1}\|f(\beta_j)-f(\alpha_j)\| < \varepsilon,\ \sum_{j=1}^{n+1}[g(\beta_j)-g(\alpha_j)] < \varepsilon\right). \tag{1.3}$$

Имеем:

$$f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i+\delta_i)-f(x_i-\delta_i)] + \sum_{j=1}^{n+1}[f(\beta_j)-f(\alpha_j)], \tag{1.4}$$

где, в силу (1.2),

$$f(x_i+\delta_i)-f(x_i-\delta_i) \in 2\delta_i \cdot U_\varepsilon\left(\frac{g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)}{2\delta_i}\cdot B\right)\ (i=\overline{1,n}), \quad (1.5)$$

и, в силу (1.3),

$$\sum_{j=1}^{n+1}[f(\beta_j)-f(\alpha_j)] \in U_\varepsilon(0), \quad \sum_{j=1}^{n+1}[g(\beta_j)-g(\alpha_j)] \in (-\varepsilon;\varepsilon). \qquad (1.6)$$

Подставляя оценки (1.5) и (1.6) в (1.4), с учетом выпуклости B, имеем:

$$f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon) \in \sum_{i=1}^{n}\left[2\delta_i \cdot U_\varepsilon\left(\frac{g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)}{2\delta_i}\cdot B\right)\right]+U_\varepsilon(0) \subset$$

$$\subset U_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)\cdot B\right)+U_\varepsilon(0) \subset$$

$$\subset U_\varepsilon\left([(g(b-\varepsilon)+\varepsilon)-(g(a+\varepsilon)-\varepsilon)]\cdot B\right)+U_\varepsilon(0). \quad (1.7)$$

3) Переходя в (1.7) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом замкнутости B, получаем (1.1). □

Докажем теперь, опираясь на теорему 1.1.3 при дополнительном условии абсолютной непрерывности, более общее утверждение. А именно, мы перенесем на симметрический случай классическую оценочную форму теоремы о среднем (далее $\overline{co}$ — выпуклая замкнутая оболочка множества).

Теорема 1.1.4. *Пусть отображение $f : \mathbb{R} \supset [x;x+h] \to F$ абсолютно непрерывно на $[x;x+h]$ и симметрически дифференцируемо в $(x;x+h)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(x+h)-f(x) \in \overline{co}\, f^{[\prime]}\big((x;x+h)\big)\cdot h. \qquad (1.8)$$

Доказательство. В условиях теоремы 1.1.3 достаточно положить $g(\theta)=\theta$ и $B=\overline{co}\,\{f^{[\prime]}(x+\theta h)|\ 0<\theta<1\}$, а далее применить формулу (1.1). □

Далее мы получим формулу Тейлора в форме Пеано в предположении, что отображение $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$ $(n-1)$ раз дифференцируемо обычным образом в окрестности точки x и n раз симметрически дифференцируемо в точке x. Вначале сформулируем вспомогательное утверждение.

Предложение 1.1.5. *Если существует $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$, то существует симметрическая производная n-го порядка $f^{[n]}(x)$ в точке x и имеет место равенство:*

$$f^{[n]}(x) = (f^{(n-1)})^{[\prime]}(x). \tag{1.9}$$

Справедлива следующая асимптотическая формула Тейлора для симметрических производных (более слабая по сравнению со случаем обычной дифференцируемости, см. [57], [117]).

Теорема 1.1.6. *Предположим, что существует $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ и отображение f сильно абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{1}{n!}\, \overline{co}\, f^{[n]}\big((x; x+h)\big) \cdot h^n + o(h^n). \tag{1.10}$$

Доказательство. Из существования $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ следует, что отображение $f(x)$ определено и имеет обычные производные до $(n-1)$ порядка включительно в окрестности точки x. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ равенство (1.10) принимает вид:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\, f^{[\prime]}\big((x; x+h)\big) \cdot h + o(h),$$

и мы приходим к теореме о среднем 1.1.3.

b) Допустим, что утверждение теоремы верно для порядка $(n-1)$: если существует $(\widetilde{f}^{(n-2)})^{[\prime]}(x)$ и отображение $\widetilde{f}$ абсолютно непрерывно в $U(x)$, то

$$\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)\in \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,\overline{co}\,\widetilde{f}^{[n-1]}\big((x;x+h)\big)+o(h^{n-1}).$$

Отсюда $\forall\, y_{n-1}\in \overline{co}\,\widetilde{f}^{[n-1]}\big((x;x+h)\big)$ получаем включение:

$$\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,y_{n-1}\in o(h^{n-1}),$$

где $o(h^{n-1})$ не зависит от выбора y_{n-1}. Введем $\forall\, y_n\in \overline{co}\,f^{[n]}\big((x;x+h)\big)$ вспомогательную функцию:

$$r_n(f;h)=f(x+h)-f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k-\frac{h^n}{n!}\,y_n.$$

Вычисляя обычную производную по h вспомогательной функции r_n, имеем:

$$r_n'(f;h)=f'(x+h)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}h^{k-1}-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,y_n,$$

откуда, по допущению индукции следует: $r_n'(f;h)=r_{n-1}(f';h)=o(h^{n-1})$. Применяя классическую теорему о среднем в банаховых пространствах, получаем:

$$r_n(f;h)\in\overline{co}\Big\{r_n'(f;\theta h)\;\Big|\;0<\theta<1\Big\}\cdot h=o(h^{n-1})\cdot h=o(h^n).$$

Итак, доказано по индукции, что

$$f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k-\frac{h^n}{n!}y_n\in o(h^n),\tag{1.11}$$

где многозначная оценка «o» не зависит от выбора $y_n\in\overline{co}\,f^{[n]}\big((x;x+h)\big)$. Перенося последнее слагаемое в (1.11) направо и переходя затем справа к выпуклой замкнутой оболочке по всем y_n, мы приходим к искомой оценке (1.10). □

Заметим, что при $n \geqslant 2$ условие абсолютной непрерывности f в окрестности точки x выполнено автоматически ввиду $f \in C^1(U)$.

Для случая нечетного порядка из теоремы 1.1.6 вытекает следующая форма формулы Тейлора.

Теорема 1.1.7. *Предположим, что существует* $(f^{(2n)})^{[\prime]}(x)$, *и отображение* f *сильно абсолютно непрерывно в некоторой окрестности* $U(x)$. *Тогда справедлива оценка:*

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} \in$$
$$\in \frac{2}{(2n+1)!}\, \overline{co}\, f^{[2n+1]}\big((x-h; x+h)\big) \cdot h^{2n+1} + o(h^{2n+1}). \quad (1.12)$$

Аналогично можно получить формулу Тейлора в случае четного порядка.

Теорема 1.1.8. *Предположим, что существует* $(f^{(2n-1)})^{[\prime]}(x)$, *и отображение* f *сильно абсолютно непрерывно в некоторой окрестности* $U(x)$. *Тогда справедлива оценка:*

$$f(x+h)+f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!} h^{2k} \in \frac{2}{(2n)!}\, \overline{co}\, f^{[2n+2]}\big((x-h; x+h)\big) \cdot h^{2n} + o(h^{2n}). \quad (1.13)$$

1.2 Некоторые глобальные свойства симметрических производных

Приведем основные свойства обобщенных симметрических производных Ш.-Ж. Валле-Пуссена ([52], [185]), исследованных в работе Р. Джеймса [151].

Определение 1.2.1. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, $x_0 \in (a;b)$. Если существуют постоянные $\beta_0, \beta_2, \ldots, \beta_{2r}$ (зависящие только от x_0) такие, что

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h)+f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=0}^{r} \frac{h^{2k}}{(2k)!}\beta_{2k} = o(h^{2r})$$

при $h \to 0$, то β_{2r} называется *обобщенной симметрической производной (Валле-Пуссена)* порядка $2r$ функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $D^{2r}f(x_0)$.

Если $D^{2k}f(x_0)$ существуют при $0 \leqslant k \leqslant m-1$, определим величину $\theta_{2m}(x_0;h)$ равенством:

$$\frac{h^{2m}}{(2m)!}\theta_{2m}(x_0,h) = \frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h)+f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!}D^{2k}f(x_0),$$

и положим

$$\Delta^{2m}f(x_0) = \limsup_{h\to 0}\theta_{2m}(x_0;h), \qquad \delta^{2m}f(x_0) = \liminf_{h\to 0}\theta_{2m}(x_0;h).$$

Скажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1 \leqslant k \leqslant\ m-1$ на $(a;b)$, и

$$\lim_{h\to 0} h\theta_{2m}(x,h) = 0$$

при всех x из $(a;b)\setminus E$, где E не более, чем счетно.

Скажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям B_{2m-2} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при
$1 \leqslant k \leqslant\ m-1$ на $(a;b)$ и $D^{2k}f(x)$ не имеет разрывов первого рода на $(a;b)$.

Далее через $\Delta^k f$ обозначается симметрическая конечная разность k–го порядка для f.

Теорема 1.2.2. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m-2} и B_{2m-4} на $(a;b)$, причем $\Delta^{2m-2}f(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция $D^{2m-4}f(x)$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $D^{2k}f(x)$ непрерывны на $(a;b)$.*

Теорема 1.2.3. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} на $(a;b)$, причем $\Delta^{2m}f(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция $D^{2m-2}f(x)$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $D^{2k}f(x)$ непрерывны на $(a;b)$.*

Сравнивая результаты теорем 1.2.2 и 1.2.3 и с результатами, соответственно, теорем из раздела 1.1, мы приходим к следующим утверждениям для симметрических производных четного порядка (см. теорему 1.1.8).

Теорема 1.2.4. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \left(f^{(2n-1)}\right)^{[\prime]}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m-2} и B_{2m-4} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m-2}f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-4)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

Теорема 1.2.5. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \left(f^{(2n-1)}\right)^{[\prime]}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m}f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-2)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

Аналогичные результаты можно получить в нечетном случае.

1.3 Симметрические дифференциалы Фреше в банаховых пространствах

Пусть отображение $f : E \to F$, (E, F — вещественные банаховы пространства) определено в окрестности точки $x \in E$, $h \in U(0) \subset E$. Вводимый ниже симметрический дифференциал по направлению h будем называть также *s–дифференциалом* по направлению.

Определение 1.3.1. Симметрический дифференциал отображения f в точке x *по направлению* h есть предел (при условии, что он существует):

$$\partial^{[\prime]} f(x,h) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t}. \tag{1.14}$$

В случае функционала $f : E \to \mathbb{R}$ полезно также ввести верхний и нижний s–дифференциалы по направлению.

Определение 1.3.2. Верхний и нижний s–дифференциалы $\overline{\partial^{[\prime]}} f(x,h)$ и $\underline{\partial^{[\prime]}} f(x,h)$ функционала f в точке x по направлению h имеют следующий вид:

$$\overline{\partial^{[\prime]}} f(x,h) = \varlimsup_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t},$$

$$\underline{\partial^{[\prime]}} f(x,h) = \varliminf_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t}.$$

Приведем простой вспомогательный результат.

Предложение 1.3.3. *Пусть* $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{A} G$, $A \in L(F,G)$. *Тогда для любого* $h \in U(0)$*:*

$$\partial^{[\prime]}(f \cdot A)(x,h) = \partial^{[\prime]} f(Ax, Ah). \tag{1.15}$$

Перейдем к основным типам s–дифференцируемости, которые мы введем по аналогии с классической схемой Гато–Адамара–Фреше (см. [21], [57], [77]).

Определение 1.3.4. Пусть отображение f s–дифференцируемо в некоторой точке $x \in E$ по произвольному направлению h. Назовем отображение f *слабо s–дифференцируемо* в точке x, если s–дифференциал по направлению $\partial^{[\prime]} f(x,h)$ является линейным оператором по h. Примем в этом случае обозначение $\partial^{[\prime]} f(x)h$.

Определение 1.3.5. Пусть отображение f слабо s–дифференцируемо в точке x. Будем говорить, что f *s–дифференцируемо по Гато* в точке x, если слабый s–дифференциал $\partial^{[\prime]} f(x)h$ непрерывен по h, или, что равносильно, оператор $\partial^{[\prime]} f(x)$ ограничен по норме. Заметим, что в этом случае, обозначая

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\partial^{[\prime]} f(x)h + \varphi(h), \tag{1.16}$$

имеем $\dfrac{\varphi(th)}{t} \to 0$ при $t \to 0$ $(\forall\, h \in U(0))$.

Определение 1.3.6. Если отображение f s–дифференцируемо по Гато в точке x, причем сходимость в (1.14) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$:

$$\frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} \rightrightarrows \partial^{[\prime]} f(x)h \quad \text{при } t \to 0,$$

то оператор $\partial^{[\prime]} f(x)h$ назовем *s–дифференциалом Фреше* или *сильным s–дифференциалом* f в точке x. Заметим, что в этом случае, используя обозначение (1.16), имеем: $\varphi(h) = o(\|h\|)$, или, что равносильно, $\dfrac{\varphi(th)}{t} \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$ $(\|h\| \leqslant 1)$.

Перейдем к важному вопросу об s–дифференцируемости композиции. Легко видеть, что композиция s–дифференцируемых отображений не является, вобще говоря, s–дифференцируемой даже в скалярном случае. Однако, мы покажем, что композиция строго дифференцируемого и s–дифференцируемого отображений сохраняет s–дифференцируемость. Далее мы рассматриваем отображения $f : E \to F$ и $g : F \to G$, определенные соответственно в некоторых окрестностях $U(x) \subset E$ и $V\ (y = f(x)) \subset F$, где E, F, G — вещественные банаховы пространства. Напомним определение строгой дифференцируемости (важного промежуточного понятия между обычной и непрерывной дифференцируемостью).

Определение 1.3.7. Отображение g дифференцируемое по Фреше в точке x_0, называется *строго дифференцируемым в точке* x_0 в том случае, когда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, что для $\forall\ x_1$ и x_2, удовлетворяющих неравенствам $\|x_1 - x_0\| < \delta$, $\|x_2 - x_0\| < \delta$, выполнено неравенство

$$\|g(x_1) - g(x_2) - g'(x_0)(x_1 - x_2)\| \leqslant \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Перейдем к теореме об s–дифференцируемости композиции.

Теорема 1.3.8. *Если отображение $f : E \to F$ сильно s–дифференцируемо в точке x и непрерывно в этой точке, отображение $g : F \to G$ строго дифференцируемо в точке $y = f(x) \in F$, то композиция $g \circ f : E \to G$ сильно s–дифференцируема по Фреше в точке $x \in E$, причем*

$$\partial^{[\prime]}(g \circ f)(x)h = g'\big(f(x)\big) \circ \partial^{[\prime]} f(x)h\ . \tag{1.17}$$

Рассмотрим случай, когда s–дифференцируемой является внешняя функция в композиции. Здесь дополнительным условием служит условие Липшица для внешней функции.

Теорема 1.3.9. *Предположим, что функция $f : E \to F$ дифференцируема по Фреше в точке $x \in E$, а функция $g : F \supset U(y) \to G$ s–дифференцируема в точке $y = f(x)$ и функция $g \in Lip(U(y))$, то композиция $g \circ f : E \to G$ также s–дифференцируема в точке x, причем*

$$\partial^{[\prime]}(g \circ f)(x)h = \partial^{[\prime]} g(y) \circ \partial f(x)h\ .$$

Приведем простешие скалярные примеры применения теорем 1.3.8 – 1.3.9: 1) Если φ строго дифференцируема, то

$$\varphi^{[\prime]}(|x|) = \varphi'(|x|) \cdot sign\, x.$$

2) Если φ дифференцируема, то

$$|\varphi|^{[\prime]}(x) = sign\, \varphi(x) \cdot \varphi'(x).$$

Перейдем к теореме о среднем для s–дифференциалов Фреше.

Теорема 1.3.10. *Пусть отображение $f : E \supset [x; x+h] \to F$ абсолютно непрерывно на $[x; x+h]$ и симметрически дифференцируемо на $(x; x+h)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\, \partial^{[\prime]} f\big((x; x+h)\big) \cdot h. \tag{1.18}$$

Наконец, предъявим как следствие теорему о среднем, содержащую неравенство с нормой.

Теорема 1.3.11. *Предположим, что выполнены все предположения теоремы 1.3.10. Тогда имеет место оценка:*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial^{[\prime]} f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|. \tag{1.19}$$

Доказательство. В данном случае достаточно использовать включение (1.18) и применить следующее

$$\sup_{0<\theta<1} \|\overline{co}\, \partial^{[\prime]} f\big((x; x+h)\big) \cdot h\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial^{[\prime]} f(x+\theta h) \cdot h\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial^{[\prime]} f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|.$$

$\square$

Следуя предыдущей схеме, дадим определение s–дифференциала Фреше n-го порядка и получим формулу Тейлора. Вначале определим *степенной s–оператор* n-го порядка.

Определение 1.3.12. Пусть E и F — вещественные банаховы пространства. Отображение $A : E \to F$ будем называть *степенным s–оператором n-го порядка*, если A порождается некоторым n–линейным симметрическим оператором $\widetilde{A} : \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n} \to F$:

$$A(h) = \widetilde{A}(\overbrace{h, \ldots, h}^{n}) = \widetilde{A}(h)^n. \tag{1.20}$$

В частности, $A(\lambda h) = \lambda^n \cdot A(h)$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Оператор A при $n = 2$ будем называть *квадратичным* s–оператором, при $n = 3$ — *кубическим* s–оператором.

Определение 1.3.13. Назовем *s–дифференциалом n-го порядка по направлению* h отображения $f : E \supset U(x) \to F$ в точке x предел (при условии, что он существует):

$$\partial^{[n]} f(x, h) = \lim_{t \to +0} \biggl(\frac{1}{(2t)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\bigl(x + (n-2k)th\bigr) \biggr) = \lim_{t \to +0} \frac{\Delta^n f(x, th)}{(2t)^n}. \tag{1.21}$$

Если $\partial^{[n]} f(x, h)$ существует по любому направлению h и является степенным s–оператором n-го порядка, то будем говорить, что f *слабо s–дифференцируемо n раз* в точке x и примем обозначение $\partial^{[n]} f(x)(h)$. Отметим, что в этом случае легко указать n–линейный порождающий оператор:

$$\widetilde{\partial}^{[n]} f(x)(h_1, \ldots, h_n) = \lim_{t \to +0} \biggl(\frac{1}{(2t)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\bigl(x + t \sum_{i=1}^{n-2k} h_i\bigr) \biggr).$$

Оператор $\widetilde{\partial}^{[n]} f(x)$ назовем *полисимметрическим дифференциалом порядка* n отображения f в точке x. Далее, если степенной s–оператор n-го порядка

$\partial^{[n]}f(x)$ ограничен, то будем говорить, что f *s–дифференцируемо n раз в точке x по Гато.* Наконец, если $\partial^{[n]}f(x)$ — s–дифференциал Гато и сходимость в равенстве (1.21) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$, то будем говорить, что f *s–дифференцируемо n раз в точке x по Фреше (или сильно).* Отметим, что в этом случае справедливо равенство:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\big(x+(n-2k)h\big) = \partial^{[n]}f(x)(h) + o(\|h\|^n).$$

Полученную ранее в случае скалярного аргумента формулу Тейлора (теорема 1.1.6) легко перенести на векторный случай.

Теорема 1.3.14. *Предположим, что существует $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ и отображение f сильно абсолютно непрерывно на отрезке $[x; x+h]$. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(h)^k \in \frac{1}{n!}\,\overline{co}\,\partial^{[n]}f\big((x; x+h)\big)\cdot(h) + o(\|h\|^n). \quad (1.22)$$

Аналоги теорем 1.1.7 и 1.1.8 для случаев, соответственно, нечетного и четного порядков приводятся в работе [5].

1.4 Приложение к вариационным функционалам

Рассмотрим одномерный вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \qquad \big(y \in C^1[a; b]\big),$$

где интегрант f s–дифференцируем.

Аналогично классическому случаю можно вычислить симметрическую вариацию Φ.

Теорема 1.4.1. *Если интегрант* f *симметрически дифференцируем в* $C^1[a;b]$ *и* $\partial^{[\prime]} f$ *непрерывен в* $\mathbb{R}^3$, *то:*

$$\partial^{[\prime]}\Phi(y,h) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y'}(x,y,y')h'\right]dx. \tag{1.23}$$

Теорема 1.4.2. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1([a;b]\times\mathbb{R}^2)).$$

Тогда

$$\partial^{[\prime]}\Phi(y,h) = \int\limits_a^b \; sign\, f(x,y,y') \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')h'\right) dx. \tag{1.24}$$

В заключение этого пункта в качестве примера рассмотрим модулированный гармонический осциллятор.

Пример 1.4.3. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - y^2|dx \qquad \left(y(0)=0,\, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right).$$

Как показано в [9], Φ достигает строгого локального минимума на экстремали

$$y_0(x) = \sin x \;\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right), \qquad y_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-\pi}{4}} \cdot e^x \;\left(\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Применяя равенство (1.24), находим, после элементарных преобразований:

$$\partial^{[\prime]}\Phi(y_0,h) = \int\limits_0^{\pi/2} sign\,(y_0'^2 - y_0^2)\cdot(-2y_0h + 2y_0'h')dx = 2\int\limits_0^{\pi/4}(\cos x\cdot h' - \sin x\cdot h)dx =$$

$$= 2\cos x \cdot h(x)\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\cdot h\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Выводы.

1. Доказан ряд новых свойств симметрических производных вплоть до теоремы о среднем и формулы Тейлора.

2. Представлена взаимосвязь полученных результатов со свойствами обобщенных симметрических производных Ш.-Ж. Валле-Пуссена

3. Построены основы общей теории симметрических дифференциалов в банаховых пространствах.

ГЛАВА 2

Симметрические субдифференциалы для отображений скалярного аргумента

Данная глава посвящена изучению теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков для отображений скалярного аргумента со значениями в банаховых пространствах.

В разделе 2.1, помимо построения необходимого технического аппарата симметрических субдифференциалов, показано, что s–субдифференциал является обобщением обычного компактного субдифференциала (теорема 2.1.10). Раздел 2.2 содержит общую теорию симметрических субдифференциалов высших порядков.

Основные результаты данной главы изложены в публикациях [7] – [10], [16], [17], [5], [133].

2.1 Симметрический субдифференциал первого порядка для отображений скалярного аргумента

2.1.1 Субпределы и признак Вейерштрасса для субпределов. Пусть $U(0)$ — замкнутая выпуклая окрестность нуля в вещественном банаховом пространстве E, $\overline{co}\,A$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $A \subset E$. Приведем (в банаховом случае) определение и основные свойства субпределов, рассмотренные в работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина ([81], [84], [86], [89], [105], [169]).

Определение 2.1.1. Если $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ некоторая система подмножеств E (субсистема), где $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — выпуклые и замкнутые, то назовем непустое множество $B \subset E$ *субпределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$: $B = \operatorname*{sublim}_{\delta\to 0} B_\delta$, если:

1) $\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0:\ (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B \subset B_\delta \subset B + U)$;

2) B— компактное множество в E.

Заметим, что субпредел является пределом по метрике Хаусдорфа (см. [96]) в конусе ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств E, при условии компактности пересечения.

Сформулированный ниже признак играет базовую роль в теории компактных субдифференциалов (см., например, [81], теорема 3.1).

Теорема 2.1.2. *Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — субсистема в E. Субпредел $\operatorname*{sublim}_{\delta\to 0} B_\delta$ существует в том и только том случае, когда для некоторого выпуклого компакта $\tilde{B}$ имеет место внешнее топологическое полустягивание системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ к $\widetilde{B}$:*

$$\forall\, U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0:\ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset \tilde{B} + U). \tag{2.1}$$

При этом $\operatorname*{sublim}_{\delta\to 0} B_\delta \subset \tilde{B}$.

Распространим теперь понятие субпредела на отображение.

Определение 2.1.3. Пусть T — метрическое пространство, E — вещественное банахово пространство, $\varphi : T \supset \dot{U}(t_0) \to E$ — некоторое отображение, ограниченное в окрестности $\dot{U}(t_0)$ точки $t_0 \in T$, $\dot{U}_\delta(t_0)$ — проколотые δ–окрестности точки t_0. Положим по определению:

$$\operatorname*{sublim}_{t\to t_0} \varphi(t) := \operatorname*{sublim}_{t\to t_0} \left[\overline{co}\, \varphi\left(\dot{U}_\delta(t_0)\right)\right].$$

2.1.2 Симметрическая субдифференцируемость в вещественнозначном случае. Прежде всего, по образцу определения компактного субдифференциала (см. [86], [89], [120]), заменяя обычное разностное отношение на симметрическое, введем понятие симметрического субдифференциала (или s–субдифференциала) первого порядка. Всюду далее F — вещественное банахово пространство, $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$.

Определение 2.1.4. Симметрический субдифференциал отображения f в точке x (или s–субдифференциал) есть субпредел:

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x) = \operatorname*{sublim}_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Теорема 2.1.5. *Если существует обычная симметрическая производная* $f^{[\prime]}(x)$, *то*

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x) = \left\{ f^{[\prime]}(x) \right\}.$$

В вещественнозначном случае $\partial_{sub}^{[\prime]} f(x)$ может быть вычислен по простой формуле. Заметим вначале, что в этом случае $\partial_{sub}^{[\prime]} f(x)$ есть компактный отрезок.

Теорема 2.1.6. *Функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *s–субдифференцируема в точке* x *из отрезка* $[a, b]$ *в том и только в том случае, если в данной точке существуют нижняя и верхняя симметрические производные:*

$$-\infty < \underline{f^{[\prime]}}(x) \leqslant \overline{f^{[\prime]}}(x) < +\infty;$$

при этом

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x) = [\underline{f^{[\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime]}}(x)]. \tag{2.2}$$

Легко видеть, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2.1.7. *Если s–субдифференциал $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$ является одноточечным множеством: $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x) = \{y\}$, то функция f симметрически дифференцируема в точке x.*

Приведем простой пример неодноточечного s–субдифференциала.

Пример 2.1.8. Положим $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$. Вычислим s–субдифференциал f в нуле. Имеем при любом $h > 0$:

$$\frac{\Delta^1 f(0,h)}{2h} = \frac{1+h}{2} \sin \frac{1}{h}.$$

Отсюда следует:

$$\underline{f^{[\prime]}}(0) = \varliminf_{h \to +0} \frac{\Delta^1 f(0,h)}{2h} = -\frac{1}{2}, \quad \overline{f^{[\prime]}}(0) = \varlimsup_{h \to +0} \frac{\Delta^1 f(0,h)}{2h} = \frac{1}{2}.$$

В силу теоремы 2.1.6, существует s–субдифференциал $\partial^{[\prime]}_{sub} f(0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Заметим при этом, что, т. к. $\partial^{[\prime]}_{sub} f(0)$ не является одноточечным, то $f^{[\prime]}(x)$ не существует.

Рассмотрим теперь вопрос об s–субдифференциале монотонной функции.

Теорема 2.1.9. *Пусть функция $f(x)$ возрастает и симметрически субдифференцируема в точке x. Тогда выполнено неравенство:*

$$\inf \partial^{[\prime]}_{sub} f(x) \geqslant 0.$$

Доказательство. В силу возрастания f симметрическое разностное отношение в точке x, очевидно, неотрицательно:

$$\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \geqslant 0 \quad (h > 0).$$

Отсюда следует, что при любом $\delta > 0$ верно включение

$$\overline{co} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta \right\} \subset [0, +\infty),$$

откуда, переходя к субпределу, получаем

$$\Big(\partial_{sub}^{[\prime]} f(x) \subset [0, +\infty)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\inf \partial_{sub}^{[\prime]} f(x) \geqslant 0\Big).$$

□

2.1.3 Связь симметрического компактного субдифференциала и точного компактного субдифференциала первого порядка.

Теорема 2.1.10. *Если существует компактный субдифференциал* $\partial_{sub} f(x)$, *то существует и s–субдифференциал* $\partial_{sub}^{[\prime]} f(x)$, *причем*

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x) \subset \partial_{sub} f(x). \tag{2.3}$$

Доказательство. Преобразуем симметрическое разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\Big[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\Big].$$

Отсюда следует:

$$\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} \subset$$

$$\subset \frac{1}{2}\overline{\Big[\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} + \overline{co}\Big\{\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}\Big]} \subset$$

$$\subset \overline{\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}} = \overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\},$$

в силу выпуклости и замкнутости множества

$$\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}.$$

Следовательно,

$$\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} \subset \overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}.$$

Переходя к субпределу при $\delta \to +0$ и используя признак Вейерштрасса для субпределов при $\widetilde{B} = \partial_{sub} f(x)$ (см. теорему 2.1.2), получаем включение (2.3). $\square$

Заметим, что включение в формуле (2.3) может быть строгим.

Пример 2.1.11. Пусть $f(x) = |x|$. Тогда, как легко вычислить, $\partial_{sub} f(0) = [-1, 1]$, но $\partial^{[\prime]}_{sub} f(0) = \{0\}$. Таким образом,

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(0) \subsetneqq \partial_{sub} f(0).$$

Следствие 2.1.12. *Если функция $f(x)$ п.в. симметрически субдифференцируема на отрезке $[a; b]$, то функция $f(x)$ п.в. субдифференцируема обычным образом, причем*

$$\partial_{sub} f(x) = \partial^{[\prime]}_{sub} f(x).$$

Заметим, что из следствия 2.1.12 следует результат, полученный в работе B. S. Thomsona [183] (следствие 7.5) для измеримых функций.

2.1.4 Основные свойства симметрического субдифференциала первого порядка.

Теорема 2.1.13 (Субаддитивность)**.** *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to F$. Если отображения f и g s–субдифференцируемы в точке x, то отображение $f + g$ также s–субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial^{[\prime]}_{sub}(f + g)(x) \subset \partial^{[\prime]}_{sub} f(x) + \partial^{[\prime]}_{sub} g(x). \tag{2.4}$$

Заметим, что равенство в (2.4) может не иметь места.

Пример 2.1.14. Рассмотрим, как и в примере 2.1.8 функцию $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$.

Пусть $g(x) = -f(x)$. Тогда $\Big((f+g)(x) \equiv 0\Big) \Longrightarrow \Big(\partial^{[\prime]}_{sub}(f+g)(x) \equiv \{0\}\Big)$. В то же время, поскольку $\partial^{[\prime]}_{sub} f(0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (см. пример 2.1.8), имеем:

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(0) + \partial^{[\prime]}_{sub} g(0) = [-1, 1].$$

Таким образом, $\partial^{[\prime]}_{sub}(f+g)(0) = \{0\} \subsetneqq [-1; 1] = \partial^{[\prime]}_{sub} f(0) + \partial^{[\prime]}_{sub} g(0)$.

Теорема 2.1.15 (Однородность по f)**.** *Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to E$ s–субдифференцируемо в точке $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub}(\lambda f)(x) = \lambda\, \partial^{[\prime]}_{sub} f(x).$$

Следствие 2.1.16 (Сублинейность по f)**.** *Пусть отображение f s–субдифференцируемо в точке x, а отображение g симметрически дифференцируемо в точке x. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub}(\alpha f + \beta g)(x) \subset \alpha \partial^{[\prime]}_{sub} f(x) + \beta \partial^{[\prime]}_{sub} g(x).$$

2.1.5 Теорема о среднем для симметрически субдифференцируемых отображений.

Приведем вначале подходящую форму теоремы о конечных приращениях.

Теорема 2.1.17 (Формула конечных приращений)**.** *Пусть F — вещественное банахово пространство, $f : [a,b] \to F$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g возрастает на $[a,b]$. Если отображения f и g непрерывны на $[a,b]$, симметрически субдифференцируемы на (a,b) и выполнена локальная оценка:*

$$\sup \|\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)\| \leqslant \inf \partial^{[\prime]}_{sub} g(x) \quad (a < x < b),$$

то имеет место глобальная оценка: $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$.

Из теоремы 2.1.17 легко следует оценочная по норме форма теоремы о среднем для симметрических субдифференциалов.

Теорема 2.1.18 (Теорема о среднем)**.** *Предположим, что отображение* $f : [a,b] \to F$ *непрерывно на отрезке* $[a,b]$ *и* s*–субдифференцируемо на интервале* (a,b)*, то выполняется оценка:*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x\in(a,b)} \left(\sup \|\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)\|\right) \cdot (b-a). \tag{2.5}$$

Доказательство. Обозначим $k := \sup\limits_{x\in(a,b)} \left(\sup \|\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)\|\right) \quad (0 \leqslant k \leqslant +\infty)$. При $k = \infty$ неравенство (2.5), очевидно, выполняется.

Допустим, что $k < \infty$, и положим $g(x) = kx$.

Тогда $\partial^{[\prime]}_{sub} g(x) = \{g'(x)\} = \{k\}$. Отсюда, применяя теорему 2.1.17, получаем:

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a) = k \cdot (b-a).$$

$\square$

Напомним, что банахово пространство F обладает свойством Радона–Никодима (см. [161], [162]), если любое абсолютно непрерывное отображение $f : [a,b] \to F$ почти всюду дифференцируемо на $[a;b]$.

Теорема 2.1.19. *Пусть пространство* F *обладает свойством Радона–Никодима. Если отображение* $f : [a,b] \to F$ *непрерывно на* $[a,b]$ *и* $f \in B^{[1]}((a;b),F)$*, то* f *п. в. дифференцируемо на* $[a,b]$ *в обычном смысле.*

Замечание 2.1.20. Напомним, что класс банаховых пространств, обладающих свойством Радона–Никодима, достаточно широк. Для отображений в рефлексивные банаховы пространства, в условиях последней теоремы, s–субдифференцируемость может отличаться от обычной дифференцируемости лишь на множестве меры нуль.

2.2 Симметрические субдифференциалы второго и высших порядков для отображений скалярного аргумента

2.2.1 Симметрические субдифференциалы второго и высших порядков. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to F$ определено в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$, где F — произвольное вещественное банахово пространство. Отправляясь от определения второй симметрической производной, перейдем к основному определению.

Определение 2.2.1. Симметрический субдифференциал второго порядка отображения f в точке x есть субпредел:

$$\partial_{sub} f(x) = \operatorname*{sublim}_{h \to +0} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}.$$

Нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 2.2.2 (Регулярность)**.** *Обычная вторая симметрическая производная $f^{[\prime\prime]}(x)$ существует тогда и только тогда, когда существует одноточечный второй s–субдифференциал $\partial_{sub}^{[\prime\prime]} f(x)$. При этом выполняется равенство*

$$\partial_{sub}^{[\prime\prime]} f(x) = \left\{ f^{[\prime\prime]}(x) \right\}. \tag{2.6}$$

Таким образом, второй симметрический субдифференциал можно рассматривать как обобщение обычной второй симметрической производной. В вещественнозначном случае $\partial_{sub}^{[\prime\prime]} f(x)$ есть компактный отрезок, концами которого являются нижняя и верхняя вторые симметрические производные.

Теорема 2.2.3. *Функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *имеет* s*–субдифференциал второго порядка в точке* $x \in [a, b]$ *тогда и только тогда, когда в этой точке конечны верхняя и нижняя симметрические производные:* $-\infty < \underline{f^{[\prime\prime]}}(x) \leqslant \overline{f^{[\prime\prime]}}(x) < +\infty$*; при этом*

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub} f(x) = [\underline{f^{[\prime\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime\prime]}}(x)]. \tag{2.7}$$

Приведем пример вычисления второго симметрического субдифференциала в случае, когда второй симметрической производной не существует.

Пример 2.2.4. Положим $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$. Нетрудно убедиться, что $\underline{f^{[\prime\prime]}}(0) = -1$, $\overline{f^{[\prime\prime]}}(0) = 1$.
В силу теоремы 2.2.3 существует $\partial^{[\prime\prime]}_{sub} f(0) = [-1, 1]$.

Одним из наиболее важных свойств как обычного компактного субдифференциала (см. [81], [120]), так и симметрического субдифференциала второго порядков, является субаддитивность по f.

Теорема 2.2.5 (Субаддитивность по f)**.** *Пусть* $f, g : \mathbb{R} \to F$*, где* F *— вещественное банахово пространство. Если отображения* f *и* g *дважды* s*–субдифференцируемы в точке* x*, то отображение* $f + g$ *также дважды* s*–субдифференцируемо в точке* x*, причем*

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}(f + g)(x) \subset \partial^{[\prime\prime]}_{sub} f(x) + \partial^{[\prime\prime]}_{sub} g(x). \tag{2.8}$$

Нетрудно показать, что если одна из функций в теореме 2.2.5 дважды симметрически дифференцируема в обычном смысле, то включение (2.8) превращается в точное равенство.

Теорема 2.2.6. *Если отображение f дважды s–субдифференцируемо в точке x, а отображение g дважды симметрически дифференцируемо в точке x, то*

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}(f+g)(x) = \partial^{[\prime\prime]}_{sub}f(x) + g^{[\prime\prime]}(x). \tag{2.9}$$

2.2.2 Формула Тейлора для симметрических субдифференциалов.

Далее $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$, где F — вещественное банахово пространство. Введем понятие s–субдифференциала n–го порядка.

Определение 2.2.7. Субпредел

$$\partial^{[n]}_{sub}f(x) = \operatorname*{sublim}_{h\to+0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big)$$

будем называть *s–субдифференциалом n–го порядка* отображения f в точке x.

Справедлив следующий аналог предложения 1.1.5.

Предложение 2.2.8. *Если существует $\partial^{[\prime]}_{sub}(f^{(n-1)})(x)$, то существует s–субдифференциал n–го порядка $\partial^{[n]}_{sub}f(x)$ и имеет место включение:*

$$\partial^{[n]}_{sub}f(x) \subset \partial^{[\prime]}_{sub}(f^{(n-1)})(x).$$

Перейдем к выводу симметрического аналога формулы Тейлора в асимптотической форме.

Теорема 2.2.9. *Предположим, что существует $\partial^{[\prime]}_{sub}f^{(n-1)}(x)$ и отображение f абсолютно непрерывно в окрестности точки x. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k \in \frac{h^n}{n!}\overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial^{[\prime]}_{sub}f^{(n-1)}\big)(x+\theta h)\Big\} + o(h^n). \tag{2.10}$$

Доказательство. Из существования $\partial_{sub}^{[\prime]} f^{(n-1)}(x)$ следует, что f имеет обычные производные до $(n-1)$ порядка включительно в окрестности точки x. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ оценка (2.10) приводит к теореме о среднем (см. теорему 3.1.24):

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\left\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_{sub}^{[\prime]} f\big)(x+\theta h) \right\} \cdot h + o(h).$$

b) Допустим, утверждение теоремы верно для $\forall \widetilde{f}$, удовлетворяющего условию теоремы для порядка $(n-1)$:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\, \overline{co}\left\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_{sub}^{[\prime]} \widetilde{f}^{(n-2)}\big)(x+\theta h) \right\} + o(h^{n-1}).$$

Отсюда $\forall y_{n-1} \in \overline{co}\left\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial_{sub}^{[\prime]} \widetilde{f}^{(n-2)}\big)(x+\theta h) \right\}$ имеем:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_{n-1} \in o(h^{n-1}),$$

где $o(h^{n-1})$ не зависит от выбора y_{n-1}.

Введем $\forall y_n \in \overline{co}\left\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial_{sub}^{[\prime]} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \right\}$ вспомогательную функцию:

$$r_n(f;h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n.$$

Вычислим обычную производную по h вспомогательной функции r_n:

$$r_n'(f;h) = f'(x+h) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1} - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_n.$$

Поскольку, $\partial_{sub}^{[\prime]} f^{(n-1)}(x) = \partial_{sub}^{[\prime]}((f')^{(n-1)})(x)$, то по допущению индукции: $r_n'(f;h) = r_{n-1}(f';h) = o(h^{n-1})$. Применяя классическую теорему о среднем $(0 < \theta < 1)$, получаем:

$$r_n(f;h) \in \overline{co}\left\{ r_n'(f;\theta h) \;\middle|\; 0 < \theta < 1 \right\} \cdot h = o(h^{n-1}) \cdot h = o(h^n).$$

Итак, доказано по индукции, что $f(x+h) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \dfrac{h^n}{n!} y_n = o(h^n)$, где многозначная оценка «o» не зависит от выбора

$$y_n \in \overline{co} \Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial^{[\prime]}_{sub} f^{(n-1)} \big)(x+\theta h) \Big\}.$$

Следовательно,

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} y_n + o(h^n)$$

при любом выборе $y_n \in \overline{co} \Big\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial^{[\prime]}_{sub} f^{(n-1)} \big)(x+\theta h) \Big\}$. Таким образом, мы получили равенство (2.10). □

Отметим, что здесь при $n \geqslant 2$ условие абсолютной непрерывности f в окрестности x выполняется автоматически, ввиду $f \in C^1(U(x))$.

Для нечетного порядка имеет место следующая формула Тейлора.

Теорема 2.2.10. *Предположим, что существует* $\partial^{[\prime]}_{sub}(f^{(2n)})(x) = \partial^{[2n+1]}_{sub} f(x)$ *и отображение* f *абсолютно непрерывно в окрестности точки* x*. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} \in 2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \partial^{[2n+1]}_{sub} f(x) + o(h^{2n+1}). \tag{2.11}$$

Аналогично доказывается формула Тейлора в четном случае.

Теорема 2.2.11. *Предположим, что существует* $\partial^{[2n]}_{sub} f(x) = \partial^{[\prime]}_{sub}(f^{(2n-1)})(x)$ *и отображение* f *абсолютно непрерывно в окрестности точки* x*. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h) + f(x-h) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!} h^{2k} \in 2\frac{h^{2n}}{(2n)!} \partial^{[2n]}_{sub} f(x) + o(h^{2n}). \tag{2.12}$$

Выводы.

1. Построены основы общей теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков для отображений скалярного аргумента со значениями в банаховых пространствах.

2. Даказана теорема о среднем для s-субдифференцируемых отображений.

3. Получена формула Тейлора для симметрических субдифференциалов.

ГЛАВА 3

Симметрические субдифференциалы в банаховых пространствах

Данная глава посвящена построению основ общей теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков для отображений в банаховых пространствах.

В разделе 3.1 строится теория s–субдифференциалов первого порядка в банаховых пространствах. Вначале мы строим подходящую операторную базу. Затем, следуя обобщенной схеме Гато-Адамара-Фреше, последовательно вводятся s–субдифференциалы по направлению, слабые s–субдифференциалы, s–субдифференциалы Гато, и, наконец, сильные s–субдифференциалы.

Так как в симметрическом случае определение высших субдифференциалов не носит индуктивный характер, общая схема их определения в разделе 3.2 сходна со схемой определения симметрического субдифференциала первого порядка. Поскольку мы отправляемся от конечных разностей высших порядков, операторной базой служит теория субстепенных s–операторов.

В разделе 3.3 построенный выше аппарат s–субдифференциального исчисления применяется к оценке первой и второй субвариации одномерного вариационного функционала.

Основные результаты данной главы изложены в публикациях [6], [11] – [15], [132], [5].

3.1 Симметрические субдифференциалы первого порядка в банаховых пространствах

3.1.1 Однородные сублинейные операторы и их основные свойства. Напомним некоторые сведения из теории суб–операторов, изложенные в работах [81], [88], [89], [120]. Для заданного банахова пространства F обозначим через F_K множество непустых выпуклых компактов из F. Конус F_K является индуктивно упорядоченным и субнормированным относительно субнормы $\|C\| = \sup\limits_{y \in C} \|y\|$, порождаемой метрикой Хаусдорфа в F_K. Конус F_K является полным относительно метрики Хаусдорфа и мы называем его *банаховым конусом.* Сублинейный ограниченный оператор $A : E \to F_K$, где E — банахово пространство, называется суб–оператором. Свойства суб–операторов исследованы в [81], [89], [119], [120].

Введем теперь понятие симметрического оператора. Заметим, что оно отличается от понятия суб–оператора выполнением свойства однородности в полном объеме, в то время, как суб–операторы обладают лишь свойством позитивной однородности.

Определение 3.1.1. Пусть E и F — вещественные банаховы пространства. Отображение $A : E \to F_K$ назовем *s–сублинейным оператором* (или *s–оператором*), если для любых $h_1, h_2, h \in E$ верно:

(i) $\quad A(h_1 + h_2) \subset Ah_1 + Ah_2;$ $\qquad (ii)$ $\quad A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah,$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}.$

Определение 3.1.2. Будем говорить, что s–оператор A *ограничен (по субнорме)*, если

$$\|A\| := \sup_{\|h\|\leqslant 1} \|Ah\| < \infty. \tag{3.1}$$

Обозначим множество всех ограниченных по субнорме $\|A\| := \sup_{\|h\|\leqslant 1} \|Ah\|$ s–операторов $A : E \to F_K$ через $\overset{s}{L}_{sub}(E; F_K)$. Нетрудно видеть, что $\overset{s}{L}_{sub}(E; F_K)$ — субнормированный конус, являющийся подконусом субнормированного конуса $L_{sub}(E; F_K)$.

Теорема 3.1.3. *Для любых вещественных банаховых пространств E и F множество $\overset{s}{L}_{sub}(E; F_K)$ образует банахов конус. При этом конус $\overset{s}{L}_{sub}(E; F_K)$ индуктивно упорядочен отношением*

$$(A_1 \leqslant A_2) :\Longleftrightarrow (A_1 h \subset A_2 h \ (\forall\, h \in E)),$$

и субнорма в $\overset{s}{L}_{sub}(E; F_K)$ согласована с отношением порядка:

$$(A_1 \leqslant A_2) \Longrightarrow (\|A_1\| \leqslant \|A_2\|).$$

3.1.2 Симметрические субдифференциалы по направлению, слабые симметрические субдифференциалы и их простейшие свойства.

Пусть отображение $f : E \to F$, где E и F — вещественные банаховы пространства, определено в окрестности точки $x \in E$, $h \in U(0) \subset E$, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в F. Вводимый ниже симметрический компактный субдифференциал по направлению будем называть также *s–субдифференциалом* по направлению.

Определение 3.1.4. Симметрический субдифференциал отображения f в точке x по направлению h есть следующий субпредел (если он существует):

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x, h) = \operatorname*{sublim}_{t \to +0} \frac{f(x + th) - f(x - th)}{2t}. \tag{3.2}$$

Простейшие свойства s–субдифференциалов по направлению рассмотрены в работе [5].

В доказательстве следующего утверждения используется признак Вейерштрасса для субпределов (теорема 2.1.2).

Предложение 3.1.5. *Пусть заданы отображения f, $g : E \to F$, причем:*

1) g s–субдифференцируемо по направлению h в точке $x \in E$;

2) для достаточно малых $\delta > 0 :$ $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x, \delta) \subset \partial^{[\prime]}_{sub} g(x, \delta)$.

Тогда f также s–субдифференцируемо в точке x по направлению h, причем:

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\, f(x, h) \subset \partial^{[\prime]}_{sub}\, g(x, h). \tag{3.3}$$

Перейдем к понятию слабого s–субдифференциала.

Определение 3.1.6. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и s–субдифференцируемо в точке x по заданному направлению $h \in U(0) \subset E$. Скажем, что f *слабо симметрически субдифференцируемо* в точке x в том случае, когда s–субдифференциал $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x, h) : E \to F_K$ s–сублинеен по h.

3.1.3 Симметрические субдифференциалы Гато и Фреше, связь со строгим субдифференциалом.

В этом пункте мы введем основные понятия, изучим простейшие свойства s–субдифференциалов Гато и Фреше и дадим определение строгой s–субдифференцируемости по Фреше.

Определение 3.1.7. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и слабо s–субдифференцируемо в точке x. Будем говорить, что f *s-субдифференцируемо по Гато* в точке x, если слабый

s–субдифференциал $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$ непрерывен в нуле или, что равносильно, ограничен по норме.

Определение 3.1.8. Если отображение f s–субдифференцируемо по Гато в точке x, причем сходимость в субпределе (3.2) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$, то s–оператор $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$ назовем *s–субдифференциалом Фреше* или *сильным s–субдифференциалом* f в точке x.

По аналогии с понятием строгой дифференцируемости по Фреше, мы введем понятие *строгой* субдифференцируемости. Это понятие понадобится нам для исследования вопроса о s–субдифференцируемости композиции.

Определение 3.1.9. Назовем отображение $f : E \supset U(x) \to F$ *строго субдифференцируемым* в точке $x \in E$, если $\forall\, h_1, h_2 \in U(0)$ существует субпредел

$$\partial^{S}_{sub} f(x)(h_1 - h_2) = \operatorname*{sublim}_{t \to +0} \frac{f(x + th_1) - f(x + th_2)}{t}, \tag{3.4}$$

который является сублинейным по $(h_1 - h_2)$ ограниченным суб–оператором, причем сходимость в субпределе (3.4) равномерна по $\|h_1\| \leqslant 1$, $\|h_2\| \leqslant 1$.

Замечание 3.1.10. Нетрудно заметить, что строго субдифференцируемое отображение f является сильно субдифференцируемым; при этом $\partial^{S}_{sub} f(x) = \partial_{sub} f(x)$. Отметим также, что простейшие свойства строго субдифференцируемых отображений аналогичны свойствам сильно субдифференцируемых отображений (см., например, [120]).

3.1.4 Критерии симметрической субдифференцируемости. Для того, чтобы получить вначале критерий слабой s–субдифференцируемости, используем понятие многозначного малого отображения (см. [89], определение 5.20).

Определение 3.1.11. Пусть F — вещественное банахово пространство. Обозначим через F_B конус всех ограниченных выпуклых замкнутых подмножеств в F с субнормой $\|B\| = \sup\limits_{y\in B}\|y\|$, порожденной метрикой Хаусдорфа в F_B. Отображение $\psi : \mathbb{R} \supset V(0) \to F_B$ назовем *малым* (в нуле), если $\|\psi(t)\| \to 0$ при $t \to 0$.

Получим критерий слабой s–субдифференцируемости, следуя схеме вывода критерия слабой компактной субдифференцируемости (см. [120], теорема 3.3.13).

Теорема 3.1.12. *Пусть отображение $f : E \to F$ определено в некоторой окрестности точки $x \in E$, $h \in E$. Тогда отображение f слабо s–субдифференцируемо в точке x тогда и только тогда, когда существуют s–сублинейный по h оператор $B : E \to F_K$ и отображение $\psi : E \supset S_1 \to F_B$, где для $S_1 = \{h \in E \big| \, \|h\| \leqslant 1\}$ выполнено:*

$$f(x+h) - f(x-h) \in 2Bh + \psi(h) \tag{3.5}$$

при $t \to 0$, где $(\psi(th)/t) \to 0$ $(\forall h \in S_1)$. При этом $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)h \subset Bh$.

Теперь получим критерии s–субдифференцируемости по Гато и по Фреше. Здесь мы также следуем схеме вывода соответствующих критериев компактной субдифференцируемости.

Теорема 3.1.13. *Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, и отображение $f : E \to F$ слабо s–субдифференцируемо в точке $x \in E$. Тогда:*

1. *Отображение f s–субдифференцируемо по Гато тогда и только тогда, когда существует оператор $B \in \overset{s}{L}_{sub}(E; F_K)$, для которого:*

$$f(x+h) - f(x-h) \in 2Bh + \psi(h) \tag{3.6}$$

при $t \to 0$, где $(\psi(th)/t) \to 0$ $(\forall h \in E)$; при этом

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)h \subset Bh \qquad (\forall\, h \in E).$$

2. *Отображение f s–субдифференцируемо по Фреше (или сильно) в точке x тогда и только тогда, когда f s–субдифференцируемо по Гато в точке x и*

$$f(x+h) - f(x-h) \in 2\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)h + \psi(h), \tag{3.7}$$

где $\psi(h) = o(\|h\|)$ при $\|h\| \to 0$, или, что равносильно, $(\psi(th)/t) \rightrightarrows 0$ при $t \to\ 0$ $(\forall\, h \in S_1 \subset E)$.

3.1.5 Общие свойства сильных симметрических субдифференциалов.

Отметим случай s–субдифференцируемости функционала $f : E \to \mathbb{R}$. Приведем здесь удобное выражение для вычисления $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h)$.

Теорема 3.1.14. *Симметрический субдифференциал $f : E \to \mathbb{R}$ существует в том и только в том случае, если существуют конечные верхний и нижний симметрические дифференциалы f: $\overline{\partial^{[\prime]}} f(x,h)$ и $\underline{\partial^{[\prime]}} f(x,h)$. Справедливо равенство:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h) = \Big[\underline{\partial^{[\prime]}} f(x,h);\ \overline{\partial^{[\prime]}} f(x,h)\Big]. \tag{3.8}$$

Доказательство. Положим $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi : [-1;1] \to \mathbb{R}$. При этом $(0 < t \leqslant 1)$:

$$\frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{2t},$$

следовательно:

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h) = \left[\underline{\varphi^{[\prime]}}(0); \overline{\varphi^{[\prime]}}(0)\right] = \left[\underline{\partial^{[\prime]}} f(x,h);\ \overline{\partial^{[\prime]}} f(x,h)\right].$$

□

Пусть E — вещественное банахово пространство.

Определение 3.1.15. Отображение $f : E \to \mathbb{R}$ назовем *s–сублинейным функционалом*, если для любых $h, k \in E$ верно:

$(a)\quad f(h+k) \leqslant f(h) + f(k);\qquad (b)\quad f(\lambda h) = \lambda \cdot f(h)$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Соответственно, функционал f будем называть *s–надлинейным*, если для любых $h, k \in E$ верно:

$(a)\quad f(h+k) \geqslant f(h) + f(k);\qquad (b)\quad f(\lambda h) = \lambda \cdot f(h)$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1.16. *Пусть E — вещественное банахово пространство. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сильно s–субдифференцируем в точке x, то $\underline{\partial^{[\prime]}} f(x,h)$ — ограниченный s–надлинейный функционал, а $\overline{\partial^{[\prime]}} f(x,h)$ — ограниченный s–сублинейный функционал.*

Доказательство. Достаточно применить результат теоремы 3.1.14 и свойства $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$. □

Изучение общих свойств s–субдифференциалов мы начнем с необходимого условия субдифференцируемости. Далее для отображения $f(x_1, x_2)$ мы обозначаем частные s-субдифференциалы по переменным x_1, x_2 соответственно:

$$\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_1}\right)_{sub} (x_1,x_2) h_1 = \operatorname*{sublim}_{t\to+0} \frac{f(x_1 + t h_1, x_2) - f(x_1 - t h_1, x_2)}{2t}, \qquad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_2}\right)_{sub} (x_1,x_2) h_2 = \operatorname*{sublim}_{t\to+0} \frac{f(x_1, x_2 + t h_2) - f(x_1, x_2 - t h_2)}{2t}. \qquad (3.10)$$

Теорема 3.1.17. *Пусть $E_1, \ldots, E_n, F$ — вещественные банаховы пространства. Если отображение $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ симметрически субдифференцируемо в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то это отображение раздельно s–субдифференцируемо в этой точке, причем справедливо включение:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i} \right)_{sub} (x_1, \ldots, x_n) h_i. \tag{3.11}$$

В случае функционалов оценка (3.11) приобретает более точный вид.

Следствие 3.1.18. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — нормированные пространства. Если $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}$ сильно симметрически субдифференцируем в точке x, то имеет место «формула полного симметрического субдифференциала» ($\forall\, h = (h_1, \ldots, h_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$) в оценочной форме:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)(h_1, \ldots, h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial h_i} \right)_{sub} (x) h_i = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h_i}}(x); \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h_i}(x) \right]. \tag{3.12}$$

В частности, если функционал $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сильно s–субдифференцируем в точке x, то справедливо включение:

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)(h_1, \cdots, h_n) \subset \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial x_i}}(x) h_i; \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial x_i}(x) h_i \right] = \left[\underline{\nabla}^{[\prime]} f(x); \overline{\nabla}^{[\prime]} f(x) \right] \cdot h,$$

где

$$\underline{\nabla}^{[\prime]} f(x) = \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial x_i}}(x) \right)_{i=\overline{1,n}}, \quad \overline{\nabla}^{[\prime]} f(x) = \left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial x_i}(x) \right)_{i=\overline{1,n}}.$$

Перейдем теперь к случаю отображений в произведение банаховых пространств: $f : E \to F_1 \times \cdots \times F_m$.

Теорема 3.1.19. *Отображение f является s–субдифференцируемо в том и только том случае, если все координатные отображения f_j, $j = \overline{1,m}$,*

s–субдифференцируемы. Справедливо включение:

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x)h \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\partial_{sub}^{[\prime]} f_j(x)h\right). \tag{3.13}$$

В частности, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, то последняя оценка принимает вид:

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x)h \subset \left(\prod_{j=1}^{m} \left[\underline{\frac{d^{[\prime]} f_j}{dx}}(x); \overline{\frac{d^{[\prime]} f_j}{dx}}(x)\right]\right) \cdot h. \tag{3.14}$$

Отметим, что включения (3.13) *и* (3.14) *являются точными по каждой проекции.*

Рассмотрим вопрос о свойствах *симметрической матрицы Якоби* в случае отображений $f : \prod_{i=1}^{n} E_i \to \quad \to \prod_{j=1}^{m} F_j$, где E_i $(i = \overline{1,n})$, F_j $(j = \overline{1,m})$ — банаховы пространства. Получим следующее утверждение, и спользуя предыдущие результаты.

Теорема 3.1.20. *Если отображение f симметрически субдифференцируемо в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то*

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^{[\prime]} f_j}{\partial x_i}\right)_{sub} (x_1, \ldots, x_n) h_i\right). \tag{3.15}$$

Определение 3.1.21. Назовем s–матрицу сублинейных s–операторов

$$J_{sub}^{[\prime]} f(x) = \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f_j}{\partial x_i}\right)_{sub} (x)\right)^{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}} \qquad \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f_j}{\partial x_i}\right)_{sub} (x) \in L_{sub}(E_i; (F_j)_K)\right)$$

s–матрицей Якоби отображения f в точке x.

Рассмотрим, наконец, важный вопрос о s–субдифференцируемости композиции. Как известно, композиция симметрически дифференцируемых функций не является, вообще говоря, симметрически дифференцируемой. Однако мы покажем, что композиция строго компактно субдифференцируемого отображения и s–субдифференцируемого отображения сохраняет s–субдифференцируемость. Тем самым результат теоремы 1.3.8 обобщается на случай s–субдифференциалов.

Теорема 3.1.22. *Пусть E, F, G — вещественные банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \to F$ и $g : F \supset V(y = f(x)) \to G$. Если отображение g строго компактно субдифференцируемо в y, а отображение f непрерывно и s–субдифференцируемо в x, то композация $g \circ f$ также s–субдифференцируема в точке x. При этом выполняется оценка:*

$$\partial_{sub}^{[\prime]}(g \circ f)(x)h \subset \big[\partial_{sub} g(y) \circ \partial_{sub}^{[\prime]} f(x)\big] h. \tag{3.16}$$

3.1.6 Теорема о среднем для симметрических субдифференциалов. Полученные ранее для s–дифференцируемых отображений формула конечных приращений и теорема о среднем здесь обобщаются на случай s–субдифференцируемых абсолютно непрерывных на векторном отрезке отображений. Вначале получим формулу конечных приращений для s–субдифференцируемых отображений вещественного аргумента, аналогичную теореме 1.1.3 для s–дифференцируемых отображений.

Теорема 3.1.23 (Формула конечных приращений)**.** *Пусть отображения $f : \mathbb{R} \supset [a; b] \to F$ и $g : \mathbb{R} \supset [a; b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывны на $[a; b]$ и симметрически субдифференцируемы на интервале $(a; b)$, при этом отображение g возрастает. Если выполнена оценка $\partial_{sub}^{[\prime]} f(x) \in \partial_{sub}^{[\prime]} g(x) \cdot B$ $(a < x < b)$, где $B \subset F$ — замкнутое выпуклое множество, то справедлива оценка:*

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{3.17}$$

Докажем теперь теорему о среднем для симметрически субдифференцируемых отображений векторного аргумента. Заметим, что далее под абсолютной непрерывностью отображения $f : E \supset [x; x+h] \to F$ мы понимаем абсолютную непрерывность композиции $f(x+th)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема 3.1.24 (Теорема о среднем)**.** *Пусть отображение $f : E \supset [x; x+h] \to F$ абсолютно непрерывно на $[x; x+h]$ и симметрически субдифференцируемо на $(x; x+h)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1} \partial^{[\prime]}_{sub} f(x+\theta h)\Big) \cdot h. \tag{3.18}$$

Доказательство. Достаточно применить полученный результат к композиции $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi : \mathbb{R} \supset [0;1] \to F$, учитывая очевидное равенство $\partial^{[\prime]}_{sub}\varphi(\theta) = \partial^{[\prime]}_{sub} f(x+\theta h) \cdot h$. $\square$

Предъявим как следствие теорему о среднем, содержащую неравенство с нормой.

Следствие 3.1.25. *Предположим, что выполнены все предположения теоремы 3.1.24. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1}\Big(\sup \|\partial^{[\prime]}_{sub} f(x+\theta h)\|\Big) \cdot \|h\|. \tag{3.19}$$

3.2 Симметрические субдифференциалы высших порядков в банаховых пространствах.

3.2.1 Основные определения и формула Тейлора.

Вначале мы введем базисное понятие субстепенного s–оператора и отметим важное свойство суб–биномиальности (как обобщение субаддитивности). Затем, действуя вновь в духе схемы Гато–Адамара–Фреше, мы введем сильные

s–субдифференциалы n-го порядка как ограниченные субстепенные s–операторы n-го порядка. Эта конструкция позволяет перенести на s–субдифференциальный случай полученную ранее в случае скалярного аргумента формулу Тейлора (теорема 3.2.4).

Пусть E и F — вещественные банаховы пространства. Дадим определение *субстепенного s–оператора.*

Определение 3.2.1. Отображение $A : E \to F_K$ будем называть *субстепенным s–оператором n-го порядка*, если A порождается некоторым n-сублинейным симметрическим s–оператором $\widetilde{A} : \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n} \to F_K$:

$$A(h) := \widetilde{A}(h)^n. \tag{3.20}$$

В частности, $A(\lambda h) = \lambda^n \cdot A(h)$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Здесь и далее через $(h)^n$ для $h \in E$ мы обозначаем диагональный поливектор $\underbrace{(h, \ldots, h)}_{n}$. Оператор A при $n = 2$ будем называть *субквадратичным* s–оператором, при $n = 3$ — *субкубическим* s–оператором.

Определение 3.2.2. Будем говорить, что s–оператор $\widetilde{A}$ *ограничен (по субнорме)*, если

$$\|\widetilde{A}\| = \sup_{\|h_1\| \leqslant 1, \ldots, \|h_n\| \leqslant 1} \|\widetilde{A}(h_1, \ldots, h_n)\| < \infty. \tag{3.21}$$

Если $\widetilde{A}$ ограничен, то величину (3.21) назовём *субнормой* s–оператора $\widetilde{A}$. Так как s–оператор A порождается s–оператором $\widetilde{A}$, положим $\|A\| := \|\widetilde{A}\|$.

Введем определение s–субдифференциала n-го порядка по направлению $h \in E$ для отображения $f : E \supset U(x) \to F$ в точке x

.

Определение 3.2.3. Назовем *s–субдифференциалом n-го порядка по направлению h* следующий субпредел:

$$\partial_{sub}^{[n]} f(x,h) = \underset{\delta\to+0}{\operatorname{sublim}}\Big(\frac{1}{(2t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\big(x+(n-2k)th\big)\Big). \tag{3.22}$$

Если $\partial_{sub}^{[n]} f(x,h)$ существует по любому направлению $h \in E$ и является субстепенным s–оператором n-го порядка, то будем говорить, что f *слабо s–субдифференцируемо n раз* в точке x и примем обозначение $\partial_{sub}^{[n]} f(x)(h)$.

Простейшие свойства s–субдифференциалов n-го порядка по направлению представлены в работе [5].

Справедлива следующая формула Тейлора для s–субдифференциалов Фреше.

Теорема 3.2.4. *Предположим, что существует $\partial_{sub}^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x)$ и отображение $f(x)$ радиально сильно абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$. Тогда имеет место включение:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(h)^k \in \frac{1}{n!}\overline{co}\,\partial_{sub}^{[n]} f\big((x;x+h)\big)\cdot(h) + o(\|h\|^n). \tag{3.23}$$

Доказательство. Положим $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi : [0;1] \to E$, тогда $f(x+h) = \varphi(1)$. При этом $f^{(k)}(x)(h)^k = \varphi^{(k)}(0)$ и $\partial_{sub}^{[n]} f(x)(h) = \partial_{sub}^{[n]}\varphi(0)$. Применяя к $\varphi(t)$ формулу (3.23) на $[0;\theta]$, получаем:

$$\varphi(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,\theta^k \in \frac{1}{n!}\,\overline{co}\,\partial_{sub}^{[n]}\varphi\big((0;\theta)\big)\cdot(\theta)^n + o(\theta^n).$$

Возвращаясь к $f(x+\theta h)$, имеем:

$$f(x+\theta h) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(h)^k \in \frac{1}{n!}\,\overline{co}\,\partial^{[n]} f\big((x+\theta h)\big)\cdot(\theta h)^n + o((\theta h)^n).$$

Заменяя обозначение во всех слагаемых: $\theta h \mapsto h$, мы получаем требуемое равенство (3.23). □

3.2.2 Симметрические субдифференциалы высших порядков от функционалов.

Приведем описание высших s–субдифференциалов от функционалов. На этой основе получена «формула полного s–субдифференциала» для высших порядков, а также рассмотрены s–матрицы Якоби высших порядков. Вывод следующих результатов аналогичен случаю обычных компактных субдифференциалов (см. [81], [88], [89], [120]).

Теорема 3.2.5. *Пусть E — вещественное банахово пространство. Если функционал $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$ s–субдифференцируем n раз в $U(x)$ и $(n-1)$ раз дифференцируем обычным образом в точке x, то $\forall\, h \in E$ имеет место включение:*

$$\partial_{sub}^{[n]} f(x)(h)^n \subset \left[\underline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}\Big)(x); \overline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}\Big)(x)\right] =$$

$$= \left[\underline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial h}}; \overline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial h}}\right]\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial h^{n-1}}\right)(x)\cdot(h)^n.$$

В случае $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to \mathbb{R}$ справедливо такое равенство:

$$\partial_{sub}^{[n]} f(x) = \left[\underline{\frac{d^{[\prime]}}{dx}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x); \overline{\frac{d^{[\prime]}}{dx}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x)\right] := \left[\underline{\frac{d^{[n]} f}{dx^n}}(x); \overline{\frac{d^{[n]} f}{dx^n}}(x)\right].$$

Перейдем к случаю функционалов в произведение банаховых пространств: $f : E_1 \times \cdots \times E_m \to \mathbb{R}$.

Теорема 3.2.6. *Если функционал $f : E_1 \times \cdots \times E_m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ раз дифференцируем и n раз s–субдифференцируем в точке x, тогда справедлива следующая оценка:*

$$\partial_{sub}^{[n]} f(x)(h) \subset \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial x_i}\right)_{sub}\left[\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \frac{\partial^{[\prime]}}{\partial x_m}h_m\right)^{n-1}\cdot f\right](x)\cdot h_i. \quad (3.24)$$

3.2.3 Симметрическая субдифференцируемость и симметрическая субгладкость. Введем удобное понятие симметрической субгладкости первого порядка, как простого достаточного условия s–субдифференцируемости. В случае функционалов s–субгладкость выражается в терминах нижних и верхних симметрических производных. Вначале перенесем определение субнепрерывности (см. [81], определение 3.8) на симметрический случай.

Определение 3.2.7. Пусть E и F — вещественные банаховы пространства, $\Lambda : E \supset U(x) \to L^{S}_{sub}(E; F_K)$. Будем говорить, что отображение Λ *субнепрерывно* в точке $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если для некоторого $\Lambda_x \in L^{S}_{sub}(E; F_K)$ выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, (\|h\| < \delta, \ \|k\| \leqslant 1) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \cdot k \subset U_{\varepsilon}(\Lambda(x) \cdot k)). \quad (3.25)$$

Для нас является основным то, что в случае симметрических субдифференциалов (т. е. при $\Lambda = \partial^{[\prime]}_{sub} F : E \to L^{S}_{sub}(E; F_K)$) в условии (3.25) можно заменить $\Lambda(x) = \partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$ на любой элемент $L^{S}_{sub}(E; F_K)$. Таким образом, мы получаем *общую форму достаточного условия s–субдифференцируемости.*

Теорема 3.2.8. *Предположим, что E, F — вещественные банаховы пространства, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ непрерывно в точке x. Если отображение $\Lambda = \partial^{[\prime]}_{sub} f : E \supset \dot{U}(x) \to L^{S}_{sub}(E; F_K)$ субнепрерывно в точке x, то f s–субдифференцируемо в точке x. Назовем отображение f симметрически субгладким (точнее, $C^{[\prime]}$–субгладким) в точке x и введем обозначение $f \in C^{[\prime]}_{sub}(x)$.*

Покажем теперь, что субнепрерывность частных s–субдифференциалов есть достаточное условие s–субдифференцируемости.

Теорема 3.2.9. *Пусть* $E_1, \dots, E_n$, F — *вещественные банаховы пространства,* $f : E_1 \times \dots \times E_n \supset U(x) \to F$. *В этом случае*

$$(f \in C_{sub}^{[\prime]}(x)) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i} \right)_{sub} \in C_{sub}(x);\ i = \overline{1, n} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \text{ } s\text{–}\textit{субдифференцируемо в } x).$$

Рассмотрим *случай функционалов* $f : E \to \mathbb{R}$. В этом случае мы получаем *полунепрерывность снизу* (по переменной x) $\dfrac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}$ и *полунепрерывность сверху* (по переменной x) $\dfrac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}$, которые равносильны в совокупности *субнепрерывности* s–субдифференциала $\partial_{sub}^{[\prime]} f = \left[\dfrac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}; \dfrac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h} \right] : E \to \mathbb{R}_{sub}$.

Теорема 3.2.10. *Пусть* E — *вещественное банахово пространство,* $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(f \in C_{sub}^{[\prime]}(x)) \Longleftrightarrow \Bigg(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x,$$

$$\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h} \text{ полунепрерывен сверху} \Bigg) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f \text{ } s\text{–}\textit{субдифференцируем}).$$

Доказательство. Используя определение субнепрерывности, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (\|k\| < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left[\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}(x+k); \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}(x+k) \right] \subset \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}(x) - \varepsilon; \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}(x) + \varepsilon \right) \right). \quad (3.26)$$

Включение справа в (3.26) равносильно выполнению неравенств (при $\|k\| < \delta$):

$$\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}(x+k) > \frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}(x) - \varepsilon; \quad \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}(x+k) < \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}(x) + \varepsilon.$$

Таким образом, мы получаем полунепрерывность для $\dfrac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}$ (сверху) в точке x и $\dfrac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}$ (снизу). $\square$

В случае функционалов многих переменных имеет место следующее условие:

Теорема 3.2.11. *Если $E_1, \ldots, E_n$ — вещественные банаховы пространства, $f : E_1 \times \cdots \times E_n \supset U(x) \to \mathbb{R}$, то*

$$(f \in C^{[\prime]}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\underline{\nabla}^{[\prime]}_{sub} f = \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial x_i}}\right)_{sub}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен снизу}\right.$$

$$\text{в } x \text{ (покоординатно)}, \overline{\nabla}^{[\prime]}_{sub} f = \left(\left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial x_i}\right)_{sub}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен}$$

$$\left.\text{сверху в точке } x\right) \Longrightarrow (f \text{ } s\text{–субдифференцируем в точке } x).$$

В случае $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеем:

$$(f \in C^{[\prime]}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\underline{\nabla}^{[\prime]} f = \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен снизу в } x,\right.$$

$$\left.\overline{\nabla}^{[\prime]} f = \left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен сверху в } x\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f \text{ } s\text{–субдифференцируем в } x).$$

3.3 Симметрический субдифференциал основного вариационного функционала

3.3.1 Первая симметрическая вариация одномерного вариационного функционала. В работе [89] было показано, что одномерный вариационный функционал с C^1–субгладким интегрантом

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1_{sub}([a;b]\times\mathbb{R}^2), u = f(x,y,z)) \tag{3.27}$$

сильно субдифференцируем в $C^1[a;b]$, причем оценка его первой субвариации имеет вид $((\forall h \in C^1[a;b]))$:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx\right]. \tag{3.28}$$

Наша цель — обобщить оценку (3.28) на случай *симметрически субгладких интегрантов* и получить оценку симметрического субдифференциала $\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)$. При этом симметрическая оценка оказывается более узкой, чем обычная.

Теорема 3.3.1. *Если интегрант f является $C^{[\prime]}$–субгладким: $f \in C^{[\prime]}_{sub}(\mathbb{R}^3)$ для вариационного функционала* (3.27)*. В этом случае Φ сильно s–субдифференцируем везде в $C^1[a;b]$, при этом имеет место оценка:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx;\right.$$
$$\left.\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx\right] \qquad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{3.29}$$

Рассмотрим частный случай включения (3.29) для интегранта, образованного внешней композицией симметрически субгладкой функции с гладкой.

Теорема 3.3.2. *Предположим, что*

$$\Phi(y) = \int_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^{[\prime]}_{sub}(\mathbb{R})).$$

В этом случае имеет место следующая оценка:

$$\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h \subset \left[\int_a^b \underline{\varphi^{[\prime]}}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\,;\right.$$

$$\left.\int_a^b \overline{\varphi^{[\prime]}}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\right] \quad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{3.30}$$

Теперь рассмотрим случай внутренней композиции симметрически субгладкой функции с гладкой по третьей переменной.

Теорема 3.3.3. *Предположим, что*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,\varphi(y'))dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^{[\prime]}_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда имеет место оценка $(h \in C^1[a;b])$*:*

$$\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h \subset \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))hdx +$$

$$+\left[\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi^{[\prime]}}(y')h'dx; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi^{[\prime]}}(y')h'dx\right]. \tag{3.31}$$

В качестве конкретного примера отметим случай интегранта, образованного композицией модуля и гладкой функции.

Пример 3.3.4. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b |f(x, y, y')|dx \quad (y \in C^1[a; b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)). \tag{3.32}$$

Применяя обозначения теоремы 3.3.2, $\varphi(t) = |t|$, имеем φ всюду симметрически дифференцируема, и

$$\varphi^{[\prime]}(t) = sign\, t. \tag{3.33}$$

Подстановка (3.33) в (3.30) после преобразований приводит к точному равенству

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h = \partial^{[\prime]}\Phi(y)h = \int\limits_a^b\ sign(f(x, y, y')) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right) dx. \tag{3.34}$$

Таким образом, в случае $mes\,(f(x, y, y') = 0) = 0$ имеет место точное равенство $\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h = \partial\Phi(y)h$.

3.3.2 Вторая симметрическая субвариация одномерного вариационного функционала.

В [89] показано, что одномерный вариационный функционал с C^2_{sub}–гладким интегрантом

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}([a; b] \times \mathbb{R}^2), y \in C^1[a; b]).$$

допускает следующую оценку второй сильной субвариации:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x, y, y')h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x, y, y')hh'\right)dx\,;\right.$$
$$\left.\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x, y, y')h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x, y, y')hh'\right)dx\right]+$$
$$+\left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x, y, y')hh' + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y')h'^2\right)dx\,;\right.$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 \right) dx \Bigg]. \quad (3.35)$$

Мы получим симметрический аналог оценки (3.35) в случае интегранта класса $C_{sub}^{[\prime\prime]}$. При этом симметрическая оценка оказывается более узкой. Далее, учитывая включение $C_{sub}^{[\prime\prime]} \supset C^1$, мы примем следующие обозначения:

$$\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y \partial z}} = \underline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y \partial z}} = \overline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z \partial y}} = \underline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z \partial y}} = \overline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Теорема 3.3.5. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C_{sub}^{[\prime\prime]}([a;b] \times \mathbb{R}^2), y \in C^1[a;b]). \qquad (3.36)$$

Тогда вторая симметрическая субвариация $\Phi(y)$ *допускает оценку:*

$$\partial_{sub}^{[\prime\prime]} \Phi(y)(h)^2 \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh' \right) dx\,;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh' \right) dx \Bigg] +$$

$$+ \Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 \right) dx\,;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 \right) dx \Bigg]. \quad (3.37)$$

Как и в случае оценки первой симметрической субвариации, мы выделим случай интегранта, образованного внешней композицией симметрически субгладкой (класса $C_{sub}^{[\prime\prime]}$) функции с гладкой.

Теорема 3.3.6. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (\varphi\in C^{[\prime\prime]}_{sub}(\mathbb{R}),\, f\in C^2([a;b]\times\mathbb{R}^2),\, y\in C^1[a;b]).$$

Тогда вторая симметрическая субвариация Φ *допускает оценку (в краткой записи):*

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2\subset\int\limits_a^b \varphi'(f)\cdot\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}h+\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx+$$

$$+\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi^{[\prime\prime]}}(f)\cdot\left((f_y)^2h^2+f_{yz}hh'\right)dx\,;\int\limits_a^b \overline{\varphi^{[\prime\prime]}}(f)\cdot\left((f_y)^2h^2+f_{yz}hh'\right)dx\right]+$$

$$+\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi^{[\prime\prime]}}(f)\cdot\left(f_{yz}hh'+(f_z)^2h'^2\right)dx\,;\int\limits_a^b \overline{\varphi^{[\prime\prime]}}(f)\cdot\left(f_{yz}hh'+(f_z)^2h'^2\right)dx\right]. \tag{3.38}$$

Доказательство. Непосредственные преобразования. □

В качестве конкретного класса примеров рассмотрим функционалы с интегрантами вида $f|f|$.

Теорема 3.3.7. *Предположим, что*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')\cdot|f(x,y,y')|dx \quad (f\in C^2([a;b]\times\mathbb{R}^2),\, y\in C^1[a;b]).$$

В этом случае имеет место оценка (в более краткой записи):

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2\subset\int\limits_a^b |f|\cdot\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}h+\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx+2\int\limits_{(f\neq 0)} sign\, f\cdot\left(f_y\cdot h+f_z\cdot h'\right)^2dx+$$

$$+[-2;2]\cdot\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}\cdot h^2+f_{yz}\cdot hh'\right)dx+[-2;2]\cdot\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}\cdot hh'+f_{z^2}\cdot h'^2\right)dx. \tag{3.39}$$

В случае, когда $mes(f(x,y,y') = 0) = 0$ *в* (3.39) *получаем точное равенство:*

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \partial^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2 = \int\limits_a^b |f| \cdot \left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}h + \frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}h'\right)^2 \cdot f dx +$$

$$+ 2\int\limits_a^b sign\, f \cdot (f_y \cdot h + f_z \cdot h')^2\, dx.$$

Выводы.

1. Построены основы общей теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков для отображений в банаховых пространствах.

2. Для отображений в банаховых пространствах получены критерии симметрической субдифференцируемости.

3. Получена оценки симметрических вариаций и субвариаций первого и высших порядков для одномерного вариационного функционала.

ГЛАВА 4

Некоторые приложения симметрических дифференциалов и субдифференциалов

Данная глава диссертационной работы посвящена рассмотрению некоторых приложений построенной в предыдущих главах теории симметрических дифференциалов и симметрических субдифференциалов в гармоническом анализе, теории вероятностей и в теории экстремальных задач.

В разделе 4.1 рассмотрено обобщение классического метода Римана суммирования тригонометрических рядов и связанные с этим вопросы. Наше обобщение состоит в замене второй симметрической производной от функции Римана на симметрический субдифференциал второго порядка.

В разделе 4.2 исследуется возможность применения симметрических дифференцируемых и субдифференцируемых характеристик к негладким распределениям вероятностей случайной величины, используя понятия асимметрии и эксцесса случайной величины (skewness). При наличии соответствующей симметрической дифференцируемости эти характеристики выражаются через симметрические производные первого либо второго порядка, соответственно (теорема 4.2.3).

В разделе 4.2.3 мы обобщаем понятия локальной асимметрии и локального эксцесса на общий случай функционала в банаховом пространстве, достигающего локального экстремума в заданной точке (определение 4.2.8). Здесь вопрос о выборе оптимального направления, вдоль которого минимизируются, соответственно, локальная асимметрия либо локальный эксцесс, выступает на первый план. Представляется, что такая задача (актуальная в негладком случае) в идейном плане близка к другим известным классам экстремальных задач, связанных с поиском оптимального направления в уже найденной точке экстремума. Отметим, в этой связи, также известные классы задач такие, как «задача наискорейшего спуска» ([36], [38], [41], [43]), «овражный метод Гельфанда» ([27], [31], [32]).

Наконец, в заключительном пункте 4.2.4 мы вводим многозначные обобщения изложенных выше понятий, а именно — локальную суб–асимметрию и локальный суб–эксцесс (определение 4.2.15).

Основные результаты данной главы изложены в публикациях [6] – [9], [11], [12], [14] – [17], [132] – [133].

4.1 Обобщенный метод Римана суммирования тригонометрических рядов

4.1.1 S–теорема Шварца и обобщенная S–теорема Шварца.

Важную роль в приложениях симметрических производных к рядам Фурье играет следующая классическая теорема Шварца (см. [4], [117]):

Теорема 4.1.1 (Теорема Шварца)**.** *Если $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $F^{[\prime\prime]}(x)=0$ при $a<x<b$, то $F(x)$ линейна на этом отрезке.*

Если условие $F^{[\prime\prime]}(x)=0$ выполняется всюду, кроме конечного числа отдельных «точек неизвестности», то справедлива следующая

Теорема 4.1.2 (Обобщенная теорема Шварца). *Пусть для непрерывной на $[a;b]$ функции $F(x)$ выполнено равенство $F^{[\prime\prime]}(x) = 0$ всюду на $(a;b)$, кроме конечного числа «точек неизвестности»*

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_m < b.$$

Если в каждой из этих точек выполняется более слабое условие

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 F(x_i,h)}{2h} = 0,$$

то $F(x)$ линейна на этом промежутке.

Оказывается, второй s–субдифференциал в подобных случаях может играть ту же роль, что и обычная вторая симметрическая производная с заменой равенства $F^{[\prime\prime]}(x) = 0$ на оценку $0 \in \partial^{[\prime\prime]}_{sub} F(x)$.

Теорема 4.1.3 (S–теорема Шварца). *Если функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $\partial^{[\prime\prime]}_{sub}$-субдифференцируема на $(a;b)$ и выполнено включение $0 \in \partial^{[\prime\prime]}_{sub} F(x)$ при $a < x < b$, то $F(x)$ — линейная функция:*

$$F(x) = Ax + B \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{4.1}$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ построим пару вспомогательных функций

$$\varphi_\pm(x) = \pm\Big[F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\Big] + \varepsilon(x-a)(x-b).$$

Тогда при $x \in (a;b)$ имеем:

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub} \varphi_\pm(x) = \pm\partial^{[\prime\prime]}_{sub} F(x) + 2\varepsilon, \tag{4.2}$$

при этом $\varphi_\pm(a) = \varphi_\pm(b) = 0$, Докажем, что $\varphi_\pm(x) \equiv 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Проведем проверку для $\varphi_+(x)$. Если допустить, что $\varphi_+(x) \not\equiv 0$ и принимает в некоторых точках $(a;b)$ строго положительные значения, то непрерывная функция $\varphi_+(x)$ достигает своего наибольшего положительного значения в некоторой внутренней точке $x_0 \in (a;b)$. В таком случае для достаточно малого $h > 0$: $\varphi_+(x_0 \pm 2h) \leqslant \varphi_+(x_0)$. Таким образом,

$$\Delta_h^2\varphi_+(x_0) = (\varphi_+(x_0+2h) - \varphi_+(x_0)) + (\varphi_+(x_0-2h) - \varphi_+(x_0)) \leqslant 0.$$

Вместе с тем при достаточно малых h: $\dfrac{\Delta^2\varphi_+(x_0,h)}{4h^2} \leqslant 0$ при $0 < h < \delta$. Значит,

$$\partial_{co}^{[\prime\prime]}\varphi_+(x_0,\delta) = \overline{co}\left\{\frac{\Delta^2\varphi_+(x_0,h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} \subset (-\infty;0],$$

и, наконец,

$$\partial_{sub}^{[\prime\prime]}\varphi_+(x_0) = \operatorname*{sublim}_{\delta\to+0}\partial_{co}^{[\prime\prime]}\varphi_+(x_0,\delta) \subset (-\infty;0],$$

вопреки равенству (4.2). Следовательно, $\varphi_+(x) \leqslant 0 \;\forall\, x \in [a;b]$, откуда

$$\left|F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right| < \varepsilon(b-a)^2. \qquad (4.3)$$

Переходя в оценке (4.3) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем тождество

$$F(x) \equiv F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a),$$

что равносильно равенству (4.1). □

Аналогично, если условия S–теоремы Шварца выполнены, за исключением конечного числа «точек неизвестности», то справедлива *обобщенная S–теорема Шварца.*

Теорема 4.1.4. *Пусть функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\partial_{sub}^{[\prime\prime]}$–субдифференцируема на $(a;b)$, причем $0 \in \partial_{sub}^{[\prime\prime]}F(x)$ всюду, кроме конечного числа «точек неизвестности» $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$. Если в каждой из этих точек выполняется ослабленное S–условие Шварца:*

$$0 \in \operatorname*{sublim}_{\delta\to+0}\;\overline{co}\left\{\frac{\Delta^2F(x_i,h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} \quad (i=\overline{1,n}), \qquad (4.4)$$

то $F(x)$ — линейная функция на $[a;b]$.

Замечание 4.1.5. Используя свойство субпредела:

$$\operatorname*{sublim}_{\delta\to+0}\ \overline{co}\left\{\Phi(x,h)\ \middle|\ 0<h<\delta\right\}=\left[\varliminf_{h\to+0}\Phi(x,h),\varlimsup_{h\to+0}\Phi(x,h)\right],$$

ослабленное S–условие Шварца можно переписать в виде:

$$\varliminf_{h\to+0}\frac{\Delta^2F(x,h)}{2h}\leqslant 0\leqslant\varlimsup_{h\to+0}\frac{\Delta^2F(x,h)}{2h}.$$

4.1.2 Обобщенный метод суммирования Римана. Вначале напомним схему классического метода Римана. Рассмотрим тригонометрический ряд с ограниченными коэффициентами

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx. \tag{4.5}$$

Интегрируя его почленно два раза, получим абсолютно и равномерно сходящийся ряд. Обозначим через $F(x)$ его сумму. Это непрерывная функция, которая называется *функцией Римана* для тригонометрического ряда (4.5):

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}.$$

Допустим, что в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет вторую симметрическую производную $F^{[\prime\prime]}(x_0)$. Тогда ряд (4.5) *суммируем* в точке x_0 *методом Римана* и его римановская сумма равна $F^{[\prime\prime]}(x_0)$.

Заменяя в описанной выше конструкции классического метода Римана вторую симметрическую производную на второй симметрический субдифференциал, мы приходим к *S–методу Римана* суммирования тригонометрических рядов.

Определение 4.1.6. Если в некоторой точке x_0 функция Римана $F(x)$ имеет второй s–субдифференциал $\partial^{[\prime\prime]}_{sub}F(x_0)$, то будем говорить, что тригонометрический ряд (4.5) суммируем в точке x_0 *S–методом Римана* и его S–сумма есть *множество* $\partial_{sub}^{[\prime\prime]}F(x_0)$.

Так как s–субдифференциал $\partial_{sub}^{[\prime\prime]}F(x)$ есть обобщение обычной симметрической производной $F^{[\prime\prime]}(x)$, то S–метод Римана является более общим, чем классический метод Римана.

Теорема 4.1.7. *Если тригонометрический ряд* (4.5) *с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется методом Римана в точке x_0 к числу S, то он суммируется в этой точке к $\{S\}$ и S–методом Римана, причем имеет место равенство:*

$$\partial_{sub}^{[\prime\prime]}F(x_0) = \{F^{[\prime\prime]}(x_0)\} = \{S\}\,. \tag{4.6}$$

Как следствие, учитывая регулярность классического метода Римана, приходим к регулярности S–метода Римана относительно обычной сходимости.

Следствие 4.1.8. *Если, в условиях теоремы 4.1.7, ряд* (4.5) *суммируется обычным образом в точке x_0 к числу S, то он суммируется в этой точке к S и S–методом Римана.*

Продемонстрируем на примере, что область применимости S–метода Римана строго шире области применимости классического метода Римана.

Пример 4.1.9. Положим

$$\Phi(x) = x\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } x > 0;\ \Phi(x) = x^2\sin\frac{1}{x} \text{ при } x < 0;\ \Phi(0) = 0.$$

Введем теперь функцию $F(x) = \int\limits_0^x \Phi(t)\,dt$. Тогда $F'(x) = \Phi(x)$, следовательно:

$$\partial_{sub}^{[\prime\prime]}F(0) = \left[\underline{(\Phi)}^{[\prime]}(0); \overline{(\Phi)}^{[\prime]}(0)\right] = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

При этом при $x \neq 0$ имеем:

$$f(x) = F''(x) = \Phi'(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } x > 0, \\ \\ 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда, поскольку $f(x)$ интегрируема в окрестности нуля получаем: $F(x)$ — функция Римана для $f(x)$. Таким образом, ряд Фурье для $f(x)$ суммируем в точке $x = 0$ S–методом Римана к множеству $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ и поэтому не суммируется классическим методом Римана в этой точке.

S–метод Римана, как и классический метод Римана, в приложении к рядам Фурье, в силу теоремы 4.1.7, дает следующий результат.

Теорема 4.1.10. *Ряд Фурье от любой суммируемой функции $f(x)$ на $[-\pi; \pi]$ суммируется S–методом Римана почти всюду к этой функции.*

4.1.3 Ослабленное S–условие Шварца для тригонометрических рядов и обобщенная теорема Кантора.

Важным результатом классической теории рядов Фурье является следующая

Теорема 4.1.11 (Теорема Кантора)**.** *Если тригонометрический ряд* (4.5) *с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируем к нулю методом Римана всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, то все его коэффициенты равны нулю.*

Заметим, что в условиях теоремы Кантора во всех «точках неизвестности» $x_1, \ldots, x_n$ автоматически выполнено (см. [117], п. 747, вторая теорема Римана) ослабленное условие Шварца:

$$\lim_{h \to +0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h} = 0. \tag{4.7}$$

Докажем теперь аналог теоремы Кантора для S–метода Римана, в котором ослабленное условие Шварца (4.7) заменяется еще более слабым условием:

$$\underline{\lim}_{h\to+0}\frac{\Delta^2F(x_i,h)}{2h}\leqslant 0\leqslant\overline{\lim}_{h\to+0}\frac{\Delta^2F(x_i,h)}{2h},\tag{4.8}$$

при исключении условия стремления к нулю коэффициентов тригонометрического ряда.

Теорема 4.1.12 (S–теорема Кантора)**.** *Если тригонометрический ряд* (4.5) *с ограниченными коэффициентами (где необязательно* $a_n,b_n\to 0$*) суммируется к нулю* S*–методом Римана всюду, кроме конечного числа точек* $x_1,\dots,x_n$*, в которых выполняется ослабленное* S*–условие Шварца* (4.8)*, то* $a_n=b_n=0$*.*

Доказательство. По условию теоремы ослабленное S–условие Шварца выполнено. Это позволяет применить в нашем случае теорему 4.1.4 к функции $F(x)$. По обобщенной теореме Шварца (теорема 4.1.2) функция Римана $F(x)$ должна быть линейной на каждом интервале $(a;b)$, где ряд (4.5) сходится к нулю. Тогда имеем

$$F(x)=Ax+B\qquad\qquad(a\leqslant x\leqslant b).\tag{4.9}$$

Но, так как $F(x)$ есть функция Римана для ряда (4.5), то

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}.\tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10), обозначая $A_1=C-A,\ B_1=D-B$, получаем:

$$\frac{a_0}{4}x^2+A_1x+B_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2},$$

Но правая часть имеет период 2π, значит и левая тоже, а это возможно только при

$$a_0=0 \text{ и } A_1=0.\tag{4.11}$$

Значит,

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \qquad (4.12)$$

Ряд (4.12) сходится равномерно по мажорантному признаку Вейерштрасса, поэтому его коэффициенты являются коэффициентами Фурье от его суммы, но она есть постоянное число B_1, а потому $a_n/n^2 = b_n/n^2 = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, откуда следует

$$a_n = b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (4.13)$$

Из (4.11) и (4.13) следует, что ряд (4.12) — нулевой. □

4.1.4 Пример эффективности S–условия Шварца для рядов Фурье. Эффективность ослабленного S–условия Шварца демонстрируется на примере достаточно общего вида. Построим функцию $F(x)$, которая при $x > 0$ будет иметь вид:

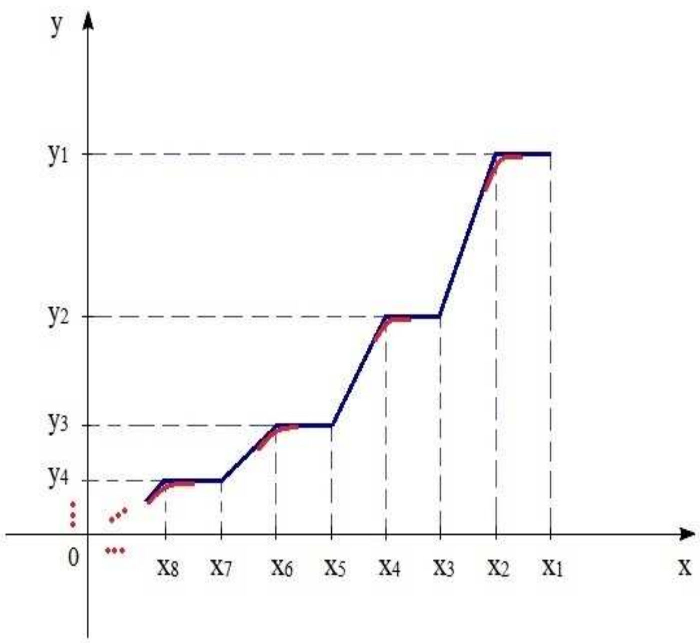

Рис. 4.1.1.

При этом $x_n \searrow 0, y_n \searrow 0, F(0) = 0$ и $F(x)$ четным образом продолжается для $x < 0$, причем $F(x)$ C^2–сглажена в малых окрестностях угловых точек.

Рассмотрим поведение функции $F(x)$ на n–м шаге.

$$1) \quad x_{2n} \leqslant x \leqslant x_{2n-1}: \qquad F(x) = y_n, \quad \frac{y_n}{x_{2n-1}} \leqslant \frac{F(x)}{x} \leqslant \frac{y_n}{x_{2n}}.$$

$$2) \quad x_{2n+1} \leqslant x \leqslant x_{2n}: \qquad F(x) \text{ линейная}, \ \frac{F(x)}{x} \equiv \frac{y_n - y_{n+1}}{x_{2n} - x_{2n+1}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$(i) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 0; \qquad (ii) \quad 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_{2n}} = L < \infty.$$

В этом случае

$$\varlimsup_{h\to 0}(F(h)/h) = L, \quad \varliminf_{h\to 0}(F(h)/h) = 0,$$

откуда следует

$$\operatorname*{sublim}_{\delta\to+0} \ \overline{co} \left\{ \frac{\Delta^2 F(0,h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta \right\} = [0; L] \ni 0, \tag{4.14}$$

т. е. ослабленное S–условие Шварца выполнено.

4.2 Локальная асимметрия, локальный эксцесс и их связь с симметрическими характеристиками

4.2.1 Локальная асимметрия и локальный эксцесс негладких распределений, их минимизация.

В «одновершинном» (унимодальном) случае понятия асимметрии и эксцесса случайной величины в теории вероятностей (см. [61], [63], [129], [131], [143], [146], [148], [152], [172]) связаны с центральными моментами, соответственно, третьего и четвертого порядков:

$$A_S(f) = \frac{1}{\sigma^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^3 f(x)dx, \quad E_X(f) = \frac{1}{\sigma^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^4 f(x)dx - 3, \tag{4.15}$$

где $M(\xi)$ – математическое ожидание случайной величины ξ, σ — среднеквадратичное отклонение данной случайной величины. При этом знак $A_S(f)$ характеризует «скос вправо» ($A_S(f) > 0$) либо «скос влево» ($A_S(f) < 0$) данного распределения в сравнении с нормальным, а знак $E_X(f)$ характеризует «островершинность» ($E_X(f) > 0$) либо «пологость» ($E_X(f) < 0$) распределения в сравнении с соответствующим нормальным:

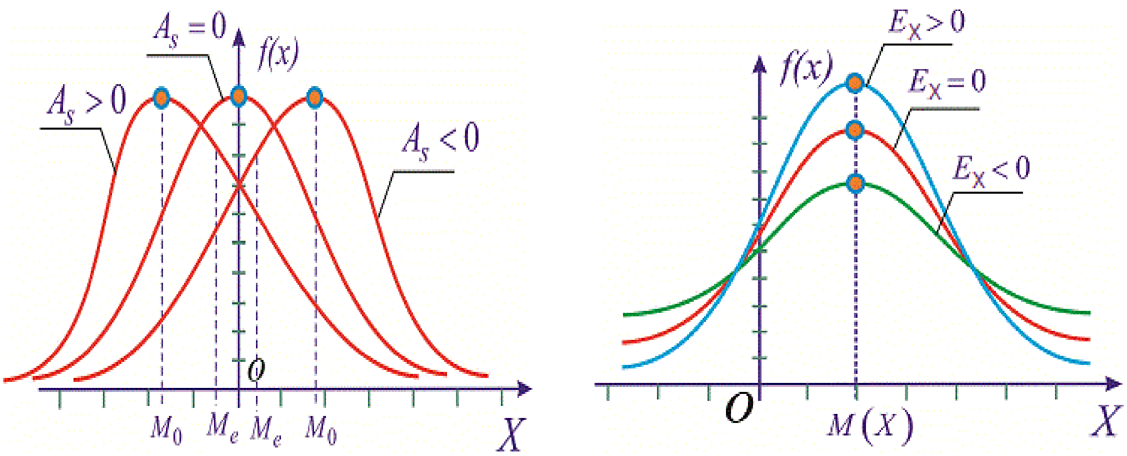

Рис. 4.2.1.

Обратим внимание на следующий факт: *глобальные характеристики* (4.15) используются для описания *локального поведения* $f(x)$ вблизи точки максимума. Такая связь, приемлемая в гладком случае, уже не оправдана в негладком случае, как показывает следующий пример «склейки» двух распределений в точке максимума.

Пример 4.2.1. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две плотности распределения с общим максимальным значением в точке $x = x_0$, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} f_1(x)dx + \int\limits_{\infty}^{x_0} f_2(x)dx = 1 \qquad (f_i \in C^1(\mathbb{R})).$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ -\infty < x \leqslant x_0; \\ f_2(x), \ x_0 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Тогда $f(x)$ также является плотностью распределения, однако, ввиду негладкости, для описания поведения $f(x)$ вблизи x_0 нужны уже *локальные характеристики*. Введем их как пределы соответствующих интегральных средних значений.

Определение 4.2.2. Назовем *локальной асимметрией* $f(x)$ в точке x_0 величину:

$$Af(x_0) = \lim_{h \to +0} \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{f(x)dx}{x - x_0} \right) \tag{4.16}$$

и *локальным эксцессом* $f(x)$ в точке x_0 величину:

$$Ef(x_0) = \lim_{h \to +0} \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} dx \right), \tag{4.17}$$

в предположении сходимости соответствующих интегралов (4.16) и (4.17).

Введенные характеристики нетрудно выразить через симметрические производные f в точке x_0, соответственно, первого и второго порядков, если они существуют.

Теорема 4.2.3. *1) Если f симметрически дифференцируема в точке x_0, то*

$$Af(x_0) = \partial^{[\prime]} f(x_0). \tag{4.18}$$

2) Если f дважды симметрически дифференцируема в точке x_0, то

$$Ef(x_0) = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(x_0). \tag{4.19}$$

Доказательство. 1) Имеем, применяя теорему о среднем:

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{f(x)dx}{x-x_0} = \frac{1}{2h}\left(\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\frac{f(x)dx}{x-x_0} + \int\limits_{x_0-h}^{x_0}\frac{f(x)dx}{x-x_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2h}\left(\int\limits_{0}^{h}\frac{f(x_0+t)dt}{t} - \int\limits_{0}^{h}\frac{f(x_0-t)dt}{t}\right) = \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2t}dt =$$

$$= \frac{f(x_0+\tau)-f(x_0-\tau)}{2\tau}, \text{ где } 0<\tau<h. \tag{4.20}$$

Отсюда, при $h \to +0$ следует равенство (4.20).

2) Применяя теорему о среднем, имеем:

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}dx = \frac{1}{2h}\left(\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}dx + \int\limits_{x_0-h}^{x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2h}\left(\int\limits_{0}^{h}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t^2}dt + \int\limits_{0}^{h}\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t^2}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}\frac{f(x_0+t)-2f(x_0)+f(x_0-t)}{2t^2}dt =$$

$$= \frac{f(x_0+\tau)-2f(x_0)+f(x_0-\tau)}{2\tau^2}, \text{ где } 0<\tau<h. \tag{4.21}$$

Отсюда, при $h \to +0$ следует равенство (4.21). □

Возвращаясь теперь к примеру 4.2.1, отметим, что в данном случае

$$Af(x_0) = \partial^{[\prime]} f(x_0) = \frac{1}{2}\left[\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)\right].$$

В случае негладкости второго порядка в точке x_0 ($\partial f_1(x_0) = \partial f_2(x_0)$), $\partial^2 f_1(x_0) \neq \partial^2 f_2(x_0)$, локальный эксцесс вычисляется по аналогичной формуле:

$$Ef(x_0) = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(x_0) = \frac{1}{4}\left[\partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0)\right].$$

Рассмотрим теперь конкретный пример «склейки» (с точностью до постоянных множителей) двух нормальных распределений.

Пример 4.2.4. Далее $\varphi(x)$ — «малая» функция Лапласа: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$; $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt$ — «большая» функция Лапласа (см. [63]). Напомним, что так называемое «нормальное» распределение вероятностей случайной величины $N(m,\sigma)$ (см. [61], [63]) задается плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$; здесь m — математическое ожидание, σ — среднеквадратичное отклонение данной случайной величиной.

Рассмотрим «склейку» двух нормально распределенных случайных величин $N_1(m_1,\sigma_1)$ и $N_2(m_2,\sigma_2)$ $(m_i, \sigma_i > 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} \gamma_1 \cdot \dfrac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\dfrac{x-m_1}{\sigma_1}\right), -\infty < x \leqslant 0; \\ \gamma_2 \cdot \dfrac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\dfrac{x-m_2}{\sigma_2}\right), 0 \leqslant x < +\infty. \end{cases} \tag{4.22}$$

Здесь множители γ_1 и γ_2 подбираются из условий непрерывной склейки в нуле:

$$\gamma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) = \gamma_2 \cdot \frac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \tag{4.23}$$

и нормировки плотности:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \gamma_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right) + \gamma_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right) = 1. \tag{4.24}$$

1) Вычислим локальную асимметрию распределения (4.22) в нуле и

поставим задачу ее минимизации (по модулю). Получаем:

$$\gamma_1 \cdot \frac{m_1}{\sigma_1^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) = \gamma_2 \cdot \frac{m_2}{\sigma_2^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right). \tag{4.25}$$

Из уравнений (4.23) и (4.25) следует условие минимальности $|Af(0)|$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}. \tag{4.26}$$

2) Вопрос о локальном эксцессе распределения (4.22) мы рассматриваем при дополнительном условии $m_1 = m_2 = 0$. В этом случае $f(x)$ является C^1-гладкой в нуле, однако $f''(0)$ не существует. Имеем:

$$f''_-(0) = \frac{1}{\sigma_1^2}, \quad f''_+(0) = \frac{1}{\sigma_2^2},$$

откуда

$$Ef(0) = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right).$$

4.2.2 Локальная асимметрия и локальный эксцесс набора случайных величин.

Рассмотрим теперь совместную плотность распределения $f(x_1, \ldots, x_n)$ набора случайных величин $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (см. [63]). В этом случае мы введем понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению $h \in \mathbb{R}^n$, соответствующим образом обобщая определение 4.2.2.

Определение 4.2.5. Назовем *локальной асимметрией f по направлению h* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ величину

$$Af(x_0)h = \lim_{t \to +0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} \frac{f(x_0 + \tau h)d\tau}{\tau}\right) \tag{4.27}$$

и *локальным эксцессом f по направлению h* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ величину

$$Ef(x_0)(h)^2 = \lim_{t \to +0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} \frac{f(x_0 + \tau h) - f(x_0)}{\tau^2} d\tau\right), \tag{4.28}$$

если соответствующие интегралы сходятся.

Из теоремы 4.2.3 легко вытекает связь характеристик (4.27) – (4.28) с соответствующими симметрическими дифференциалами в случае их существования.

Теорема 4.2.6. *1) Если f симметрически дифференцируема в точке x_0 по направлению h, то*

$$Af(x_0)h = \partial^{[\prime]} f(x_0)h.$$

2) Если f дважды симметрически дифференцируема по направлению h в точке x_0, то

$$Ef(x_0)(h)^2 = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(x_0)(h)^2.$$

Рассмотрим двумерный пример, также связанный со «склейкой» нормальных распределений по лучам в полярных координатах на плоскости ($x = \rho\cos\alpha, y = \rho\sin\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$).

Пример 4.2.7. Пусть на каждом луче ($\alpha = \mathrm{const}, 0 \leqslant \rho < \infty$) задано нормальное распределение (с точностью до постоянного множителя):

$$f(\rho,\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{\sigma(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{\rho - m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) \quad (\sigma(\alpha) > 0).$$

Проведем склейку распределений на каждой паре лучей, соответствующих углам α и $\pi + \alpha$.

Из условия (4.23) непрерывной склейки (пример 4.2.4) получаем:

$$\frac{\gamma(\alpha)}{\sigma(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) = \frac{\gamma(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)}\right). \tag{4.29}$$

Тогда, применяя условие нормировки, получаем:

$$\gamma(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right)\right) + \gamma(\alpha+\pi) \cdot \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)}\right)\right) = 1. \tag{4.30}$$

Из системы (4.29) – (4.30) выражаются подходящие $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\alpha+\pi)$.

Имеем:

$$\left(Af(\rho,\alpha)\big|_{\rho=0}=0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\gamma}{\sigma^3}\cdot\varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\Big|_{\alpha}+\frac{\gamma}{\sigma^3}\cdot\varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\Big|_{\alpha+\pi}=0\right). \tag{4.31}$$

Условия (4.29) – (4.31) приводят к равенству:

$$\frac{m(\alpha)}{\sigma^2(\alpha)}+\frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma^2(\alpha+\pi)}=0. \tag{4.32}$$

Конкретные примеры:

(i) Пусть $m(\alpha)\equiv 0, \sigma(\alpha)=2+\cos 2\alpha$. Здесь условия (4.29) – (4.30) выполнены при $\gamma(\alpha)\equiv 1$; условие (4.31) также выполнено для любого α.

(ii) Пусть $m(\alpha)=\sin 2\alpha, \sigma(\alpha)\equiv\sigma$. Здесь условия (4.29) – (4.30) выполнены при $\gamma(\alpha)=\dfrac{1}{1+2\Phi(\frac{\sin 2\alpha}{\sigma})}$; условие (4.31) выполнено при $\sin 2\alpha=0$, тогда $\alpha=\dfrac{\pi}{2}, \alpha=\dfrac{3\pi}{2}$.

4.2.3 Общая экстремальная задача поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала. Понятия, введенные в пунктах 4.2.1 – 4.2.2 нетрудно распространить на общий случай непрерывного функционала $\Phi : E\supset U(y)\to\mathbb{R}$, достигающего локального экстремума в некоторой точке y вещественного банахового пространства E, $h\in E$ — любое направление в E.

Определение 4.2.8. Назовем *локальной асимметрией* функционала Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$A\Phi(y)h=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right), \tag{4.33}$$

а *локальным эксцессом* функционала Φ в точке y по направлению h

следующий предел:

$$E\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau\right), \tag{4.34}$$

в предположении, что пределы (4.33) и (4.34) существуют.

Отметим также, что $A\Phi(y)h$ и $E\Phi(y)(h)^2$ могут существовать и при отсутствии симметрической дифференцируемости. Приведем простые скалярные примеры.

Пример 4.2.9. 1) Пусть $\Phi(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Тогда $\partial^{[\prime]}\Phi(0) = \infty$, однако

$$A\Phi(0) = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{x}\right) = 0.$$

2) Пусть $\Phi(x) = x^{\frac{8}{3}}$. Тогда $\partial^{[\prime\prime]}\Phi(0) = \infty$, однако

$$E\Phi(0) = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{x^{\frac{8}{3}}dx}{x^2}\right) = 0.$$

Заметим теперь, что рассматривая вопрос о вычислении локальной асимметрии и локального эксцесса при произвольно заданном направлении h, естественно поставить вопрос о выборе оптимальных направлений, вдоль которых минимизируются, соответственно, модуль асимметрии и модуль эксцесса. Отметим также, что в C^1–гладком случае, в силу леммы Ферма, $\partial^{[\prime]}\Phi(y)h = 0$ по любому направлению $h \in E$, откуда $A\Phi(y)h = \partial^{[\prime]}\Phi(y)h = 0$ по любому направлению $h \in E$. Таким образом, задача минимизации локальной асимметрии является нетривиальной лишь в точке негладкого экстремума.

Рассмотрим теперь ряд примеров *вариационных функционалов* с негладким интегрантом, для которых будет исследована данная задача. Начнем со случая модулированного гармонического осциллятора.

Пример 4.2.10. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - y^2| dx \qquad \left(y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}} \right). \tag{4.35}$$

Как показано в [120] (пример 4.1.11) (с помощью техники компактных субдифференциалов), на экстремали

$$y_0(x) = \begin{cases} \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-\pi}{4}} \cdot e^x,\ \dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \qquad \left(y_0 \in C^1 \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right)$$

функционал (4.35) достигает строгого локального минимума.

Вычисляя первую s–вариацию Φ в точке y_0, имеем:

$$\partial_{sub}^{[\prime]} \Phi(y_0) h = \partial^{[\prime]} \Phi(y_0) h = \sqrt{2} \cdot h \left(\frac{\pi}{4} \right).$$

Таким образом, направления минимального модуля асимметрии определяются условием $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Далее, в соответствии с формулой вычисления второй s–вариации, имеем:

$$\partial^{[\prime\prime]} \Phi(y_0)(h)^2 = 2 \left(\|h\|^2_{W^{1,2}} - 2\|h\|^2_{L_2} \right). \tag{4.36}$$

Из (4.36) следует, что направления минимального модуля эксцесса определяются условием

$$\|h\|^2_{W^{1,2}} = 2 \cdot \|h\|^2_{L_2}.$$

В частности, последнее условие заведомо выполнено на направлениях вида

$$h(x) = c \cdot e^{\pm x}. \tag{4.37}$$

Рассмотрим теперь вариационный функционал с модуляцией другого типа.

Пример 4.2.11. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y'^2 - y|y|)dx \quad \Big(y \in C^1\Big[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\Big],\ y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1,\ y\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -sh\,\frac{\pi}{2}\Big). \tag{4.38}$$

Функционал (4.38) также исследован на локальный минимум в [81] (пример 5.7) с помощью обычных компактных субдифференциалов, где было показано, что на экстремали

$$y_0(x) = \begin{cases} \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ -sh\,x,\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0; \end{cases} \qquad \left(y_0 \in C^1\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

функционал (4.38) достигает строгого локального минимума. Вычисляя первую s–вариацию Φ в точке y_0, имеем:

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y_0)h = \partial^{[\prime]}\Phi(y_0)h = \pi \cdot ch\,\frac{\pi}{2} - 2h(0).$$

Таким образом, направления минимального модуля асимметрии определяются условием $h(0) = \dfrac{\pi}{2}ch\,\dfrac{\pi}{2}$.

Вторая s–вариация Φ в точке y_0 имеет вид:

$$\partial^{[\prime\prime]}\Phi(y_0)(h)^2 = 2\left(\|h\|^2_{W^{1,2}} - 2\|h\|^2_{L_2}\right). \tag{4.39}$$

Из (4.39) следует, что направления минимального модуля эксцесса, как и в предыдущем примере, определяются условием $\|h\|^2_{W^{1,2}} = 2 \cdot \|h\|^2_{L_2}$. В частности, последнее условие заведомо выполнено на направлениях вида (4.37).

Далее, рассмотрим широкий класс вариационных примеров, в которых негладкость в точках экстремума создается осцилляцией.

Пример 4.2.12. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-a}^{a} \varphi(\frac{y' + y}{\alpha})dx; \quad (f(x,y,z) = \varphi\Big(\frac{y+z}{\alpha(x)}\Big),\ \varphi \in C^1_{sub}),$$

где

$$\varphi(t)=\begin{cases} t^2\sin\dfrac{1}{t},\ t\neq 0;\\ 0,\ t=0.\end{cases}$$

Вначале найдем точки локального экстремума функционала $\Phi(y)$. Имеем:

$$\varphi'(t)=\begin{cases} 3\sin\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t}\cos\dfrac{1}{t},\ t\neq 0;\\ 0,\ t=0.\end{cases}$$

$$f_y(x,y,z)=f_z(x,y,z)=\begin{cases} \psi(x,y,z)=\varphi'\Big(\dfrac{y+z}{\alpha}\Big)\cdot\dfrac{1}{\alpha},\ y+z\neq 0;\\ 0,\ y+z=0.\end{cases}$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{r} \psi(x,y,y')-\dfrac{d}{dx}(\psi(x,y,y'))=0,\ y+y'\neq 0\,;\\ y+y'=0\,.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \psi(x,y,y')=c\cdot e^x\,;\\ \quad y+y'=0\,.\end{array}\right.$$

Положим $c=0$:

$$\left[\begin{array}{r} \varphi'\Big(\dfrac{y+y'}{\alpha}\Big)=0\,;\\ y+y'=0\,.\end{array}\right. \tag{4.40}$$

Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{1}{t}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{t}$,

$$\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}+k\pi-\lambda(k),$$

где $\lambda(k)=0$ при $k\to\infty$.

Обозначим $t_k=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi-\lambda(k)}$, $(k\in\mathbb{N})$, $t_0=0$.

Система (4.40) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} y'+y=t_k\cdot\alpha\ (k\in\mathbb{N});\\ y'+y=t_0\cdot\alpha;\end{array}\right.$$

тогда и только тогда, когда $y' + y = t_k \cdot \alpha$ ($k \in \mathbb{N}_0$).

Рассмотрим класс экстремалей вида:

$$y_{ij}(x) : \left[\begin{array}{ll} y' + y = t_i \cdot \alpha & (-a \leqslant x \leqslant 0); \\ y' + y = t_j \cdot \alpha & (0 \leqslant x \leqslant a). \end{array} \right. \tag{4.41}$$

Легко проверить условие «C^1–склеивания» в нуле (при $i \neq j$):

$$\alpha(0) = \alpha'(0) = 0.$$

Перейдем к условиям второго порядка.

Условие Лежандра на экстремалях принимает вид:

$$f_{z^2}(x, y, z) = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''\Big(\frac{y+z}{\alpha}\Big) \quad (y + z \neq 0);$$

$$f_{z^2}(x, y, y') = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''(t_i),\ -a \leqslant x < 0; \\ \dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''(t_j),\ 0 < x \leqslant a; \end{array} \right. \tag{4.42}$$

при $i, j \neq 0$.

Имеем:

$$\varphi''(t) = -\frac{1}{t^2} \cos\frac{1}{t} - \frac{2}{t^3} \sin\frac{1}{t} \quad (t \neq 0),$$

отсюда

$$\varphi''(t_k) \sim -\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big)^2 \cdot \cos\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big) - 2\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big)^3 \cdot \sin\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big) \sim$$

$$\sim -2\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big)^3 \cdot \sin\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big),$$

$$\varphi''(t_k) \sim \begin{cases} -2\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big)^3,\ k - \text{четное}; \\ 2\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big)^3,\ k - \text{нечетное}. \end{cases} \tag{4.43}$$

Из системы (4.42) нужно выбрать только экстремали с одинаковой четностью i и j. При этом (при достаточно больших i, j):

$$\begin{cases} (i, j - \text{оба четные}) \Rightarrow (f_{z^2}|_{y_{ij}} < 0) \quad (\to \max); \\ (i, j - \text{оба нечетные}) \Rightarrow (f_{z^2}|_{y_{ij}} > 0) \quad (\to \min). \end{cases} \tag{4.44}$$

Проверим теперь условие Якоби для уравнения Якоби.

Так как $f_{z^2} = f_{yz} = f_{y^2} = \dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''\Big(\dfrac{y+z}{\alpha}\Big) \quad (y+z \neq 0)$, то уравнение Якоби на экстремалях вида (4.44) принимает вид:

$$\Big(\frac{1}{\alpha^2}\varphi''(t_k)\cdot h'\Big)' - \Big(-\frac{1}{\alpha^2}\varphi''(t_k) + \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\alpha^2}\varphi''(t_k)\Big)\Big)h = 0$$

$(k = i,\ -a \leqslant x \leqslant 0;\ k = j,\ 0 \leqslant x \leqslant a)$. После сокращения на $\varphi''(t_k)$, имеем:

$$\Big(\frac{1}{\alpha^2}h'\Big)' - \Big(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\alpha^2}\Big)\Big)h = 0,$$

$$\alpha \cdot h'' - 2\alpha' \cdot h' + (\alpha + 2\alpha')h = 0. \tag{4.45}$$

Учитывая условия $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, будем искать $\alpha(x)$ в виде:

$$\alpha(x) = x^2\gamma(x).$$

Тогда (4.45) принимает вид:

$$(x^2\gamma)h'' - 2(2x\gamma + x^2\gamma')h' + (x^2\gamma + 4x\gamma + 2x^2\gamma')h = 0, \text{ или}$$

$$(x\gamma)h'' - (4\gamma + 2x\gamma')h' + ((x+4)\gamma + 2x\gamma')h = 0. \tag{4.46}$$

Подберем теперь γ, чтобы $h(x) = e^{kx}$ было решением уравнения (4.46):

$$k^2x\gamma - (4k\gamma + 2kx\gamma') + ((x+4)\gamma + 2x\gamma') = 0, \text{ или}$$

$$2(1-k)x\gamma' + [(k^2+1)x + 4(1-k)]\gamma = 0. \tag{4.47}$$

Уравнение (4.47) легко разрешимо при $k \neq 1$. При соответствующих значениях γ, функция $h(x) = e^{kx}$ удовлетворяют условию Якоби для уравнения Якоби, следовательно, экстремум достигается.

Вычислим теперь асимметрию на найденных экстремалях.

Так как $f \in C^1$, то $\partial\Phi(y) = \partial^{[\prime]}\Phi(y)$, откуда:

$$A\Phi(y_{ij})h = \int\limits_{-a}^{a} \Big(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\Big)dx\Big|_{y_{ij}} = \int\limits_{[-a,0]\cap(y+y'\neq 0)} \Big(\varphi'(t_i)\frac{1}{\alpha}h + \varphi'(t_i)\frac{1}{\alpha}h'\Big)dx +$$

$$+\int\limits_{[0,a]\cap(y+y'\neq 0)}\Big(\varphi'(t_j)\frac{1}{\alpha}h+\varphi'(t_j)\frac{1}{\alpha}h'\Big)dx+\int\limits_{(y+y'=0)}\varphi'(0)\frac{1}{\alpha}(h'+h)dx\equiv 0$$

Таким образом, во всех точках экстремума вида y_{ij} $A\Phi(y_{ij})h\equiv 0$ по любому направлению h.

Перейдем к вопросу о минимизации эксцесса.

Так как $f\in C^2(\dot U(0))$, то $f\in C^{[\prime\prime]}(\dot U(0))$ и так как f нечетна, то $f^{[\prime\prime]}(0)=0$. Следовательно, f дважды симметрически дифференцируема всюду, откуда:

$$E\Phi(y_{ij})(h)^2=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}(f^{[\prime\prime]}_{y^2}h^2+2f^{[\prime\prime]}_{yz}hh'+f^{[\prime\prime]}_{z^2}h'^2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{[-a,0]\cap(y+y'\neq 0)}\varphi''(t_i)(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}+$$

$$+\int\limits_{[0,a]\cap(y+y'\neq 0)}\varphi''(t_j)(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}+\int\limits_{(y+y'=0)}\varphi''(0)(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\varphi''(t_i)\int\limits_{[-a,0]\cap(y+y'\neq 0)}(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}+\varphi''(t_j)\int\limits_{[0,a]\cap(y+y'\neq 0)}(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}\Big).$$

Будем считать, что $\alpha(x)>0$ при $x\neq 0$. Тогда $mes(y+y'=0)=0$ и

$$E\Phi(y_{ij})(h)^2=\frac{1}{2}\Big(\varphi''(t_i)\int\limits_{-a}^{0}(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}+\varphi''(t_j)\int\limits_{0}^{a}(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}\Big).$$

Отсюда следует, что равенство $E\Phi(y_{ij})(h)^2=0$ заведомо выполнено для направлений h, удовлетворяющих условию $h+h'=0$.

Наконец, рассмотрим класс примеров, в которых негладкость интегранта возникает при комбинации модулирования с осцилляцией.

Пример 4.2.13. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-a}^{a} \varphi\left(\frac{y'+y}{\alpha}\right) dx,$$

где

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t),$$

$$\varphi_1(t) = \int\limits_0^t s \sin\frac{1}{s} ds, \qquad \varphi_2(t) = -\frac{t|t|}{4},$$

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t s \sin\frac{1}{s} ds - \frac{t|t|}{4}.$$

Далее, обозначим $f(x,y,z) = \varphi\left(\dfrac{y+z}{\alpha(x)}\right)$.

Тогда

$$\varphi'(t) = \begin{cases} t\sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{|t|}{2}, \ t \neq 0; \\ 0, \ t = 0. \end{cases}$$

$$f_y(x,y,z) = f_z(x,y,z) = \begin{cases} \psi(x,y,z) = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \varphi'\Big(\dfrac{y+z}{\alpha}\Big), \ y+z \neq 0; \\ 0, \ y+z = 0. \end{cases}$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{r} \psi(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}(\psi(x,y,y')) = 0, \ y+y' \neq 0\,; \\ y+y' = 0\,. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} \psi(x,y,y') = c \cdot e^x\,; \\ y+y' = 0\,. \end{array}\right.$$

Положим $c = 0$:

$$\left[\begin{array}{c} \varphi'\Big(\dfrac{y+y'}{\alpha}\Big) = 0\,; \\ y+y' = 0\,. \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнение $\varphi'(t) = 0$, т.е.

$$\left[\begin{array}{r} \sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2} sign\, t, \ t \neq 0\,; \\ t = 0\,. \end{array}\right. \tag{4.48}$$

При $t > 0$ первое уравнение системы имеет, в частности, решения
$t_k = \dfrac{1}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in \mathbb{N})$.
Таким образом, система (4.48) имеет решения t_k $(k \in \mathbb{N}_0)$:

$$t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}\ (k > 0),\ t_0 = 0.$$

Тогда систему (4.48) можно записать в виде:

$$y' + y = t_k \cdot \alpha\ (\alpha \in \mathbb{N}_0).$$

Рассмотрим класс экстремалей вида y_{ij} $(i,\, j \in \mathbb{N}_0)$, удовлетворяющих условию:

$$y_{ij}(x) : \left[\begin{array}{ll} y' + y = t_i \cdot \alpha & (-a \leqslant x \leqslant 0); \\ y' + y = t_j \cdot \alpha & (0 \leqslant x \leqslant a). \end{array}\right. \tag{4.49}$$

Условие гладкого «C^1–склеивания» в нуле (при $i \neq j$) для системы (4.49) имеет вид:

$$\alpha(0) = \alpha'(0) = 0.$$

Перейдем к условиям второго порядка:

$$\left[\begin{array}{r} \varphi''(t) = \sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t}\cos\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2} sign\, t,\ t \neq 0\,; \\ \varphi''_{sub}(0) = [-2; 2],\ t = 0\,. \end{array}\right.$$

Проверим условие Лежандра на экстремалях $y_{ij}(\cdot)$ (при $i \neq j$). Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} f_{z^2}(x, y, y') = \dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''\Big(\dfrac{y+z}{\alpha}\Big) \quad y + z \neq 0; \\ \Big(f_{z^2}\Big)_{sub}(x, y, y') = [-2; 2], \quad y + z = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{r} (f_{z^2}(x, y, y'))\big|_{y_{ij}} = \dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''(t_i) = \dfrac{1}{\alpha^2}\left[\left(\sin\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi i\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] < 0, \\ -a \leqslant x \leqslant 0; \\ (f_{z^2}(x, y, y'))\big|_{y_{ij}} = \dfrac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''(t_j) = -\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi j\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant a; \end{array}\right.$$

при $i, j \neq 0$.

Таким образом, $f_{z^2}(x, y, y')|_{y_{ij}} < 0 \ (y + y' \neq 0)$.

Поскольку, в силу (4.49), $y_{ij} + y'_{ij} > 0$ при $x \neq 0$, то суб–условие Лежандра (см. [81], [89], [120]) выполнено для максимума при $x \neq 0$.

Достижение максимума в точках y_{ij} для Φ можно проверить непосредственно:

$$\varphi\Big(\frac{y+y'}{\alpha}\Big)\Big|_{y_{ij}} = \left[\begin{array}{c} (f_{z^2}(x,y,y'))|_{y_{ij}} = \varphi(t_i),\ -a \leqslant x \leqslant 0; \\ (f_{z^2}(x,y,y'))|_{y_{ij}} = \varphi(t_j),\ 0 \leqslant x \leqslant a; \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\Phi(y_{ij}) = a \cdot (\varphi(t_i) + \varphi(t_j)).$$

При этом, поскольку $\varphi'(t_i) = \varphi'(t_j) = 0$ и $\varphi''(t_i), \varphi''(t_j) < 0$, то $t_i,\ t_j$ – точки максимума φ.

Следовательно, для малой $\|y - y_{ij}\|_{C^1}$ будет равномерно малым и отклонение $\left|\frac{y+y'}{\alpha} - t_i\right|$ $(x > 0)$, $\left|\frac{y+y'}{\alpha} - t_j\right|$ $(x > 0)$, откуда $\varphi\Big(\frac{y+y'}{\alpha}\Big) \leqslant \varphi\Big(\frac{y+y'}{\alpha}\Big)\Big|_{y_{ij}}$, т. е. $\Phi \mapsto \max$ в точках y_{ij}.

Перейдем к вычислению асимметрии.

Так как $\varphi \in C^1$, следовательно, $\Phi \in C^1$, то

$$A\Phi(y_{ij})h = \partial^{[\prime]}\Phi(y_{ij})h = \partial\Phi(y_{ij})h = 0.$$

Таким образом, во всех точках экстремума вида y_{ij} асимметрия по любому направлению h равна нулю.

Наконец, рассмотрим вопрос о минимизации модуля эксцесса Φ в точках y_{ij}.

Так как φ нечетна, то

$$\varphi^{[\prime\prime]}(t)=\begin{cases}\varphi''(t)=\sin\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t}\cos\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}sign\, t,\ t\neq 0;\\ 0,\ t=0.\end{cases}$$

Отсюда (при $i,j\neq 0$):

$$f^{[\prime\prime]}_{y^2}(x,y,y')=f^{[\prime\prime]}_{z^2}(x,y,y')=f^{[\prime\prime]}_{yz}(x,y,y')=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha^2}\varphi''\Big(\dfrac{y+y'}{\alpha}\Big),\ y+y'\neq 0;\\ 0,\ y+y'=0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$f^{[\prime\prime]}_{y^2}(x,y,y')\Big|_{y_{ij}}=f^{[\prime\prime]}_{yz}(x,y,y')\Big|_{y_{ij}}=f^{[\prime\prime]}_{z^2}(x,y,y')\Big|_{y_{ij}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\varphi''(t_i),\ -a\leqslant x\leqslant 0;\\ \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\varphi''(t_j),\ 0\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

Тогда

$$\left|E\Phi(y_{ij})(h)^2\right|=\frac{1}{2}\left|\int\limits_{-a}^{0}\varphi''(t_i)(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}+\int\limits_{0}^{a}\varphi''(t_j)(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Big(\frac{\pi}{6}+2\pi i\Big)\int\limits_{-a}^{0}(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}+\Big(\frac{\pi}{6}+2\pi j\Big)\int\limits_{0}^{a}(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}\right).$$

Таким образом, минимальное (по модулю) значение эксцесса достигается по направлениям h: $h+h'=0$.

4.2.4 Многозначные обобщения: локальная суб–асимметрия и локальный суб–эксцесс.

Здесь мы опираемся на понятие многозначного субпредела, приведенное ранее в главе 2 раздел 2.1. Напомним определение только в случае функционалов. Далее $\Psi:E\supset U(y)\to\mathbb{R}$, E – банахово пространство, h – направление в E, символы $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ обозначает, соответственно, нижний и верхний пределы.

Определение 4.2.14. Зададим *субпредел* функционала Ψ в точке y по направлению h равенством

$$\operatorname*{sublim}_{t\to+0}\Psi(y+th)=\left[\underline{\lim}_{t\to+0}\Psi(y+th);\overline{\lim}_{t\to+0}\Psi(y+th)\right],\tag{4.50}$$

при условии, что оба предела справа в (4.50) конечны.

Определение 4.2.15. Назовем *локальной суб–асимметрией* функционала Φ в точке y по направлению h следующий субпредел (при условии, что он существует):

$$A_{sub}\Phi(y,h) = \operatorname*{sublim}_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right).$$

Соответственно, назовем *локальным суб–эксцессом* функционала Φ в точке y по направлению h следующий субпредел (при условии, что он существует):

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \operatorname*{sublim}_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau\right).$$

Из определения 4.2.15 и предыдущих результатов вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2.16. *Если величины* $\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)$, $\overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)$ *конечны, то справедлива оценка:*

$$A_{sub}\Phi(y,h)\subset[\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h);\overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)].$$

Если величины $\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2$, $\overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2$ *конечны, то справедлива оценка:*

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2\subset\frac{1}{2}[\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2;\overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2].$$

Определение 4.2.17. Назовем функционал Φ *симметрически субгладким* ($\Phi\in C^{[\prime]}_{sub}(y,h)$) по направлению h в точке y, если $\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(\cdot,h)$ полунепрерывен снизу, а $\overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(\cdot,h)$ полунепрерывен сверху в точке y. Соответственно, $\Phi\in C^{[\prime\prime]}_{sub}(y)(h)^2$, если $\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(\cdot)(h)^2$ полунепрерывен снизу, а $\overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(\cdot)(h)^2$ полунепрерывен сверху в точке y.

Из теоремы 4.2.16 вытекают соответствующие оценки локальной суб–асимметрии и локального суб–эксцесса вариационного функционала:

$$A_{sub}\Phi(y,h) \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y}} h + \underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y'}} h'\right) dx\,;\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y}} h + \overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y'}} h'\right) dx\right],$$

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \frac{1}{2}\Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right) dx\,;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right) dx\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right) dx\,;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right) dx\Bigg].$$

Пример 4.2.18. Пусть

$$f(t) = \begin{cases} t \cdot \sin^2 \frac{1}{t}\ , & \text{если } t \neq 0\ ; \\ 0, & \text{если } t \leqslant 0\ . \end{cases} \qquad \left(\text{Здесь } \ \partial^{[\prime]} f(0) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right).$$

Рассмотрим вариационных функционал:

$$\Phi(y) = \int\limits_{-a}^{a} f(y+y')dx.$$

Тогда

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_{(y+y'>0)} f'_1(y+y')\cdot(h+h')dx + \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\cdot \int\limits_{(y+y'=0)} (h+h')dx. \quad (4.51)$$

Очевидно, что в любой точке y $\left|\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h\right|$ минимизируется по направлениям $h + h' = 0$.

Заметим дополнительно, что если функция y_0 удовлетворяет условию $y_0 + y_0' \equiv 0$ и $h(a) = h(b) = 0$, то оценка (4.51) принимает вид

$$|A_{sub}\Phi_1(y)h| \subset \left| \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cdot \int\limits_a^b (h+h')dx \right| = \left[0; \frac{1}{2}\right] \cdot \left| \int\limits_a^b h\,dx \right|.$$

Следовательно, в этом случае, суб–асимметрия минимизируется по модулю на направлениях h, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_a^b h(x)\,dx = 0.$$

В заключение рассмотрим класс примеров с оценкой суб–эксцесса и поиском направлений его минимизации.

Пример 4.2.19. Пусть $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(t) \in C^2[a;b]$ при $t \neq 0$, $\varphi \in C^1(0)$, $\partial_{sub}^{[\prime\prime]}\varphi(0) = [\alpha;\beta]$.
(Например, $\varphi(t) = t^2 \cdot \sin\dfrac{1}{t^2}$ $(t \neq 0)$, $\varphi(0) = 0$).
Рассмотрим вариационный функционал:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(y^2 - y'^2)dx.$$

Легко видеть, что в точке y_0, удовлетворяющей условию $y_0^2 - y_0'^2 = 0$, Φ достигает локального минимума.

Имеем:

$$\partial_{sub}^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2 \subset \int\limits_{(y^2-y'^2\neq 0)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h'^2\right)dx + [\alpha;\beta]\cdot \int\limits_{(y^2-y'^2=0)} (2h^2 - 2h'^2)dx.$$

В частности, в точке y_0, учитывая $mes\,(y_0^2 - y_0'^2 \neq 0) = 0$, имеем:

$$E_{sub}\Phi(y_0)(h)^2 \subset \frac{1}{2}\partial_{sub}^{[\prime\prime]}\Phi_2(y_0)(h)^2 \subset [\alpha;\beta] \cdot \int\limits_a^b (h^2 - h'^2)dx.$$

Таким образом, модуль локального суб–эксцесса $\left|E_{sub}\Phi(y_0)(h)^2\right|$ минимизируется по направлениям h, удовлетворяющим условиям $h' = \pm h$.

Выводы.

1. На случай симметрических субдифференциалов обобщен классический метод Римана суммирования тригонометрических рядов.

2. Рассмотрено применение симметрических дифференцируемых и субдифференцируемых характеристик к негладким распределениям вероятностей случайной величины.

2. Исследована общая экстремальная задача поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена построению основ теории симметрических компактных субдифференциалов отображений в банаховых пространствах. Рассмотрены приложения построенной теории к гармоническому анализу, теории вероятностей и к теории экстремальных задач. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Доказан ряд новых свойств симметрических производных, вплоть до теоремы о среднем и формулы Тейлора. Представлена взаимосвязь полученных результатов со свойствами обобщенных симметрических производных Валле-Пуссена.

2. Построены основы теории симметрических дифференциалов первого и высших порядков в банаховых пространствах.

3. Построены основы теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков для отображений в банаховых пространствах. Доказана теорема о среднем и получена формула Тейлора для s–субдифференцируемых отображений. Получены критерии симметрической субдифференцируемости и оценки симметрических вариаций и субвариаций первого и высших порядков для одномерного вариационного функционала.

4. На случай симметрических субдифференциалов обобщен классический метод Римана суммирования тригонометрических рядов.

5. Рассмотрено применение симметрических характеристик к негладким распределениям вероятностей случайных величин.

6. Сформулирована и рассмотрена на примерах общая экстремальная задача поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Авербух В. И. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах / В. И. Авербух, О. Г. Смолянов // Успехи математических наук. – 1967. – Т. 22, Вып. 6. – С. 201 – 260.

[2] Арутюнов А. В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности / А. В. Арутюнов // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. М.: ВИНИТИ. – 1989. – Т. 27. – С. 147 – 235.

[3] Ахиезер Н. Н. Лекции по вариационному исчислению / Н. Н. Ахиезер. – М.: Гостехтеоретиздат, 1955. – 248 с.

[4] Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М.: Физматлит, 1961. – 935 с.

[5] Баран И. В. Введение в сублинейный анализ – 2: симметрический вариант / И. В. Баран // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2015. – Т. 57. – С. 108 – 161 (англ. версия: Baran I. V. Introduction to Sublinear Analysis — 2: Symmetric Case / I. V. Orlov, I. V. Baran // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Volume 225, Issue 2. – P. 265 – 321).

[6] Баран И. В. Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума / И. В. Баран // Динамические системы. – 2016. – Т. 6(34), № 4. – С. 337 – 354.

[7] Баран И. В. Симметрические компактные субдифференциалы второго порядка и их применение к рядам Фурье / И. В. Баран // Динамические системы. – 2013. – Т. 3(31), № 3-4. – С. 201 – 214.

[8] Баран И. В. Симметрические компактные субдифференциалы и их приложения в гармоническом анализе / И. В. Баран // Крымская международная математическая конференция «КММК-2013», 22 сентября – 4 октября 2013, Судак, Украина. – С. 4.

[9] Баран И. В. Симметрические компактные субдифференциалы первого и второго порядков и их приложения / И. В. Баран // VIII международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», 17 – 28 апреля 2013, Харьков, Украина. – С. 60.

[10] Баран И. В. Симметрические компактные субдифференциалы первого порядка / И. В. Баран // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского, серия «Физико-математические науки». – 2013. – Т. 26 (65), № 1. – С. 18 – 33.

[11] Баран И. В. Симметрические субдифференциалы Фреше и их приложения / И. В. Баран // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V», 26 апреля – 1 мая 2015, Ростов-на-Дону, Россия, ISBN: 978-5-7890-1013-6. – С. 18.

[12] Баран И. В. Симметрический компактный субдифференциал основного вариационного функционала / И. В. Баран //

Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы, 27 января – 3 февраля 2016, Саратов, Россия. – С. 51-54.

[13] Баран И. В. Симметризация сублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями / И. В. Баран // Закономерности и тенденции развития науки в современном обществе: сборник статей Международной научно-практической конференции, 5 декабря 2015, Уфа, Россия. – С. 3-4.

[14] Баран И. В. Симметрические характеристики и сопряженная экстремальная задача / И. В. Баран // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI», 24 – 29 апреля 2016, Ростов-на-Дону, Россия, ISBN: 978-5-9908135-0-2. – С. 13.

[15] Баран И. В. Сопряженная экстремальная задача для негладких функционалов / И. В. Баран // Международная научная конференция «Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова, 22 мая – 27 мая 2017, Сенкт-Петербург, Россия. – С. 51-54.

[16] Баран И. В. Теорема о среднем и формула Тейлора для симметрических производных и симметрических K-субдифференциалов / И. В. Баран // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского, серия «Физико-математические науки». – 2014. – Т. 27 (66), № 1. – С. 3 – 20.

[17] Баран И. В. Теорема о среднем и формула Тейлора для симметрических производных и симметрических K–субдифферен-

циалов / И. В. Баран // XXV Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2014», 21 – 30 сентября 2014, Судак, Россия. – С. 64.

[18] Басаева Е. К. О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов / Е. К. Басаева // Владикавказский математический журнал. – 2006. – Т. 8, № 4. – С. 6 – 12.

[19] Бахтигареева Э. Г. Оптимальные вложения конусов функций со свойствами монотонности и их приложения: дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. / Э. Г. Бахтигареева. – Москва, 2017. – 101 с.

[20] Бахтигареева Э. Г. Построение оптимальных идеальных пространств для конусов неотрицательных функций / Э. Г. Бахтигареева // Математические заметки. – 2016. – Т. 99(6). – С. 820 – 831.

[21] Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – К: Выща шк., 1990. – 600 с.

[22] Брудно А. Л. Теория фунций действительного переменного. Избранные главы / А. Л. Брудно. – М.: Наука, 1971. – 119 с.

[23] Буслаев В. С. Вариационное исчисление / В. С. Буслаев. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 287 с.

[24] Ванько В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб.для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 488 с.

[25] Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[26] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

[27] Васильев Ф. П. Основы численных методов решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1972. – 136 с.

[28] Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ / Б. З. Вулих. – М.: Наука, 1967. – 416 с.

[29] Галеев Э. М. Оптимальное управление / Э. М. Галеев, М. И. Зеликин, С. В. Конягин, и др.– М.: Изд-во МЦНМО, 2008. – 320 с.

[30] Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. — М.: ФМ, 1961. – 230 с.

[31] Гельфанд И. М. О некоторых способах управления сложными системами / И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин // УМН. – 1962. – 17:1(103). – С. 3 – 25.

[32] Гельфанд И. М. Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации / И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин // Докл. АН СССР. – 1961. – 137:2. – С. 295 – 298.

[33] Гирсанов И. В. Лекции по теории экстремальных задач / И. В. Гирсанов. – М.: Изд-во МГУ, 1970. – 118 с.

[34] Гольдман М. Л. Оптимальное восстановление банахова функционального пространства по конусу неотрицательных

функций / М. Л. Гольдман, П. П. Забрейко // Функциональные пространства и смежные вопросы анализа, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Труды математического института им. В. А. Стеклова. – 2014. – Т. 284. – С. 142 – 156.

[35] Гольдман М. Л. Точные оценки норм операторов типа Харди на конусах квазимонотонных функций / М. Л. Гольдман // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2001. – Т. 232. – С. 115 — 143.

[36] Городецкий С. Ю. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация / С. Ю. Городецкий, В. А. Гришагин // Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2007. – С. 357 — 363.

[37] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 896 с.

[38] Демьянов В. Ф. Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. – М.: Наука, 1972. – 368 с.

[39] Демьянов В. Ф. Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 384 с.

[40] Демьянов В. Ф. О связи между субдифференциалом Кларка и квазидифференциалом / В. Ф. Демьянов // Вестник Ленинградского университета, 1980. – Т. 13. – С. 18 — 24.

[41] Демьянов В. Ф. Обобщение понятия производной в негладком

анализе / В. Ф. Демьянов // Соросовский образовательный журнал. —1996. — № 5.— С. 121 – 127.

[42] Демьянов В. Ф. Обобщенные субдифференциалы и экзостеры / В. Ф. Демьянов, В. А. Рощина // Владикавказский математический журнал. —2006. — Т. 8, № 4.— С. 19 – 31.

[43] Демьянов В. Ф. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. –М.: Наука, 1990. – 431 с.

[44] Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление / В. Ф. Демьянов. -– М.: Высш. шк., 2005. -– 335 с.

[45] Дмитрук А. В. Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс / А. В. Дмитрук. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2012. – 172 с.

[46] Дубовицкий А. Я. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления / А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин – М.: Наука, 1971. – 112 с.

[47] Дьедонне Ж. Основы соверменного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964. – 360 с.

[48] Бахтигареева Э. Г. Построение оптимальных идеальных пространств для конусов неотрицательных функций / Э. Г. Бахтигареева // Математические заметки. – 2016. – Т. 99(6). – С. 820 – 831.

[49] Забрейко П. П. Идеальные пространства функций / П. П. Забрейко // Вестник Ярославского Университета. – 1974. – Т. 8. – С. 12 – 52.

[50] Забрейко П. П. Нелинейные интегральные операторы / П. П. Забрейко // Труды семинара по функциональному анализу. – 1966. – Вып. 8. – С. 3 – 148.

[51] Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. Изд. 2-е, испр. и доп. / М. И. Зеликин. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 160 с.

[52] Зигмунд А. Тригонометрические ряды (в 2-х томах) / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965. Т. 2. – 537 с.

[53] Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида – М.: Мир, 1967. – 624 с.

[54] Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров – М.: Наука, 1974. – 481 с.

[55] Кадец В. М. Курс функционального анализа / В. М. Кадец. – Х.: Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, 2006. – 615 с.

[56] Канторович Л. В. Акилов Г.П. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 743 с.

[57] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. – М.: Мир, 1971. – 400 с.

[58] Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 400 с.

[59] Киселёв Ю. Н. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения / Ю. Н. Киселёв, С. Н. Аввакумов, М. В. Орлов. – М.: Макс-Пресс, 2007. – 272 с.

[60] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М.: Наука, 1988. – 280 с.

[61] Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика / А. И Кобзарь. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

[62] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

[63] Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

[64] Краснов М. Л. Вариационное исчисление / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселёв – М., УРСС, 2003. – 176 с.

[65] Кусраев А. Г. Локальный выпуклый анализ / А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — 1982. — Т. 19. – С. 155 – 206.

[66] Кусраев А. Г. Субдифференциалы: теория и приложения / А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе. – Новосибирск: Наука, 1992. — 270 с.

[67] Кутателадзе С. С. Выпуклые операторы / С. С. Кутателадзе // Успехи математических наук. — 1979. — Т. 34, № 1. — С. 167 – 196.

[68] Левин В. Л. О субдифференциалах выпуклых функционалов / В. Л. Левин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, № 4(154). — С. 183 – 184.

[69] Линке Ю. Э. Универсальные пространства субдифференциалов сублинейных операторов со значениями в конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций / Ю. Э. Линке// Математические заметки. – 2011. – Т. 89, № 4. – С. 547 – 557.

[70] Линке Ю. Э. Условия продолжения ограниченных линейных и сублинейных операторов со значениями в пространствах Линденштраусса / Ю. Э. Линке // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, № 6. – С. 1340 – 1358.

[71] Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

[72] Малоземов В. Н. Совместное приближение функции и ее производных / В. Н. Малоземов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. – 112 с.

[73] Массера Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х. Массера, Х. Шеффер. – М.: Мир, 1970. – 456 с.

[74] Миклюков В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков – Волгоград: изд-во ВолГУ, 2006. – 283 с.

[75] Милютин А. А. Принцип максимума в оптимальном управлении / А. А. Милютин, А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский. – М.: Изд-во Мехмат МГУ, 2004. – 168 с.

[76] Мордукович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления / Б. Ш. Мордухович. – М.: Наука, 1990. – 360 с.

[77] Нейман Дж. А.(фон) Избранные труды по функциональному анализу: в 2-х тт. АН СССР / Дж. А. фон Нейман. – М.: Наука, 1987. – Т. 1 – 400 с. – Т. 2. – 369 с.

[78] Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию / Ю. Е. Нестеров. – М., МЦНМО, 2010. – 262 с.

[79] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

[80] Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

[81] Орлов И. В. Введение в сублинейный анализ / И. В. Орлов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. – Т. 53. – С. 64 – 132.

[82] Орлов И. В. Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы / И. В. Орлов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. – Т. 29. – С. 165 – 175.

[83] Орлов И. В. Дополнителные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H1: учебное пособие / И. В. Орлов, Е. В. Божонок. — Симферополь. ДИАИПИ, 2010. – 156 с.

[84] Орлов И. В. Интеграл Бохнера. Монография / И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин. — Симферополь. ДИАЙПИ, 2015. – 252 с.

[85] Орлов И. В. K-дифференцируемость и K-экстремумы / И. В. Орлов // Украинский математический вестник. — 2006. – Т. 3, № 1. – С. 97 – 115.

[86] Орлов И. В. Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты / И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – Т. 34. — С. 121 – 138.

[87] Орлов И. В. Компактные субдифференциалы в банаховых конусах / И. В. Орлов, З. И. Халилова // Украинский математический вестник. – 2013. – Т. 10, № 4. – С. 532 – 558.

[88] Орлов И. В. Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам / И. В. Орлов, З. И. Халилова // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. – Т. 49. – С. 99 – 131.

[89] Орлов И. В. Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации / И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин. — Симферополь. ДИАЙПИ, 2016. – 320 с.

[90] Орлов И. В. Предельная форма свойства Радона-Никодима справедлива в любом пространстве Фреше / И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — Т. 37. — С. 55 — 69.

[91] Орлов И. В. Пространства K-непрерывных линейных операторов и функционалов / И. В. Орлов, Е. В. Божонок // Динамические

системы (межвед. науч. сб.). — Симферополь: ТНУ, 2006. — Вып. 20. – С. 123 – 132.

[92] Орлов И. В. Теорема Юнга для нормальных производных и экстремумы функционалов в произведениях ядерных пространств / И. В. Орлов // Ученые записки ТНУ. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2002. – Т. 15(54), № 2. – С. 65 – 74.

[93] Орлов И. В. Учебно-методическое пособие по курсу «Выпуклый и негладкий анализ» для судентов магистратуры факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского / И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, С. И. Смирнова. — Симферополь. ДИАЙПИ, 2016. – 104 с.

[94] Орлов И. В. Шкалы пространств как аппарат линейного и нелинейного анализа в локально выпуклых пространствах: дис... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01. / И. В. Орлов. – Симферополь, 2005. – 333 с.

[95] Половинкин Е. С. Выпуклый анализ: учебное пособие / Е. С. Половинкин. – М.: Московский физико-технический институт (государственный университет), 2006. – 34 с.

[96] Половинкин Е. С. Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е. С. Половинкин. –М.: Физматлит, 2015. – 524 с.

[97] Половинкин Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. –М.: Физматлит, 2004. – 415 с.

[98] Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1971. – 320 с.

[99] Пшеничный Б. Н. Необходимые услови экстремума / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1969. – 212 с.

[100] Решетняк Ю. Г. Условия экстремума для одного класса функционалов вариационного исчисления с негладким интегрантом / Ю. Г. Решетняк // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, № 6. – С. 90 – 101.

[101] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. — М.: Мир, 1973. – 472 с.

[102] Сакс С. Теория интеграла / С. Сакс. – М.: ИЛ, 1949. – 380 с.

[103] Степанов В. Д. Об оптимальных пространствах Банаха, содержащих весовой конус монотонных или квазивогнутых функций / В. Д. Степанов // Докл. АН. – 2015. – Т. 464, № 2. – С. 145 – 147.

[104] Стонякин Ф. С. Аналог теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрированияю / Ф. С. Стонякин // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. –Том 20. –С. 168 – 176.

[105] Стонякин Ф. С. Компактный субдифференциал вещественных функций / Ф. С. Стонякин // Динамические системы. – 2007. – Вып. 23 – С. 101 – 115.

[106] Стонякин Ф. С. Компактные характеристики отображений и их приложения к интегралу Бохнера в локально выпуклых пространствах: дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. / Ф. С. Стонякин. – Симферополь, 2011. – 161 с.

[107] Стонякин Ф. С. K-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше / Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». – 2009. – Т. 22(61), № 1. -– С. 102 — 113.

[108] Стонякин Ф. С. Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка, Фреше и обобщенными дифференциалами Сассмана / Ф. С. Стонякин // Компьютерная математика. -– 2008. – № 2. -– С. 50 – 56.

[109] Стонякин Ф. С. Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала / Ф. С. Стонякин // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия «Математика, прикладная математика и механика». – 2009. – № 850. – С. 11 – 21.

[110] Стрекаловский А. С. Введение в выпуклый анализ: Учеб. пособие / А. С. Стрекаловский. – Иркутск: Иркутский университет, 2009 – 82 с.

[111] Сухинин М. Ф. Об ослабленном варианте правила множителей Лагранжа в банаховом пространстве / М. Ф. Сухинин // Математические заметки. – 1977. – Т. 21, № 2. – С. 223 – 228.

[112] Сухинин М. Ф. Об условном экстремуме функционала в линейных

топологических пространствах / М. Ф. Сухинин // Математические заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 375 – 382.

[113] Сухинин М. Ф. Правила множителей Лагранжа как необходимое условие квазикритичности отображений банаховых пространств / М. Ф. Сухинин // Успехи математических наук. – 1978. – Т. 33, № 2. – С. 183 – 184.

[114] Тихомиров В. М. Выпуклый анализ / В. М. Тихомиров // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1987. – Т. 14. – С. 5 – 101.

[115] Треногин В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

[116] Угланов А. В. Вариационное исчисление на банаховых пространствах / А. В. Угланов // Математический сборник РАН. – 2000. – Т. 191, № 10. – С. 105 – 118.

[117] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах) / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. Т. 1. – 616 с.

[118] Функциональный анализ: Справочная математическая библиотека / Под ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

[119] Халилова З. И. K-сублинейные многозначные операторы и их свойства / З. И. Халилова // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». – 2011. – Т. 24 (63), № 3. – С. 110 – 122.

[120] Халилова З. И. Компактные субдифференциалы в банаховых конусах и их приложения в вариационном исчислении: дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. / З. И. Халилова. – Симферополь, 2014. – 162 с.

[121] Халилова З. И. Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам / З. И. Халилова // Динамические системы. – 2013. – Т. 3(31), № 1-2. – С. 115 – 134.

[122] Халилова З. И. Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам / З. И. Халилова // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». – 2012. – Т. 25 (64), № 2. – С. 140 – 160.

[123] Халилова З. И. Экстремальные вариационные задачи с субгладким интегрантом. / 124 З. И. Халилова // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». – 2014. – Т. 27(66), № 1. – С. 125 – 153.

[124] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М.:ИЛ, 1962. – 829 с.

[125] Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу / А. Я. Хелемский. – М.: MCNMO, 2004. – 213 с.

[126] Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л. Я. Цлаф — СПб.: Лань, 2005. – 192 с.

[127] Эдварде Р. Функциональный анализ: Теория и приложения / Р. Эдварде – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

[128] Acerbi E. A model for mixtures of micromagnetic materials allowing existence and regularity / E. Acerbi, I. Fonseca, G. Mingione // Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. – Birkhäuser, Basel. – 2002. – Vol. 35. – P. 1 – 8.

[129] Arnold B. C. Measuring Skewness with Respect to the Mode / B. C. Arnold, R. A. Groeneveld // The American Statistician. – 1995. – Vol. 49. – P. 34 – 38.

[130] Aull C. E. Thef irst symmetricd erivative / C. E. Aull // Amer. Math. Monthly. – 1967. – Vol. 74. – P. 708 – 711.

[131] Balanda K. P. Kurtosis: A Critical Review / K. P. Balanda, H. L. MacGillivray// The American Statistician. – 1988. – Vol. 42. – P. 111 – 119.

[132] Baran I. V. Adjoint Extremal Problem for Non-Smooth Functionals / I. V. Baran, I. V. Orlov // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA). – 2017. – P. 23 – 26.

[133] Baran I. V. Symmetric subdifferentials and their applications to Fourier series / I. Baran // International Conference Analysis and mathematical physics, 24-28 June 2013, Kharkiv, Ukraine. – P. 20.

[134] Belna C. L. Symmetric and ordinary differentiation / C. L. Belna, M. J. Evans, P. D. Humke // Proc. Amer. Math. Soc. – 1978. – Vol. 72. – P. 261 – 267.

[135] Borwein J. M. A survey of subdifferential calculus with applications

/ J. M. Borwein, Q. J. Zhu // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory and Methods. – 1999. – Vol. 38, № 6. – P. 687 – 773.

[136] Brito da Cruz A. M. Symmetric Differentiation on Time Scales / A. M. Brito da Cruz, N. Martins, D. F. Torres // Appl. Math. Lett.. – 2013. – Vol. 26, № 2. – P. 264 – 269.

[137] Chaudhry M. H. Open-Channel Flow / M. H. Chaudhry. – Springer, 2007. – 528 p.

[138] Clarke F., Generalized gradients and applications / F. Clarke // Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 205, № 2. – P. 247 – 262.

[139] Demyanov V. F. Constructive nonsmooth analysis. Approximation & Optimization / V. F. Demyanov, A. M. Rubinov. – Frankfurt am Main, Peter Lang, 1995. – 416 p.

[140] Demyanov V. F. Generalized subdifferentials and exhausters in nonsmooth analysis / V. F. Demyanov, V. A. Roshchina // Doklady Mathematics. – 2007. – Volume 76, Issue 2. P. 652 – 655.

[141] Demyanov V. F. Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters / V. F. Demyanov, V. A. Roshchina // Optimization. – 2006.– Vol. 55, № 5-6. – P. 525 -– 540.

[142] Demyanov V. F. In: Quasidifferentiability and Related Topics / V. F. Demyanov // Dordrecht: Kluwer. – 2000. – P. 85 – 137.

[143] Doane D. P. Measuring skewness: a forgotten statistic / D. P. Doane, L. E. Seward // Journal of Statistics Education. – 2011. – Vol. 19.2. – P. 1 – 18.

[144] Dunford N. Linear operations on summable functions / N. Dunford, B. J. Pettis // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 47 – P. 323 – 392.

[145] Giaquinta M. Calculus of Variations / M. Giaquinta, S. Hildebrandt – Grundlehren math. Wiss. 311, Springer, Berlin. – 1996. – P. 1 – 652.

[146] Groeneveld R. A. An influence function approach to describing the skewness of a distribution / R. A. Groeneveld // The American Statistician. – 1991. – Vol. 45.2. – P. 97 – 102.

[147] Goldman M. Some constructive criteria of optimal embeddings for potentials / M. Goldman // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2011. – Vol. 56, № 10-11. – P. 1 – 19.

[148] Groeneveld R. A. Measuring Skewness and Kurtosis / R. A. Groeneveld // Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician). – 1984. – Vol. 33. – P. 391 – 399.

[149] Hockett S. O. Barron's how to Prepare for the AP Calculus / S. O. Hockett, D. Bock. – Barron's Educational Series, 2005. – 619 p.

[150] Ioffe A. D. Subdifferentials of perfomance functions and calculus of coderivatives of set-valued mappings / A. D. Ioffe, J. -P. Penot // Serdica Math. Journal – 1996. – Vol. 22. – P. 359 – 384.

[151] James R. D. Generalized nTH primitives / R. D. James // Trans. Am. Math. Soc. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 149 – 176.

[152] Joanes D. N. Comparing measures of sample skewness and kurtosis / D. N. Joanes, C. A. Gill // Journal of the Royal Statistical Society (Series D): The Statistician. – 1998. – Vol. 47(1). – P. 183 – 189.

[153] Kruger A. Ya. On Frechet subdifferentials / A. Ya. Kruger // J. of Math. Sciences. – 2003. – V. 116, № 3. – P. 3325 – 3358.

[154] Kurina G. A. Feedback Solutions of Optimal Control Problems with DAE Constraints / G. A. Kurina, R. Marz // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2007. – Vol. 46, № 4. – P. 1277 – 1298.

[155] Lax P. D. Calculus With Applications / P. D. Lax, M. S. Terrell. – Springer-Verlag New York, 2014. – 503 p.

[156] Malozemov V. N. Best rational approximation on a system of intervals / V. N. Malozemov // Nonsmooth optimization methods and applications (ed. F. Giannessi), Gordon and Breach, Singapore. – 1992. – P. 217–227.

[157] Mercer P. R. More Calculus of a Single Variable / P. R. Mercer. – Springer-Verlag New York, 2014. – 411 p.

[158] Michal A. D. Differential calculus in linear topological spaces / A. D. Michal // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1938. – Vol. 24. – P. 340 – 342.

[159] Michel P. Calculs sous-differential pour les fonctions lipshitzieness et non- lipschitzieness / P. Michel, J. P. Penot // C.R. Acad. Sc. Paris. Ser. I., – 1984. – Vol. 298. – P. 269 – 272.

[160] Milyutin A. A. Calculus of Variations and Optimal Control / A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii. – American Mathematical Society, 1998. – 372 p.

[161] Mordukhovich B. S. Variational analysis and generalised differentiation. I. Basic theory / B. S. Mordukhovich. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – xxii+579 pp.

[162] Mordukhovich B. S. Variational analysis and generalised differentiation. II. Applications / B. S. Mordukhovich. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – xxii+610 pp.

[163] Olver P. Introduction to Partial Differential Equations / P. Olver. – Springer Science & Business Media, 2014. – 636 p.

[164] Orlov I. V. A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces / I. V. Orlov // Operator Theory: Advances & Appl., Basel-Boston-Berlin: Birkhauser. – 2000. – Vol. 118. – P. 321 – 333.

[165] Orlov I. V. Extreme Problems and Scales of the Operator Spaces / I. V. Orlov // North-Holland Math Studies., Functional Analysis and its Applications. – Amsterdam-Boston-...: Elsevier. – 2004. – Vol. 197. – P. 209 – 228.

[166] Orlov I. V. Compact-analytical properties of variational functional in Sobolev spaces $W^{1,p}$ / I. V. Orlov // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – Vol. 3, № 2. – P. 94 – 112.

[167] Orlov I. V. Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals / I. V. Orlov // Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, Verlag Basel/Switzerland. – 2009. – Vol. 190. – P. 397 – 417.

[168] Orlov I. V. Compact Subdifferentials in Banach Cones / I. V. Orlov, Z. I. Khalilova // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Volume 198, Issue 4. – P. 438 – 456.

[169] Orlov I. V. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral / I. V. Orlov, F. S. Stonyakin // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2009. – Vol. 15, № 1. – P. 74 – 90.

[170] Orlov I. V. Subdifferentials via Sub-Operators / I. V. Orlov // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA). – 2017. – P. 235 – 238.

[171] Orlov I. V. Sublinear Extension of Algebraic Grothendieck Theory / I. V. Orlov // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA). – 2017. – P. 232 – 234.

[172] Rayner J. C. Interpreting the Skewness Coefficient / J. C. Rayner, D. J. Best, K. L. Matthews // Communications in Statistics-Theory and Methods. – 1995. – Vol. 24. – P. 593 – 600.

[173] Rieger M. O. Abstract variational problems with volume constraints / M. O. Rieger // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. – 2004. – Vol. 10. – P. 84 – 98.

[174] Rockafellar R. T. The theory of subgradients and its applications to problem of optimisation: Lecture Notes / R. T. Rockafellar. – Monreal: Univ. of Monreal, 1978.

[175] Rockafellar R. T. Variational Analysis / R. T. Rockafellar, R. J. B. Wets. – Springer, Berlin, 1998. – 736 p.

[176] Roshchina V. A. On the relationship between the Frechet subdifferential and upper exhausters / A. V. Roshchina // International Workshop on

Optimization: Theory and Algorithms (19–22 August 2006, Zhangjiajie, Hunan, China).

[177] Rubinov A. M. Sublinear operators and their applications / A. M. Rubinov // Uspekhi Mat. Nauk. –1977. – Vol. 32, № 4. – P. 113 – 174.

[178] Sahoo P. Mean Value Theorems and Functional Equations / P. Sahoo, T. Riedel // World Scientific. – 1998. – P. 188 – 192.

[179] Shaefer H. H. Topological vector spaces / H. H. Shaefer. – New York–London: McMillan, 1966. – 360 p.

[180] Stepanov V. D. Integral operators on the cone of monotone functions / V. D. Stepanov // J. London Math. Soc. (2). –1993. – Vol. 48, № 3. – P. 465 – 487.

[181] Sussmann H. J. Warga derivative containers an other generalized differentials / H. J. Sussmann // Proceedings of the 41stIEEE 2002 Conference on Decision and Control, Las Wegas, Newada, December 10–13, 2002, Vol. 1 (IEEE Publications, New York 2002) – P. 1101 – 1106.

[182] Tiel J. Convex Analysis: An Introductory Text / J. van Tiel. – Wiley J. & Sons. New York, 1984. – 134 p.

[183] Thomson B. S. Symmetric Properties of Real Functions / B. S. Thomson. – Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 183, Dekker, New York, 1994. – 472 p.

[184] Triebel H. Theory of Function Spaces, V. III / H. Triebel. – Monographs in Math., Birkhauser, Basel, 2006. – 100 p.

[185] Vallee Poussin Ch. J. Sur l'approximation des fonctions d'une variable reelle et de leurs derivees par les polynomes et des suites limitees de Fourier / Ch. J. Vallee Poussin // Bull. Acad. de Belgique. – 1908. – Volume 3. P. 193 – 254.

[186] Visintin A. Models phase transitions / A. Visintin // Boston–Basel–Berlin: Birkhauser. – 1996. – ix+322 pp.

[187] Warga J. Necessary conditions without differentiability assimptions in optimal control / J. Warga // J. Diff. Equations, – 1975. – Vol. 18 – P. 41 – 62.

[188] Wilmott P. The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction / P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne. – Cambridge University Press, 1995. – 317 p.

[189] Yamamuro S. Differential calculus in topological linear spaces / S. Yamamuro. – N.-Y.: Lecture Notes in Math. Vol. 374, IV., 1974. – 179 p.

[190] Yosida K. Functional Analysis / K. Yosida. – Berlin...: Springer, 1995. – 500 p.