“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

На правах рукописи

Высоцкая Ирина Алевтиновна

Почти периодические на бесконечности функции и их приложения к решениям дифференциальных уравнений

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор А. Г. БАСКАКОВ

Воронеж - 2018

Содержание

Обозначения

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – группа целых чисел;

$\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ – множество неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{J}$ – один из промежутков $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}$;

$\mathbb{J}_d = \mathbb{J} \cap \mathbb{Z}$;

$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел;

$\mathbb{T} = \{\lambda \in C : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность (абелева группа комплексных чисел, модуль которых равен единице);

X – комплексное банахово пространство;

I – тождественный оператор;

$\mathrm{Hom(X, Y)}$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y;

$\mathrm{EndX} = \mathrm{Hom(X, X)}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X;

$D(A)$ – область определения линейного оператора A;

$\rho(A) \subset \mathbb{C}$ – резольвентное множество линейного оператора A;

$\lambda \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} : \rho(A) \subset \mathbb{C} \to EndX$ – резольвента линейного оператора A;

$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ – спектр линейного оператора A;

$C_b = C_b(\mathbb{J}; X)$ – банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{J}} \|x(t)\|$;

$C_{b;u} = C_{b;u}(\mathbb{J}; X)$ – замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b;

$C_0 = C_0(\mathbb{J}; X)$ – замкнутое подпространство исчезающих на бесконечности функций из C_b;

$C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{J}; X)$ – множество медленно меняющихся на бесконечности функций;

$C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ – множество интегрально убывающих на бесконечности функций;

$L^1(\mathbb{R})$ – банахова алгебра измеримых суммируемых на $\mathbb{R}$ (классов) комплекснозначных функций, где в роли мультипликативной операции выступает свертка функций $(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t - s)g(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R})$;

$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{J}, X)$ – линейное пространство измеримых на $\mathbb{R}$ функций $x : \mathbb{R} \to X$ таких, что для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}$ конечна величина $\int\limits_K \|x(t)\| dt < \infty$;

$\mathrm{S}^p(\mathbb{J}, X)$, $p \in [1, \infty)$ – банахово пространство Степанова функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что

$\|x\|_{\mathrm{S}^p} = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left(\int\limits_0^1 \left\| x(s+t) \right\|^p \mathrm{d}s \right)^{1/p} < \infty$;

$L^p = L^p(\mathbb{J}, X)$ - пространство функций $x \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{J}, X)$ таких, что $\|x\|_{L^p} = \left(\int\limits_{\mathbb{J}} \left\| x(s) \right\|^p \mathrm{d}s \right)^{1/p} < \infty, \quad p \in [1, \infty)$;

$L^{p,q} = (L^p, l^q) = L^{p,q}(\mathbb{J}, X)$, $p, q \in [1, \infty)$ – пространство амальгам Винера функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что

$$\|x\|_{\mathrm{L}^{p,q}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{J}_d} \left(\int\limits_0^1 \left\| x(s+k) \right\|^p \mathrm{d}s \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty, \quad p, q \in [1, \infty);$$

$$\|x\|_{\mathrm{L}^{p,q}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{J}_d} (ess \sup_{s \in [0;1]} \left\| x(s+k) \right\|)^q \right)^{1/q} < \infty, \quad p = \infty, q \in [1, \infty);$$

$$\|x\|_{\mathrm{L}^{p,q}} = \sup_{k \in \mathbb{J}_d} \left(\int\limits_0^1 \left\| x(s+k) \right\|^p \mathrm{d}s \right)^{1/p} < \infty, \quad p \in [1, \infty), q = \infty.$$

Введение

В диссертации вводится и исследуется ранее не изученный класс почти периодических на бесконечности функций. Классические почти периодические функции принадлежат новому рассматриваемому классу. Целесообразность рассмотрения почти периодических на бесконечности функций обусловлена тем, что решения некоторых важных классов дифференциальных и разностных уравнений являются почти периодическими на бесконечности. Для исследования функций этого класса будет использоваться спектральная теория операторов в банаховых пространствах.

Общепризнанно, что создателем теории почти периодических функций является датский математик Гаральд Бор. В 1924-1926 им были опубликованы три фундаментальных мемуара. Отметим, что если доказательство основных теорем о почти периодических функциях претерпели при дальнейшем развитии теории существенное изменение и упрощение, то доказательства основных теорем из третьего тома почти не изменились. Г. Бор ввел понятие почти периодической функции, занимаясь теорией рядов Дирихле. Первые работы в этом направлении были выполнены Бором еще до первой мировой войны. Первоначально Г. Бор не предполагал,что у него были предшественники в этой области анализа, однако уже во втором мемуаре упоминает о работах рижского математика П. Боля и французского математика и астронома Э. Эсклангона. Созданная Г. Бором теория получила значимое продвижение в работах С. Бохнера [79, 80, 81, 82], Г. Вейля, А. Безиковича [77], Ж. Фавара [89], Дж. Неймана [51], Б. М. Левитана [42, 43, 44, 93]. В частности, почти периодические функции стали источником развития гармонического анализа функций на группах. В 30-х годах XX века американский математик С. Бохнер обобщил теорию почти периодических функций на случай абстрактных функций в банаховых пространствах. Он ввел новое понятие почти периодической функции, связанное с критерием компактности почти периодичности сдвигов функции, которое позволило использовать методы функционального анализа.

Спустя восемь лет с момента создания теории почти периодических функций, А. Безикович опубликовал книгу [77]. Указанная монография является лишь одним из многочисленных вкладов автора в теорию почти периодических функций, за которые он был удостоен премии Адамса, присуждаемой Кембриджским университетом. Первая глава посвящена обсуждению непрерывных почти периодических функций, введенных изначально Г. Бором. Основной задачей этой главы является доказательство «Фундаментальной теоремы». Первоначальное доказательство в изложении Г. Бора было очень сложным. Несколько других вариантов доказательства были даны позже Вейлем, Винером и де ла Валле-Пуссеном. А. Безикович дает самое простое из этих доказательств, которое принадлежит де ла Валле-Пуссену и основано на сочетании идей Вейля и Бора. Значительное внимание также уделяется задачам суммирования рядов Фурье почти периодической функции последовательностью частичных сумм. Вторая глава посвящена различным обобщениям понятия почти периодической функции. Последняя глава, глава 3, посвящена изложению теории аналитических почти периодических функций в полосе.

В монографии Дж. Неймана [51] почти периодическим функциям посвящено два раздела, один из которых написан совместно с С. Бохнером. Дж. Нейман перенес теорию почти периодических функций Г. Бора на произвольные группы, что дало возможность применить метод Вейля для доказательства основных теорем (на аддитивной группе действительных чисел). Также работа содержит теоремы, связывающее теорию почти периодических функций с теорией представлений. Задача второго раздела – распространить теорию почти периодичности на функции, значения которых являются не числами, а элементами произвольного линейного пространства.

Среди русских математиков следует отметить Б. М. Левитана [42, 43, 44, 45], В. В. Жикова [30, 31, 32] и работы В. В. Степанова, в которых он пытался развить теорию почти периодических функций, на случай разрывных функции (1925 г.). Большой вклад в теорию почти периодических функций внесли Харьковские математики Ю. И. Любич [46, 47] и М. И. Кадец [34], которые развивали теорию, созданную Б. М. Левитаном. В работе [46] описана общая схема применения гармонического анализа к спектральной теории операторов на примере одного специального класса операторов в банаховом пространстве. Почти периодические функции в [46] вводятся с помощью линейного функционала.

В Воронеже всегда следили за развитием теории почти периодических функций. Активно занимались приложением теории почти периодических функций к дифференциальным уравнениям Э. М. Мухамадиев [50], В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов и М. А. Красносельский [36]. Одной из областей их научных интересов была проблема зависимости решений дифференциальных уравнений от малых параметров, где все входящие в дифференциальное уравнение функции являются почти периодическими.

Значительный вклад внесли представители немецкой школы, такие как W. Arendt, C. J. K. Batty (Mathematical Institute University of Oxford) [73, 74]. В работе [73] изучаются асимптотические почти периодические решения неоднородной задачи Коши на полуоси.

На основании вышеизложенного отметим, что уже давно почти периодичность как явление возникала в различных вопросах математики, механики, физики и астрономии.

Почти периодические функции также нашли свое отражение в работах [39, 41, 86, 91, 92].

В 2013 новый класс почти периодических на бесконечности функций был впервые введен А. Г. Баскаковым [6], теория которых получила дальнейшее развитие в его исследованиях. Существенное продвижение в теории векторных периодических функций возникло в связи с появлением статьи Л. Г. Люмиса [94], устанавливающей почти периодичность равномерно непрерывной скалярной функции со счетным спектром Берлинга. Ее векторный аналог получен в работах А. Г. Баскакова [8, 9, 12] с использованием результатов Б. М. Левитана [44] и М. И. Кадеца [34].

Чтобы увидеть различие между почти периодическими функциями Бора и почти периодическими на бесконечности функциями приведем несколько примеров. Так, почти периодическими на бесконечности являются ограниченные решение уравнения

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = \psi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где A – квадратная матрица и $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$. В то же время, эти решения не являются почти периодическими по Бору.

Отметим, что свертка Лапласа

$$(f \overset{L}{*} x)(t) = \int\limits_0^t f(t-s)x(s)ds, t \in \mathbb{R}_+,$$

где f - суммируемая функция и x - почти периодическая функция

Бора, как правило не является почти периодической функцией Бора, а является почти периодической на бесконечности.

При описании “переходных” процессов возникает класс непрерывных ограниченных функций, который обладает следующим свойством: каждая такая функция является почти периодической функцией Бора на промежутках $(-\infty; a]$ и $[b, +\infty)$, где $a < b$.

Такая функция является почти периодической на бесконечности, но, как правило, не является почти периодической функцией Бора.

Далее появился вопрос в расширении нового класса почти периодических на бесконечности функций. Любой новый класс почти периодических функций можно определить с помощью аппроксимационной теоремы. В классическом варианте это равномерные замыкания тригонометрических многочленов. В нашем случае коэффициентами Фурье являются медленно меняющиеся на бесконечности функции. В данной диссертационной работе класс медленно меняющихся функций существенно расширен и, следовательно, получен новый, ранее не рассматриваемый, класс почти периодических на бесконечности функций.

Целью работы является изучение ранее не рассматриваемого класса почти периодических на бесконечности функций, который вводится с использованием подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций, и применению этого класса к исследованию дифференциальных уравнений.

Этот класс является более широким по сравнению с классом почти периодических на бесконечности функций, введенным в работах А. Г. Баскакова [3, 4, 5] (относительно подпространства исчезающих на бесконечности функций). Чтобы увидеть, что новый класс является более широким, чем класс рассматриваемый в [3, 4, 5], достаточно обратиться к теории аппроксимации ранее не изученных функций. Здесь коэффициентами Фурье будут являться медленно меняющиеся на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций.

В работе доказана эквивалентность различных определений почти периодической на бесконечности функции и, кроме того, в работе получены необходимые и достаточные условия принадлежности ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений к классу почти периодических на бесконечности функций. Для ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами получены спектральные критерии принадлежности классу почти периодических на бесконечности функций.

Методы исследования. Методы гармонического анализа, функционального анализа являются основными при исследовании изучаемых в диссертации классов функций. Также применяется теория функций и теория представления изометрических полугрупп линейных операторов. Используемые результаты и положения из теории банаховых модулей, банаховых алгебр, теории однопараметрических полугрупп операторов содержатся в [8, 15, 24, 26, 27, 59].

Научная новизна. В ходе диссертационного исследования получены следующие новые результаты:

1) Введены классы медленно меняющихся на бесконечности функций с помощью подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций и получены структурные теоремы для таких классов функций.

2) Сформулированы четыре определения почти периодических на бесконечности функций с помощью подпространства интегрально

убывающих на бесконечности функций и доказана эквивалентность всех четырех определений.

3) Вводится и изучается класс почти периодических на бесконечности функций принадлежащих однородным пространствам (в частности пространствам Степанова, амальгамам Винера и др.).

4) Получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности непрерывных ограниченных векторных функций.

5) Получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных разностных уравнений и их асимптотическое представление.

6) Получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных дифференциальных уравнений и их асимптотическое представление.

7) Получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами и доказана теорема о почти периодичности решений таких уравнений.

8) Для дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными операторными коэффициентами получены спектральные критерии принадлежности их ограниченных решений к классу почти периодических на бесконечности функций.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы в гармоническом анализе и спектральной теории линейных операторов. Кроме того, полученные приложения могут быть полезны при исследовании интегральных и разностных уравнений. Также результаты могут быть применены при описании асимптотического поведения динамических систем, в том числе при описании асимптотического поведения ограниченных решений ряда задач гидродинамики. Теория также может быть использована в задачах классификации и кластеризации, в частности, анализа аудиальной и визуальной информации.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов обусловлена наличием подробных доказательств основных результатов, а также публикациями в реферируемых журналах. Основные результаты диссертации докладывались на Воронежских зимних математических школах С. Г. Крейна (2013, 2016, 2018 гг.), на Крымской международной математической конференции (Украина, г. Судак, 2013 г.), на математическом интернет-семинаре ISEM-2015 (Германия, г. Блаубойрен, 2015 г.), на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения – XXVII" (2016 г.), на международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" (Воронеж, 2016, 2017 гг.), на семинарах А. Г. Баскакова и научных сессиях Воронежского государственного университета.

Публикации автора по теме диссертации. Основные результаты диссертации представлены в работах [22, 23, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 62, 63, 64, 65, 67, 69, 68]. Работы [2, 56, 57, 68, 69] опубликованы в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Личный вклад автора. Научные результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных публикаций [2, 22, 53, 54, 55, 56, 57, 63] в диссертации содержатся результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации. В диссертацию входят введение, две главы, разбитые на параграфы и библиография, включающая 95 наименований. В первой и второй главе представлены основные результаты диссертации. Общий объем работы составляет 114 страниц.

Во введении излагается история вопроса, описывается структура диссертации, цели и задачи работы.

В первой главе подробно изучается новое подпространство интегрально убывающих на бесконечности функций и приводятся четыре определения почти периодической на бесконечности функции. Одним из основных результатов данной главы является теорема 1.7, где доказывается эквивалентность всех четырех определений.

В третьем параграфе первой главы сформулированы и доказаны теоремы и леммы о свойствах почти периодических на бесконечности функций. Доказана теорема о среднем значении.

В параграфе 6 изучаются свойства медленно меняющихся на бесконечности функций, по которым строятся почти периодические на бесконечности функции.

В параграфе 8 построен еще один новый класс почти периодических на бесконечности функций, включающий в себя быстро осциллирующие функции, например $e^{it^2}, \cos \alpha t^2, \sin \alpha t^2$. Получены результаты для дифференциальных уравнений с быстро осциллирующей правой частью. В данном параграфе существенно используется теорема Винера [24].

В параграфах 10 и 11 изучаются свойства медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств.

Вторая глава посвящена изучению ограниченных решений дифференциальных и разностных уравнений.

В первом параграфе получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных разностных уравнений и их асимптотическое представление. Получен ряд утверждений о виде решений систем линейных разностных уравнений в зависимости от спектральных свойств операторного коэффициента (лемма 2.2, лемма 2.3, теорема 2.1).

Во втором параграфе (теорема 2.3) получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений систем линейных дифференциальных уравнений и их асимптотическое представление.

Доказана эквивалентность трех определений слабого решения дифференциального уравнения (теорема 2.4). Доказательство эквивалентности этих определений является важным результатом для дальнейших исследований решений дифференциальных уравнений. При доказательстве используется спектральная теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей (см. определение в главе 1, §1) и ограниченных аппроксимативных единиц.

В теоремах 2.6 и 2.7 получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами и доказана почти периодичность на бесконечности решений таких уравнений.

Третий параграф посвящен изучению дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными операторными коэффициентами. Получены спектральные критерии принадлежности их ограниченных решений к классу почти периодических на бесконечности функций (теорема 2.18).

Глава 1

Почти периодические на бесконечности функции

Глава посвящена исследованию почти периодических на бесконечности функций построенных с использованием нового подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций.

В первом и втором разделе приводятся основные понятия и определения, используемые в дальнейшем при построении теории.

В четвертом разделе вводится новый класс интегрально убывающих на бесконечности функций. Результаты четвертого и седьмого раздела были опубликованы в работе [67, 68], а раздела шесть в работе [69].

1. Банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули

В работе систематически будет использоваться понятие банахова модуля (банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (см. [3, 4])) над алгеброй суммируемых на $\mathbb{R}$ классов комплексных функций с нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),$$

где в роли мультипликативной операции выступает классическая свертка [1] функций

$$(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds, t \in \mathbb{R}, f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Пусть $\mathcal{X}$ – банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль и $T : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$ – изометрическое представление. Будем говорить что модульная структура $\mathcal{X}$

ассоциирована с представлением T [24] , если имеют место равенства

$$T(t)(fx) = (S(t)f)x = fT(t)x, \quad t \in \mathbb{R},$$

и

$$f(gx) = (f * g)x = (g * f)x$$

для любых f, g из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любого вектора $x \in \mathcal{X}$. При этом

$$\|fx\| = \Big\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)xds \Big\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| \big\|T(-s)x\big\| ds \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| ds \|x\| = \|f\|_1 \|x\|,$$

для любых f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$. Далее для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ будет использоваться обозначение $(\mathcal{X}, T)$.

Если $T : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$ – сильно непрерывная группа изометрий из алгебры $End\mathcal{X}$ то формула

$$fx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)xds, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathcal{X}$$

определяет структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, ассоциированного с данным представлением T.

Всюду полагаем выполненным

Предположение 1. Банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathcal{X}$ невырожденный (т.е. из условия $fx = 0$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$).

Лемма 1.1. *Невырожденный банахов* $L^1(\mathbb{R})$*-модуль имеет единственное представление.*

Доказательство. Предположим, что с невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем будут ассоциированы представления $T_1, T_2 : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$. Следовательно, $x_1 = T_1(t)x$ и $x_2 = T_2(t)x$, $x \in \mathcal{X}, t \in \mathbb{R}$, и справедливо

$$fx_1 = f(T_1(t)x) = (S(t)f)x = f(T_2(t)x) = fx_2, f \in L^1(\mathbb{R}).$$

А значит, $f(x_1 - x_2) = 0, f \in L^1(\mathbb{R})$. Так как банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль невырожден, то представления T_1 и T_2 совпадают для всех $x \in \mathcal{X}, t \in \mathbb{R}$. □

Определение 1.1. Вектор x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ назовем T-непрерывным, если функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x, t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и поэтому непрерывна на $\mathbb{R}$).

Через $\mathcal{X}_c$ обозначим множество всех T - непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$.

Лемма 1.2. *$\mathcal{X}_c$ – замкнутый подмодуль из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$ замкнут и имеет место следующее равенство*

$$T(f)x = fx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)xds, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathcal{X}_c. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть (x_n) – произвольная сходящаяся к некоторому вектору $x_0 \in \mathcal{X}$ последовательность векторов из $\mathcal{X}_c$. Докажем что $x_0 \in \mathcal{X}_c$, т.е. следует показать непрерывность функции $\varphi_0(t) = T(t)x_0, t \in \mathbb{R}$ (достаточно проверить в точке ноль). Ее непрерывность вытекает из оценок

$$\|T(t)x_0 - x_0\| \le \|T(t)(x_0 - x_n)\| + \|T(t)x_n - x_n\| + \|x_n - x_0\|, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выберем $\delta \ge 0$ так, чтобы $\|T(t)x_n -$

$-x_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех t, таких что $|t| \le \delta$. Тогда

$$\|T(t)x_0 - x_0\| \le \|T(t)(x_0 - x_n)\| + \|T(t)x_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, $\mathcal{X}_c$ – замкнутое подпространство из $\mathcal{X}$.

Теперь установим представление (2.1) для любого вектора $x \in \mathcal{X}_c$. Рассмотрим разность $y = fx - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)xds$. Тогда для $g \in L^1(\mathbb{R})$ имеет место

$$gy = g(fx) - g(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)ds) =$$

$$= (g * f)x - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)gxds = (g * f)x - (f * g)x = 0.$$

И в силу того что модуль не вырожден, имеет место равенство (2.1).

Лемма доказана. □

Замечание 1.1. Представление ассоциированное с банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем не обязательно сильно непрерывно.

Приведем пример, подтверждающий данное замечание. Рассмотрим однородное [6] пространство $L^p = L^p(\mathbb{R}, X), \quad p \in [1, \infty)$, функций $x \in L^1_{\mathrm{loc}}$ (см. гл.1 §8) таких, что

$$\|x\|_{L^p} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \big\|x(s)\big\|^p \mathrm{d}s\Big)^{1/p} < \infty, \quad p \in [1, \infty),$$

или $\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{t} \in \mathbb{R}} \big\|\mathrm{x(t)}\big\|_{\mathrm{X}} < \infty$. Зададим на $L^p(\mathbb{R}, X)$ модульную структуру по формуле (1.1) с помощью представления $T(t)f = S(t)f, t \in \mathbb{R}$. Представление группы сдвигов $S : \mathbb{R} \to EndL^\infty(\mathbb{R}, X)$ не является сильно непрерывным.

Также рассмотрим ограниченные непрерывные функции $x : \mathbb{R} \to X$ из $C_b(\mathbb{R}, X)$ со следующей нормой

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{t} \in \mathbb{R}} \left\|\mathrm{x(t)}\right\|_{\mathrm{X}}.$$

Эти функции образуют подмодуль из банахова $L^1(\mathbb{R}, X)$-модуля $L^\infty(\mathbb{R}, X)$. Представление $S : \mathbb{R} \to End C_b(\mathbb{R}, X)$ не является сильно непрерывным. Причем $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ является S-непрерывным вектором при условии что $(C_b(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.

Далее рассмотрим семейство функций $\{f_\lambda\}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}\}$ из алгебры функций $L^1(\mathbb{R})$, определенное равенством

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}, t \leq 0, \\ 0, t > 0. \end{cases}$$

при $Re\lambda > 0$. И при $Re\lambda < 0$

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ e^{\lambda t}, t \geq 0. \end{cases}$$

Будем рассматривать множество ограниченных линейных операторов $R_\lambda \in End\mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}\}$, где $R_\lambda x = f_\lambda x, x \in \mathcal{X}$. Введенные таким образом операторы удовлетворяют соотношению Гильберта $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}\}$.

Определение 1.2. Оператор $A = i^{-1}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} : D(A) \subset X \to X$ – замкнутый оператор, резольвентой которого является функция $\lambda \mapsto R_\lambda = T(f_\lambda), \lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, называется *генератором* банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$.

Лемма 1.3. *Для генератора $A : D(A) \subset X \to X$ банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$ справедливо $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Доказательство. Доказательство вытекает из утверждения $R_\lambda = T(f_\lambda) = (A-\lambda I)^{-1}$, где $\lambda \in \rho(A)$, т. е. резольвента определена на всей мнимой оси. $\square$

2. Некоторые сведения о почти периодических векторах. Спектр Берлинга вектора.

Введем в рассмотрение преобразование Фурье, функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Определение 1.3. Преобразованием Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ называется функция $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определенная равенством

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $(\mathcal{X}, T)$ – банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль (см. гл.1 §1).

Определение 1.4 (аналог определения Бохнера)**.** Вектор x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$ называется почти периодическим вектором, если $x \in \mathcal{X}_c$ и множество $\{T(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $\mathcal{X}$.

Через $AP\mathcal{X}$ обозначим множество почти периодических векторов из $\mathcal{X}$.

Определение 1.5. Пусть $\varepsilon > 0$. Число ω из $\mathbb{R}$ называется ε-периодом вектора x из $\mathcal{X}$, если $\|T(\omega)x - x\| < \varepsilon$. Множество ε -периодов обозначим $\Omega(\varepsilon, x)$.

Определение 1.6. Подмножество Ω из $\mathbb{R}$ называется относительно плотным на $\mathbb{R}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \varnothing$, для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 1.7. Вектор $x \in \mathcal{X}_c$ называется почти периодическим, если для $\varepsilon > 0$ множество $\Omega(\varepsilon, x)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$.

В 1945 г. А. Берлинг [78] в процессе своих исследований по расшифровке секретной военной кодированной информации ввел новое понятие, которое уже в конце 60-х - начале 70-х годов было окончательно сформулировано [85] и нашло свое применение, в том числе и в развитии гармонического анализа линейных операторов. Одним из широко используемых в данной работе понятий, является понятие спектра Берлинга векторов из комплексного банахова пространства.

Определение 1.8. Спектром Берлинга вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$ называется множество

$$\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для всех } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ таких, что } \widehat{f}(\lambda) \neq 0\},$$

которое является дополнением

$$\mathbb{R} \backslash \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ существует } f \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\text{со свойством } \widehat{f}(\lambda) \neq 0 \text{ такая, что } fx = 0\}.$$

Замечание 1.2. Спектр Берлинга $\Lambda(x)$ функции f из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля совпадает с $supp\widehat{f}$.

Лемма 1.4. *Пусть $(\mathcal{X}, T)$ – банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль. Тогда справедливо следующее:*

1) $\Lambda(x)$ – замкнутое в $\mathbb{R}$ множество;

2) $\Lambda(x) = \{0\}$ если $x = 0$;

3) если $A, B \in End\mathcal{X}$ перестановочны с операторами $T(f), f \in L^1(\mathbb{R})$, то имеет место включение $\Lambda(Ax + By) \subseteq \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$;

4) $\Lambda(fx) \subseteq supp\widehat{f} \cap \Lambda(x)$ для всех $x \in \mathcal{X}, f \in L^1(\mathbb{R})$;

5) $fx = 0$, для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f} = 0$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$;

6) $fx = x$, для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ такой, что $\widehat{f} = 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$;

7) В случае компактности спектра $\Lambda(x)$*,* $fx = x$*,* $\widehat{f} = 1$ *на* $\Lambda(x)$ *и множество* $\{\lambda \in \mathbb{R} : \widehat{f}(\lambda) \neq 1\} \cap \Lambda(x)$ *не более чем счетно, то* $fx = x$*.*

Доказательство. Приведем доказательство свойства 1) и 2). Спектр Берлинга вектора $\Lambda(x)$ вектора $x \in \mathcal{X}$ является замкнутым множеством, если $\mathbb{R}\backslash\Lambda(x)$ – открытое множество. Непосредственно из определения спектра Берлинга для каждой точки $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda(x)$ следует существование суммируемой функции f со свойствами $fx = 0$ и $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$. Из непрерывности преобразования Фурье следует, что $\widehat{f} \neq 0$ в некоторой окрестности точки λ. Тем самым, дополнение к спектру Берлинга открыто, что завершает доказательство замкнутости спектра.

Пусть $\Lambda(x) = \varnothing$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует такая функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $fx = 0$. Рассмотрим линейную оболочку сдвигов таких функций и получим двусторонний идеал I_x функций, обнуляющих вектор x и таких, что не существует ни одного $\lambda \in \mathbb{R}$, в котором преобразования Фурье всех функций из I_x равняются нулю. Идеал I_x совпадает со всем пространством $L^1(\mathbb{R})$ (теорема Виннера об L^1-замкнутости [1]). Так как банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль $(\mathcal{X}, T)$ невырожден, то $x = 0$.

Если $x = 0$, то $fx = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существуют функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$, и так же для $x = 0$ справедливо $fx = 0$. Следовательно, $\Lambda(x) = \emptyset$.

Приведем доказательство свойства 3). Пусть λ_0 не принадлежит $\Lambda(x) \cup \Lambda(y)$, тогда существуют функции f, g из $L^1(\mathbb{R})$ такие, что

$$\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0, \widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$$

и

$$fx = 0, gy = 0.$$

Пусть $h = f * g$, тогда $\widehat{h}(\lambda_0) = \widehat{f}(\lambda_0)\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и справедливо

$$h(Ax + By) = T(h)Ax + T(h)By = AT(h)x + BT(h)y =$$

$$= A(f * g)x + B(f * g)y = Ag(fx) + bf(gy) = 0.$$

Тогда λ_0 не принадлежит множеству $\Lambda(Ax + By)$, поэтому имеет место включение $\Lambda(Ax + By) \subseteq \Lambda(A) \cup \Lambda(B)$.

Приведем доказательства свойства 4). Пусть $\lambda \notin supp\widehat{f}$, тогда $supp\widehat{f} \cap U$ – пустое множество, где U – окрестность точки λ. Найдется суммируемая функция g со свойством $\widehat{g}(\lambda) \neq 0$ и $supp\widehat{g} \subset U$. Из свойств преобразования Фурье имеем равентво $g(fx) = (f * g)x$. Тогда λ не принадлежит спектру Берлинга функции fx.

Справедливость утверждения 5) является следствием свойства 4).

Покажем справедливость свойства 6). Зафиксируем функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, такую, что $\widehat{f} = 1$ в некоторой окрестности B спектра Берлинга $\Lambda(x)$ вектора x. Так как, для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ имеет место равенство $\widehat{g} - \widehat{f}\widehat{g} = 0$ в окрестности U спектра Берлинга $\Lambda(x)$ вектора x, то $g(x - fx) = (g - f * g)x = 0$ в силу свойства 4). Из невырожденности банахова $L^1(\mathbb{R})$ - модуля следует равенство $fx = x$.

Доказательство свойства 7) представлено в [3].

□

Лемма 1.5. *Для любой функции* $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ *и функции* $y(t) = x(t)e^{i\lambda_0 t}, t \in \mathbb{R}, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, *имеет место* $\Lambda(y) = \Lambda(x) + \lambda_0$.

Доказательство. Докажем, что $\Lambda(y) \subset \Lambda(x) + \lambda_0$. Пусть $\mu_0 \in \Lambda(y)$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f}(\mu_0 -$

$\lambda_0) \neq 0$, и пусть $g(t) = f(t)e^{-i\lambda_0 t}$. Достаточно показать, что $f * x \neq 0$ и тогда $\mu_0 - \lambda_0 \in \Lambda(x)$, таким образом $\mu_0 \in \Lambda(x) + \lambda_0$. Действительно,

$$(f * x)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)x(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)y(s)e^{-i\lambda_0 s}ds =$$

$$= e^{-i\lambda_0 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)y(t-\tau)e^{-i\lambda_0 \tau}d\tau = e^{-i\lambda_0 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)y(t-\tau)d\tau =$$

$$= e^{-i\lambda_0 t}(g * y)(t), t \in \mathbb{R}.$$

Так как $\widehat{f}(\mu_0 - \lambda_0) = \widehat{g}(\mu_0) \neq 0$, то $g * y \neq 0$, следовательно $f * x \neq 0$.

Далее докажем, что справедливо обратное $\Lambda(y) \supset \Lambda(x) + \lambda_0$. Пусть $\alpha \in \Lambda(x)$, т. е. $\alpha + \lambda_0 \in \Lambda(x) + \lambda_0$.

Рассмотрим произвольную функцию $u \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{u}(\alpha + \lambda_0) \neq 0$. Достаточно показать, что $u * y \neq 0$.

Пусть $v(t) = u(t)e^{i\lambda_0 t}$. Тогда

$$(u * y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t-s)y(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t-s)x(s)e^{i\lambda_0 s}ds =$$

$$= e^{-i\lambda_0 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\tau)x(t-\tau)e^{i\lambda_0 \tau}d\tau = e^{-i\lambda_0 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\tau)x(t-\tau)d\tau =$$

$$= e^{-i\lambda_0 t}(v * x)(t), t \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\widehat{v}(\alpha) = \widehat{u}(\alpha + \lambda_0)$ и $\lambda_0 \in \Lambda(x)$, то $v * x \neq 0$ и поэтому $u * y \neq 0$.

$\square$

Лемма 1.6. *Множество векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$ вида $\{x \in \mathcal{X} : \Lambda(x)$ – компактное в $\mathbb{R}$ множество$\}$ является векторным подпространством пространства $\mathcal{X}_c$.*

Доказательство. Пусть x_1, x_2 – векторы с компактным спектром, тогда $\Lambda(x_1 + x_2) \subseteq \Lambda(x_1) \cup \Lambda(x_2)$. Из компактности $\Lambda(x_1) \cup \Lambda(x_2)$ и замкнутости спектра $\Lambda(x_1 + x_2)$ следует, что $\Lambda(x_1 + x_2)$ является компактным множеством.

Отметим также, что $\Lambda(\alpha x) = \Lambda(x), \alpha \neq 0$. Таким образом, подмножество векторов с компактным спектром образует линейное подпространство.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойствами:

1) $\widehat{f} = 1$ в окрестности множества $\Lambda(x)$;

2) $supp\widehat{f}$ – компакт.

Рассмотрим функцию $\varphi_x : t \mapsto T(t),\ fx : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$. Из следующих равенств

$$T(t)fx = fT(t)x = (S(t)f)x = f_t x, t \in \mathbb{R},$$

получим, что $\varphi_x(t) = f_t x$. Поскольку оператор сдвига непрерывен [35] $t \mapsto f_t = S(t)f : \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R})$, следовательно непрерывна функция $\varphi_x = f_t x$. Достаточно проверить ее непрерывность в нуле. Это следует из следующих равенств и неравенств

$$\|\varphi_x(t) - \varphi_x(0)\| = \|f_t x - fx\| = \|(f_t - f)x\| \leq \|f_t - f\|\|x\| \to 0, t \to 0.$$

Лемма доказана.

□

Лемма 1.7. *Спектром Берлинга для тригонометрического многочлена вида*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $a_k \neq 0, a_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n$, *является множество* $\Lambda(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен вида $\varphi(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}$, где все числа $a_k \neq 0, 1 \leq k \leq n$. Докажем, что спектр Берлинга имеет вид $\Lambda(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$. Рассмотрим некоторое $\lambda_m \in \mathbb{R}$ и функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f}(\lambda_m) \neq 0$. Тогда

$$(f * \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\varphi(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t})ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_k u} f(u)du.$$

Таким образом $(f * \varphi)(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{f}(\lambda_k) a_k e^{i\lambda_k t} \neq 0$. Следовательно, так как $\widehat{f}(\lambda_m) a_m \neq 0$, то $\lambda_m \in \Lambda(\varphi)$. Лемма доказана. □

3. Основные понятия из теории почти периодических функций

Введем в рассмотрение основные функциональные пространства и сформулируем основные понятия, связанные с определением почти периодических на бесконечности функций. Пусть X – комплексное банахово пространство и $\mathbb{J}$ совпадает с одним из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$.

Пусть $C_b(\mathbb{J}, X)$ – банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X.

Пусть $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ – замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных функций. Через $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций $x \in C_b$, исчезающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

В пространстве $C_b(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим операторы сдвига $S(t) : C_b(\mathbb{J}, X) \to C_b(\mathbb{J}, X)$, $(S(t)x)(\tau) = x(\tau+t)$, $\tau \in \mathbb{J}$, $t \in \mathbb{J}$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

В статье [46] продемонстрирована общая схема применения гармонического анализа к спектральной теории операторов на примере класса почти периодических функций.

Определение 1.9. Функцию x из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ назовем *интегрально убывающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\, ds = 0.$$

Обозначим символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ множество интегрально убывающих на бесконечности функций.

Введенный класс является более широким по сравнению с классом почти периодических на бесконечности функций, введенным в работах А. Г. Баскакова [3, 4, 5].

Определение 1.10. Далее символом $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим замкнутое (с нормой из $C_{b,u}$) подпространство функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, обладающих свойствами:

1) $S(t)x \in \mathcal{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{J}$ и любой функции $x \in \mathcal{C}_0$;

2) $C_0 \subset \mathcal{C}_0 \subset C_{0,int}$;

3) $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

В частности, к таким подпространствам относится семейство замкнутых в $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ подпространств

$$C_{0,p} = C_{0,p}(\mathbb{J}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|^p\, ds = 0\},$$

где $p \in [1, \infty)$. Таким образом, $C_{0,1} = C_{0,int}$ – подпространство интегрально убывающих на бесконечности функций.

Во всех рассматриваемых подпространствах из $C_b(\mathbb{J}, X)$ символ X опускается, если $X = \mathbb{C}$ (например, $C_{b,u}(\mathbb{J}) = C_{b,u}(\mathbb{J}, \mathbb{C})$).

Определение 1.11. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется медленно меняющейся на бесконечности функцией, относительно подпространства $\mathcal{C}_0$, если для каждого $\alpha \in \mathbb{J}$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0$.

Следует заметить, что в теории дифференциальных уравнений [25] приводится определение стационарной на бесконечности функции, которое эквивалентно определению медленно меняющейся функции.

Отметим что в работах [4] и [5] давалось определение медленно меняющейся функции с использованием подпространства $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$. Свойства медленно меняющихся функций относительно подпространства C_0 также были отмечены в работах [5, 56, 57, 63, 69].

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $C_{0,int}$ будем обозначать через $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$ [68] и через $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$ - относительно подпространства C_0 [4]. Символом $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$ будем обозначать подпространство обладающее свойством $C_{sl}(\mathbb{J}, X) \subset \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0} \subset C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$. Непосредственно из определения следует, что $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантным относительно сдвигов функций.

Примерами медленно меняющихся на бесконечности функций из $C_{sl,\mathcal{C}_0}$ для $X = \mathbb{C}$ являются:

1) $x_1(t) = \sin \ln(1 + |t|)$, $t \in \mathbb{J}$;

2) $x_2(t) = c + x_0(t), t \in \mathbb{J}$, где $c \in \mathbb{C}$ и x_0 — любая функция из $\mathcal{C}_0(\mathbb{J})$;

3) $x_3(t) = \operatorname{arctg} t, t \in \mathbb{J}$;

4) любая непрерывно дифференцируемая функция $x \in C_b(\mathbb{J})$ со свойством

$$\lim_{|t|\to\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Определение 1.12. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом функции* $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если существует такая функция $x_0 \in \mathcal{C}_0$, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε-периодов функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ обозначим через $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$.

Если $\mathcal{C}_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$, то определение ε-периода функции из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно $\mathcal{C}_0$ эквивалентно следующему определению.

Определение 1.13. Пусть $\varepsilon > 0$.Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом функции* $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$, если существует число $\alpha(\varepsilon) \geq 0$ такое, что

$$\sup_{|t|\geq\alpha(\varepsilon)} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Определение 1.14. Подмножество Ω из $\mathbb{J}$ называется относительно плотным на $\mathbb{J}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \varnothing$,для любого $t \in \mathbb{J}$.

Определение 1.15 (аналог классического определения Бора)**.** Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{J}$.

Аналогично определению 1.15 можно сформулировать определение почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_{0,int}$ [68].

Из определений 1.13, 1.15 следует, что каждая непрерывная функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ почти периодическая по Бору (в обычном смысле; см. [63]) является почти периодической на бесконечности относительно любого подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций.

Множество классических почти периодических функций обозначим символом $AP(\mathbb{R}, X)$.

А через символ $AP_\infty(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ – множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ и $AP_{\infty,int}(\mathbb{J}, X)$ – множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Непосредственно из определения медленно меняющейся на бесконечности функции 1.11 следует, что если $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) = \mathbb{J}$ для любого $\varepsilon > 0$, то $x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}, X)$. Таким образом, имеет место включение $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$.

Определение 1.16. Множество функций $\mathcal{M} \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *предкомпактным на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $b_1, \ldots, b_N$ (ε-сеть на бесконечности) из $\mathcal{M}$ таких, что для любой функции $x \in \mathcal{M}$ существует функция $b_k, k \in \{1, \ldots, N\}$, и функция $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{C}_0$, для которых имеет место оценка

$$\|x - b_k - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Определение 1.17 (аналог определения Бохнера)**.** Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если множество ее сдвигов $S(t)x$, $t \in \mathbb{J}$, является предкомпактным на бесконечности множеством относительно подпространства $\mathcal{C}_0$.

Определение 1.18 (аппроксимационное). Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функции $x_1, \dots, x_N$ из пространства $C_{sl,\mathcal{C}_0}$ медленно меняющихся на бесконечности функций такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Символом $AP(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим множество почти периодических функций Бора, являющихся сужениями на $\mathbb{R}_+$ функций из $AP(\mathbb{R}, X)$.

В работах [22, 53, 54, 55, 70] приводятся аналогичные определения для почти периодических на бесконечности последовательностей.

Замечание 1.3. Две точки называются ε-конгруэнтными если они отличаются меду собой на ε-период на бесконечности, т. е. точки $t - t' \in \Omega_\infty(x, \mathcal{C}_0, \varepsilon)$.

Лемма 1.8. *Любое число $\omega > 0$ является ε-периодом функции $x \in C_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}; X)$ относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Пусть $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ - произвольные числа и $x^*(t) = x(t+\omega) - x(t), t \in \mathbb{J}$ (из определения медленно меняющейся на бесконечности функции). Поскольку $x^* \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, то существует $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ такое,что $\|x^*(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $|t| \geq \alpha$. Тогда для всех $|t| \geq \alpha$ имеем

$$\|x(t+\omega) - x(t)\| = \|x^*(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

тогда

$$\|x(t+\omega)-x(t)-x_0(t)\| \le \|x^*(t)\|+\|x_0(t)\| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

где $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$.

Таким образом, число ω является ε-периодом на бесконечности функции $x \in C_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}; X)$. Лемма доказана.

□

Лемма 1.9. *Для каждого $\varepsilon > 0$ множество ε-периодов на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ функции $x \in AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$ содержит относительно плотное множество отрезков фиксированной длинны $\eta = \eta(\varepsilon)$.*

Доказательство. Формулировка данной леммы в точности означает, что существует $L = L(\varepsilon)$ такое, что на любом $[t; t+L]$ имеется подотрезок $[r; r+\eta]$ все точки которого являются ε-периодами на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0$.

Пусть существует такое $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{3}), 0 < \delta < 1$, что для любых точек t_1, t_2 из отрезка L, таких что $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется

$$\|x(t_1)-x(t_2)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

И пусть $L = l(\frac{\varepsilon}{3})+\eta$, где $l(\frac{\varepsilon}{3})$ – соответствует числу из определения 1.14. Рассмотрим произвольный отрезок $[t; t+L]$. Из определения почти периодичности функции x следует, что существует $\frac{\varepsilon}{3}$-период $\omega \in [t+\frac{\eta}{2}; t+L-\frac{\eta}{2}]$, тогда $[\omega-\frac{\eta}{2}; \omega+\frac{\eta}{2}] \subset [t; t+L]$.

Также в определение ε-периода на бесконечности присутствует функция $x_0 \in \mathcal{C}_0$, следовательно существует некоторое $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ такое, что $\|x_0(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, для всех $|t| \ge \alpha$. Тогда при $\|\varepsilon - \omega\| < \delta(\frac{\varepsilon}{3})$ и $|t| \ge \alpha$ получим

$$\|x(t+\varepsilon)-x(t)-x_0(t)\| \le \|x(t+\varepsilon)-x(t+\omega)-x_0(t)\|+$$

$$+\|x(t+\varepsilon)-x(t+\omega)-x_1(t)\|+\|x_1(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

где $x_0, x_1 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$. Таким образом отрезок $[r; r+\eta]$, где $r=\omega-\frac{n}{2}$ состоит из ε-периодов функции x. □

Лемма 1.10. *Для любых почти периодических на бесконечности функций из пространства $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$ при любом $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество их ε-периодов на бесконечности.*

Данная лемма является обобщением леммы из [42] для пространства $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$.

Лемма 1.11. *Сумма двух почти периодических на бесконечности функций из пространства $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$ есть функция также принадлежащая пространству $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$.*

Доказательство. Пусть функции x и y принадлежат пространству $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$. Тогда рассмотрим функцию $x+y : \mathbb{J} \to X$. Из леммы 1.10 следует, что при любом $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество их общих ε-периодов на бесконечности $\tau = \tau_x(\frac{\varepsilon}{3}) = \tau_y(\frac{\varepsilon}{3})$. Тогда

$$\|(x(t+\tau)+y(t+\tau))-(x(t)+y(t))-(x_0(t)+y_0(t))\| \leq$$

$$\leq \|x(t+\tau)+y(t+\tau)\|+\|x(t)+y(t)\|+\|x_0(t)+y_0(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

где $x_0, y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, и поэтому $\|x_0(t)+y_0(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, при некотором $|t| \geq \alpha(\varepsilon)$. Таким образом $\tau = \tau_{x+y}(\varepsilon)$ □

Лемма 1.12. *Пусть x и y функций из пространства $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$, тогда xy есть функция также принадлежащая пространству $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$.*

Доказательство. Пусть функции x и y принадлежат пространству $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$ и $\{\tau\}$ – относительно плотное множество их общих ε-периодов на бесконечности, т. е.

$$\tau = \tau_x(\varepsilon) = \tau_y(\varepsilon).$$

Полагая,

$$M_\varepsilon = \sup_t \|x(t)\|, N_\varepsilon = \sup_t \|y(t)\|,$$

имеем

$$\|x(t+\tau)y(t+\tau) - x(t)y(t) - x_0(t)y_0(t)\| \leq \|y(t+\tau)\|\|x(t+\tau) - x(t)\| +$$

$$+\|x(t)\|\|y(t+\tau) - y(t)\| + \|x_0(t)y_0(t)\| \leq N_\varepsilon + M_\varepsilon + K_\varepsilon = (N+M+K)_\varepsilon,$$

где $x_0, y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, следовательно существует $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ такое,что $\sup\limits_{|t|\geq\alpha} \|x_0(t)y_0(t)\| < K_\varepsilon$. Отметим, что так как $(N + M + K)_\varepsilon$ может быть произвольно малым, то отсюда следует почти периодичность функции xy.

□

Заметим, что функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t},\ x_1, \ldots, x_N \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}, \qquad (1.2)$$

(обобщенные тригонометрические полиномы) почти периодичны на бесконечности в смысле определения 1.17.

Действительно, каждая функция $x_k \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$, $1 \leq k \leq N$, является почти периодической на бесконечности относительно $\mathcal{C}_0$. Так как любая периодическая на бесконечности функция является по определению почти периодической на бесконечности, то функции $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, e_k = e^{i\lambda_k t}, 1 \leq k \leq N$, где $t \in \mathbb{R}$, являются также почти периодическими на бесконечности, с любым ε-периодом на бесконечности. Из леммы 1.11 и 1.12 вытекает что (1.2) является почти периодической на бесконечности функцией относительно $\mathcal{C}_0$.

Лемма 1.13. *Множество $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$ почти периодических на бесконечности функций образует банахово пространство.*

Доказательство. Докажем что равномерный предел любой равномерно сходящейся почти периодической на бесконечности функций также является почти периодической функцией на бесконечности.

Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n \in AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$ (сходимость рассматривается в $C_b(\mathbb{J}, X)$). Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию x_N такую, что $\|x - x_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Докажем что множество $\Omega_\infty(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{C}_0, x_N)$ содержится в множестве $\Omega_\infty(\varepsilon, \mathcal{C}_0, x)$.

Пусть ω - любой число из $\Omega_\infty(\frac{\varepsilon}{3}, \mathcal{C}_0, x_N)$ тогда

$$\|x_N(t+\omega) - x_N(t) - x_0(t)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

где $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$.

Следовательно имеют место оценки

$$\|x(t+\omega) - x(t) - x_0(t)\| \le$$

$$\sup_{|t|\ge N_\varepsilon} \|x(t+\omega) - x_n(t+\omega)\| + \sup_{|t|\ge N_\varepsilon} \|x_n(t+\omega) - x_n(t) - x_0(t)\| +$$

$$+ \sup_{|t|\ge N_\varepsilon} \|x(t) - x_n(t)\| \le$$

$$\le \|x - x_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|x - x_n\| \le 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Поскольку функция x является равномерным пределом последовательности (x_n) равномерно непрерывных ограниченных функций, то $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Следовательно $x \in AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$.

□

Теорема 1.1 (о среднем значении почти периодической на бесконечности функции). *Для каждой почти периодической на бесконечности функции $x \in AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$ существует предел*

$$M\{x\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T x(t)dt \in X.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем по нему соответствующий $\frac{\varepsilon}{4}$-почти период на бесконечности. Пусть $\tau = \tau_x(\frac{\varepsilon}{4}) \in [\alpha, \alpha + l]$ - сдвиг при $|t| > \alpha$, соответствующий почти периоду функции x с точностью до $\frac{\varepsilon}{4}$

$$\|S(\tau)x - x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

где $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^{\alpha+T} x(t)dt - \int\limits_0^T x(t)dt = (\int\limits_\tau^{\tau+T} x(t)dt - \int\limits_0^T x(t)dt)+$$

$$+\int\limits_{\tau+T}^{\alpha+T} x(t)dt + \int\limits_\alpha^\tau x(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^T (x(t+\tau) - x(t))dt - \int\limits_{\alpha+T}^{\tau+T} x(t)dt + \int\limits_\alpha^\tau x(t)dt.$$

На промежутке $t \in [\alpha, \alpha + l]$ получаем

$$\| \int\limits_\alpha^{\alpha+T} x(t)dt - \int\limits_0^T x(t)dt\| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T \|x(t+\tau) - x(t) - x_0(t)\|dt + \int\limits_{\alpha+T}^{\tau+T} \|x(t)\|dt + \int\limits_\alpha^\tau \|x(t)\|dt + \int\limits_0^T \|x_0(t)\|dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}T + 2l\Gamma + \int\limits_0^T \|x_0(t)\|dt,$$

где $\Gamma = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t)\|$.

Далее покажем, что последовательность

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt, n \in \mathbb{R},$$

сходится при $n \to \infty$.

По критерию Коши для любых натуральных чисел m и n больше α имеем

$$\|\frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt - \frac{1}{m}\int\limits_0^m x(t)dt\| =$$

$$\|\frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt - \frac{1}{nm}\int\limits_0^{nm} x(t)dt + \frac{1}{nm}\int\limits_0^{nm} x(t)dt - \frac{1}{m}\int\limits_0^m x(t)dt\| \leq$$

$$\frac{1}{nm}\|m\int\limits_0^n x(t)dt - \int\limits_0^{nm} x(t)dt\| + \frac{1}{nm}\|\int\limits_0^{nm} x(t)dt - n\int\limits_0^m x(t)dt\| \leq$$

$$\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^m \|\int\limits_0^n x(t)dt - \int\limits_{(k-1)n}^{kn} x(t)dt\| +$$

$$+\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^n \|\int\limits_{(k-1)m}^{km} x(t)dt - \int\limits_0^m x(t)dt\|.$$

Отсюда получаем

$$\mid \frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt - \frac{1}{m}\int\limits_0^m x(t)dt \mid \leq$$

$$\frac{1}{nm}m(\frac{\varepsilon}{4}m+2lT)+\frac{1}{n}\int\limits_0^n +x_0(t)dt+\frac{1}{nm}n(\frac{\varepsilon}{4}n+2lT)+\frac{1}{m}\int\limits_0^m x_0(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}+2lT(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}).$$

Возьмем N столь большим, чтобы $N > \frac{8lT}{\varepsilon}$.

При $n, m > N$ будем иметь

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^n x_0(t)dt < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{m}\int\limits_0^m x_0(t)dt < \varepsilon,$$

следовательно

$$\mid \frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt - \frac{1}{m}\int\limits_0^m x(t)dt \mid\leq 3\varepsilon.$$

Тогда критерий Коши выполнен и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt.$$

3). Теперь докажем, что

$$M\{x\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt. \tag{1.3}$$

Положим $T = n+q$, где n - натуральное число и $0 \leq q < 1$. Учитывая ограниченность последовательности $\frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt$, при $T \to \infty$ будем иметь

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt - \frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt = (\frac{1}{T}-\frac{1}{n})\int\limits_0^n x(t)dt + \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt =$$

$$= -\frac{q}{T}\frac{1}{n}\int\limits_0^n x(t)dt + \frac{1}{T}\int\limits_0^q x(n+t)dt = 0(\frac{1}{T}),$$

откуда непосредственно вытекает равенство (1.3). □

4. Интегрально убывающие на бесконечности функции

Напомним, что множество функций $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ назовем интегрально убывающими на бесконечности, если

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|ds = 0$$

и такие функции будем обозначать символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 1.2. $C_{0,int}$ *– банахово пространство.*

Непосредственно из определений следует что подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ содержится в $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Следующее утверждение непосредственно следует из определения подпространства $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Лемма 1.14. *Имеет место равенство*

$$C_{0,int}(\mathbb{J}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds = 0, N \in \mathbb{N}\}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ и $N = [\alpha]$, где $[\alpha]$ - целая часть числа α и $\{\alpha\}$ – его дробная часть. Поскольку $|\ \|a\| - -\|b\|\ | \leq \|a - b\|$ для любых векторов a и b из X, получаем, что имеют место оценки:

$$|\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds| \leq$$

$$\leq |\frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{N})\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_N^{N+\{\alpha\}} \|x(t+s)\|ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds| \leq$$

$$\leq |\frac{\{\alpha\}}{\alpha N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + \frac{1}{\alpha}\int\limits_N^{N+\{\alpha\}} \|x(t+s)\|ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds| \leq$$

$$\leq \frac{1}{N^2}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + \frac{1}{N}\int\limits_N^{N+1} \|x(t+s)\|ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}(\frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + \|x\|_\infty) \leq \frac{1}{N}2\|x\|_\infty \to \infty, \alpha \to \infty.$$

$\square$

Пример 1.1. Построим четную функцию y из $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$, не принадлежащую $C_0(\mathbb{R}, X)$. Для ее построения возьмем произвольную последовательность положительных чисел, обладающих свойствами:

1) $t_{n+1} - t_n \geq 2, n \geq 2;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \infty$ и любую ограниченную последовательность (α_n) чисел из $\mathbb{R}$ не сходящуюся к нулю, причем $|\alpha_n| \leq 1, n \in \mathbb{N}$.

Функцию y из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом:

1) $y(t_n) = \alpha_n$, $n \geq 2$;

2) $y(t_{n-1}) = y(t_{n+1}) = 0$, $n \geq 2$;

3) на промежутке $[t_n - 1; t_n + 1]$ функция y линейна и непрерывна;

4) $y = 0$ на $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(t_n - 1; t_n + 1)$.

Докажем, что построенная функция y (полагается что $y(-t) = y(t)$, $t \geq 0$) принадлежит $C_{0,int}(\mathbb{R})$. Ясно, что она не принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{R})$. Используя лемму 1.14, получаем, что для любого $t \geq 0$

$$\int\limits_0^N y(s+t)ds \leq \int\limits_t^{t+N} y(s)ds \leq k_N,$$

где k_N – число точек из последовательности (α_N), содержащихся на промежутке $[t, t+N]$. Из свойства 2) последовательности (t_n) следует что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{k_n}{N} = 0.$$

Ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_t^{t+N} y(s)ds = 0$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $y \in C_{0,int}(\mathbb{R})$.

В частности, приведенным условиям удовлетворяют следующие две последовательности: $t_n = n^2, n \geq 2$ и $\alpha_n = 1$.

Введем в рассмотрение функционал $p : \mathbb{C}_{b,u} \to \mathbb{R}_+$, определенный формулой

$$p(x) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds.$$

Замечание 1.4. Непосредственно из определения подпространства $C_{0,int}$ и определения функционала p следует, что $C_{0,int}$ совпадает с $Kerp = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : p(x) = 0\}$.

Лемма 1.15. *Функционал $p : C_{b,u} \to \mathbb{R}_+$ является полунормой и удовлетворяет оценке $p(x) \leq \|x\|, x \in C_{b,u}$.*

Доказательство. Проверим аксиомы полунормы [35].

Очевидна неотрицательность функционала p, а так же очевидно свойство однородности функционала p.

Докажем неравенство $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, для любых $x, y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$

$$p(x+y) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|(x(s+t)+y(t+s))\|ds \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}(\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds + \|\int\limits_0^\alpha \|y(s+t)\|ds) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds + \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\|\int\limits_0^\alpha \|y(s+t)\|ds = p(x)+p(y).$$

4) Из оценок

$$p(x) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|ds \leq \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_0^\alpha \|x\|ds \leq \|x\|$$

следует, что $p(x) \leq \|x\|, x \in \mathbb{C}_{b,u}$.

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1.16. *Множество функций $C_{0,int}$ обладает следующими свойствами :*

1) является замкнутым линейным подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$;

2) инвариантно относительно сдвигов, т.е. $S(t)x \in C_{0,int}$, для любой функции $x \in C_{0,int}$ и любого $t \in \mathbb{J}$;

3) является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см. [3, 4]), если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Доказательство. 1) Докажем что множество функций $C_{0,int}$ является линейным подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Пусть x, y - любые две функции из $C_{0,int}$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|(\beta x(s+t)+\gamma y(t+s))\|ds \leq$$

$$\leq \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}(\int\limits_0^\alpha\|\beta x(s+t)\|ds+\int\limits_0^\alpha\|\gamma y(t+s)\|ds)\leq$$

$$\leq|\beta|\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha\|x(s+t)\|ds+|\gamma|\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha\|y(t+s)\|ds=0.$$

Докажем замкнутость подпространства $C_{0,int}$.

Пусть последовательность функций (x_n) из $C_{0,int}$ сходится к x_0 из $\mathbb{C}_{b,u}(\mathbb{J},X)$, т.е. $\|x_n-x_0\|_\infty=0$.

Поскольку

$$p(x_0)=p(x_n+x_0-x_n)\leq p(x_n)+p(x_0-x_n)=0+\|x_0-x_n\|_\infty\to 0,$$

то $p(x_0)=0$, т.е. $x_0\in C_{0,int}$ согласно замечанию 1.4.

2) Докажем, что множество функций $C_{0,int}$ инвариантно относительно сдвигов. Для любого $\tau\in\mathbb{J}$ рассмотрим сдвиг $S(\tau)x$ функции $x\in C_{0,int}$ и тогда

$$p(S(\tau)x)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{J}}\|\int\limits_0^\alpha x(t+s+\tau)ds\|\leq p(x)=0.$$

3) Докажем что множество функций $C_{0,int}$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ - модулем. Поскольку функция $x\in C_{0,int}(\mathbb{R},X)$ равномерно непрерывна, то и равномерно непрерывна функция $\tau\mapsto S(-\tau)x:\mathbb{R}\to C_{0,int}(\mathbb{R},X)$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существуют числа $\alpha_1,...,\alpha_2\in\mathbb{C}$ и $\tau_1,...,\tau_2\in\mathbb{R}$ такие, что

$$\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)S(-\tau)xd\tau-\sum_{i=1}^n\alpha_iS(-\tau_i)x\|<\varepsilon.$$

Тогда имеет место оценка

$$p(f*x)=p(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)S(-\tau)xd\tau-\sum_{i=1}^n\alpha_iS(-\tau_i)x+\sum_{i=1}^n\alpha_iS(-\tau_i)x)\leq$$

$$\leq \varepsilon + p(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(-\tau_i)x) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(S(-\tau_i)x) = \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности ε получаем, что

$$p(f * x) = 0,$$

т.е. $f * x \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.17. *Если $y \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$, то для любого числа $t \in \mathbb{R}$ функция $z(s) = \int\limits_{s}^{s+t} y(\tau)d\tau, s \in \mathbb{R}$, также принадлежит $C_{0,int}$.*

Доказательство. Представим функцию z в виде $z = f * y$, где $f = \chi_{[-1,0]}$, тогда

$$z(t) = (\chi_{[-t,0]} * y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-t,0]}(t-\tau)y(\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-t,0]}(s)y(s-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{t}^{0} y(s-\tau)d\tau = \int\limits_{s}^{s+t} y(u)du.$$

Тогда из свойства 3) леммы 1.16 следует что функция $z \in C_{0,int}$. Лемма доказана.

$\square$

Приведем пример медленно меняющейся функции из пространства $C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

Пример 1.2. Построение функции будет осуществляться по последовательности (см. пример 1.1) $t_n = n^2, n \in \mathbb{N}$ и последовательности

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{, если n четное,} \\ -1 & \text{, если n нечетное } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Определим функцию $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, формулой

$$z = \int\limits_0^s y(\tau)d\tau, s \in \mathbb{R}$$

где $y \in C_{0,int}(\mathbb{R})$ – функция из примера 1.1, построенная по рассматриваемым последовательностям (α_n) и (t_n) Проверим, что она принадлежит пространству $C_{sl,int}$. Из равенств

$$z(s+t) - z(s) = \int\limits_0^{s+t} y(\tau)d\tau - \int\limits_0^{s} y(\tau)d\tau = \int\limits_s^{s+t} y(\tau)d\tau, s \in \mathbb{R}$$

и свойства 3) леммы 1.16 следует, что функция $S(t)z - z$ принадлежит $C_{0,int}$, т.е. $z \in C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax + z(t), t \in \mathbb{R}, z \in C_{0,int}, (\mathbb{R}, X). \qquad (1.4)$$

Предполагается, что множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_N\}$ состоит из простых собственных значений. Здесь символом $\sigma(A)$ обозначается спектр оператора A, и спектр оператора A обладает свойством $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, ..., i\lambda_N\}$, где $i\lambda_1, ..., i\lambda_N$ - простые собственные значения.

Следующая теорема была опубликована в [68].

Теорема 1.3. *Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (1.4) является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_{\infty,int}(\mathbb{J}, X)$, которая допускает представление вида*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R},$$

где $x_k \in C_{sl,int}, 1 \le k \le N$.

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(t+1) = Bx(t) + y(t), t \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

где $y \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$, где $B \in EndX$ имеет вид $B = e^A$. Тогда $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2 ..., \gamma_m\}$, где $\gamma_k = e^{i\lambda_k}, 1 \leq k \leq N$ и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Любое решение уравнения (1.4) удовлетворяет равенству (см. [25])

$$x(t) = e^{A(t-s)}x(s) + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)}z(\tau)d\tau, s \leq t, s, t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$x(t+1) = e^A x(t) + \int\limits_t^{t+1} e^{A(t+1-\tau)}z(\tau)d\tau, t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, ограниченное решение уравнения (1.5) будет совпадать с решением уравнения (1.4), где $B = e^A$, $z \in C_{0,int}$ и $y(t) = \int\limits_t^{t+1} e^{A(t+1-\tau)}z(\tau)d\tau$.

Спектр оператора $B \in EndX$ представим в виде

$$\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out},$$

где $\sigma_{in} = \{\gamma \in \sigma(B) : |\gamma| < 1\}$ - совокупность собственных значений, лежащих внутри окружности, $\sigma_{out} = \{\gamma \in \sigma(B) : |\gamma| > 1\}$ - совокупность собственных значений, лежащих вне окружности. В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_{in}$, $\mathcal{P}_{out}$, которые соответственно построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_{in}, \sigma_{out}$. Таким образом, $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{in} + \mathcal{P}_{out}$. Эти проекторы индуцируют разложение $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$ пространства X, где $X_0 = Im\mathcal{P}_0, X_{in} = Im\mathcal{P}_{in}, X_{out} = Im\mathcal{P}_{out}$. Эти подпространства являются инвариантными для оператора B. Обозначим $B_0 = B|X_0, B_{in} = B|X_{in}, B_{out} = B|X_{out}$. Таким образом, $B = B_0 \oplus B_{in} \oplus B_{out}$ относительно построенного разложения пространства X. Применяя проектор $\mathcal{P}_{in}$ к обеим частям уравнения (2.4), получим функцию $x_{in} = \mathcal{P}_{in}x$, удовлетворяющую равенству

$$S(1)x_{in}(t) = B_{in}x_{in}(t) + y_{in}(t), y_{in} = \mathcal{P}_{in}y \in C_{0,int}, t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует, что

$$(I - B_{in}S(-1))x_{in} = S(-1)y_{in}. \tag{1.7}$$

Поскольку $\|S(-1)\| = 1$, $B_{in}S(-1)x_{in}(t) = S(-1)B_{in}x_{in}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и спектральный радиус $r(B_{in})$ оператора B_{in} меньше единицы, то оператор $I - B_{in}S(-1)$ обратим и из (1.7) следует, что $x_{in} = (I - B_{in}S(-1))^{-1}S(-1)y_{in} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{in}^k S(-k-1)y_{in}$. Ясно, что $x_{in} \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Аналогичный результат получим при применении проектора $\mathcal{P}_{out}$ к уравнению (1.5):

$$(S(1)x_{out})(t) = B_{out}x_{out}(t) + y_{out}(t), y_{out} = \mathcal{P}_{out}y \in C_{0,int}. \tag{1.8}$$

Оператор B_{out} обратим и $\sigma(B_{out}^{-1}) = \{\frac{1}{\gamma}, \gamma \in \sigma_{out}\}$, т.е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора S_N с B_{out} из (1.7), получим равенства

$$S(1)B_{out}^{-1}x_{out}(t) = x_{out}(t) + B_{out}^{-1}y_{out}(t),\ t \in \mathbb{R},$$

или

$$(I - S(1)B_{out}^{-1})x_{out}(t) = -B_{out}^{-1}y_{out}(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом,

$$x_{out} = -(I - S(1)B_{out}^{-1})^{-1}B_{out}^{-1}y_{out} =- \sum_{k=0}^{\infty}(B_{out}^{-1}S(1))^k B_{out}^{-1}y_{out},$$
$$y_{out} \in C_{0,int}.$$

Из этой формулы следует, что $x_{out} \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Проектор P_0 можно представить в виде

$$P_0 = P_1 + ... + P_N,$$

где $P_k \in End X_0$ - проектор, и

$$AP_k = \gamma_k P_k,$$

где $|\gamma_k| = 1, 1 \leq k \leq N$.

Применим проектор P_0 к разностному уравнению (1.5) и далее применим проектор P_k, получим

$$P_k x_0(t+1) = P_k B_0 x_0(t) + P_k y_0(t), t \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq N$$

где $x_0(t) = P_0 x(t), x_k(t) = P_k x_0(t)$ и $y_0(t) = P_0 y(t)$, где $t \in \mathbb{R}$. Пусть $y_k(t) = P_k y_0(t), t \in \mathbb{R}$, т.е. $y_k \in C_{0,int}$ и поэтому $\widetilde{y}_k = 0$. Тогда сделав замену $x_k(t) = e^{-i\lambda_k t} x_k(t), t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda_k < N$, получим $\widetilde{x}_k(t+1) = \widetilde{x}_k(t) + \widetilde{y}_k(t)$,$t \in \mathbb{R}$,$\widetilde{x}_k$ - медленно меняющаяся на бесконечности функция, а x_k отличается от $\widetilde{x}_k$ на множитель $e^{i\lambda_k t} = y_0(t), t \in \mathbb{R}$, т.е. $x_0 \in AP_{\infty,int}(\mathbb{R}, X)$. В итоге получаем, что функция x представима в виде $x = x_0 + x_{in} + x_{out}$. Следовательно $x \in AP_{\infty,int}(\mathbb{R}, X)$.

$\square$

5. Почти периодические векторы из банахова $L^1(\mathbb{R})$ - модуля

В этом разделе приводятся некоторые результаты о почти периодических векторах (см. [3, 4]), которые существенно используются при построение теории почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$.

Пусть $T : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$ сильно непрерывное изометрическое представление, где $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство. Далее $\mathcal{X}$ рассматривается в качестве $L^1(\mathbb{R})$-модуля (см. гл.1 §1).

Определение 1.19. Ненулевой вектор x_0 из $\mathcal{X}$ называется *собственным вектором представления* $T : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$, если существует вещественное число λ_0 такое,что $T(t)x_0 = e^{i\lambda_0 t}x_0, t \in \mathbb{R}$.

Определение 1.20. Вектор x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$ называется *почти периодическим вектором*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε-периодов $\Omega(\varepsilon, x)$ вектора x относительно плотно на $\mathbb{R}$;

2) множество $\{T(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $\mathcal{X}$;

3) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0$, $t \in \mathbb{R}$ – непрерывная почти периодическая функция, т.е. $\varphi \in AP(\mathbb{R}, X)$;

4) если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют собственные векторы $x_1, ..., x_N$ представления T такие, что

$$\|x - \sum_{k=1}^{N} x_k\| < \varepsilon.$$

Замечание 1.5. Пусть $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $T = S$ – группа сдвигов функции из $\mathcal{X}$, то функция $x_0 \in \mathcal{X}$ является собственной функцией представления $T = S$ тогда и только тогда, когда она представлена в виде $x_0(t) = y_0 e^{i\lambda_0 t}, t \in \mathbb{R}$, где y_0 - некоторый вектор из X.

Замечание 1.6. Свойство 1) из определения 2.20 эквивалентно определению Бора (см. определение 1.15), свойство 2) эквивалентно определению Бохнера и наконец, свойство 4) переписывается в виде $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k^0 e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon$, где $x_k^0, k = \overline{1, N}$ – векторы из X, что эквивалентно аппроксимационному определению (см. определение 1.17).

Лемма 1.18. *Если x_0 – собственный вектор, то x_0 является почти периодическим вектором.*

Доказательство. Так как x_0 – собственный вектор,то $T(t)x_0 = e^{i\lambda_0 t}x_0, t \in \mathbb{R}$. Используя критерий Бохнера рассмотрим произвольную последовательность (t_n) из $\mathbb{R}$. Тогда

$$T(t_n)x_0 = e^{i\lambda_0 t_n}x_0, n \geq 1, \lambda_0 \in \mathbb{R},$$

где последовательность $(e^{i\lambda_0 t_n})$ находится в единичном круге $\mathbb{T}$. Тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(e^{i\lambda_0 t_{n_k}})$, следовательно последовательность векторов $x_k = e^{i\lambda_0 t_{n_k}}x_0$ является сходящейся. Таким образом, вектор x – почти периодический вектор. □

Замечание 1.7. Непосредственно из определения 1.20 следует, что вектор $x \in \mathcal{X}$ почти периодичен, если отображение $t \mapsto T(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ почти периодично по Бору и является непрерывным.

Доказательство. Для произвольной последовательности чисел (t_n) из $\mathbb{R}$ рассмотрим последовательностей функций $\varphi_x(t + t_n), t \in \mathbb{R}, n \geq 1$. Поскольку $\varphi_x(t + t_n) = T(t + t_n)x = T(t)T(t_n)x$, где $\{T(t_n)x, n \geq 1\}$ – предкомпактное множество, тогда множество $S(t_n)\varphi_x, n \geq 1$ – предкомпактно в $C_b(\mathbb{R}, X)$. □

Лемма 1.19. *Линейная комбинация собственных векторов представления T является почти периодическим вектором.*

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k x_k$, где $x_k, k = 1, ..., N$ – собственные векторы и $c_k \in \mathbb{C}, k = 1, ..., N$, тогда

$$T(t)x = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}.$$

Данная функция является почти периодической и поэтому вектор x - почти периодический вектор в силу замечания 1.7. $\square$

Подмодуль почти периодических векторов из $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X,T) обозначим через $AP\mathcal{X}$. Если $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ и $T = S$, то $AP\mathcal{X} = APC_{b,u}(\mathbb{R},X)$.

В статьях [9, 12] установлена (существенно используемая в дальнейшем)

Теорема 1.4. *Пусть множество $\Lambda(x)$ для вектора $x \in \mathcal{X}$ не имеет предельных точек на $\mathbb{R}$. Тогда $x \in AP\mathcal{X}$.*

Из сделанных замечаний и лемм следует

Теорема 1.5. *Все три условия (из определения 1.20) почти периодичности векторов из $\mathcal{X}$ эквивалентны.*

6. Свойства медленно меняющихся на бесконечности функций

В этом параграфе используются ранее введенные пространства. Рассмотрим пространство $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J},X)$, подпространство $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J},X)$ и фактор пространство $\mathcal{X} = C_{b,u}/\mathcal{C}_0$. Напомним, что символом $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$ обозначается одно из двух подпространств $C_{sl}(\mathbb{J},X)$, $C_{sl,int}(\mathbb{J},X)$.

Пример 1.3. Построим функцию y из $C_{sl,int}(\mathbb{R},X)$, но не принадлежащую пространству $C_{sl}(\mathbb{R},X)$. Для ее построения возьмем произвольную последовательность (t_n) положительных чисел, обладающих свойствами

1) $t_{n+1} - t_n \geq 2, n \geq 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \infty$.

И любую последовательность (t'_n) чисел из $\mathbb{R}$ такую, что:

1) $t_n < t'_n$, для любого $n \in \mathbb{N}$;

2) $t'_n < t_n + 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(t'_n - t_n) = \infty$.

Функцию y из $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом:

1) на промежутке $[t_n; t'_n]$ функция $y = 1$, $n \geq 0$;

2) на промежутке $(t'_n; t_n + 1)$ и $(t'_n + 1; t_n + 2)$ функция линейна и непрерывна ;

3) на промежутке $[t_n + 1; t'_n + 1]$ функция $y = -1$.

Докажем что построенная функция y (полагается что $y(-t) = y(t), t \geq 0$) принадлежит $C_{sl,int}$.

Определим функцию $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формулой

$$z = \int\limits_0^s y(\tau)d\tau.$$

Проверим, что она принадлежит пространству $C_{sl,int}$. Из равенств

$$z(s+t) - z(s) = \int\limits_0^{s+t} y(\tau)d\tau - \int\limits_0^{s} y(\tau)d\tau = \int\limits_s^{s+t} y(\tau)d\tau, s \in \mathbb{R},$$

и свойства 3) леммы 1.16 следует, что функция $S(t)z - z$ принадлежит $C_{0,int}$, т.е. $z \in C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

Отметим что медленно меняющиеся функции относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ рассматривались в работе [4, 5, 64]

Замечание 1.8. Непосредственно из определения медленно меняющейся на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$ следует, что любое число $\omega \in \mathbb{J}$ является ее ε-периодом.

Теорема 1.6. *Пусть $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ – ограниченная функция, являющаяся определенным интегралом от медленно меняющейся на бесконечности функции $y \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}, X)$, т.е.*

$$\dot{x}(t) = y(t).$$

Тогда $x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}, X)$.

Доказательство. 1) Вначале предположим, что $y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$. Для любого числа $a \in \mathbb{R}$ из условия дифференцируемости функции $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ следует (см. [28])

$$\|x(t+a) - x(t)\| \leq |a| \max_{\theta \in [t;t+a]} \|y(\theta)\| \to 0, |t| \to \infty.$$

Следовательно функция $x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}, X)$.

2) Пусть $y \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}, X)$, но не принадлежит $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$. Из условия что y не из $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ следует, что существует последовательность $(t_n) \in \mathbb{J}$ со свойствами:

1). $\lim\limits_{n\to\infty} |t_n| = \infty$;

2). $\|y(t_n)\| \geq b \geq 0, n \geq 1$, для некоторого числа $b > 0$.

Поскольку функция $y : \mathbb{J} \to X$ из $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J}, X)$,то существует последовательность (t'_n), обладающая свойствами:

1). $t_n < t'_n < t_{n+1}, n \geq 1$;

2). $\lim\limits_{n\to\infty} (t_{n+1} - t'_n) = \infty$;

3). $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{0 \leq s \leq t'_n - t_n} \|y(t_n + s) - y(t_n)\| = \varepsilon_n \to 0$.

Тогда

$$x(t) = x(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t} y(\tau) d\tau$$

или

$$x(t'_n) = x(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t'_n} y(\tau) d\tau =$$

$$= x(t_n) + y(t_n)(t'_n - t_n) + \int\limits_{t_n}^{t'_n} (y(\tau) - y(t_n)) d\tau.$$

Первое слагаемое является ограниченной последовательностью, второе стремится к бесконечности, т. к. $(t'_n - t_n) \to \infty$, и $\|y(t_n)\| \geq b > 0$. Для третьего слагаемого из указанных свойств последовательности t_n и t'_n следует, что существует число N такое, что $\sup\limits_{t_n \leq \tau \leq t'_n} \|y(\tau) - y(t_n)\| \leq \frac{a}{2}$ для $n > N$.

Тогда

$$\|y(t_n)(t'_n - t_n)\| \geq a(t'_n - t_n)$$

и

$$\| \int\limits_{t_n}^{t'_n} (y(\tau) - y(t_n)) d\tau \| \leq \int\limits_{t_n}^{t'_n} \|y(\tau) - y(t_n)\| d\tau \leq \frac{a}{2}(t'_n - t_n).$$

Следовательно

$$\|y(t_n)(t'_n - t_n) + \int\limits_{t_n}^{t'_n} (y(\tau) - y(t_n)) d\tau\| \geq$$

$$\geq |\|y(t_n)(t'_n - t_n)\| - \| \int\limits_{t_n}^{t'_n} (y(\tau) - y(t_n)) d\tau\|| \geq \frac{a}{2}|t'_n - t_n|$$

Получаем что функция x не может быть ограничена.

$\square$

Лемма 1.20. $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$ – *замкнутое линейное подпространство из* $C_b(\mathbb{R}, X)$, *инвариантное относительно операторов сдвига* $S(t) : C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \to C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для любых $\alpha, \gamma, \beta \in \mathbb{R}$ и любых функций $x, y \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$ справедливо равенство

$$S(\alpha)(\gamma x + \beta y) - (\gamma x + \beta y) = \gamma(S(\alpha)x - x) + \beta(s(\alpha)y - y) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X).$$

Таким образом,$(\gamma x + \beta y) \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$. Покажем теперь, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R})$ функция $S(t_0)x$ принадлежит $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R})$.

Из представления

$$S(\alpha)S(t_0)x - S(t_0)x = S(t_0)(S(\alpha)x - x), t_0, t \in \mathbb{R},$$

и сильной непрерывности оператора сдвига $S(t_0)x$ следует, что $S(t_0)x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$, а значит, пространство $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$ инвариантно относительно оператора сдвига.

Пусть последовательность $(x_n), n \in \mathbb{N}$, из $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$ сходится к $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha)x_0 - x_0 = \lim_{n\to\infty}(S(\alpha)x_n - x_n) \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X),$$

в силу замкнутости подпространства функций $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $x_0 \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$.

□

Лемма 1.21. *Подпространство $C_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ являются замкнутыми подмодулями из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.*

Доказательство. Подпространство $C_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$ инвариантно относительно операторов сдвига (лемма 1.20). Свертка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)x(t-s)ds = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)(S(-t)x)(s)ds, t \in \mathbb{R},$$

функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ и функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ является пределом линейных комбинаций сдвигов функции x. Поэтому $f * x \in C_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$, если $x \in C_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$.

Для $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ доказательство производится аналогично. □

Лемма 1.22. *Любое пространство $C_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ функций является замкнутым подпространством в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.*

Лемма 1.23. *Пространство* $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J},X)$ *– банахово пространство.*

Доказательство. Возьмем последовательность функций (x_n) из $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$, сходящуюся в $C_{b,u}$ к x_0. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S(\alpha)x_n - x_n) = S(\alpha)x_0 - x_0.$$

Так как $S(\alpha)x_n - x_n \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J},X)$ и $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J},X)$ – замкнутое подпространство, то $S(\alpha)x_0 - x_0 \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J},X)$. Из чего следует, что $x_0 \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{J},X)$. □

Лемма 1.24. *Пространство* $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}_+,X)$ *несепарабельно.*

Доказательство. Возьмем семейство функций

$\{x_\alpha, \alpha \geq 0\}$ из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ вида: $x_\alpha(t) = e^{i\alpha\ln(1+t)}, \alpha \geq 0, t \geq 0$.

Покажем, что $\{x_\alpha, \alpha \geq 0\} \subset C_{sl}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}_+)$. Для всех $\tau \in \mathbb{R}_+$ справедливы равенства:

$$\sup_{t\geq 0}\|x_\alpha - x_\beta\| = \sup_{t\geq 0}\|e^{i\alpha ln(1+t)} - e^{i\beta ln(1+t)}\| =$$

$$= \sup_{t\geq 0}\|e^{iln(1+t)\frac{\alpha}{\beta}} - 1| = \sqrt{2}, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно, $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}_+)$ содержит несчетный набор функций $\{x_\alpha, \alpha \geq 0\}$, которые являются линейно независимыми. При этом расстояние между любой парой таких функций больше или равно двум. Отсюда следует, что $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}_+)$ несепарабельно.

□

Лемма 1.25. *Пространство* $\mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R},X)$ *является банаховым* $L^1(\mathbb{R})$*-модулем, структура которого определяется при помощи свертки функций*

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)ds, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R},X).$$

Доказательство. Покажем что $f * x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$, для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$. Из представления $(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t - s)x(s)ds, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R})$, непрерывности отображения $\tau \mapsto S(-\tau)x : \mathbb{R} \to C_{b,u}(\mathbb{R})$ и определения интеграла следует, что свертка функций $f*x$ является пределом в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ линейных комбинаций сдвигов функции x. Для любой функции $x_0 \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ функция

$$y_0 = S(\alpha)f * x_0 - f * x_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)S(-\tau)(S(\alpha)x_0 - x_0)d\tau =$$
$$= (f * (S(\alpha)x_0 - x_0))(t), t \in \mathbb{R},$$

есть предел в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ линейных комбинаций сдвигов функции $S(\alpha)x_0 - x_0$, принадлежащей $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, функция y_0 принадлежит $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, в силу замкнутости подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

$\square$

7. Почти периодические на бесконечности функции

Далее символом $\mathcal{X}$ обозначим фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, являющееся банаховым пространством с нормой

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{y \in x + \mathcal{C}_0} \|y\|,$$

где $\widetilde{x} = x + \mathcal{C}_0, x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — класс эквивалентности. В пространстве $\mathcal{X}$ определим сильно непрерывную группу изометрий $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$ формулой

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x},\ t \in \mathbb{R},\ \widetilde{x} \in \mathcal{X},$$

где $S(t)x$ – левый сдвиг функции x для $t \geq 0$. Для $t < 0$ символ $\widetilde{S(t)x}$ обозначает класс эквивалентности, содержащий функцию $x_t \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$x_t(s) = \begin{cases} x(s+t), & s+t > 0, \\ -t^{-1}x(0)(s), & s+t \leq 0, \ s \geq 0. \end{cases}$$

Лемма 1.26. *Представление* $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$ *сильно непрерывно и изометрично*

$$\|\widetilde{S}(t)\widetilde{x}\| = \|\widetilde{x}\|, x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X), t \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Докажем равенство (1.9) при $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ (при $\mathbb{J} = \mathbb{R}$ утверждение очевидно). Так как

$$x_t(s) - x(s) = \begin{cases} x(s+t) - x(s) & t \geq 0, \\ -\frac{sx(0)}{t} + \frac{(s-t)x(0)}{t} & t \leq 0, \end{cases}$$

то функция $t \mapsto \widetilde{S(t)x} : \mathbb{R} \to X$ непрерывна.

Представление $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$ изометрично, так как

$$\|\widetilde{S}(t)\widetilde{x}\| = \inf_{\upsilon_0 \in \mathcal{C}_0} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|y(s+t) - \upsilon_0(s)\| = \inf_{\upsilon_0 \in \mathcal{C}_0} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|y(s) - \upsilon_0(s)\| = \|\widetilde{x}\|.$$

Лемма доказана. □

Структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля на $\mathcal{X}$ определяется с помощью представления $\widetilde{S}$ формулой

$$f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\widetilde{x}\, d\tau, \ f \in L^1(\mathbb{R}), \ \widetilde{x} \in \mathcal{X}.$$

Теперь дадим последнее (четвертое) определение почти периодической на бесконечности функции.

Определение 1.21. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$ исчезающих на бесконечности функций, если класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathcal{C}_0$ является почти периодическим вектором в пространстве $\mathcal{X}$ относительно изометрического представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$.

В статьях [6, 7] сформулированное определение для $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X) = C_0(\mathbb{J}, X)$ является основным при изучении почти периодических на бесконечности функций. В работах [63, 62, 65, 66] изучались свойства почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$.

В банаховом пространстве $AP(\mathcal{X}) = AP(\mathcal{X}, T)$ почти периодических векторов существует и единственен линейный оператор $\mathcal{J} \in End\,AP(\mathcal{X})$ со свойствами:

1) $\|\mathcal{J}\| = 1$;

2) $\mathcal{J}(T(t)x) = \mathcal{J}x$, $t \in \mathbb{J}$, $x \in \mathcal{X}$.

Для любого вектора x из $AP(\mathcal{X})$ функцию $\widehat{x}_B : \mathbb{R} \to AP(\mathcal{X})$, $\widehat{x}_B(\lambda) = \mathcal{J}(T_\lambda x)$, где представление $T_\lambda(t) = T(t)e^{-i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, назовем *преобразованием Бора* почти периодического вектора x. Ее носитель $\operatorname{supp}\widehat{x}_B$ есть не более чем счетное множество $\operatorname{supp}\widehat{x}_B = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, причем имеют место равенства

$$T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k,\ t \in \mathbb{R},\ k \geq 1,$$

где векторы x_k, $k \geq 1$, являются собственными векторами представления T (а также генератора iA группы операторов T, т.е. $iAx_k = i\lambda_k x_k$, $k \geq 1$), причем $\Lambda(x_k) = \{\lambda_k\}$, $k \geq 1$. *Спектром Бора* почти периодического вектора x называется множество $\Lambda_B(x) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$.

Рядом Фурье [1, 33] вектора $x \in AP(\mathcal{X})$ назовем ряд

$$x \sim \sum_{k\geq 1} x_k. \tag{1.10}$$

Отметим, что если этот ряд сходится, то $x = \sum\limits_{k \geq 1} x_k$.

Лемма 1.27. *Для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любого почти периодического вектора $x \in AP(\mathcal{X}, T)$ с рядом Фурье вида (1.10) вектор fx является почти периодическим с рядом Фурье вида*

$$fx \sim \sum_{k \geq 1} \widehat{f}(\lambda_k) x_k.$$

Ограниченную последовательность $(e_n), n \in \mathbb{N}$, из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ назовем *ограниченной аппроксимативной единицей* если $\lim_n e_n * f = f$, для любой функции f из $L^1(\mathbb{R})$ и $\widehat{e}_n(0) = 1, n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.4. Приведем пример ограниченной аппроксимативной единицы. Рассмотрим функцию $\widehat{e}_0$ из алгебры $\widehat{L}^1(\mathbb{R})$ преобразований Фурье функций из $L^1(\mathbb{R})$ (с поточечным умножением), имеющую компактный носитель $\operatorname{supp} \widehat{e}_0$, на промежутке $[-1, 1]$ и для которой $\widehat{e}_0(0) = 1$. Тогда последовательность функций (e_n), $n \geq 1$ вида

$$e_n(t) = n e_0(nt),\ t \in \mathbb{R},$$

является ограниченной аппроксимативной единицей в алгебре $L^1(\mathbb{R})$, причем $\|e_n\| = \|e_0\|$, $n \geq 1$.

В следующей лемме используется ограниченная аппроксимативная единица (e_n), $n \geq 1$, из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, которая построена выше (также см. [3, 9, 10, 11]).

Из леммы 1.27 следует

Лемма 1.28. *Пусть x — почти периодический вектор из $AP(\mathcal{X}, T)$ со спектром Бора $\Lambda_B(x) = \{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$, где последовательность (λ_n), $n \geq 1$, обладает свойством $\lim\limits_{n \to \infty} |\lambda_n| = \infty$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \|x - e_n x\| = \lim_{n \to \infty} \|x - \sum_{|\lambda_k| < n} \widehat{e}_0(\frac{\lambda_k}{n}) x_k\|,$$

где векторы x_k, $k \geq 1$, взяты из представления вектора x в ряд Фурье (1.10).

Теорема 1.7. *Все определения почти периодической на бесконечности функции (определения 1.15, 1.17, 1.18, 1.21) эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство

$$\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X),$$

и определенную выше группу изометрий $T = \widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$. Для этого представления определение 1.17 соответствует свойству 4) из определения 1.20. Поскольку все свойства из определения 1.20 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 1.15, 1.17 и 1.18 соответственно.

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ и $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$, – класс эквивалентности построенный по функции x. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\widetilde{x}, \varepsilon)$ ε-периодов класса $\widetilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 1.17 и свойства 2) определения 1.20 непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 1.18 и свойства 3) из определения 1.20. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\widetilde{y})$ класса эквивалентности $\widetilde{y} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{y} = y + \mathcal{C}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функцию $y \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ можно представить в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{J}$, где $y_0 \in (\mathcal{C}_0)_{sl}$.

Если $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$ для любого $t \in \mathbb{J}$ (см. лемму 1.4). Следовательно, $\Lambda(\widetilde{y_0}) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$,

$s \in \mathbb{J}$, и поэтому $\widetilde{S}(t)\widetilde{y}_0 = \widetilde{y}_0$ для любого $t \in \mathbb{J}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, $t \in \mathbb{J}$, т.е. $y_0 \in (\mathcal{C}_0)_{sl}$.

И обратно: если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{J}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$, $t \in \mathbb{J}$, и поэтому из леммы 1.4 получим, что $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$.

Теорема доказана. □

Напомним, что подпространство из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ почти периодических на бесконечности функций относительно $\mathcal{C}_0$ обозначалось символом $AP_\infty(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$. Замкнутость этого пространства следует, например, из аппроксимационного определения 1.18.

Отметим следующие включения:

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X) \subset \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0} \subset AP_\infty(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0),$$

$$AP(\mathbb{J}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0).$$

Определение 1.22. Множество $\Lambda(\widetilde{x})$, где $\widetilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *спектром функции x на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций и будет обозначаться символом $\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0)$.

Теорема 1.8. *Если спектр функции x на бесконечности $\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0)$ не имеет предельных точек, то $x \in AP(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ в качестве банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (структура которого определяется представлением $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$). Тогда множество $\Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda_\infty(x)$ не имеет предельных точек на $\mathbb{R}$ и, следовательно, из теоремы 1.4 вытекает, что класс $\widetilde{x}$ есть почти периодический вектор из $AP(\mathcal{X})$, т.е. $x \in AP_\infty(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$. Теорема доказана. □

Этот результат играет важную роль при получении спектральных критериев почти периодичности на бесконечности ограниченных решений дифференциальных уравнений.

8. Специальный класс почти периодических на бесконечности функций

В данном разделе используется следующая теорема Винера (см. [24]):

Теорема 1.9. *Пусть $\mathcal{I}$ — идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Он совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$, если функции $\widehat{\varphi}$, $\varphi \in \mathcal{I}$, разделяют точки из $\mathbb{R}$, т.е. для любых чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ найдется функция $\varphi \in \mathcal{I}$ такая, что $\widehat{\varphi}(\lambda_1) \neq \widehat{\varphi}(\lambda_2)$.*

Рассмотрим множество функций $\{f_\alpha,\ \alpha > 0\}$ из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Их преобразования Фурье имеют вид $\widehat{f_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\alpha + i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, поэтому они разделяют точки из $\mathbb{R}$, т.е. для любых чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ справедливо условие $\widehat{f_\alpha}(\lambda_1) \neq \widehat{f_\alpha}(\lambda_2)$. Тогда из теоремы 1.9 следует, что наименьший замкнутый идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащий множество $M_\alpha = \{f_\alpha\}$, совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$.

Наряду с $C_0(\mathbb{R}, X)$ и $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)\}.$$

Такие функции также будем называть *исчезающими на бесконечности.*

Пример 1.5. Следующие функции принадлежат пространству $\mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$:

1) $x_1(t) = e^{it^2}$;

2) $x_2(t) = \sin at^2$; 3) $x_3(t) = \cos at^2$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Выберем произвольное $\alpha > 0$ и покажем, что $x_1 \in \mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, т.е. что $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$. Действительно,

$$(f_\alpha * x_1)(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha(t-\tau)} e^{i\tau^2} d\tau =$$

$$- \int\limits_t^{-\infty} e^{-\alpha s} e^{i(t-s)^2} ds =$$

$$= - \int\limits_t^{-\infty} e^{-\alpha s} e^{it^2 - i2ts + is^2} ds = -e^{-it^2} \int\limits_t^{-\infty} e^{is^2 - is(-\alpha i + 2t)} ds =$$

$$= e^{it^2} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{i((s - \frac{-\alpha i + 2t}{2})^2 - \frac{(-\alpha i + 2t)^2}{4})} ds =$$

$$= e^{it^2} e^{-i\frac{(-\alpha i + 2t)^2}{4}} \int\limits_{\frac{-\alpha i}{2}}^{\infty} e^{iy^2} dy = e^{\frac{i\alpha^2}{4}} e^{-\alpha t} \int\limits_{\frac{-\alpha i}{2}}^{\infty} e^{iy^2} dy =$$

$$= e^{\frac{i\alpha^2}{4}} e^{-\alpha t} (\int\limits_{\frac{-\alpha i}{2}}^{0} e^{iy^2} dy + \int\limits_0^\infty e^{iy^2} dy) =$$

$$= e^{\frac{i\alpha^2}{4}} e^{-\alpha t} \Big(\frac{(1+i)t\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} erf\Big(\frac{(1+i)t\alpha}{2\sqrt{2}} \Big) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \Big),$$

где символом erf обозначена функция ошибок, задаваемая формулой $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\tau^2} d\tau$, $z \in \mathbb{C}$. Отсюда получаем, что

$(f_\alpha * x_1)(t) = e^{-\alpha t} e^{\frac{i\alpha^2}{4}} \left(\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\, erf \left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}} \right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \right)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$.

Определение 1.23. Далее символом $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое (с нормой из C_b) подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, обладающих свойствами:

1) $S(t)x \in \mathbf{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой функции $x \in \mathbf{C}_0$;

2) $C_0(\mathbb{R},X) \subset \mathbf{C}_0(\mathbb{R},X) \subset \mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R},X)$, $\alpha > 0$;

3) $e_\lambda x \in \mathbf{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Каждое такое подпространство будем называть подпространством *исчезающих на бесконечности функций.*

Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный ограниченный оператор с областью определения $D(A)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \psi(t), t \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

где $\psi \in C_b(\mathbb{R},X)$.

Теорема 1.10. *Пусть функция ψ из уравнения (1.12) принадлежит пространству $\mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R},X)$ и для спектра $\sigma(A)$ оператора $A \in End\,X$ выполнено условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_0, i\lambda_1 ..., i\lambda_N\}$, где $i\lambda_0, ..., i\lambda_N$, – полупростые собственные значения оператора A. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (1.12) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R},X)$.*

Доказательство. Пусть $x \in C_b(\mathbb{R},X)$ — ограниченное решение дифференциального уравнения (1.11) с функцией $\psi \in \mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R},X)$. Тогда функция x удовлетворяет уравнению

$$f_\alpha * \dot{x} = A(f_\alpha * x) + f_\alpha * \psi,$$

где функция $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ задается формулой (1.11). Учитывая, что функция $\varphi = f_\alpha * \psi$ принадлежит $C_0(\mathbb{R},X)$ (см. пример 1.5), получаем, что функция $y = f_\alpha * x$ удовлетворяет условиям теоремы 2 в [58], сформулированной для дифференциального уравнения (1.11) с правой частью из C_0. Следовательно, y принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R},X)$. Поскольку преобразования Фурье $\widehat{f_\alpha}$ разделяют точки из $\mathbb{R}$. Тогда из теоремы 1.9 следует, что наименьший замкнутый идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащий множество $M_\alpha = \{f_\alpha\}$, совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$. Но тогда $e_n * x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$, где $(e_n,\, n \in \mathbb{N})$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. А, значит, $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. $\square$

Теорема 1.11. *Пусть функция ψ из уравнения (1.12) принадлежит пространству $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и для оператора $A \in End\, X$ выполнено условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_0, i\lambda_1 ..., i\lambda_N\}$, где $i\lambda_0, ..., i\lambda_N$, – полупростые собственные значения оператора A. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (1.12) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.*

Утверждение теоремы следует непосредственно из определения 1.23.

9. Однородные пространства функций

Через $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{J}, X)$ обозначим линейное пространство измеримых на $\mathbb{R}$ функций $x : \mathbb{J} \to X$ таких, что для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}$ конечна величина

$$\int\limits_K \|x(t)\| dt < \infty.$$

Определение 1.24. Функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ отнесем к *пространству Степанова* S^p, $p \in [1, \infty)$, если

$$\|x\|_{\mathrm{S}^p} = \sup_{t \in \mathbb{J}} \Big(\int\limits_0^1 \big\| x(s+t) \big\|^p \,\mathrm{d}s \Big)^{1/p} < \infty. \tag{1.13}$$

Определение 1.25. *Однородным* [6] называется банахово пространство функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$, если

1) $\mathcal{F}$ непрерывно вложено в пространство Степанова S^1;

2) для всех $t \in \mathbb{J}$ и $x \in \mathcal{F}$ справедливо $S(t)x \in \mathcal{F}$, где оператор сдвига $\big(S(t)x\big)(s) = x(s+t)$ является изометрией из $\mathrm{End}\,\mathcal{F}$;

3) для любого вектора $x \in X$ и любого оператора $B \in \operatorname{End} X$ функция $y(t) = B\big(x(t)\big), t \in \mathbb{J}$ принадлежит $\mathcal{F}$ и имеет место оценка $\|y\| \leqslant \|B\| \cdot \|x\|$;

4) для $x \in \mathcal{F}$ и $g \in L^1(\mathbb{R})$ свёртка $g * x : L^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

$$(g * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(s)x(t-s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathbb{R}} g(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

принадлежит $\mathcal{F}$ и $\|g * x\| \leqslant \|g\|_1 \|x\|$;

5) для $x \in \mathcal{F}$ такого, что $f * x = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$, справедливо $x = 0$;

6) для всех $x \in \mathcal{F}$ и $\varphi \in C_{b,u}$ имеет место $\varphi x \in \mathcal{F}$. А также, $\|\varphi x\|_{\mathcal{F}} \leqslant \sup \varphi \cdot \|x\|$.

Отметим, что из определения 1.25 следует, что любое пространство $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см. [3, 4])) относительно операции свертки функций.

Приведенное выше определение однородного пространства является более широким по сравнению с аналогичным определением в статье [6], что позволило расширить класс однородных пространств на подпространства из $C_{b,u}$, в том числе на почти периодические на бесконечности и медленно меняющиеся на бесконечности функции.

Приведём несколько примеров однородных пространств [13]:

1. Пространства $L^p = L^p(\mathbb{J}, X), \quad p \in [1, \infty)$, функций $x \in L^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что
$$\|x\|_{L^p} = \Big(\int\limits_{\mathbb{J}} \big\|x(s)\big\|^p \,\mathrm{d}s\Big)^{1/p} < \infty, \quad p \in [1, \infty), \tag{1.14}$$
или $\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathrm{t}\in\mathbb{J}} \big\|\mathrm{x(t)}\big\|_{\mathrm{X}} < \infty$;
2. Пространства Степанова S^p, $p \in [1, \infty)$;

3. Амальгама Винера $L^{p,q} = (L^p, l^q) = L^{p,q}(\mathbb{J}, X)$, $p, q \in [1, \infty)$, функций $x \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ таких, что

$$\|x\|_{\mathrm{L}^{p,q}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{J}_d} \Big(\int_0^1 \big\|x(s+k)\big\|^p \,\mathrm{d}s \Big)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty, \quad p, q \in [1, \infty); \tag{1.15}$$

$$\|x\|_{\mathrm{L}^{p,q}} = \left(\sum_{k \in \mathbb{J}_d} (ess \sup_{s \in [0;1]} \big\|x(s+k)\big\|)^q \right)^{1/q} < \infty, \quad p = \infty, q \in [1, \infty); \tag{1.16}$$

$$\|x\|_{\mathrm{L}^{p,q}} = \sup_{k \in \mathbb{J}_d} \left(\int_0^1 \big\|x(s+k)\big\|^p \,\mathrm{d}s \right)^{1/p} < \infty, \quad p \in [1, \infty), q = \infty, \tag{1.17}$$

где $\mathbb{J}_d = \mathbb{J} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+$

4. Пространство $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ непрерывных ограниченных функций определенных на $\mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{J}} \big\|x(t)\big\|_X, \quad x \in C_b; \tag{1.18}$$

5. Подпространства $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X) \subset C_b$ равномерно непрерывных функций;

6. Подпространства $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X) \subset C_{b,u}$ непрерывных функций, исчезающих на бесконечности: $x \in C_0$, если $\lim\limits_{|t| \to \infty} \big\|x(t)\big\| = 0$.

7. Подпространства $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности функций (т.е. функций из $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ такие, что $S(t)x - x \in C_0(\mathbb{J}, X)$);

8. Подпространства $C_\omega(\mathbb{J}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ ω-периодических функций, $\omega \in \mathbb{R}_+$.

10. Медленно меняющиеся на бесконечности функции из однородных пространств.

Напомним, что через $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначаем однородное пространство функций. Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, где $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$, то подпространство $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ будет совпадать с подпространством $C_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций.

Через $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) : \text{ функция } t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \text{ непрерывна } \}.$$

Определение 1.26. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности* функцией, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Через $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Лемма 1.29. $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$ *– замкнутое инвариантное относительно сдвигов подпространство из однородного пространства* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Докажем, что $S(\alpha) \in \mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$(S(t) - I)S(\alpha)x = S(\alpha)(S(t) - I)x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X).$$

При этом учитывается, что $(S(t) - I)x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ и инвариантность подпространства $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ относительно оператора

$S(\alpha)$. Следовательно, функция $S(\alpha)x$ принадлежит подпространству $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Докажем замкнутость подпространства $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $(x_n), n \in \mathbb{N}$, – произвольная последовательность функций из $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$, сходящаяся к функции x_0. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$S(\alpha)x_0 - x_0 = S(\alpha)(x_0 - x_n) + (S(\alpha)x_n - x_n) + x_n - x_0, n \geq 1. \quad (1.19)$$

Представление (1.19) запишем в виде

$$S(\alpha)x_0 - x_0 = z_n + y_n, n \geq 1,$$

где $y_n = S(\alpha)(x_0 - x_n) + x_n - x_0, n \geq 1, \|y_n\| \to 0$, и $z_n = S(\alpha)x_n - x_n$, – сходящаяся к $S(\alpha)x_0 - x_0$ последовательность из $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. Поэтому $S(\alpha)x_0 - x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $x_0 \in \mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

□

В следующей лемме используется ограниченная аппроксимативная единица (e_n), $n \geq 1$, из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, которая строится в параграфе 7, данного раздела (также см. [3, 9, 10, 11]).

Лемма 1.30. *Выполнение условия*

$$\lim_n e_n * x = x,$$

является критерием принадлежности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ подпространству $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$.

Лемма 1.30 является следствием одной из теорем в работе [13].

При доказательстве следующей леммы будет использоваться тауберова теорема Винера. Сформулируем ее в рамках наших обозначений.

Теорема 1.12 ([21]). *Пусть M – множество функций вида $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f}(0) = 0\}$ является максимальным идеалом в алгебре $L^1(\mathbb{R})$, и M_0 - множество функций вида $S(\alpha)g - g, g \in L^1(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда множество M_0 плотно в M.*

Лемма 1.31. *Выполнение условия $f * x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, где $f \in L^1(\mathbb{R})$, такая что, $\widehat{f}(0) = 0$, является критерием принадлежности функции $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ однородному пространству $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функцию f из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля вида $f = S(\alpha)g - g$, где $g \in L^1(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$ и $\widehat{f}(0) = 0$. Множество таких функций плотно в максимальном идеале $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f}(0) = 0\}$ (теорема 1.12) вследствие чего доказательство леммы достаточно привести только для функции f рассматриваемого вида.

Пусть $x \in \mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Из условия $S(\alpha)x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ следует, что

$$f * x = (S(\alpha)g - g) * x = g * (S(\alpha)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X).$$

Достаточность. Пусть $\tau \in \mathbb{R}$ и (e_n) – ограниченная аппроксимативная единица из алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Так как

$$e_n * (S(\tau)x - x) = (S(\tau)e_n - e_n) * x = f_n * x$$

и $\widehat{f_n}(0) = 0$, то $e_n * (S(\tau)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. Из включения $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ (см. свойство 6 определения 1.25) следует, что

$$S(\tau)x - x = \lim_n e_n * (S(\tau)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$$

. Таким образом, лемма доказана.

□

Лемма 1.32. *Условие $f*x-x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$, где $f \in L^1(\mathbb{R})$, такая что, $\widehat{f}(0)=1$, является критерием принадлежности функции $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ однородному пространству $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R},X)$.*

*Доказательство. Необходимость.*Пусть $x \in \mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R},X)$. Из леммы 1.30 и включении $\mathcal{F}_0(\mathbb{R},X) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ (см. свойство 6 определения 1.25) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} e_n*(x-f*x) = x-f*x. \tag{1.20}$$

Функцию $y_n = e_n*(x-f*x)$ представим в виде

$$y_n = (e_n*f-e_n)*x = f_n*x.$$

Так как $\widehat{f_n}(0)=\widehat{e}_n(0)\widehat{f}(0)-\widehat{e}_n(0)=0$,то $f*x \in C_0(\mathbb{R},X)$, согласно лемме 1.23. Тогда необходимость условия будет следовать из (1.20).

Достаточность. Пусть $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ и $x-f*x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0)=1$. Тогда учитывая что $\widehat{S(\tau)f}(0)=1$, получим

$$f*(S(\tau)x-x) = (S(\tau)f-f)*x =$$

$$= ((S(\tau)f)*x-x)+(x-f*x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{J},X),$$

для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Поскольку $\widehat{e}_n(0)=1, n \geq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} e_n*(S(\tau)x-x) = S(\tau)x-x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$, т.е. $x \in \mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R},X)$. □

Введем в рассмотрение банахово пространство $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ [17] (аналог амальгама Виннера) следующим образом. Каждой функции $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ поставим в соответствие последовательность $(x_n), n \in \mathbb{Z}$, где $x_n(s) = x(s+n), s \in [0,1], n \in \mathbb{Z}$. Банахова алгебра $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ включает функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, для которых $x_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, а сама последовательность (x_n) обладает свойством

$$\|x\|_{1,\infty} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_\infty < \infty,$$

где $\|x_n\|_\infty = \sup\limits_{s\in[0,1]} |x(s+n)|, n \in \mathbb{Z}$ и величина $\|x\|_{1,\infty}$ является нормой функции $x \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Мультипликативную операцию в $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ определим сверткой функций.

Отметим, что $L^{1,\infty}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Лемма 1.33. *Пусть $f_n \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$, – некоторое семейство функций, где $\sup_n \|f_n\|_{1,\infty} < \infty$. Тогда для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ последовательность $\{x_n, n \in n \geq 1\}$, где $x_n = f_n * x, n \geq 1$, принадлежит пространству $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и является равномерно ограниченной в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.*

Данная лемма является обобщением леммы из [4] для однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Если $\widehat{f}$ имеет компактный носитель, то существует обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \int\limits_V \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda,$$

где V – компактная окрестность $supp f$ и $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Тогда f является целой функцией экспоненциального типа, является непрерывной функций, непрерывно дифференцируемой и $f \in L^{1,\infty}_c$.

Теорема 1.13. *Пусть $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ и $supp\widehat{f}$ – компакт. Тогда справедливо*

$$S(f)\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = S(f)C_b(\mathbb{R}, X) = S(f)C_{b,u}(\mathbb{R}, X).$$

В частности, на $ImS(f)$ не влияет однородное пространство, в котором он определен.

Доказательство. Так как $C_b(\mathbb{R},X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$, то включение $S(f)C_b(\mathbb{R},X) \subset S(f)\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ очевидно. Так как $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R},X)$ и $supp\widehat{f}$ – компакт, то $f \in L_c^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Тогда $S(f)x = f*x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ (см. лемму 1.32). Далее, докажем равенство $f*x = f*y$ для функции $y \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$. Для построения возьмем функцию $\varphi \in L_c^{1,\infty}(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{\varphi} = 1$ в некоторой окрестности $supp\widehat{f}$. Следовательно (см. лемму 1.4, свойство 5)

$$f*x = \varphi*f*x = f*(\varphi*x) = f*y,$$

где $y = \varphi*x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$. □

Теорема 1.14. *Если $x \in \mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R},X)$, то существует функция $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R},X)$ такая, что $x - x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$.*

Доказательство. Принадлежность функции $y_0 = x - f*x$, где $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R},X)$ такая, что $\widehat{f}(0) = 1$, подпространству $\mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ следует из леммы 1.32.

Тогда $x_0 = f*x \in \mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R},X) \cap C_{b,u}(\mathbb{R},X)$. В заключении докажем, что функция $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R},X)$. Пусть $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ – произвольная функция, такая что $\widehat{\varphi}(0) = 0$. Тогда $\varphi*x_0 = \varphi*f*x = f*(\varphi*x)$.

Из условий леммы 1.31 следует, что $y_0 = \varphi*x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$. В заключение установим, что $f*y_0 \in C_0(\mathbb{R},X)$. Так как $y_0 \in C_0(\mathbb{R},X)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $y_n \in L^1(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель. Тогда $f*y_n = y_n*f \in C_0(\mathbb{R},X), n \geq 1$ (как свертка суммируемой функции y_n и функции $f \in C_0(\mathbb{R},X)$).

Поскольку $f*y_0 - f*y_n = f*(y_0 - y_n) \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ и

$$\|f*y_0 - f*y_n\| \leq \|f\|_{1,\infty}\|y_0 - y_n\|_{S^1} \to 0, n \to 0,$$

то $f*y_0 \in C_0(\mathbb{R},X)$.

□

Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. Обозначим класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, через $\widetilde{x}$, т.е. $\widetilde{x} = x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что в $\mathcal{X}$ действует сильно непрерывная изометрическая группа $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$. Фактор-пространство $\mathcal{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля

$$f * \widetilde{x} = \widetilde{f * x}, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X).$$

Теорема 1.15. *Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежит подпространству $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Lambda(\widetilde{x}) \ = \ \Lambda(\widetilde{x}, \widetilde{S}) \subset \ \{0\}.$$

Доказательство. На основании условия леммы 1.31 можно заключить, что $x \in \ \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежит подпространству $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда свертка $f * x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$,$f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0) = 0$. Следовательно, $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $f * \widetilde{x}$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0) = 0$. Следовательно из определения 1.8 спектра Берлинга получим, что x принадлежит пространству $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ тогда, когда $\Lambda(\widetilde{x}) \subset \{0\}$. □

11. Почти периодические на бесконечности функции из однородных пространств

Определение 1.27. Функцию $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ назовем ин*тегрально убывающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\| ds = 0.$$

Множество интегрально убывающих на бесконечности функций из $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим через $\mathcal{F}_{0,int} = \mathcal{F}_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, имеют место включения $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 1.28. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности функцией*, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha)x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X).$$

Определение 1.29. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется медленно *меняющейся на бесконечности функцией относительно подпространства* $\mathcal{F}_{0,int}(\mathbb{R}, X)$, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha)x - x \in \mathcal{F}_{0,int}(\mathbb{R}, X).$$

Определение 1.30. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности функцией относительно подпространства* $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha)x - x \in \mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X).$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать через $\mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что $\mathcal{F}_{sl}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$, где $\mathcal{F}_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ множество медленно меняющихся функций относительно пространства $\mathcal{F}_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Лемма 1.34. $\mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$ – *замкнутое инвариантное относительно сдвигов подпространство из однородного пространства* $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Докажем, что $S(\alpha) \in \mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$(S(t) - I)S(\alpha)x = S(\alpha)(S(t) - I)x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X).$$

При этом учитывается, что $(S(t) - I)x \in \mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$ и инвариантность подпространства $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$ относительно оператора $S(\alpha)$. Следовательно, функция $S(\alpha)x$ принадлежит подпространству $\mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$.

Докажем замкнутость подпространства $\mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $(x_n), n \in \mathbb{N}$, – произвольная последовательность функций из $\mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$ сходящаяся к функции x_0. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$S(\alpha)x_0 - x_0 = S(\alpha)(x_0 - x_n) + (S(\alpha)x_n - x_n) + x_n - x_0, n \geq 1. \quad (1.21)$$

Представление (1.21) запишем в виде

$$S(\alpha)x_0 - x_0 = z_n + y_n, n \geq 1,$$

где $y_n = S(\alpha)(x_0 - x_n) + x_n - x_0, n \geq 1$, $\|y_n\| \to 0$, и $z_n = S(\alpha)x_n - x_n$ - сходящаяся к $S(\alpha)x_0 - x_0$ последовательность из $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$. Поэтому $S(\alpha)x_0 - x_0 \in \mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $x_0 \in \mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$. $\square$

Определение 1.31. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется *ε-периодом функции* $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ относительно подпространства $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $x_0 \in \mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$ такая, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε-периодов функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ обозначим через $\Omega_\infty(x; \mathcal{F}_{0,mid}; \varepsilon)$.

Определение 1.32. Функция x из $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{F}_{0,mid}; \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Определение 1.33. (аппроксимационное). Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и функции $x_1, \ldots, x_N$ из пространства $\mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R}, X)$ такие, что

$$\|x - \sum_{k=1}^{N} x_k e_{\lambda_k}\| < \varepsilon.$$

Далее символом $\mathcal{Y}$ обозначим фактор пространство $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$, в котором действует сильно непрерывная изометрическая группа операторов $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\mathcal{Y}$ вида

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = S(t)x + \mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X), x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X), t \in \mathbb{R}.$$

Фактор пространство $\mathcal{Y}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$ - модуля

$$f * \widetilde{x} = \widetilde{f * x}, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$$

Определение 1.34. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется почти периодической относительно пространства $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$, если класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим вектором в пространстве $\mathcal{Y}$ относительно изометрического представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\mathcal{Y}$.

Изучению почти периодических функций из однородных пространств посвящена работа [13, 61].

Теорема 1.16. *Все определения почти периодической на бесконечности функции относительно пространства* $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$ *(определения 1.32, 1.33, 1.34) эквивалентны.*

Доказательство. Согласно аппроксимационному определению 1.33, для любого положительного ε существует функция из $\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$

такая, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|x(t+\omega)-x(t)-x_0(t)\|<\varepsilon, x\in\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R},X).$$

Тогда, $\|S(\omega)x-x-x_0\|<\varepsilon$. При переходе к фактор-пространству $\mathcal{Y}=\mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)/\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R},X)$ приведенное выше неравенство будет эквивалентно следующей оценке

$$\|\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x}-\widetilde{x}\|<\varepsilon,$$

где $\widetilde{S(\omega)}\widetilde{x}=\widetilde{S(\omega)x}$.

Следовательно, $\Omega_\infty(x;\mathcal{F}_{0,mid};\varepsilon)=\Omega_\infty(\widetilde{x};\mathcal{F}_{0,mid};\varepsilon)$.

Для этого представления определение 1.34 соответствует свойству 4) из определения 1.20. Поскольку все свойства из определения 1.20 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определению 1.33.

Пусть $x\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ и $\widetilde{x}$ — класс эквивалентности в $\mathcal{Y}$, построенный по функции x. Тогда для любого $\varepsilon>0$ множество $\Omega_\infty(x;\mathcal{F}_{0,mid};\varepsilon)\cup(-\Omega_\infty(x;\mathcal{F}_{0,mid};\varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\widetilde{x},\varepsilon)$ ε-периодов класса $\widetilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 1.33 и свойства 3) из определения 1.20. Для доказательства покажем, что спектр Берлинга $\Lambda(\widetilde{y})$ класса эквивалентности $\widetilde{y}\in\mathcal{Y}$, $\widetilde{y}=y+\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R},X)$, представим в виде $\Lambda(\widetilde{y})=\{\lambda_0\}$ если функция $y\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ представима в виде $y(t)=y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t\in\mathbb{R}$, где $y_0\in\mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R},X)$.

Если $\Lambda(\widetilde{y})=\{\lambda_0\}$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y}=e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}, t\in\mathbb{J}$ (см. лемму 1.4). Следовательно, $\Lambda(\widetilde{y_0})=\{0\}$, где $y_0(s)=y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s\in\mathbb{J}$. Тогда имеем $\widetilde{S}(t)\widetilde{y_0}=\widetilde{y_0}$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Таким образом, $S(t)y_0-y_0\in\mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R},X)$, $t\in\mathbb{R}$, т.е. $y_0\in\mathcal{F}_{sl,mid}(\mathbb{R},X)$.

Справедливо и обратное. Если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{F}_{0,mid}(\mathbb{R}, X)$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$, $t \in \mathbb{R}$, и поэтому из леммы 1.4 получим, что $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$.

Теорема доказана. $\square$

Глава 2

Применение теории почти периодических на бесконечности функций к решению дифференциальных и разностных уравнений

Глава посвящена получению критериев почти периодичности на бесконечности ограниченных решений обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений и получению спектральных критериев почти периодичности на бесконечности ограниченных решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

Проблема почти периодичности ограниченных функций на вещественный оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ и полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ как решений дифференциальных и функциональных уравнений изучалась многими авторами (см. [79, 80, 86, 87, 94]). Одной из первых работ в этом направлении исследований была статья С. Бохнера и Дж. фон Неймана [81], в которой была установлена почти периодичность ограниченных решений разностных уравнений. В статьях С. Л. Соболева [60] был получен критерий почти периодичности решений параболических уравнений с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве.

В работе Люмиса [94] установлена почти периодичность равномерно непрерывной скалярной функции со счетным спектром Берлинга. Ее векторный аналог представлен в работах [9, 12]. Отметим, что изучению почти периодических функций и дифференциальных уравнений посвящены работы [19, 20, 29, 30, 31, 36, 37, 45, 48, 49, 52, 72, 90].

1. Почти периодические на бесконечности решения разностных уравнений

На ряду с дифференциальными уравнениями, которые будут рассмотрены далее, рассмотрим разностное уравнение вида

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $A \in EndX$.

Лемма 2.1. *Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (2.1), где спектральный радиус $r(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| < 1$, принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, единственно и имеет вид*

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n-1)f, \qquad f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X). \tag{2.2}$$

Доказательство. Разностное уравнение (2.1) представим в виде

$$x = AS(-1)x + S(-1)f$$

$$(I - \widetilde{A})x = S(-1)f,$$

где $\widetilde{A} = AS(-1) \in EndC_{b,u}$.

Так как в пространстве $C_{b,u}$ обратимая изометрия $S(-1)$ перестановочна с оператором умножения на оператор A, то

$$r(\widetilde{A}) = r(A) < 1.$$

Следовательно, [73] $I - A \in EndC_{b,u}$ непрерывно обратим и обратный имеет вид

$$(I - \widetilde{A})^{-1}y = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}^n y = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n)y, y \in C_{b,u}.$$

В частности, уравнение (2.1) имеет единственное решение $x_0 : \mathbb{R} \to X$, которое представимо в виде (2.2). Очевидно, что $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть оператор A из уравнения (2.1) обратим и $r(A^{-1}) < 1$. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (2.1) принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, единственно и имеет вид*

$$x_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} S(n) f, \qquad f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X). \tag{2.3}$$

Доказательство. Применим оператор A^{-1} к уравнению (2.1)

$$x = A^{-1}S(1)x - A^{-1}f,$$
$$(I - \widetilde{A}x) = -A^{-1}f,$$

где $\widetilde{A} = A^{-1}S(1)$.

Следуя доказательству леммы 2.1 получим, что оператор $(I - \widetilde{A})$ – обратим, и обратный имеет вид $(I - \widetilde{A})^{-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}S(n)$. Поэтому ограниченное решение уравнения (2.1) представимо в виде $x_0 = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}S(n)f$, где $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. $\square$

Отметим, что аналогичный результату следующей теоремы результат был получен в [22]. В данной работе рассматриваются почти периодические на бесконечности последовательности и их примирение к решениям разностных уравнений.

Теорема 2.1. *Пусть для $A \in EndX$ выполнено условие $\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_0, \gamma_2 ..., \gamma_N\}$, где $\gamma_k = e^{i\lambda_k}, 0 \le k \le N$ и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Если существует равномерно непрерывное ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (2.1), то оно является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$ вида*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k(t) e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

где $x_k \in C_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X), 0 \le k \le N.$

Доказательство. Спектр оператора $\in EndX$ представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out},$$

где $\sigma_{in} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < 1\}$ - совокупность точек спектра оператора A, лежащих внутри окружности, $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > 1\}$ - совокупность точек спектра оператора A, лежащих вне окружности. В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{in}, \mathcal{P}_{out}$, которые соответственно построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_{in}, \sigma_{out}$. Таким образом, $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{in} + \mathcal{P}_{out}$. Эти проекторы индуцируют разложение $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$ пространства X, где $X_0 = Im\mathcal{P}_0, X_{in} = Im\mathcal{P}_{in}, X_{out} = Im\mathcal{P}_{out}$. Эти подпространства являются инвариантными для оператора B. Обозначим $A_0 = A|X_0, A_{in} = A|X_{in}, A_{out} = A|X_{out}$. Таким образом, $A = A_0 \oplus A_{in} \oplus A_{out}$ относительно построенного разложения пространства X.

Применяя проектор $\mathcal{P}_{in}$ к обеим частям уравнения (2.4), получим функцию $x_{in} = \mathcal{P}_{in}x$, удовлетворяющую равенству

$$S(1)x_{in}(t) = A_{in}x_{in}(t) + f_{in}(t), f_{in} = \mathcal{P}_{in}, f \in \mathcal{C}_0, t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что

$$(I - A_{in}S(-1))x_{in} = S(-1)f_{in}. \tag{2.6}$$

Поскольку $\|S(-1)\| = 1$, $A_{in}S(-1)x_{in}(t) = S(-1)A_{in}x_{in}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и спектральный радиус $r(A_{in})$ оператора A_{in} меньше единицы, то оператор $I - A_{in}S(-1)$ обратим и из (2.6) следует, что

$$x_{in} = (I - A_{in}S(-1))^{-1}S(-1)f_{in} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{in}^k S(-k-1)f_{in}.$$

Ясно, что $x_{in} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Аналогичный результат получим при применении проектора $\mathcal{P}_{out}$ к уравнению (2.1):

$$(S(1)x_{out})(t) = A_{out}x_{out}(t) + y_{out}(t), \qquad y_{out} = \mathcal{P}_{out}f \in \mathcal{C}_0. \tag{2.7}$$

Оператор A_{out} обратим и $\sigma(A_{out}^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma_{out}\}$, т.е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора S_N с A_{out} из (2.7), получим равенства

$$S(1)A_{out}^{-1}x_{out}(t) = x_{out}(t) + A_{out}^{-1}f_{out}(t),\ t \in \mathbb{R},$$

или

$$(I - S(1)A_{out}^{-1})x_{out}(t) = -A_{out}^{-1}f_{out}(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом,

$$x_{out} = -(I - S(1)A_{out}^{-1})^{-1}A_{out}^{-1}f_{out} = -\sum_{k=0}^{\infty}(A_{out}^{-1}S(1))^k A_{out}^{-1}f_{out},$$
$$f_{out} \in \mathcal{C}_0.$$

Следовательно $x_{out} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Проектор $\mathcal{P}_0$ можно представить в виде

$$\mathcal{P}_0 = P_0 + ... + P_N,$$

где $P_k \in End X_0$ - проектор, и

$$AP_k = \gamma_k P_k,$$

где $|\gamma_k| = 1, 0 \leq k \leq N$.

Применим проектор $\mathcal{P}_0$ к разностному уравнению (2.1) и далее применим проектор P_k, получим

$$P_k x_0(t+1) = P_k A_0 x_0(t) + P_k f_0(t), 0 \le k \le N, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $x_0(t) = \mathcal{P}_0 x(t)$, и $f_0(t) = \mathcal{P}_0 f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда сделав замену $\widetilde{x_k}(t) = e^{-i\lambda_k t} x_k(t), t \in \mathbb{R}$, получим

$$S(1)\widetilde{x}_k = \widetilde{x}_k + \widetilde{f}_k.$$

Так как $f_k(t) = \mathcal{P}_0 f_0(t), t \in \mathbb{R}$, т.е. $f_k \in \mathcal{C}_0$ и поэтому $\widetilde{f}_k = 0$. Так как

$$S(1)\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_k \in \mathcal{C}_0,$$

то $\widetilde{x}_k$ - медленно меняющаяся на бесконечности функция, а x_k отличается от $\widetilde{x}_k$ на множитель $e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}$, следовательно $x_0 \in AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. В итоге получаем, что функция x представима в виде $x = x_0 + x_{in} + x_{out}$. Следовательно $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ и решение имеет вид $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t) e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}$.

□

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$x(t+2) + A_1 x(t+1) + A_2 x(t) = \phi(t), t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

где $\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $A_1, A_2 \in EndX$.

Каждой функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие функцию $y : \mathbb{R} \to X^2$, такую что

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t)), t \in \mathbb{R},$$

где $y_1(t) = x(t)$ и $y_2(t) = x(t+1)$. Отметим, что в X^2 далее рассматривается норма $\|(y_1, y_2)\| = \max\{\|y_1\|, \|y_2\|\}$,$(y_1, y_2) \in X^2$. Тогда непосредственно из вида функции $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X^2)$ следует, что $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ является решением разностного уравнения (2.8), в том случае, если y удовлетворяет следующему уравнению

$$y(t+1) + \mathcal{A} y(t) = f_0(t), t \in \mathbb{R},$$

где $f_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X^2)$, $f_0(t) = (0, \phi(t)), t \in \mathbb{R}$, и оператор $\mathcal{A} \in EndX^2$ определяется матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ A_2 & A_1 \end{smallmatrix}\right)$.

Каждое равномерно непрерывное ограниченное решение разностного уравнения (2.1) является равномерно непрерывным ограниченным решением уравнения (2.8). При этом решение $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ уравнения (2.1) и решение $y = (y_1, y_2) \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X^2)$ связаны соотношением $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = x(t+1)$.

Теорема 2.2. *Пусть $\phi \in \mathcal{C}_0$ и для операторов $A_1, A_2 \in EndX$ выполнено условие $(\sigma(A_1) \cup \sigma(A_1)) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2 ..., \gamma_m\}$, где $\gamma_k = e^{i\lambda_k}, 1 \leq k \leq N$ и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Тогда, если существует равномерно непрерывное ограниченное решение $x : \mathbb{R}_+ \to X$ уравнения (2.8) оно является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$ и имеет вид*

$$(x(t), x(t+1)) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_k(t) e^{i\lambda_k t}(x(0), x(1)), \tag{2.9}$$

где $\mathbb{P}_k : \mathbb{R}_+ \to EndX^2$, $\mathbb{P}_k \in C_b(\mathbb{R}_+, EndX^2)$

Доказательство. **Т**ак как спектр оператора $\sigma(\mathcal{A})$ совпадает с множеством $(\sigma(A_1) \cup \sigma(A_1))$ (см. [18]), то имеет место равенство $\sigma(\mathcal{A}) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2 ..., \gamma_m\}$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2.1 и поэтому из этой теоремы следует почти периодичность (ограниченного) решения $(x(t), x(t+1))$ уравнения

$$y(t+1) + \mathcal{A}y(t) = (0, \phi) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X^2)$$

Из принадлежности $(x(t), x(t+1))$ пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X^2, \mathcal{C}_0)$ следует, что $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$ и имеет место представление

$$(x(t), x(t+1)) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_k(t) e^{i\lambda_k t}(x(0), x(1)),$$

где $\mathbb{P}_k : \mathbb{R}_+ \to EndX^2$, $\mathbb{P}_k \in C_b(\mathbb{R}_+, EndX^2)$.

$\square$

2. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = \psi(t), \qquad \psi \in C_b(\mathbb{J}, X), t \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный оператор с областью определения $D(A)$ из банахова пространства X.

Классическим решением дифференциального уравнения (2.10) называется дифференцируемая функция $x : \mathbb{J} \to X$ такая, что $x(t) \in D(A)$ для любого $t \in \mathbb{J}$ и удовлетворяющая уравнению (2.10) для всех $t \in \mathbb{J}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.10), где $\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Проблеме существования ограниченных решений дифференциальных уравнений посвящено много публикаций. Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первые теоремы о почти периодических решениях были доказаны Ж. Фаваром в [88], а также Дж. фон Нейманом и С. Бохнером [51], а для нелинейных дифференциальных уравнений — Л. Америо в [71]. Результаты Фавара существенно улучшены Э. Мухамадиевым [50]. Важные результаты в этом направлении также принадлежат Б. М. Левитану [42] и В. В. Жикову [32].

Одним из основных методов исследования свойств ограниченных решений в работах этих авторов является метод, основанный на использовании свойств семейства систем, получаемых из исходной системы как пределы последовательностей неограниченно растущих сдвигов. Ж. Фаваром была доказана следующая теорема: если все однородные предельные уравнения не имеют ненулевых ограниченных решений, а исходная система имеет ограниченное решение, то это решение почти периодическое. Эта теорема была доказана им для уравнений в конечномерном пространстве с переменными коэффициентами.

Важным результатом является работа М. И. Кадеца [34], в которой показано, что для каждой почти периодической функции f со значениями в банаховом пространстве X ограниченность интеграла $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau, t \in \mathbb{R}$ влечет его почти периодичность, если банахово пространство X не содержит подпространств изоморфных подпространству C_0.

Вслед за классиками для дифференциального уравнения (2.10) проблему Фавара переформулируем следующим образом: найти условия при которых ограниченные решения дифференциального уравнения (2.10) являются почти периодическими на бесконечности относительно $\mathcal{C}_0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.10), где $\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Следующая теорема была представлена в работе [23].

Теорема 2.3. *Пусть для оператора $A \in EndX$ выполнено условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_0, i\lambda_2 ..., i\lambda_N\}$, где $i\lambda_1, ..., i\lambda_N$ – полупростые собственные значения оператора A, являющиеся изолированными точками спектра. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (2.10), является почти периодической на бесконечности функцией класса $AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$, которая допускает представление вида*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} y_k(t) e^{i\lambda_k t} + z_0(t), t \in \mathbb{R},$$

где $y_k \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X), z_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Доказательство. Спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in End\, X$ представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_- \cup \sigma_+,$$

где σ_- — часть спектра оператора A, лежащая в левой полуплоскости, σ_+ — в правой полуплоскости, σ_0 — на мнимой оси. Исходя из такого разбиения спектра, рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_-$, $\mathcal{P}_+$, которые построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_-, \sigma_+$ соответственно. Следовательно, $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_- + \mathcal{P}_+$. Эти проекторы индуцируют разложение пространства X в прямую сумму $X = X_0 \oplus X_- \oplus X_+$, где $X_0 = Im\mathcal{P}_0$, $X_- = Im\mathcal{P}_-$, $X_+ = Im\mathcal{P}_+$.

Решение $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ представимо в виде $x(t) = x_-(t) + x_+(t) + x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $x_-(t) = \mathcal{P}_- x(t)$, $x_+(t) = \mathcal{P}_+ x(t)$, $x_0(t) = \mathcal{P}_0 x(t), t \in \mathbb{R}$.

Применяя проекторы к уравнению (2.10),,получим следующие равенства

$$\dot{x}_-(t) = A_- x_-(t) + \psi_-(t), t \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

$$\dot{x}_+(t) = A_+ x_+(t) + \psi_+(t), t \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

$$\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + \psi_0(t), t \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

где $A_- = A \mid X_-$,$A_+ = A \mid X_+$,$A_0 = A \mid X_0$ – сужение оператора A на подпространство X_-, X_+, X_0 соответственно. Отметим,что $\sigma(A_-) = \sigma_-$, $\sigma(A_+) = \sigma_+$,$\sigma(A_0) = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\}$.

Ввиду равенств (2.12), (2.13) решение уравнения (2.10) представимо в виде $x_- = G_- * y$, где

$$G_-(t) = \begin{cases} e^{A_- t} & , t \geq 0, \\ 0 & , t < 0. \end{cases}$$

и $x_+ = G_+ * y$, где

$$G_+(t) = \begin{cases} 0 & , t \geq 0, \\ -e^{A_+ t} & , t < 0. \end{cases}$$

Отметим, что $G_-, G_+ : \mathbb{R} \to EndX$ функции, принадлежащие алгебре $L^1(\mathbb{R}, EndX)$.

Поскольку ψ_- и ψ_+ принадлежат пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, то их свертка с любой суммируемой операторно-значной функции также принадлежит $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно функции x_- и x_+ принадлежат банахову пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим уравнение (2.13). Проектор $\mathcal{P}_0$ представим в виде $\mathcal{P}_0 = P_1 + P_2 + \cdots + P_N$, где P_k - спектральный проектор построенный по спектральному множеству $\{i\lambda_k\}$ и $AP_k = i\lambda_k P_k, 0 \leq k \leq N$.

Рассмотрим ограниченные функции $x_k(t) = P_k x_0(t)$, и получим систему равенств

$$\dot{x}_k(t) = i\lambda_k x_k(t) + \psi_k(t), 0 \leq k \leq N,$$

где $\psi_k(t) = P_k\psi_0, \psi_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Положим $y_k(t) = x_k(t)e^{-i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$\dot{y}_k(t) = \dot{x}_k(t)e^{-i\lambda_k t} - i\lambda_k x_k(t)e^{-i\lambda_k t} = (\dot{x}_k(t) - i\lambda_k x_k(t))e^{-i\lambda_k t} = \psi_k(t)e^{-i\lambda_k t}$. Непосредственно из определения пространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ получаем, что функция $t \mapsto \psi_k(t)e^{-i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, также принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X)$. А поскольку $\dot{y}_k \in C_0(\mathbb{R}, X)$, то $y_k \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}$.

Следовательно, решение уравнения (2.10) представимо в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} y_k(t)e^{i\lambda_k t} + z_0(t), t \in \mathbb{R},$$

где $y_k \in \mathcal{C}_{sl,\mathcal{C}_0}(\mathbb{R}, X)$, $0 \le k \le N$, $z_0 = x_- + x_+$, $z_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. $\square$

Пусть далее оператор $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный оператор с областью определения $D(A)$, являющийся генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U : \mathbb{R}_+ \to End\, X$.

Сформулируем два определения слабого решения (mild solution) дифференциального уравнения (2.10), где $\psi \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

Определение 2.1. Непрерывная функция $x : \mathbb{J} \to X$ называется *слабым решением* дифференциального уравнения (2.10), если функция $z : \mathbb{J} \to X$, $z(t) = \int\limits_0^t x(s)\, ds$, $t \in \mathbb{J}$, обладает следующими свойствами:

1) $z(t) \in D(A)$ для любого $t \in \mathbb{J}$;

2) $x(t) - x(0) = Az(t) + \int\limits_0^t \psi(s)\, ds,\ t \in \mathbb{J}$.

Определение 2.2. Непрерывная функция $x : \mathbb{J} \to X$ называется *слабым решением* дифференциального уравнения (2.10) (см. [84]), если для всех $s, t \in \mathbb{J}$, $s \le t$ имеют место равенства

$$x(t) = U(t-s)x(s) + \int\limits_s^t U(t-\tau)\psi(\tau)\, d\tau. \tag{2.14}$$

Определение 2.3. Непрерывная функция $x : \mathbb{R} \to X$ называется *слабым решением* дифференциального уравнения (2.10) (здесь $\mathbb{J} = \mathbb{R}$), если для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которой $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ имеет компактный носитель $supp\, \widehat{f}$, свертка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)ds,\ t \in \mathbb{R},$$

является классическим решением дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + (f * \psi)(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.4. *Все три определения 2.1, 2.2 и 2.3 слабого решения дифференциального уравнения (2.10) эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность определений 2.1 и 2.2 была установлена в монографии [74].

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ - решение уравнения 2.10 в смысле определения 2.1 и пусть $z(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau, t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $s \in \mathbb{R}$ функция

$$z_s(t) = z(t+s) - z(t) = \int\limits_t^{t+s} x(\tau)d\tau, t \in \mathbb{R},$$

есть ограниченное слабое решение дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + \int\limits_t^{t+s} \psi(\tau)d\tau, t \in \mathbb{R}.$$

Представим функцию z_s в виде

$$z_s = \varphi_s * x,$$

где φ_s - характеристическая функция интервала $[-s, 0]$, если $s > 0$, и интервала $[0, -s]$, если $s < 0$. Для определенности далее полагаем, что $s > 0$. Это означает, что z_s - классическое решение дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + (\varphi_s * \psi)(t), t \in \mathbb{R}.$$

Линейные комбинации функций из множества $\mathcal{Z} = \{z_s, s \in \mathbb{R}\}$ образуют плотное подмножество в банаховой алгебре $L^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем $supp\widehat{f}$ для ее преобразования Фурье $\widehat{f}$. Тогда $f * z$ - бесконечно дифференцируемая функция и для каждой последовательности (f_n) линейных комбинаций функций из $\mathcal{Z}$, сходящихся к

f в алгебре $L^1(\mathbb{R})$, соответствующие последовательности $(f_n * z)$ и $(f_n * x)$ равномерно сходятся к $f * z$ и $f * x$. Соответственно более того,

$$(f_n * x)(t) = A(f_n * x)(t) + (f_n * \psi)(t), t \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$

Из замкнутости оператора A получаем, что $(f*x)(t) \in D(A), t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, доказано равенство (2.14).

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ - слабое решение дифференциального уравнения (2.10) в смысле определения 2.1. Докажем, что x - решение уравнения (2.14) в смысле определения 2.2. Рассмотрим характеристическую функцию φ_t интервала $[-t, 0]$, если $t > 0$ и, интервала $[0, -t]$, если $t < 0$. Пусть (f_n) -ограниченная аппроксимативная единица в алгебре $L^1(\mathbb{R})$, построенная перед леммой 1.30. Тогда согласно определению 2.2 имеют места равенства:

$$\dot{x_n}(t) = Ax_n(t) + (f_n * \varphi)(t), t \in \mathbb{R}, n \geq 1,$$

где последовательность $x_n = f_n * x$ равномерно сходится к функции (для определенности считаем $t > 0$) вида

$$(\varphi_t * x)(s) = \int\limits_s^{s+t} x(\tau) d\tau, s \in \mathbb{R},$$

и более того $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (\varphi_t * x)' = (S(s+t) - S(s)x)$.

Из замкнутости оператора A следует, что

$$((S(t) - S(0))x)(0) = \int\limits_0^t x(\tau) d\tau \in D(A),$$

что завершает доказательство леммы.

Итак, все три определения слабого решения эквиваленты. $\square$

Болл показал что для сильно непрерывной полугруппы $U : \mathbb{R}_+ \to End\, X$ формула (2.14) дает единственное слабое решение уравнения (2.10) при любом $x \in X$ и любой $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$ [37]. Справедливо и обратное.

Отметим, что Пази показал, что для того чтобы для сильно непрерывной полугруппы $U : \mathbb{R}_+ \to End\, X$ функции $U(t)x$ были дифференцируемыми при некоторых $t > t_0$ и всех $x \in X$, необходимо и достаточно выполнение некоторых условий накладываемых на резольвенту оператора A (см. [38] стр. 143).

В банаховом пространстве $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A : D(\mathcal{L}) \subset C_{b,u} \to C_{b,u}.$$

Определение 2.4. Функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ отнесем к *области определения* $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$, если существует функция $\psi \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такая, что для всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ имеют место равенства (2.14).

Для $x \in D(\mathcal{L})$ мы положим $\mathcal{L}x = \psi$, если x и ψ удовлетворяют равенствам (2.14). Такое определение оператора $\mathcal{L}$ было впервые дано в работах [12, 8] (см. также [6, 9]).

Теорема 2.5 ([2])**.** *Для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любой функции x из $D(\mathcal{L})$ функция $S(f)x$ принадлежит $D(\mathcal{L})$ и имеет место равенство*

$$\mathcal{L}S(f)x = S(f)\mathcal{L}x.$$

Теорема 2.6. *Для каждого слабого решения $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ дифференциального уравнения (2.10) с функцией $\psi \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ имеет место включение*

$$\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0) \subset (i^{-1}\sigma(A) \cap \mathbb{R}) \cup \Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0). \tag{2.15}$$

Доказательство. Вначале предположим, что $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. Пусть число λ_0 выбрано так, чтобы $i\lambda_0$ не принадлежало множеству $\Delta = (\sigma(A) \cap (i\mathbb{R})) \cup \Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0)$. Рассмотрим функцию f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $\operatorname{supp} \widehat{f} \cap \Delta = \emptyset$. Из теоремы 2.5 следует, что функция $f * x$ принадлежит области определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A$ и имеют место равенства

$$\mathcal{L}(f * x) = f * \mathcal{L}x = f * \psi. \tag{2.16}$$

Из включения (2.15) следует, что резольвента оператора A определена в некоторой окрестности $iV_0 \subset i\mathbb{R}$ точки $i\lambda_0$, причем $V_0 \cap \Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0) = \emptyset$. Тогда из определения множества $\Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0)$ следует, что функция $\psi_0 = f * \psi$ принадлежит подпространству $\mathcal{C}_0$. Пусть число $\delta_0 > 0$ выбрано так, чтобы $[\lambda_0 - \delta_0; \lambda_0 + \delta_0] \subset V_0$.

Введем в рассмотрение гладкую функцию $\widehat{\varphi_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такую, что $\widehat{\varphi_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $\operatorname{supp} \widehat{\varphi_0} \subset [\lambda_0 - \delta_0; \lambda_0 + \delta_0]$, которая является преобразованием Фурье некоторой функцией $\varphi_0 \in L^1(\mathbb{R})$.

И рассмотрим преобразование Фурье суммируемой функции $F : \mathbb{R} \to End\, \mathcal{X}$

$$\widehat{F}(\lambda) = \begin{cases} \widehat{\varphi}_0 R(i\lambda, A), & \lambda \in [\lambda_0 - \delta_0; \lambda_0 + \delta_0], \\ 0, & \lambda \notin [\lambda_0 - \delta_0; \lambda_0 + \delta_0], \end{cases}$$

В таком случае из (2.16) получим, что

$$F * \mathcal{L}(y * x) = \varphi_0 * x = F * \varphi * \psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X).$$

Поскольку $\widehat{\varphi_0}(\lambda_0) \neq 0$, то λ_0 не принадлежит $\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0)$. Итак, включение (2.15) доказано для функций, определенных на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим случай когда $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$. И рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со свойствами: $\operatorname{supp} \varphi \subset [1, \infty)$, $\varphi \equiv 1$ на $[2, \infty)$. Далее символом φx обозначим функцию

$$(\varphi x)(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, 0], \\ \varphi(t)x(t), (0, +\infty) \end{cases}$$

Тогда $\varphi x \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}(\varphi x) = \dot{\varphi}x + \varphi\psi$, где $\varphi\psi = 0$ на $\mathbb{R}_-$. Поскольку $\dot{\varphi}x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $\varphi = 0$ на $(-\infty, 0]$, то

$$\Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)) = \Lambda_\infty(\varphi\psi, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)),$$

$$\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)) = \Lambda_\infty(\varphi x, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)),$$

где $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — подпространство функций из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, являющихся продолжением функций из $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$ на $(-\infty, 0]$ со свойством $\lim\limits_{t \to -\infty} y_1(t) = 0$ для любого продолжения y_1 функции y. Теорема доказана. □

Теорема 2.7. *Пусть функция ψ из уравнения (2.10) почти периодична на бесконечности ($\psi \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$) и множество*

$$((i^{-1}\sigma(A)) \cap \mathbb{R}) \cup \Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0)$$

не имеет предельных точек на $\mathbb{R}$. Тогда каждое ограниченное слабое решение x дифференциального уравнения (2.10) является почти периодическим на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций.

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 2.6 и спектрального критерия почти периодичности на бесконечности (теорема 1.8)

В теоремах 2.6 и 2.7 мы используем понятие слабого решения так как оператор $A : D(A) \subset X \to X$ – замкнутый оператор, следовательно слабые решения дифференциального уравнения могут не принадлежать области $D(A)$ и поэтому не являются решениями в буквальном смысле. Рассмотрение слабых решений позволяет расширить рассматриваемый класс решений.

Теорема 2.8. *Пусть функция ψ из уравнения (2.10) принадлежит пространству $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций и множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ не более чем счетно. Тогда каждое ограниченное слабое решение $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ дифференциального уравнения (2.10) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{J}, X, \mathcal{C}_0)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $i\lambda_1, \dots, i\lambda_m \in \sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ и функции $x_1, \dots, x_m$ из C_0 такие, что*

$$\sup_{t \in \mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{m} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon,$$

причем $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k(t) e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$ — конечное множество.

Доказательство. Поскольку $\Lambda_\infty(\psi, \mathcal{C}_0) = \emptyset$ (из-за принадлежности функции x пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$), то имеет место включение

$$\Lambda_\infty(x, C_0) \subset (i^{-1}\sigma(A)) \cap \mathbb{R}.$$

Пусть $\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ — счетное множество и тогда по условию теоремы $\lim\limits_{n \to \infty} |\lambda_n| = \infty$. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ в качестве банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля. Непосредственно из определения множества $\Lambda_\infty(x, \mathcal{C}_0)$ следует, что $\Lambda(\widetilde{x}, \widetilde{S}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Для класса эквивалентности $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$ из теоремы 1.8 следует, что он является почти периодическим вектором из $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, \widetilde{S})$.

Из леммы 1.28 следует, что для ограниченной аппроксимативной единицы (f_n), $n \geq 1$,, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \|\widetilde{x} - \sum_{|\lambda_k| < n} \widehat{f}_0(\frac{\lambda_k}{n}) \widetilde{x}_k\| = 0. \tag{2.17}$$

Поскольку $\Lambda(\widetilde{x}_k) = \{\lambda_k\}$, то каждая функция x_k представима в виде $x_k(t) = x_k^0(t)e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{J}$, $x_k^0 \in \mathcal{C}_0$, $|\lambda_k| < n$. Поэтому из (2.17) следует существование последовательности (y_n) из $\mathcal{C}_0$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}_0(\frac{\lambda_k}{n}) x_k^0(t) e^{i\lambda_k t} - y_n(t)\| = 0.$$

Осталось отметить, что в силу свойства 3) подпространства $\mathcal{C}_0$ (см. определение 1.10) каждую из функций y_n, $n \geq 1$, можно записать в виде $y_n(t) = x_{n,k}^0(t)e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{J}$, $|\lambda_k| < n$, где $x_{n,k}^0 \in \mathcal{C}_0$. Теорема доказана.

$\square$

3. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными операторными коэффициентами

В пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t) + B_1\dot{x}(t) + B_2x(t) = \varphi(t), t \in \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

где $B_1, B_2 \in End X$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Это уравнение запишем в виде $Lx = \varphi$, где дифференциальный оператор второго порядка $L : D(L) \subset C_b(\mathbb{R}, X) \to C_b(\mathbb{R}, X)$, который действует по правилу

$$Lx = \ddot{x} + B_1\dot{x} + B_2x, x \in D(L),$$

где $D(L) = C_b^2(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{y} + \mathcal{B}y = f, f = (f_1, f_2) \in C_b(\mathbb{R}, X^2) = C_b(\mathbb{R}, X) \times C_b(\mathbb{R}, X), \quad (2.19)$$

где оператор $\mathcal{B} \in EndX^2$ определяется матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ B_2 & B_1 \end{smallmatrix}\right)$, т.е. $\mathcal{B}(y_1, y_2) = (-y_2, B_2 y_1 + B_1 y_2)$ для $(y_1, y_2) \in X^2$. Дифференциальное уравнение (2.18) переходит в дифференциальное уравнение первого порядка (2.19) если $f = (0, \varphi)$.

Каждое ограниченное решение уравнения (2.18) является ограниченным решением уравнения (2.19). При этом решение $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ уравнения (2.18) и решение $y = (y_1, y_2) \in C_b(\mathbb{R}, X^2)$ связаны соотношением $x = y_1$, $\dot{x} = y_2$. Введем в рассмотрение характеристической многочлен (пучок операторов) для дифференциального уравнения (2.18)

$$H(\lambda) = \lambda^2 I + B_1 \lambda + B_1, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Спектром $S(H)$ операторного пучка H называется множество $S(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{оператор } H(\lambda) \text{ не обратим в алгебре } EndX\}$.

Теорема 2.9. *Пусть $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $S(H) \cap \mathbb{R} = \{\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_N\}$ – конечное множество. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R}_+ \to X$ дифференциального уравнения (2.18) является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$ и имеет место представление*

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_{k=1}^{m} e^{i\lambda_k t} \mathbb{P}_k(t)(x(0), \dot{x}(0)),$$

где $\mathbb{P}_k : \mathbb{R}_+ \to EndX^2$, $\mathbb{P}_k \in C_b(\mathbb{R}_+, EndX^2)$

Доказательство. Наряду с дифференциальным уравнением (2.18), рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка (2.19), где $f = (0, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X^2)$.

Из статьи [16] следует, что имеет место равенство $\sigma(\mathcal{B}) \cap (i\mathbb{R}) = i(S(H) \cap \mathbb{R}) = \{i\lambda_1, i\lambda_2 ..., i\lambda_N\}$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2.3 и поэтому из этой теоремы следует почти периодичность (ограниченного) решения $(x, \dot{x})$ уравнения

$$\dot{y} + \mathcal{B}y = (0, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X^2).$$

Из принадлежности $(x, \dot{x})$ пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X^2, \mathcal{C}_0)$ следует, что $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X, \mathcal{C}_0)$ и имеет место представление

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_{k=1}^{m} e^{i\lambda_k t} \mathbb{P}_k(t)(x(0), \dot{x}(0)),$$

где $\mathbb{P}_k : \mathbb{R}_+ \to EndX^2$, $\mathbb{P}_k \in C_b(\mathbb{R}_+, EndX^2)$ (см [16]).

$\square$

Функции $\mathbb{P}_k, 1 \le k \le m$ обладают свойствами:

1) $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathcal{B}\mathbb{P}_k(t) - i\lambda\mathbb{P}_k(t)\| = 0, 1 \le k \le m$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbb{P}_k(t)\mathbb{P}_j(t)\| = 0, k \ne j, 1 \le k, j \le m$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbb{P}_k^2(t) - \mathbb{P}_k(t)\| = 0, 1 \le k \le m$;

4) $\lim\limits_{t\to\infty} \| \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbb{P}_k(t) - \mathbb{I}\| = 0$.

5) функции $\mathbb{P}_k(t), t \ge 0, 1 \le k \le m$, допускают расширение на $\mathbb{C}$ до целых функций экспоненциального типа с производной удовлетворяющей условию $\lim\limits_{t\to\infty} \|\dot{\mathbb{P}}_k(t)\| = 0, 1 \le k \le m$;

Литература

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

2. Баскаков А. Г. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами / Баскаков А.Г., Струкова И. И., Тришина И. А. // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59. – № 2(348). – С. 293–308.

3. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // Функциональный анализ, СМФН. МАИ М. – 2004. – Т. 9. – С. 3–151.

4. Баскаков А. Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92. – № 5. – С. 643–661.

5. Баскаков А. Г. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина, Д. М. Поляков // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 7. – С. 3–14.

6. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. – 2013. – Т. 68. – № 1(409). – С. 77–128.

7. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97. – № 2. – С. 174–190.

8. Баскаков А. Г. Некоторые вопросы теории векторных почти периодических функций: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / А. Г. Баскаков. – Воронеж: ВГУ. 1973. – 100 с.

9. Баскаков А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – № 2. – С. 195–206.

10. Баскаков А. Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций / А. Г. Баскаков // Матем. сб. – 1984. – Т. 124(166). – № 1(5). – С. 68–95.

11. Баскаков А. Г. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов / А. Г. Баскаков – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – 152 с.

12. Баскаков А. Г. Неоторые критерии почти периодичности ограниченых функций / А. Г. Баскаков // Тр. НИИ матем. ВГУ. – 1973. – Т. 11. – С. 10–16.

13. Баскаков А. Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Изв. РАН. Сер. матем. – 2005. – Т.69. – № 3. – С. 3–54.

14. Баскаков А. Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций / А. Г. Баскаков // Матем. сб. – 1984. –Т. 124(166). – № 1(5). – С. 68–95.

15. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / Баскаков А. Г. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1987 . – 164 с.

16. Баскаков А. Г. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов/ А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран, Т. И. Смагина// Изв. вузов. Матем. — 2017. – № 10. – С. 38–49.

17. Баскаков А. Г. Теорема Бёрлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений

параболических уравнений / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92. – № 5. – С. 643–661.

18. Баскаков А. Г. Линейные дифференциаьные операторы и омераторные матрицы второго порядка / А. Г. Баскаков, Л. Ю. Кабанцова, И. Д. Коструб, Т. И. Смагина // Дифференцилаьные уравнения. – 2017. – Т. 53. – №1. – С. 8–17.

19. Более Босит Р. Обобщение двух теорем М.И. Кадеца о неопределенном интеграле абстрактных почти периодических функций / Р. Более Босит// Мат. зам. – 1971. – Т. 9. – №3. – С. 311–321.

20. Более Босит Р. Почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Банаха / Р. Более Босит, В. В. Жиков // Вестник Московского государственного университета. – 1971. – № 2. – С. 29–33.

21. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения / Н. Винер // М.: Физматлит, 1963. – 256 с.

22. Высоцкая И. А. Гармонический и спектральный анализ почти периодических на бесконечности последовательностей / И. А. Высоцкая, А. А. Рыжкова // Сборник трудов международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механик”. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. – С. 57–61.

23. Высоцкая И. А. Почти периодические на бесконечности функции как решения дифференциальных уравнений / Высоцкая И. А. // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2018. Материалы международной конференции. – Воронеж, 2018. – С. 183–186.

24. Гельфанд И. М. Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А.Райков, Г. Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1967. – 508 с.

25. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 535 с.

26. Данфорд Н. Линейные операторы. В 2-х т. Т. 1. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: Мир, 1962. – 895 с.

27. Данфорд Н. Линейные операторы. В 2-х т.Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: Мир, 1962. – 1065 с.

28. Дьедонне Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964. – 430 с.

29. Дуплищева А. Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений/ А. Ю. Дуплищева // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 110–117.

30. Жиков В. В. Почти периодические решения дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / В. В. Жиков // Теория функций и ее приложения. – Харьков, 1967. – Вып. 4. – С. 176 – 188.

31. Жиков В. В. Об одной задаче Бохнера и Неймана / В. В. Жиков // Математические заметки. – 1968. – Т.3. – № 5. – С. 529–538.

32. Жиков В. В. Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства / В. В. Жиков // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23. – № 1. – С. 121–126.

33. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – 538 с.

34. Кадец М. И. Об интегрировании почти периодических функций со значениями в пространстве Банаха / М. И. Кадец // Функциональный анализ и его применения. – 1969. – Т. 3. – Вып. 3. – С. 71–74.

35. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: ФИЗ. - МАТЛИТ, 2004. – 572 с.

36. Красносельский М. А. Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. – М.: Наука, 1970. – 352 с.

37. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространств / С. Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

38. Крейн С. Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн, М. И. Хазан// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. –1983. – Т. 21. – С. 130–264.

39. Кованько А. С. К вопросу о разложимости почти периодических функций в конечную сумму почти периодических функций / А. С. Кованько // Ученые записки Львовского гос. университета. Серия физ.-мат. – 1963. – № 5. – С. 12–16.

40. Кузнецова В.И. Об обратимости разностно-интегрального опрератора в пространстве медленно меняющихся функций / В. И. Кузнецова В.И., В. Г. Курбатов // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 219–229.

41. Левин Б. Я. О почти периодических функциях Левитана / Б. Я. Левин // УМЖ. – 1949. – № 1. – С. 49–101.

42. Левитан Б. М. Почти периодические функции / Б. М. Левитан. М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

43. Левитан Б. М. Об одном обобщении неравенств С. Бернштейна и H. Bohr'a / Б. М. Левитан // ДАН СССР. – 1937. – Т. 15. – С.17–19.

44. Левитан Б. М. Об интегрировании почти периодических функций со значениями из банахова пространства / Б. М. Левитан // Известия АН СССР. Сер. Математика. – 1966. – №30. – С. 1101–1110.

45. Левитан Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. М.: Изд-во МГУ, 1978. – 205 с.

46. Любич Ю. И. Почти периодические функции в спектральном анализе операторов / Ю. И. Любич // ДАН СССР. – 1960. – № 132. – С. 518–520.

47. Любич Ю. И. Об операторах с отделимым спектром / Ю. И. Любич, В. И. Мацаев // Математический сборник. – 1962. – Т. 56. – № 4. – С. 433–468.

48. Массера Х. Л. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер. – М.: Мир, 1970. – 456 с.

49. Матвеева И. И., Щеглова А. А. Оценки решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами / И. И. Матвеева, А. А. Щеглова // Сиб. журн. индустр. математики. – 2011. – Т. 14. – № 1(45). – С. 83–92.

50. Мухамадиев Э. Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Мат. заметки. – 1981. – Т. 30. – № 3. – С. 443–460.

51. Нейман Дж. фон Избранные труды по функциональному анализу. В двух томах. Том 1. / Дж. фон Нейман. – М.: Наука, 1987. – 377 с.

52. Перов А. И. О почти периодических решениях однородного дифференциального уравнения / А. И. Перов, Та КуангХай // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8. – вып. 3. – С. 453–458.

53. Рыжкова А. А. On the spectral analysis of periodic sequences at infinity / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Двадцать третья Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум. – 2013. Вып. 23. – С. 180–183.

54. Рыжкова А. А. О периодических на бесконечности последовательностях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Крымская Международная Математическая Конференция. Сборник тезисов. – 2013. – Т. 1. – С. 65–66.

55. Рыжкова А. А. Периодические на бесконечности последовательности и их применение к разностным уравнениям / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2014. Материалы международной конференции. Воронеж, 2014. – С. 73–75.

56. Рыжкова А. А. О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А. А.Рыжкова, И. А. Тришина // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15. – № 1. – С. 45–49.

57. Рыжкова А. А. О периодических на бесконечности функциях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2014. – Т. 36. – № 19. – С. 71–75.

58. Рыжкова А. А. О почти периодических на бесконечности функциях / А. А. Рыжкова, И. А. Тришина // Материалы международной конференции ВЗМШ Г. Крейна. Воронеж: Издательско-полиграфический центр “Научная книга”, 2016. – С. 330–333.

59. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. М.: Мир, 1975. - 444 с.

60. Соболев С. Л. О почти периодичности решений волнового уравнения / С. Л. Соболев // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 49. – №1. С. 12–15.

61. Струкова И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14. – № 1. – С. 28–38.

62. Тришина И. А. Теорема о среднем для почти периодчиеской функции / И. А. Тришина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – Т. 12. – С. 223–227.

63. Тришина И. А. Алгебраические свойства почти периодических на бесконечности функций / И. А. Тришина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – Т. 12. – С. 223–227.

64. Тришина И. А. О медленно меняющихся на бесконечности решениях разностных уравнений / И. А. Тришина // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книг", 2016. – № 5-1. – С. 294–295.

65. Тришина И. А. О двух определениях почти периодической на бесконечности функции / И. А. Тришина // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVII (3-9 мая 2016 г.)» – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – С. 259–261.

66. Тришина И. А. Об определениях почти периодической на бесконечности функции / И. А. Тришина // Сборник трудов международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механик”. – 2016. – С. 41–43.

67. Тришина И. А. Интегрально убывающие на бесконечности функции / И. А. Тришина // Вопросы науки. Серия: Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2017. – Вып. 17. – № 4. – С. 72–81.

68. Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций / И. А. Тришина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17. – № 4. – С. 402–418.

69. Тришина И. А. Медленно меняющиеся на бесконечности функции / И. А. Тришина // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2017. – № 4. – С. 134–144.

70. Усачев А. С. Преобразования в пространстве почти сходящихся последовательностей / А. С. Усачев // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 6. – С. 1427–1429.

71. Amerio L. Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati / L. Amerio // Ann. Mat. Pura Appl. – 1955. – Vol. 39. – P. 97–119.

72. Amerio L. Almost periodic functions and functional equations / L. Amerio and G. Prouse.New York, 1971. – 457 p.

73. Arendt W. Asymptotic almost periodic solutions of inhomogeneous Cauchy problems on the half-line / W. Arendt, C. J. K. Batty // Bull. London Math. Soc. – 1991. – P. 291–304.

74. Arendt W. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems / W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. Monographs in Mathematics. – 2011. – Vol. 96. – 412 p.

75. Basit B. Harmonic analysis and asymptotic behavior of solutions to the abstract Cauchy problem / B. Basit // Semigroup Forum. – 1994. – Vol. 54:1. – P. 58–74.

76. Basit B. Some problems concerning diferent types of vector valued almost periodic functions / B. Basit // Dissertation Math. – 1995. – 338 p.

77. Besicovitch A.S. Almost periodic function / A.S. Besicovitch // Cambridge university press. – 1932. – 253 p.

78. Beurling A. Un theoreme sur les fonctions borness et uniformement continues sur l'axe reel / A. Beurling // Acta Math. – 1945. – Vol. 77. – P. 127–136

79. Bochner S. Beit trage zur Theorie der fastperiodischen Functionen / S. Bohner // Teil. Math. Ann.–1926. – Vol. 96. – P.119–147.

80. Bochner S. FastperiodischeLosungen der Wellengliechungen / S. Bochner. //Acta Math. – 1934. – Vol. 62. – P. 227–237.

81. Bochner S. On compact solution of operational differentionalequations / S. Bochner, J. von Neuman // Ann. of Math. – 1935. – Vol. 36. – P. 435–447.

82. Bochner S. Ubergewisse Differential undallgemeinere Gleichungen, derenlosungenfast periodisch sind / S. Bochner, II. Teil.Der Beschranktheitrassatz, Math. Ann. – 1930. – Vol. 103. – P. 588–597.

83. Bohr H. Ein allgemeinerung Satz uber die Integration eines trigonoinetrischen Polynomials / H. Bohr // Prace Math. Fiz. – 1935. – Vol. 43. – P. 273–288.

84. Chicone C. Evolution Semigroups in Dynamical Sistems and Differential Equations / C. Chicone, Y. Latushkin // Amer. Math. Soc. –1945. – Vol. 70.

85. Domar Y. Some results on norrow spectral analysis / Y. Domar // Math. Scand. – 1967. – Vol. 20. – P. 5–18.

86. Doss R. Contributionto the theory of almost-periodic functions / R. Doss // Ann. Math. –1945. – Vol. 46. – P. 196–219.

87. Doss R. On the almost periodic solutions of aclassofintegro-differential-difference equations / R. Doss // Ann. OfMath. – 1965. – Vol. 81. – P. 117–123.

88. Favard J. Sur les equations differentielles a coefficients presqueperiodiques / J. Favard // Acta Math. – 1927. – Vol. 51. – P. 31–81.

89. Favard J. Application de la formule sommatoire d'Euler a la deinonsration de quclques propertietes extremales des integrates des fonctions peeriodiques on presque-periodiques / J. Favard // Mat. Tidskr. – 1936. – P. 81–95.

90. Foias C. Almost-periodic solution of parabolic systems / C. Foiasand, S. Zaidman // Ann. Scuola Norm Super. Pisa. – 1963. – Vol. 3:15 – P. 247–262.

91. Helgason S. Some problemsin the theory of almost periodic functions / Sigurdur Helgason // Math. Scand. – 1955. – Vol. 3. – P. 49–67.

92. Hewitt E. Linear functional on almost periodic functions / E. Hewitt // Trans. Am. Math. Soc. – 1953. – Vol. 74. – P. 303 – 322.

93. Lewitan B. M. On a integral equations with almost periodic solutions / B. M. Lewitan // Bull. Amer. Math. Soc. – 1937. – Vol. 43. – P. 677–679.

94. Loomis L. H. Spectral characterization of almost periodic functions / L. H. Loomis. Ann. Math. – 1960. – Vol. 7. – № 2. – P. 362–368.

95. Lyubich Yu. Asymptotic stability of linear diferential equations in Banach spaces / Yu. Lyubich, Vu Q. Ph. // Studia Mathematica. – 1988. – Vol. 88. – № 1. – P. 37–42.