На правах рукописи

Баран Инна Викторовна

СИММЕТРИЧЕСКИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на кафедре алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Орлов Игорь Владимирович**
Официальные оппоненты:	**Гольдман Михаил Львович,** доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет дружбы народов, г. Москва, профессор Математического института имени С. М. Никольского
	Каплицкий Виталий Маркович, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», г. Ростов-на-Дону, доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО **«Санкт-Петербургский государственный университет»**, г. Санкт-Петербург

Защита состоится «02» октября 2018 г., в 16-00 ч на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 Южного федерального университета по адресу:
г. Ростов-на-Дону, улица Мильчакова, 8а, ауд. 211

Автореферат разослан «   » июля 2018 г.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: 344103, г. Ростов–на–Дону, ул. Р. Зорге, 21–ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу
http://hub.sfedu.ru/media/diss/859ad1b9-b38c-4e88-b600-0ca4ee3f02cd/disser_baran.pdf

Ученый секретарь
диссертационного совета В.Д. Кряквин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Диссертация посвящена построению основ теории симметрических компактных субдифференциалов отображений в банаховых пространствах. Рассмотрены приложения построенной теории к гармоническому анализу, теории вероятностей и к теории экстремальных задач.

Симметрические локальные характеристики отображений, с самого их возникновения, занимали особую позицию в вещественном анализе, связанную, в основном, с обобщенным суммированием рядов Фурье. На протяжении многих лет с определением, приложениями и обобщением симметрических производных были связаны имена ряда выдающихся математиков — Б. Риман, Г. Шварц, Г. Кантор, Ш.-Ж. Валле-Пуссен, С. Сакс. Обобщением симметрической производной является производная Валле-Пуссена (1908 г.). Основные свойства обобщенных симметрических производных высших порядков были введены и исследованы в работах Р. Джеймса (1954 г.). Упомянутые работы концентрировались вокруг методов обобщенного суммирования тригонометрических и других рядов.

На протяжении последних десятилетий конечномерный симметрический анализ регулярно привлекает к себе внимание математиков из различных стран. Отметим, в частности, работы C. E. Aull (1967), B. S. Thomson (1994), P. Sahoo, T. Riedel (1998), S. O. Hockett, D. Bock (2005), P. D. Lax, M. S. Terrell (2014), A. M. Brito da Cruz, N. Martins, D. F. Torres (2013), P. R. Mercer (2014) и другие.

Кроме того, в дискретном анализе, как на протяжении XX века, так и в настоящий период получили широкое применение симметрические, или так называемые центральные, разностные отношения (central differences) как первого так и высших порядков.

Однако симметрическое дифференциальное исчисление, в отличие от классического, не получило обобщения на бесконечномерный случай — аналог исчисления Гато–Адамара–Фреше для симметрического случая не был построен. Как представляется, одной из причин этого служит очевидная невозможность обобщить классические условия локального экстремума (начиная с леммы Ферма) на симметрические производные функционалов.

Такая тенденция сохранилась и после появления, в связи с задачами негладкой оптимизации, субдифференциального исчисления. Начиная с классических работ Ж. Моро, Р. Рокафеллара, Ф. Кларка и других авторов в 70-х гг. прошлого века, различные типы субдифференциалов вводились и применялись многими авторами. Отметим, в частности, работы таких отечественных математиков и математиков отечественного происхождения, как В. М. Тихомиров, А. Д. Иоффе, Б. Н. Пшеничный, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, В. Н. Малоземов, М. Л. Гольдман, Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Б. Ш. Мордухович, А. В. Арутюнов и другие.

В частности, в последнее десятилетие в работах И. В. Орлова и его учеников Ф. С. Стонякина, З. И. Халиловой была построена и нашла значимые применения теория так называемых компактных субдифференциалов, основным моментом которой является использование для отображений в банаховых пространствах в качестве субдифференциалов многозначных сублинейных и полисублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями.

Как общий знаменатель работ по негладкой оптимизации за этот период, отметим обобщение базисных конструкций анализа Гато–Адамара–Фреше — переход от линейных пространств — к конусам, от линейных операторов — к сублинейным, от однозначных локальных характеристик — к многозначным.

Отметим также серьезные трудности в применении субдифференциальных методов высших порядков. Эти трудности связаны, прежде всего, со сложными коническими операторными структурами, возникающими при индуктивном определении субдифференциалов высших порядков.

В связи с этим, наше внимание было обращено на то обстоятельство, что классические симметрические производные высших порядков не требуют индуктивного определения и определяются через «однократный» предел. Это позволяет в данном случае переход от дифференциалов к субдифференциалам также осуществлять для любого порядка по единой схеме, минуя «встроенные» проблемы индуктивного подхода.

В прикладном плане целесообразность построения симметрической версии субдифференциального исчисления мы связываем со следующими возможностями приложений, которые реализуются в данной работе. Первая из них связана с заменой в известном методе суммирования Римана второй симметрической производной от функции Римана на второй симметрический субдифференциал, с соответствующим многозначным результатом обобщенного суммирования.

Вторая возможность связана с применением симметрических характеристик в экстремальных задачах «на втором этапе»: для уже найденной точки экстремума определить оптимальное (в некотором смысле) линейное направление движения к точке экстремума. В этой связи следует упомянуть о двух известных подходах в негладком случае. Первый из них (метод Демьянова–Рубинова) известен также как «метод наискорейшего спуска» (по радиусу) к точке минимума, и в вычислительном плане близок к градиентному методу поиска минимума. Второй подход, известный как «метод оврагов Гельфанда», связан с переходом через точку экстремума по диаметру.

В нашей работе понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами, что позволяет применить для исследования подобных экстремальных задач симметрический анализ.

В связи с вышеизложенным диссертационная работа содержит следующие основные блоки:

1. Построение основ симметрического дифференциального исчисления в банаховых пространствах (как необходимой базы для следующего этапа работы).

2. Построение основ симметрического субдифференциального исчисления в банаховых пространствах.

3. Приложения в гармоническом анализе, в теории вероятностей и теории экстремальных задач.

При реализации этого плана мы исходили из симметрического аналога компактного субдифференциала, однако, ввиду неиндуктивности симметрического подхода, дальнейшая конструкция симметрического исчисления существенно отличается от «точного» подхода, рассмотренного в упомянутых выше работах И. В. Орлова, Ф. С. Стонякина, З. И. Халиловой.

Цель и задачи работы.

Объектом исследования в работе являются симметрические дифференциалы и симметрические субдифференциалы первого и высших порядков в скалярном и векторном случае.

Предмет исследования. Основные аналитические свойства симметрических дифференциалов Фреше, основные аналитические свойства симметрически субдифференцируемых отображений.

Целью исследования является построение развитой теории симметрических дифференциалов и субдифференциалов первого и высшего порядков с приложениями к гармоническому анализу и экстремальным задачам.

Для реализации поставленной цели в диссертационной работе были сформулированы следующие *задачи*:

1. Доказать ряд новых свойств классических симметрических производных, вплоть до теоремы о среднем и формулы Тейлора.

2. Построить основы теории симметрических дифференциалов в банаховых пространствах.

3. Построить основы теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков в банаховых пространствах.

4. Получить оценки симметрических вариаций и субвариаций первого и высших порядков для одномерного вариационного функционала.

5. Обобщить классический метод Римана суммирования рядов Фурье на случай симметрических субдифференциалов.

6. Рассмотреть применение симметрических характеристик к негладким распределениям вероятностей случайных величин.

7. Сформулировать и рассмотреть на примерах общую экстремальную задачу поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы выпуклого и негладкого анализа, теории вероятностей, вариационного исчисления, теории многозначных операторов, бесконечномерного дифференциального исчисления, функционального анализа, гармонического анализа.

Методы дифференциального исчисления и негладкого анализа применяются при построении развитого исчисления симметрических субдифференциалов отображений в банаховых пространствах.

Методы гармонического анализа используются при обобщении классического метода Римана-Шварца суммирования рядов Фурье.

Методы вариационного исчисления и теории вероятностей применяются при вычислении симметрических вариаций и субвариаций вариационных функционалов, а также при поиске оптимального направления, минимизирующего (по модулю) локальную асимметрию, либо локальный эксцесс в негладкой точке экстремума.

Научная новизна. В диссертационной работе все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Построена развитая теория симметрических дифференциалов Фреше и симметрических субдифференциалов Фреше первого и высших порядков, включающая, в частности теорему о среднем и формулу Тейлора. Найдены простые достаточные условия симметрической субдифференцируемости. Рассмотрены некоторые приложения к рядам Фурье и вариационным функционалам.

Теоретическая и практическая ценность. В диссертационной работе все результаты относятся к области фундаментальных исследований и имеют в основном теоретическое значение. Полученные результаты развивают теорию симметрических дифференциалов и субдифференциалов для случая скалярного и векторного аргументов, позволяют исследовать обобщение классического метода Римана–Шварца суммирования рядов Фурье и задачу минимизации локальной асимметрии и локального эксцесса в негладкой точке экстремума.

Возможно применение результатов работы в проблематике современной негладкой оптимизации, а также в негладких вариационных задачах.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на различных конференциях и семинарах: на семинаре кафедры математического анализа Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, 20 октября 2016 г., 14 июня 2017 г., г. Ростов-на-Дону; на семинаре по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO» Санкт-Петербургского Государственного университета, 30 ноября 2017 г., г. Санкт-Петербург; на I-II научных конференциях профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых «Дни науки Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского» (Симферополь, 2015-2016 гг.); на кафедральном семинаре кафедры алгебры и функционального анализа Таврической академии КФУ им. В. И. Вернадского; на международных научных конференциях VIII международной научной конференции для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харьков, Украина, 17-28 апреля, 2013); International Conference Analysis and mathematical physics (Kharkiv, Ukraine, 24-28 June, 2013); «Крымская международная математическая конференция» (КММК-2013), 22 сентября – 4 октября 2013 г., г. Судак; «XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам», г. Судак, 21 сентября – 30 сентября 2014 г.; «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-V», 26 апреля – 1 мая 2015 г., г. Ростов-на-Дону; «Современные проблемы теории функций и их приложения», 27 января – 3 февраля 2016 г., г. Саратов; «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI», 24 – 29 апреля 2016 г., г. Ростов-на-Дону; «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова, 22 – 27 мая 2017 г., г. Санкт-Петербург.

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано пятнадцать работ [1] – [15]: 6 научных статей ([1] – [6]), из которых [1], [2], [3], [4], [6] изданы в журналах, которые входят в международные метрические базы, рекомендованные ВАК Минобрнауки РФ: работа [1] - в журнале, рекомендованном ВАК Украины; [4] и [6] индексированы в Scopus; [2] и [4] индексирована в zbMath; 9 тезисов докладов научных конференций [7] – [15].

Из совместных работ в диссертационную работу вошли результаты, полученные автором самостоятельно. Работы [4], [6] вышли в соавторстве с научным руководителем И. В. Орловым. В работах [4], [6] профессору И. В. Орлову принадлежит общий план исследования и постановка задачи, полученные результаты принадлежат соискателю.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы, выводов и списка цитированной литературы. Объем работы составляет 129 страниц, библиография – 190 источников.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** излагается обоснование актуальности темы диссертации, представлена история вопроса, изложены основные положения, выносимые на защиту, характеристика научной новизны и практической значимости, дается короткий обзор работы по главам и разделам.

В **первой главе** диссертационной работы изучен вопрос о построении теории симметрических производных и симметрических дифференциалов Фреше первого и высших порядков. Получена теорема о среднем для симметрического случая. Это позволило распространить на данный случай и асимптотическую форму полной формулы Тейлова с несколько ослабленной оценкой по сравнению с классическим случаем.

В разделе 1.1 мы рассматриваем теорему о среднем для симметрически дифференцируемых отображений (теорема 1.1.4) и асимптотическую формулу Тейлора для симметрических производных (теорема 1.1.6) в случае абсолютно непрерывных отображений.

Пусть отображение $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$, где F — произвольное вещественное банахово пространство, определено в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$. Напомним классические определения первой и высших симметрических производных, которые без труда распространяются на отображения со значениями в банаховых пространствах.

Определение 1.1.1. Первой симметрической производной f в точке x называется предел

$$f^{[\prime]}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} = \lim_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

Определение 1.1.2. *Симметрической производной n-го порядка* отображения f в точке x называется величина

$$f^{[n]}(x) = \lim_{h\to0} \frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \lim_{h\to+0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x+(n-2k)h\big).$$

Имеет место следующая теорема о среднем для симметрически дифференцируемых отображений (далее $\overline{co}$ — выпуклая замкнутая оболочка множества).

Теорема 1.1.4. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \supset [x; x+h] \to F$ абсолютно непрерывно на $[x; x+h]$ и симметрически дифференцируемо в $(x; x+h)$. Тогда выполняется оценка:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\, f^{[\prime]}\big((x; x+h)\big) \cdot h. \tag{1}$$

В теореме 1.1.6 мы получаем формулу Тейлора в форме Пеано (более слабой по сравнению с классическим случаем) в предположении, что отображение $f:\mathbb{R}\supset U(x)\to F$ $(n-1)$ раз дифференцируемо обычным образом в окрестности точки x и n раз симметрически дифференцируемо в точке x.

Теорема 1.1.6. Предположим, что существует $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ и отображение f сильно абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$. Тогда имеет место оценка:

$$f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k\in\frac{1}{n!}\,\overline{co}\,f^{[n]}\big((x;x+h)\big)\cdot h^n+o(h^n). \tag{2}$$

Заметим, что при $n\geqslant 2$ условие абсолютной непрерывности f в окрестности точки x выполнено автоматически ввиду $f\in C^1(U)$.

В разделе 1.2 представлена взаимосвязь полученных результатов со свойствами обобщенных симметрических производных Ш.-Ж. Валле-Пуссена, исследованных в работах Р. Джеймса. Вначале вводятся необходимые понятия.

Определение 1.2.1. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, $x_0\in(a;b)$. Если существуют постоянные $\beta_0,\beta_2,\ldots,\beta_{2r}$ (зависящие только от x_0) такие, что

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h)+f(x_0-h)\Big\}-\sum_{k=0}^{r}\frac{h^{2k}}{(2k)!}\beta_{2k}=o(h^{2r})$$

при $h\to 0$, то β_{2r} называется *обобщенной симметрической производной (Валле-Пуссена)* порядка $2r$ функции $f(x)$ в точке x_0, и обозначается $D^{2r}f(x_0)$.

Если $D^{2k}f(x_0)$ существуют при $0\leqslant k\leqslant m-1$, определим величину $\theta_{2m}(x_0;h)$ равенством:

$$\frac{h^{2m}}{(2m)!}\theta_{2m}(x_0,h)=\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h)+f(x_0-h)\Big\}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{h^{2k}}{(2k)!}D^{2k}f(x_0),$$

и положим

$$\Delta^{2m}f(x_0)=\limsup_{h\to 0}\theta_{2m}(x_0;h),\qquad \delta^{2m}f(x_0)=\liminf_{h\to 0}\theta_{2m}(x_0;h).$$

Скажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1\leqslant k\leqslant m-1$ на $(a;b)$, и

$$\lim_{h\to 0}h\theta_{2m}(x,h)=0$$

при всех x из $(a;b)\setminus E$, где E не более, чем счетно.

Скажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям B_{2m-2} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1\leqslant k\leqslant m-1$ на $(a;b)$, и $D^{2k}f(x)$ не имеет разрывов первого рода на $(a;b)$.

Далее через $\Delta^k f$ обозначается конечная разность k–го порядка для f.

Для симметрических производных четного порядка имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.2.4. Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \left(f^{(2n-1)}\right)^{[\prime]}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m-2} и B_{2m-4} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m-2} f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-4)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.

Теорема 1.2.5. Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \left(f^{(2n-1)}\right)^{[\prime]}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m} f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-2)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.

В разделе 1.3 мы переходим к определению симметрических дифференциалов первого и высших порядков в банаховых пространствах, следуя классической схеме Гато–Адамара–Фреше и изучаем ряд их свойств, включая теорему о среднем (теорема 1.3.10). В теореме 1.3.8 исследован вопрос о композиции строго дифференцируемого и симметрически дифференцируемого отображения.

В качестве подходящей операторной базы вводится понятие степенного оператора n-го порядка. На этой основе получена формула Тейлора в векторном случае (теорема 1.3.14).

Определение 1.3.1. Симметрический дифференциал отображения f в точке x *по направлению* h есть предел (при условии, что он существует):

$$\partial^{[\prime]} f(x,h) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t}. \tag{3}$$

Теорема 1.3.8. Если отображение $f : E \to F$ сильно s–дифференцируемо в точке x и непрерывно в этой точке, отображение $g : F \to G$ строго дифференцируемо в точке $y = f(x) \in F$, то композиция $g \circ f : E \to G$ сильно s–дифференцируема по Фреше в точке $x \in E$, причем

$$\partial^{[\prime]}(g \circ f)(x)h = g'\big(f(x)\big) \circ \partial^{[\prime]} f(x)h\ . \tag{4}$$

Теорема 1.3.10. Пусть отображение $f : E \supset [x; x+h] \to F$ абсолютно непрерывно на $[x; x+h]$ и симметрически дифференцируемо на $(x; x+h)$. Тогда выполняется оценка:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\, \partial^{[\prime]} f\big((x; x+h)\big) \cdot h. \tag{5}$$

В условиях теоремы 1.3.10 справедливы представление и оценка:

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial^{[\prime]} f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|. \tag{6}$$

Следуя предыдущей схеме, рассмотрим определение симметрического дифференциала Фреше n-го порядка и приведем формулу Тейлора.

Определение 1.3.13. Назовем *s–дифференциалом n-го порядка по направлению* h отображения $f : E \supset U(x) \to F$ в точке x предел (при условии, что он существует):

$$\partial^{[n]} f(x,h) = \lim_{t \to +0} \left(\frac{1}{(2t)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)th\big) \right) = \lim_{t \to +0} \frac{\Delta^n f(x,th)}{(2t)^n}. \tag{7}$$

Полученную ранее в случае скалярного аргумента формула Тейлора (теорема 1.1.6) легко перенести на векторный случай.

Теорема 1.3.14. Предположим, что существует $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ и отображение f сильно абсолютно непрерывно на отрезке $[x; x+h]$. Тогда имеет место оценка:

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(h)^k \in \frac{1}{n!}\,\overline{co}\,\partial^{[n]} f\big((x; x+h)\big) \cdot (h) + o(\|h\|^n). \tag{8}$$

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков для отображений скалярного аргумента со значениями в банаховых пространствах.

В разделе 2.1 помимо необходимого технического аппарата симметрических субдифференциалов, показано, что s–субдифференциал является обобщением обычного компактного субдифференциала, при этом симметрическая оценка — более узкая (теорема 2.1.10). Рассмотрены формы формулы конечных приращений и теоремы о среднем для s–субдифференцируемых отображений с оценкой по норме (теорема 2.1.18), не требующие абсолютной непрерывности отображений.

Введем вспомогательное определение субпредела, посредством которого определяется в дальнейшем симметрический субдифференциал.

Определение 2.1.1.[1] Если $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ некоторая система подмножеств E (субсистема), где $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — выпуклые и замкнутые, то назовем непустое множество $B \subset E$ *субпределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$: $B = \operatorname*{sublim}_{\delta\to 0} B_\delta$, если:

1) $\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0 : \ (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B \subset B_\delta \subset B + U)$;

2) B— компактное множество в E.

Таким образом, основными характеристиками субпредела являются равномерное топологическое стягивание множеств B_δ к своему непустому пересечению и компактность этого пересечения.

В случае отображения $\varphi : \mathbb{R}_+ \to E$ субпредел $\operatorname*{sublim}_{\delta\to 0} \overline{co}\,\varphi\,(U_\delta(0))$ мы будем обозначать короче: $\operatorname*{sublim}_{h\to +0} \varphi(h)$.

Всюду далее F — вещественное банахово пространство, $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$.

Определение 2.1.4. Симметрический субдифференциал отображения f в точке x (или s–субдифференциал) есть субпредел:

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x) = \operatorname*{sublim}_{h\to +0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Теорема 2.1.5. Если существует обычная симметрическая производная $f^{[\prime]}(x)$, то

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x) = \Big\{ f^{[\prime]}(x) \Big\}.$$

В вещественнозначном случае $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$ может быть вычислен по простой формуле. Заметим, что в этом случае $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$ есть компактный отрезок.

[1] И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты, Современная математика. Фундаментальные направления, 34 (2009), 121 – 138.

Теорема 2.1.6. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ s–субдифференцируема в точке x из отрезка $[a, b]$ в том и только в том случае, если в данной точке существуют нижняя и верхняя симметрические производные:

$$-\infty < \underline{f^{[\prime]}}(x) \leqslant \overline{f^{[\prime]}}(x) < +\infty;$$

при этом

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x) = [\underline{f^{[\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime]}}(x)]. \tag{9}$$

Теорема 2.1.10. Если существует компактный субдифференциал $\partial_{sub} f(x)$, то существует и s–субдифференциал $\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)$, причем

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x) \subset \partial_{sub} f(x). \tag{10}$$

Теорема 2.1.18. [Теорема о среднем] Предположим, что отображение $f : [a, b] \to F$ непрерывно на отрезке $[a, b]$ и s–субдифференцируемо на интервале (a, b), то выполняется оценка:

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in (a,b)} \Big(\sup \|\partial^{[\prime]}_{sub} f(x)\| \Big) \cdot (b - a). \tag{11}$$

Раздел 2.2 содержит общую теорию симметрических субдифференциалов высших порядков. Отметим также, что «прямое» (неиндуктивное) определение s–субдифференциалов высших порядков упрощает изложение.

Определение 2.2.7. Субпредел

$$\partial^{[n]}_{sub} f(x) = \operatorname*{sublim}_{h \to +0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n - 2k)h\big).$$

будем называть *s–субдифференциалом n–го порядка* отображения f в точке x.

Предложение 2.2.8. Если существует $\partial^{[\prime]}_{sub}(f^{(n-1)})(x)$, то существует s–субдифференциал n-го порядка $\partial^{[n]}_{sub} f(x)$ и имеет место включение:

$$\partial^{[n]}_{sub} f(x) \subset \partial^{[\prime]}_{sub}(f^{(n-1)})(x).$$

Рассмотрим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для s–субдифференциалов.

Теорема 2.2.9. Предположим, что существует $\partial^{[\prime]}_{sub} f^{(n-1)}(x)$ и отображение f абсолютно непрерывно в окрестности точки x. Тогда имеет место оценка:

$$f(x + h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} \overline{co} \Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial^{[\prime]}_{sub} f^{(n-1)}\big)(x + \theta h) \Big\} + o(h^n). \tag{12}$$

Третья глава диссертационной работы посвящена изучению теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков для отображений в банаховых пространствах.

В разделе 3.1 строится теория s–субдифференциалов первого порядка в банаховых пространствах. Вначале, вводя симметрические операторы (операторы с полной однородностью), мы строим подходящую операторную базу. Затем, следуя обобщенной схеме Гато–Адамара–Фреше последовательно вводятся s–субдифференциалы по направлению, слабые, по Гато, и, наконец, s–субдифференциалы Фреше. Для всех этих типов субдифференциалов установлены подходящие критерии.

На случай s–субдифференцируемых абсолютно непрерывных на векторном отрезке отображений обобщена теорема о среднем (теорема 3.1.24), полученные ранее для s–дифференцируемых отображений в разделе 1.1.

Пусть F — вещественное банахово пространство. Через F_K обозначим выпуклый конус всех непустых компактных выпуклых подмножеств F.

Определение 3.1.1. Пусть E — линейное пространство, F — банахово пространство. Отображение $A : E \to F_K$ назовем симметрически сублинейным оператором (или s–оператором), если для любых $h_1, h_2, h \in E$ верно:

$$(i) \quad A(h_1 + h_2) \subset Ah_1 + Ah_2; \qquad (ii) \quad A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah, \text{ при любом } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Далее операторы, удовлетворяющие свойствам (i)–(ii), будем называть *s–сублинейными.*

Обозначим множество всех ограниченных по субнорме $\|A\| := \sup\limits_{\|h\|\leqslant 1} \|Ah\|$ симметрических операторов $A : E \to F_K$ через $\overset{S}{L}_{sub}(E; F_K)$. Нетрудно видеть, что $\overset{S}{L}_{sub}(E; F_K)$ — субнормированный конус, являющийся подконусом субнормированного конуса $L_{sub}(E; F_K)$.

Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$, $h \in U(0) \subset E$.

Определение 3.1.4. Симметрический субдифференциал отображения f в точке x по направлению h есть следующий субпредел (если он существует):

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x, h) = \operatorname*{sublim}_{t \to +0} \frac{f(x + th) - f(x - th)}{2t}. \tag{13}$$

Определение 3.1.6. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и s–субдифференцируемо в точке x по заданному направлению $h \in U(0) \subset E$. Скажем, что f *слабо симметрически субдифференцируемо* в точке x в том случае, когда s–субдифференциал $\partial_{sub}^{[\prime]} f(x, h) : E \to F_K$ s–сублинеен по h.

Определение 3.1.7. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и слабо s–субдифференцируемо в точке x. Будем говорить, что f *s–субдифференцируемо по Гато* в точке x, если слабый s–субдифференциал $\partial_{sub}^{[\prime]} f(x)$ непрерывен в нуле или, что равносильно, ограничен по норме.

Определение 3.1.8. Если отображение f s–субдифференцируемо по Гато в точке x, причем сходимость в субпределе (13) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$, то s–оператор $\partial_{sub}^{[\prime]} f(x)$ назовем симметрическим субдифференциалом Фреше или сильным s–субдифференциалом f в точке x.

Имеет место следующая теорема о среднем для s–субдифференцируемых отображений векторного аргумента. Заметим, что далее под абсолютной непрерывностью отображения $f : E \supset [x; x + h] \to F$ мы понимаем абсолютную непрерывность композиции $f(x + th)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема 3.1.24. Пусть отображение $f : E \supset [x; x+h] \to F$ абсолютно непрерывно на $[x; x+h]$ и симметрически субдифференцируемо на $(x; x+h)$. Тогда выполняется оценка:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1} \partial_{sub}^{[\prime]} f(x+\theta h) \Big) \cdot h. \tag{14}$$

Так как в симметрическом случае определение высших субдифференциалов не носит индуктивный характер, то общая схема их определения в разделе 3.2 сходна со схемой определения симметрического субдифференциала первого порядка. Поскольку мы отправляемся здесь от конечных разностей высших порядков, операторной базой служит теория субстепенных s–операторов.

Определение 3.2.1. Отображение $A : E \to F_K$ будем называть *субстепенным s–оператором n-го порядка*, если A порождается некоторым n–сублинейным симметрическим s–оператором $\widetilde{A} : \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n} \to F_K$:

$$A(h) := \widetilde{A}(h)^n. \tag{15}$$

В частности, $A(\lambda h) = \lambda^n \cdot A(h)$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 3.2.3. Назовем *s–субдифференциалом n-го порядка по направлению h* следующий субпредел:

$$\partial_{sub}^{[n]} f(x,h) = \operatorname*{sublim}_{t\to+0} \Big(\frac{1}{(2t)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)th\big) \Big). \tag{16}$$

Если $\partial_{sub}^{[n]} f(x,h)$ существует по любому направлению $h \in E$ и является субстепенным s–оператором n-го порядка, то будем говорить, что f *слабо s–субдифференцируемо n раз* в точке x и примем обозначение $\partial_{sub}^{[n]} f(x)(h)$.

Построенный аппарат высших s–субдифференциалов Фреше позволяет перенести на случай банаховых пространств асимптотическую форму формулы Тейлора.

Теорема 3.2.4. Предположим, что существует $\partial_{sub}^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x)$ и отображение $f(x)$ радиально сильно абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$. Тогда имеет место включение:

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(h)^k \in \frac{1}{n!} \overline{co}\, \partial_{sub}^{[n]} f\big((x; x+h)\big) \cdot (h) + o(\|h\|^n). \tag{17}$$

В работе получено точное описание высших s–субдифференциалов от функционалов (подраздел 3.2.2). Важным моментом является также введение понятия симметрической субгладкости (как первого, так и высших порядков) (подраздел 3.2.3).

Назовем функционал f симметрически субгладким в точке $x \in E$ ($f \in C_{sub}^{[\prime]}(x)$), если его верхние симметрические производные первого порядка по всем направлениям полунепрерывны в данной точке сверху, а нижние — соответственно, снизу. Аналогично определяется симметрическая субгладкость высших порядков ($f \in C_{sub}^{[n]}(x)$).

В разделе 3.3 построенный выше аппарат s–субдифференциального исчисления применяется к оценке первой субвариации одномерного вариационного функционала.

Рассмотрим одномерный вариационный функционал вида:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (y \in C^1[a;b], u = f(x, y, z)). \tag{18}$$

Теорема 3.3.1. Пусть интегрант f является $C^{[\prime]}$–субгладким: $f \in C^{[\prime]}_{sub}(\mathbb{R}^3)$ для вариационного функционала (18). В этом случае Φ сильно s–субдифференцируем везде в $C^1[a;b]$, при этом имеет место оценка:

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y}}(x, y, y')h + \underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial z}}(x, y, y')h'\right) dx;\right.$$

$$\left.\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial y}}(x, y, y')h + \overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial z}}(x, y, y')h'\right) dx\right] \qquad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{19}$$

Четвертая глава диссертационной работы посвящена рассмотрению некоторых приложений симметрических субдифференциалов в гармоническом анализе, теории вероятностей и в теории экстремальных задач.

В разделе 4.1 рассмотрено обобщение классического метода Римана суммирования тригонометрических рядов и связанные с этим вопросы. Как известно, метод Римана сводится к повторному почленному интегрированию данного ряда и последующему вычислению второй симметрической производной от полученной суммы (функции Римана).

Наше обобщение состоит в замене второй симметрической производной от функции Римана на симметрический субдифференциал второго порядка. Тем самым, мы приходим к многозначной, вообще говоря, обобщенной сумме ряда в данной точке. Построенный метод позволил обобщить в данном направлении также и классические теоремы Кантора и Шварца о единственности разложения функции в тригонометрический ряд (теоремы 4.1.3 и 4.1.12). Построены примеры, демонстрирующие эффективность предложенной методики.

Рассмотрим вещественный случай $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Теорема 4.1.3. [S–теорема Шварца] Если функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $\partial^{[\prime\prime]}_{sub}$–субдифференцируема на $(a;b)$ и выполнено включение $0 \in \partial^{[\prime\prime]}_{sub}F(x)$ при $a < x < b$, то $F(x)$ — линейная функция:

$$F(x) = Ax + B \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{20}$$

Посредством перехода в конструкции классического метода Римана от обычной второй симметрической производной к соответствующему симметрическому субдифференциалу вводится понятие S–метода Римана суммирования тригонометрических рядов.

Рассмотрим тригонометрический ряд с ограниченными коэффициентами

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{21}$$

Интегрируя его почленно два раза, получим абсолютно и равномерно сходящийся ряд. Обозначим через $F(x)$ его сумму. Это непрерывная функция, которая называется *функцией Римана* для тригонометрического ряда (21):

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Допустим, что в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет вторую симметрическую производную $F^{[\prime\prime]}(x_0)$. Тогда ряд (21) *суммируем* в точке x_0 *методом Римана* и его римановская сумма равна $F^{[\prime\prime]}(x_0)$.

Определение 4.1.6. Если в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет второй s–субдифференциал $\partial_{sub}^{[\prime\prime]} F(x_0)$, то будем говорить, что тригонометрический ряд (21) суммируем в точке x_0 *S–методом Римана* и его S–сумма есть *множество* $\partial_{sub}^{[\prime\prime]} F(x_0)$.

Рассмотрим аналог теоремы Кантора для S–метода Римана, в котором ослабленное условие Шварца заменяется еще более слабым условием:

$$\varliminf_{h\to+0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h} \leqslant 0 \leqslant \varlimsup_{h\to+0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h}, \tag{22}$$

при исключении условия стремления к нулю коэффициентов тригонометрического ряда.

Теорема 4.1.12. [S–теорема Кантора] Если тригонометрический ряд (21) с ограниченными коэффициентами (где необязательно $a_n, b_n \to 0$) суммируется к нулю S–методом Римана всюду, кроме конечного числа точек $x_1, \ldots, x_n$, в которых выполняется ослабленное S–условие Шварца (22), то $a_n = b_n = 0$.

В разделе 4.2 исследуется возможность применения симметрических дифференцируемых и субдифференцируемых характеристик к негладким распределениям вероятностей случайной величины. Как известно, классическая теория вероятностей широко использует понятия асимметрии и эксцесса случайной величины (skewness), в основном, с «одновершинной» плотностью распределения. Однако, в негладком случае с этой целью предпочтительнее ввести локальные характеристики, описывающие «скос» и «островершинность» распределения вблизи точки максимума.

Предлагаемый нами метод опирается на введенные ниже понятия локальной асимметрии и локального эксцесса плотности распределения в точке максимума (определение 4.2.2). При наличии соответствующей симметрической дифференцируемости, эти характеристики выражаются через симметрические производные первого либо второго порядка, соответственно (теорема 4.2.3).

Определение 4.2.2. Назовем *локальной асимметрией* $f(x)$ в точке x_0 величину:

$$Af(x_0) = \lim_{h\to+0} \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{f(x)dx}{x - x_0} \right) \tag{23}$$

и *локальным эксцессом* $f(x)$ в точке x_0 величину:

$$Ef(x_0) = \lim_{h\to+0} \left(\frac{1}{2h} \int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} dx \right), \tag{24}$$

в предположении сходимости соответствующих интегралов (23) и (24).

Теорема 4.2.3. 1) Если f симметрически дифференцируема в точке x_0, то

$$Af(x_0) = \partial^{[\prime]} f(x_0). \tag{25}$$

2) Если f дважды симметрически дифференцируема в точке x_0, то

$$Ef(x_0) = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(x_0). \tag{26}$$

В случае набора случайных величин (случайного вектора), мы вводим понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению. Это позволяет поставить также вопрос о поиске оптимального направления, минимизирующего (по модулю) локальную асимметрию, либо локальный эксцесс.

Определение 4.2.5. Назовем *локальной асимметрией* f *по направлению* h в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ величину

$$Af(x_0)h = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{f(x_0+\tau h)d\tau}{\tau}\right) \tag{27}$$

и *локальным эксцессом* f *по направлению* h в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ величину

$$Ef(x_0)(h)^2 = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{f(x_0+\tau h)-f(x_0)}{\tau^2}d\tau\right), \tag{28}$$

если соответствующие интегралы сходятся.

Из теоремы 4.2.3 легко вытекает связь характеристик (27) – (28) с соответствующими симметрическими дифференциалами, в случае их существования.

Теорема 4.2.6. 1) Если f симметрически дифференцируема в точке x_0 по направлению h, то

$$Af(x_0)h = \partial^{[\prime]} f(x_0)h.$$

2) Если f дважды симметрически дифференцируема по направлению h в точке x_0, то

$$Ef(x_0)(h)^2 = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(x_0)(h)^2.$$

В разделе 4.2.3 мы обобщаем понятия локальной асимметрии и локального эксцесса на общий случай функционала в банаховом пространстве, достигающего локального экстремума в заданной точке (определение 4.2.8). Здесь вопрос о выборе оптимального направления, вдоль которого минимизируются, соответственно, локальная асимметрия либо локальный эксцесс, выступает на первый план. Представляется, что такая задача (актуальная в негладком случае) в идейном плане близка к другим известным классам экстремальных задач, связанных с поиском оптимального направления в уже найденной точке экстремума. Отметим, в этой связи, также известные классы задач, как «задача наискорейшего спуска», «овражный метод Гельфанда».

Определение 4.2.8. Назовем *локальной асимметрией* функционала Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$A\Phi(y)h = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right), \tag{29}$$

а *локальным эксцессом* функционала Φ в точке y по направлению h предел:

$$E\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau\right), \tag{30}$$

в предположении, что пределы (29) и (30) существуют.

В работе рассмотрен ряд примеров *вариационных функционалов* с негладким интегрантом, для которых исследована данная задача.

Наконец, в заключительном пункте 4.2.4, мы вводим многозначные обобщения изложенных выше понятий, а именно — локальную суб–асимметрию и локальный суб–эксцесс (определение 4.2.15). Эти понятия тесно связаны с соответствующими симметрическими субдифференциалами (теорема 4.2.16).

Определение 4.2.15. Назовем *локальной суб–асимметрией* функционала Φ в точке y по произвольному направлению h следующий субпредел (при условии, что он существует):

$$A_{sub}\Phi(y,h) = \operatorname*{sublim}_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right).$$

Соответственно, назовем *локальным суб–эксцессом* функционала Φ в точке y по произвольному направлению h следующий субпредел (при условии, что он существует):

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \operatorname*{sublim}_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau\right).$$

Из определения 4.2.15 и предыдущих результатов вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2.16. Если величины $\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)$, $\overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)$ конечны, то справедлива оценка:

$$A_{sub}\Phi(y,h) \subset [\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h); \overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)].$$

Если величины $\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2$, $\overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2$ конечны, то справедлива оценка:

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \frac{1}{2}[\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2; \overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2].$$

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Доказан ряд новых свойств классических симметрических производных, вплоть до теоремы о среднем и формулы Тейлора. Представлена взаимосвязь полученных результатов со свойствами обобщенных симметрических производных Валле-Пуссена.

2. Построены основы теории симметрических дифференциалов первого и высших порядков в банаховых пространствах.

3. Построены основы теории симметрических субдифференциалов первого и высших порядков для отображений в банаховых пространствах. Доказана теорема о среднем и получена формула Тейлора для s–субдифференцируемых отображений. Получены критерии симметрической субдифференцируемости и оценки симметрических вариаций и субвариаций первого и высших порядков для одномерного вариационного функционала.

4. На случай симметрических субдифференциалов обобщен классический метод Римана суммирования тригонометрических рядов.

5. Рассмотрено применение симметрических характеристик к негладким распределениям вероятностей случайных величин.

6. Сформулирована и рассмотрена на примерах общая экстремальная задача поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Баран И. В.* Симметрические компактные субдифференциалы первого порядка / И. В. Баран // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского, серия «Физико-математические науки». – 2013. – Т. 26 (65), № 1. – С. 18 – 33.

2. *Баран И. В.* Симметрические компактные субдифференциалы второго порядка и их применение к рядам Фурье / И. В. Баран // Динамические системы. – 2013. – Т. 3(31), № 3-4. – С. 201 – 214.

3. *Баран И. В.* Теорема о среднем и формула Тейлора для симметрических производных и симметрических K-субдифференциалов / И. В. Баран // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского, серия «Физико-математические науки». – 2014. – Т. 27 (66), № 1. – С. 3 – 20.

4. *Баран И. В.* Введение в сублинейный анализ – 2: симметрический вариант / И. В. Орлов, И. В. Баран // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2015. – Т. 57. – С. 108 – 161 (англ. версия: Baran I. V. Introduction to Sublinear Analysis — 2: Symmetric Case / I. V. Orlov, I. V. Baran // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Volume 225, Issue 2. – P. 265 – 321).

5. *Баран И. В.* Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума / И. В. Баран // Динамические системы. – 2016. – Т. 6(34), № 4. – С. 337 – 354.

6. *Baran I. V.* Adjoint Extremal Problem for Non-Smooth Functionals / I. V. Baran, I. V. Orlov // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA). – 2017. – P. 23 – 26.

7. *Баран И. В.* Симметрические компактные субдифференциалы первого и второго порядков и их приложения / И. В. Баран // VIII международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», 17 – 28 апреля 2013, Харьков, Украина. – С. 60.

8. *Baran I. V.* Symmetric subdifferentials and their applications to Fourier series / I. Baran // International Conference Analysis and mathematical physics, 24-28 June 2013, Kharkiv, Ukraine. – P. 20.

9. *Баран И. В.* Симметрические компактные субдифференциалы и их приложения в гармоническом анализе / И. В. Баран // Крымская международная математическая конференция «КММК-2013», 22 сентября – 4 октября 2013, Судак, Украина. – С. 4.

10. *Баран И. В.* Теорема о среднем и формула Тейлора для симметрических производных и симметрических K–субдифференциалов / И. В. Баран // XXV Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2014», 21 – 30 сентября 2014, Судак, Россия. – С. 64.

11. *Баран И. В.* Симметрические субдифференциалы Фреше и их приложения / И. В. Баран // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V», ISBN: 978-5-7890-1013-6, 26 апреля – 1 мая 2015, Ростов-на-Дону, Россия. – С. 18.

12. *Баран И. В.* Симметризация сублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями / И. В. Баран // Закономерности и тенденции развития

науки в современном обществе: сборник статей Международной научно-практической конференции, 5 декабря 2015, Уфа, Россия. – С. 3 – 4.

13. *Баран И. В.* Симметрические характеристики и сопряженная экстремальная задача / И. В. Баран // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI», ISBN: 978-5-9908135-0-2, 24 – 29 апреля 2016, Ростов-на-Дону, Россия. – С. 13.

14. *Баран И. В.* Симметрический компактный субдифференциал основного вариационного функционала / И. В. Баран // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы, 27 января – 3 февраля 2016, Саратов, Россия. – С. 51 – 54.

15. *Баран И. В.* Сопряженная экстремальная задача для негладких функционалов / И. В. Баран // Международная научная конференция «Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова, 22 мая – 27 мая 2017, Сенкт-Петербург, Россия. – С. 51 – 54.