На правах рукописи

Высоцкая Ирина Алевтиновна

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет» на кафедре системного анализа и управления факультета прикладной математики, информатики и механики.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Баскаков Анатолий Григорьевич.

Официальные оппоненты:

Шульман Виктор Семенович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный
университет», г. Вологда,
профессор кафедры математики

Гиль Алексей Викторович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Южный федеральный
университет», г. Ростов-на-Дону,
доцент кафедры дифференциальных и
интегральных уравнений

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского», г. Симферополь.

Защита состоится 15 мая 2019 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Южном федеральном университете по адресу: г. Ростов-на-Дону, улица Мильчакова, 8а, ауд. 211.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов–на–Дону, ул. Р. Зорге, 21–ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу: http://hub.sfedu.ru/media/diss/61258c68-6df9-4494-973e-57b2404c55dc/Диссертация_Высоцкая.pdf

Автореферат разослан « » ____________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.208.29 Кряквин В. Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В диссертации вводится и исследуется ранее не изученный класс почти периодических на бесконечности функций. Классические почти периодические функции принадлежат новому рассматриваемому классу. Целесообразность рассмотрения почти периодических на бесконечности функций обусловлена тем, что решения некоторых важных классов дифференциальных и разностных уравнений являются почти периодическими на бесконечности. В частности, в диссертации рассматриваются дифференциальные и разностные уравнения с правой частью из нового подпространства исчезающих на бесконечности функций. Для исследования нового класса почти периодических на бесконечности функций будет использоваться спектральная теория операторов в банаховых пространствах.

Общепризнанно, что создателем теории почти периодических функций является датский математик Гаральд Бор. Первые работы в этом направлении были выполнены им еще до первой мировой войны. Созданная Г. Бором теория получила значимое продвижение в работах С. Бохнера[1], Г. Вейля, А. Безиковича[2], Ж. Фавара[3], Дж. Неймана[4], Б. М. Левитана[5]. В частности, почти периодические функции стали источником развития гармонического анализа функций на группах. В 30-х годах XX века американский математик С. Бохнер обобщил теорию почти периодических функций на случай абстрактных функций в банаховых пространствах. Он ввел новое понятие почти периодической функции, связанное с критерием компактности почти периодичности сдвигов функции, которое позволило использовать методы функционального анализа.

В 2013 новый класс почти периодических на бесконечности функций был впервые введен А. Г. Баскаковым,[6] теория которых получила дальнейшее развитие в его исследованиях.

[1]Bochner S. Beit trage zur Theorie der fastperiodischen Functionen / S. Bohner // Teil. Math. Ann.–1926. – Vol. 96. – P.119–147.

[2]Besicovitch A.S. Almost periodic function / A.S. Besicovitch // Cambridge university press. – 1932. – 253 p.

[3]Favard J. Sur les equations differentielles a coefficients presque-periodiques / J. Favard // Acta Math. – 1927. – Vol. 51. – P. 31–81.

[4]Нейман Дж. фон Избранные труды по функциональному анализу. В двух томах. Том 1. / Дж. фон Нейман. – М.: Наука, 1987. – 377 с.

[5]Левитан Б. М. Почти периодические функции / Б. М. Левитан. М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

[6]Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. – 2013. – Т. 68. – № 1(409). – С. 77–128.

Далее возник вопрос о расширении нового класса почти периодических на бесконечности функций. Любой новый класс почти периодических функций можно определить с помощью аппроксимационной теоремы. В классическом варианте это равномерные замыкания тригонометрических многочленов. В нашем случае коэффициентами Фурье являются медленно меняющиеся на бесконечности функции. В данной диссертационной работе класс медленно меняющихся функций существенно расширен и, таким образом, получен новый, ранее не рассматриваемый, класс почти периодических на бесконечности функций.

Таким образом, тема диссертации является актуальной.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью является изучение ранее не рассматриваемого класса почти периодических на бесконечности функций, который вводится в рассмотрение относительно нового семейства исчезающих (в том или ином смысле) на бесконечности функций и с использованием подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций, и применения этого класса к исследованию дифференциальных и разностных уравнений. Этот класс является более широким по сравнению с классом почти периодических на бесконечности функций, введенным в работах А. Г. Баскакова[6–7] (относительно подпространства исчезающих на бесконечности функций). В частности, в диссертации исследуются ограниченные решения дифференциальных и разностных уравнения с правой частью из нового подпространства исчезающих на бесконечности функций. Задачи работы состоят в доказательстве эквивалентности нескольких определений почти периодической на бесконечности функции, получение критериев почти периодичности на бесконечности ограниченных решений обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений и получение спектральных критериев почти периодичности на бесконечности ограниченных решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

Методы исследования. Исследование ведется с использованием методов гармонического анализа и функционального анализа. Эти методы являются основными при исследовании изучаемых в диссертации классов функций. Также применяется теория функций и теория представлений изометрических полугрупп линейных операторов.

[7] Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces / A. G. Baskakov // Math. Notes. – 2015. – T. 97. – № 2. – C. 164–178.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. В работе вводится в рассмотрение семейство пространств исчезающих на бесконечности функций из банахова пространства непрерывных ограниченных на промежутке $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ функций. Проведенные исследования касаются изучения функций из пространства почти периодических на бесконечности функций, которое является расширением класса почти периодических функций. Кроме того, в работе введены классы медленно меняющихся на бесконечности функций и получены структурные теоремы для таких классов функций.

Важно отметить, что данные классы функций нашли приложения в исследованиях свойств некоторых классов дифференциальных и разностных уравнений. В работе получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных разностных и дифференциальных уравнений с правой частью из нового подпространства исчезающих на бесконечности функций и асимптотическое представление этих решений.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. Теорема об эквивалентности четырех определений почти периодических на бесконечности функций, введенных в диссертации по соответствующему подпространству исчезающих на бесконечности функций.

2. Спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных разностных и дифференциальных уравнений и их асимптотическое представление.

3. Спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве.

4. Спектральные критерии принадлежности ограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными операторными коэффициентами к классу почти периодических на бесконечности функций.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы в гармоническом анализе и спектральной теории линейных операторов. Кроме того, полученные приложения могут быть использованы при исследования методов решений некоторых классов интегральных, разностных и дифференциальных уравнений. Также результаты могут быть применены при описании асимптотического поведения динамических систем.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Воронежских зимних математических школах С. Г. Крейна 2014, 2016, 2018, на Крымской осенней математической школе 2012, на Крымской международной математической конференции 2013, на математическом интернет-семинаре ISEM-2014 (Германия, Блаубойрен), на международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" 2016, 2017 (Воронеж), на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения – XXVII" 2016, на семинарах А. Г. Баскакова, а также на научных сессиях ВГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-17]. Работы [1, 7, 8, 16, 17] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, а также публикация [1] индексируются в базах данных Scopus и Web of Science. Из совместных работ [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Работа [1] вышла в соавторстве с научным руководителем А. Г. Баскаковым. В работе [1] профессору А. Г. Баскакову принадлежит общий план исследования и постановка задачи, а соавтору И. И. Струковой принадлежит раздел 4.

В совместной работе [3] соискателю принадлежат Лемма 1 и Теорема 2 и Теорема 1, а соавтору А. А. Рыжковой – Лемма 2 и Лемма 3.

В статье [4] раздел 1 принадлежит Рыжковой А. А., а соискателю раздел 2.

В работе [5] соискателю принадлежит Теорема 2, а соавтору Теорема 1.

Теорема 1 в работе [6] принадлежит А. А. Рыжковой, а Теорема 2 – соискателю.

В статье [7] Теорема 3 и Лемма 1 принадлежат соискателю, Теорема 1 и Теорема 2 – соавтору А. А. Рыжковой.

В работе [8] Теорема 1 принадлежит А. А. Рыжковой, а Теорема 2 и Теорема 3 – соискателю.

В совместной работе [9] Лемма 1 принадлежит А. А. Рыжковой, а Теорема 1 – И. А. Высоцкой.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографии, включающей 95 наименования. Общий объем диссертации 114 страниц.

Содержание диссертации

Во введении излагается история вопроса, описывается структура диссертации, цели и задачи работы. Приводится короткий обзор работы по главам и разделам.

В первой главе рассматриваются почти периодические на бесконечности функции, определенные на $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X.

Пусть $C_b(\mathbb{J}, X)$ – банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X.

Замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных функций обозначим через $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Через $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, исчезающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

В пространстве $C_b(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим операторы сдвига $S(t) : C_b(\mathbb{J}, X) \to C_b(\mathbb{J}, X)$, $(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)$, $\tau \in \mathbb{J}$, $t \in \mathbb{J}$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

Определение 1.9. Функцию x из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ назовем *интегрально убывающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\, ds = 0.$$

Множество интегрально убывающих на бесконечности функций будем обозначать символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

В частности, к таким подпространствам относится семейство замкнутых в $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ подпространств

$$C_{0,p} = C_{0,p}(\mathbb{J}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|^p\, ds = 0\},$$

где $p \in [1, \infty)$. Таким образом, $C_{0,1} = C_{0,int}$ — подпространство интегрально убывающих на бесконечности функций.

Определение 1.10. Далее символом $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим любое замкнутое (с нормой из $C_{b,u}$) подпространство функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, обладающих свойствами:

1) $S(t)x \in \mathcal{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{J}$ и любой функции $x \in \mathcal{C}_0$;

2) $C_0 \subset \mathcal{C}_0 \subset C_{0,int}$;

3) $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.1. *$C_{0,int}$ – банахово пространство.*

Во всех рассматриваемых подпространствах из $C_b(\mathbb{J}, X)$ символ X опускается, если $X = \mathbb{C}$ (например, $C_{b,u}(\mathbb{J}) = C_{b,u}(\mathbb{J}, \mathbb{C})$).

Определение 1.11. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности функцией относительно подпространства* $\mathcal{C}_0$, если для каждого $\alpha \in \mathbb{J}$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0$.

Отметим, что А. Г. Баскаков[8] давал определение медленно меняющейся функции с использованием подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$. Свойства медленно меняющихся функций относительно подпространства C_0 также изучались в работах [7, 8, 11, 17].

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $C_{0,int}$ будем обозначать через $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$, а через $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$ – относительно подпространства C_0. Из определения следует, что $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантным относительно сдвигов функций. Символом $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$ будем обозначать подпространство обладающее свойством $C_{sl}(\mathbb{J}, X) \subset \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}, X) \subset C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$.

Определение 1.12. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$* на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если существует функция $x_0 \in \mathcal{C}_0$ такая, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε-периодов функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ обозначим через $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$.

[8] Баскаков А. Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А.Г. Баскаков, Н.С. Калужина// Матем. заметки. – 2012. – Т. 92. – № 5. – С. 643–661.

Если $\mathcal{C}_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$, то определение ε-периода функции из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно $\mathcal{C}_0$ эквивалентно следующему определению.

Определение 1.13. Пусть $\varepsilon > 0$.Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом функции* $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$, если существует число $\alpha(\varepsilon) \geq 0$ такое, что

$$\sup_{|t| \geq \alpha(\varepsilon)} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Определение 1.14. Подмножество Ω из $\mathbb{R}$ называется *относительно плотным на* $\mathbb{J}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \varnothing$,для любого $t \in \mathbb{J}$.

Определение 1.15 (аналог классического определения Бора). Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{J}$.

Из определения 1.15 следует, что каждая непрерывная функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, почти периодическая по Бору (в обычном смысле), является почти периодической на бесконечности относительно любого подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций.

Множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$.

Определение 1.16. Множество функций $\mathcal{M} \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *предкомпактным на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $b_1, \ldots, b_N$ (ε-сеть на бесконечности) из $\mathcal{M}$ таких, что для любой функции $x \in \mathcal{M}$ существует функция $b_k, k \in \{1, \ldots, N\}$, и функция $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{C}_0$, для которых имеет место оценка

$$\|x - b_k - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Определение 1.17 (аналог определения Бохнера). Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0 = = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если множество ее сдвигов $S(t)x$, $t \in \mathbb{J}$, является предкомпактным на бесконечности множеством относительно подпространства $\mathcal{C}_0$.

Заметим, что функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad x_1, \dots, x_N \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R},$$

(обобщенные тригонометрические полиномы) почти периодичны на бесконечности в смысле определения 1.18.

Определение 1.18 (аппроксимационное). Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функции $x_1, \dots, x_N$ из пространства $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$ медленно меняющихся на бесконечности функций таких, что

$$\sup_{t \in \mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

В работе систематически будет использоваться понятие банахова модуля (банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля[9]) над алгеброй суммируемых на $\mathbb{R}$ классов комплексных функций с нормой

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),$$

где в роли мультипликативной операции выступает свертка функций

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Пусть X – банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль и $T : \mathbb{R} \to EndX$ – изометрическое представление. Будем говорить что модульная структура X ассоциирована с представлением T, если имеют место равенства

$$T(t)(fx) = (S(t)f)x = fT(t)x, \quad t \in \mathbb{R},$$

и

$$f(gx) = (f * g)x = (g * f)x,$$

[9]Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // Функциональный анализ, СМФН. МАИ М. – 2004. – Т. 9. – С. 3–151.

для любых f, g из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любого вектора $x \in X$.

Обозначим символом $\mathcal{X}$ фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$.

В фактор-пространстве $\mathcal{X}$ определим сильно непрерывную группу изометрий $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\, X$, наделенную структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля.

Определение 1.21. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций, если класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathcal{C}_0$ является почти периодическим вектором в пространстве $\mathcal{X}$ относительно изометрического представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\, X$.

Следующая теорема является одним из основных результатов диссертации.

Теорема 1.7. *Все определения почти периодической на бесконечности функции (определения 1.15, 1.17, 1.18, 1.21) эквивалентны.*

Наряду с определениями почти периодичности на бесконечности, которые даются для непрерывных функций, приводятся соответствующие определения для функций из однородных пространств (аналог определения Бора и аппроксимационное) и доказывается их эквивалентность.

Во второй главе в первом параграфе рассматривается разностное уравнение вида

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $A \in EndX$.

Лемма 2.1. Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (2.1), где спектральный радиус $r(A) < 1$, принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, единственно и имеет вид

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n-1)f, f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X). \tag{2.2}$$

Лемма 2.2. Пусть оператор A из уравнения (2.1) обратим и $r(A^{-1}) < 1$. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (2.1) принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, единственно и имеет вид

$$x_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} S(n)f, f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X). \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. Пусть для $A \in EndX$ выполнено условие $\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2 ..., \gamma_m\}$, где $\gamma_k = e^{i\lambda_k}, 0 \leq k \leq N$ и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Если существует равномерно непрерывное ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (2.1), то оно является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$ и имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i(t) e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

где $x_i \in C_{sl,\mathcal{C}_0}, 0 \leq i \leq n$.

Во втором параграфе второй главы рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = \psi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный ограниченный оператор с областью определения $D(A)$.

Доказательство почти периодичности решения дифференциального уравнения (2.10) проводится как в конечномерном пространстве, так и в бесконечномерном.

Вначале рассмотрим дифференциальное уравнение (2.10), где $\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Справедлива следующая

Теорема 2.2. *Пусть для оператора $A \in EndX$ выполнено условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) == \{i\lambda_0, i\lambda_2 ..., i\lambda_N\}$, где $i\lambda_0, ..., i\lambda_N$ – полупростые собственные значения оператора A, являющиеся изолированными точками спектра. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (2.10) является почти периодической на бесконечности функцией класса $AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$, которая допускает представление вида*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} y_k(t) e^{i\lambda_k t} + z_0(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $y_k \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X), z_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Введем понятие спектра Берлинга.

Определение 1.8. *Спектром Берлинга вектора x* из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) называется следующее множество

$$\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для всех } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ таких, что } \widehat{f}(\lambda) \neq 0\},$$

которое является дополнением

$$\mathbb{R}\backslash\{\lambda \in \mathbb{R}: \text{ существует } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ со свойством } \widehat{f}(\lambda) \neq 0 : fx = 0\}.$$

Определение 1.22. Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ и $\widetilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$. Множество $\Lambda(\widetilde{x})$ называется *спектром функции x на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций и будем обозначать символом $\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0)$.

Пусть далее $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный оператор с областью определения $D(A)$, который является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U : \mathbb{R}_+ \to End\, X$.

Определение 2.1. Непрерывная функция $x : \mathbb{J} \to X$ называется *слабым решением* дифференциального уравнения (2.10), если имеют место равенства

$$x(t) = U(t-s)x(s) + \int_s^t U(t-\tau)\psi(\tau)\, d\tau,$$

для всех $s, t \in \mathbb{J}$, $s \leq t$.

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение (2.10), где $\psi \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 2.6. *Для каждого слабого решения $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ дифференциального уравнения (2.10) с функцией $\psi \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ имеет место следующее включение*

$$\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0) \subset (i^{-1}\sigma(A) \cap \mathbb{R}) \cup \Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0).$$

Получение критерия почти периодичности на бесконечности ограниченных решений дифференциального уравнения (2.10) с почти периодической на бесконечности функцией ψ основывается на описании спектра Берлинга ограниченного решения этого уравнения и использовании критерия почти периодичности вектора.

Теорема 2.7. *Пусть функция ψ из уравнения (2.10) почти периодична на бесконечности ($\psi \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$) и множество*

$$((i^{-1}\sigma(A)) \cap \mathbb{R}) \cup \Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0)$$

не имеет предельных точек на $\mathbb{R}$. Тогда каждое ограниченное слабое решение x дифференциального уравнения (2.10) является почти периодическим на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций.

В пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t) + B_1\dot{x}(t) + B_2x(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

где $B_1, B_2 \in EndX$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Это уравнение запишем в виде $Lx = \varphi$, где дифференциальный оператор второго порядка $L : D(L) \subset C_b(\mathbb{R}, X) \to C_b(\mathbb{R}, X)$ действует по правилу

$$Lx = \ddot{x} + B_1\dot{x} + B_2x, \quad x \in D(L),$$

здесь $D(L) = C_b^2(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{y} + \mathcal{B}y = f, \quad f = (f_1, f_2) \in C_b(\mathbb{R}, X^2) = C_b(\mathbb{R}, X) \times C_b(\mathbb{R}, X), \tag{2.19}$$

где оператор $\mathcal{B} \in EndX^2$ определяется матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ B_2 & B_1 \end{smallmatrix}\right)$, т.е. $\mathcal{B}(y_1, y_2) =$ $= (-y_2, B_2y_1 + B_1y_2)$ для $(y_1, y_2) \in X^2$.

Нетрудно показать, что дифференциальное уравнение (2.18) переходит в дифференциальное уравнение первого порядка (2.19) если $f = (0, \varphi)$.

Каждое ограниченное решение уравнения (2.18) является ограниченным решением уравнения (2.19). При этом решение $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ уравнения (2.18) и решение $y = (y_1, y_2) \in C_b(\mathbb{R}, X^2)$ связаны соотношением $x = y_1$, $\dot{x} = y_2$. Введем в рассмотрение характеристической многочлен (пучок операторов) для дифференциального уравнения (2.18)

$$H(\lambda) = \lambda^2 I + B_1\lambda + B_1, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Спектром $S(H)$ операторного пучка H называется множество

$$S(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{оператор } H(\lambda) \text{ не обратим в алгебре } EndX\}.$$

Теорема 3.10. *Пусть $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $S(H) \cap \mathbb{R} = \{\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_N\}$ – конечное множество. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R}_+ \to X$ дифференциального уравнения (2.18) является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$ и имеет место представление*

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_{k=1}^{m} e^{i\lambda_k t}\mathbb{P}_k(t)(x(0), \dot{x}(0)),$$

где $\mathbb{P}_k : \mathbb{R}_+ \to EndX^2$, $\mathbb{P}_k \in C_b(\mathbb{R}_+, EndX^2)$.

Функции $\mathbb{P}_k, 1 \le k \le m$, обладают свойствами:

1) $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathcal{B}\mathbb{P}_k(t) - i\lambda\mathbb{P}_k(t)\| = 0, 1 \le k \le m$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbb{P}_k(t)\mathbb{P}_j(t)\| = 0, k \ne j, 1 \le k, j \le m$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbb{P}_k^2(t) - \mathbb{P}_k(t)\| = 0, 1 \le k \le m$;

4) $\lim\limits_{t\to\infty} \left\| \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbb{P}_k(t) - \mathbb{I} \right\| = 0.$

5) функции $\mathbb{P}_k(t), t \ge 0, 1 \le k \le m$, допускают расширение на $\mathbb{C}$ до целых функций экспоненциального типа с производной такой, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|\dot{\mathbb{P}}_k(t)\| = 0$, $1 \le k \le m$.

Заключение

В результате проведенного в работе исследования установлены следующие результаты:

1. В диссертации введено в рассмотрение семейство пространств исчезающих на бесконечности функций из банахова пространства непрерывных ограниченных на промежутке $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ функций. По соответствующему выбранному подпространству исчезающих на бесконечности функций даются четыре определения почти периодической на бесконечности функции и установлена их эквивалентность.

2. Получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных разностных и дифференциальных уравнений с правой частью из нового подпространства исчезающих на бесконечности функций и их асимптотическое представление. Обычно рассматривались различные классы уравнений с почти периодическими коэффициентами и почти периодической правой частью (в смысле Бора).

3. Получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве. Получение критерия основывается на описании спектра Берлинга ограниченного решения этого уравнения и использовании критерия почти периодичности вектора.

4. Для дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными операторными коэффициентами получены спектральные критерии принадлежности их ограниченных решений к классу почти периодических на бесконечности функций.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] Баскаков А. Г. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, И. И. Струкова, И. А. Тришина // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59. – № 2. – С. 293–308.

[2] Высоцкая И. А. Почти периодические на бесонечности функции как решения дифференциальных уравнений / И. А. Высоцкая //Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2018. Материалы международной конференции. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2018. – С. 183–186.

[3] Высоцкая И. А. Гармонический и спектральный анализ почти периодических на бесонечности последовательностей / И. А. Высоцкая, А. А. Рыжкова // Сборник трудов международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". – Воронеж: Издательский дом ВГУ. – 2017. – С. 57–61.

[4] Рыжкова А. А. On the spectral analysis of periodic sequences at infinity / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Двадцать третья Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум. – 2013. – Вып. 23. – С. 180 –183.

[5] Рыжкова А. А. О периодических на бесконечности последовательностях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Крымская Международная Математическая Конференция. Сборник тезисов. – 2013. – Т. 1. – С. 65–66.

[6] Рыжкова А. А. Периодические на бесконечности последовательности и их применение к разностным уравнениям / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна 2014. Материалы международной конференции. – Воронеж, 2014. – С. 277–279.

[7] Рыжкова А. А. О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15. – № 1. – С. 45-49.

[8] Рыжкова А. А. О периодических на бесконечности функциях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2014. – Т. 36. – № 19. – С. 71-75.

[9] Рыжкова А. А. О почти периодических на бесконечности функциях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Материалы международной конференции ВЗМШ Г. Крейна. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга" , 2016. – С. 330–333.

[10] Тришина И. А. Теорема о среднем для почти периодчиеской функции / И. А. Тришина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – Т. 12. – С. 228–233.

[11] Тришина И. А. Алгебраические свойства почти периодических на бесконечности функций / И. А. Тришина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – Т. 12. – С. 223–227.

[12] Тришина И. А. О медленно меняющихся на бесконечности решениях разностных уравнений / И. А. Тришина // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книг", 2016. – № 5-1. – С. 294–295.

[13] Тришина И. А. О двух определениях почти периодической на бесконечности функции / И. А. Тришина // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVII (3-9 мая 2016 г.)». – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. –С. 259–261.

[14] Тришина И. А. Об определениях почти периодической на бесконечности функции / И. А. Тришина // Сборник трудов международной научно-

технической конференции “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механик”. – 2016. – С. 41–43.

[15] Тришина И. А. Интегрально убывающие на бесконечности функции / И. А. Тришина // Вопросы науки. Серия: Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2017. – Вып. 17. – № 4. – С. 72–81.

[16] Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций / И. А. Тришина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17. – № 4. – С. 402–418.

[17] Тришина И. А. Медленно меняющиеся на бесконечности функции / И. А. Тришина // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2017. – № 4. – С. 134–144.