На правах рукописи

Жуковская Наталья Владимировна

# Формулы представления решений дифференциальных уравнений типа Эйлера дробного порядка

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

## Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Ростов–на–Дону — 2019

**Работа выполнена** на кафедре дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Научный руководитель: **Ситник Сергей Михайлович**
доктор физико–математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»,
профессор кафедры дифференциальных уравнений

Официальные оппоненты: **Псху Арсен Владимирович**
доктор физико–математических наук, доцент,
«Институт прикладной математики и автоматизации»,
филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр «Кабардино–Балкарский научный центр Российской академии наук»», г. Нальчик,
главный научный сотрудник

**Федоров Владимир Евгеньевич**
доктор физико–математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»,
заведующий кафедрой математического анализа

Ведущая организация: ФГБУН ВО Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук,
г. Новосибирск

Защита состоится 26 апреля 2019 года в 17.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 Южного федерального университета, по адресу: г. Ростов–на–Дону, улица Мильчакова, 8а, ауд. 211

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов–на–Дону, ул. Р. Зорге, 21–ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу: http://hub.sfedu.ru/diss/announcement/59acf1b1-39f9-4f8d-bc0c-91a7a6c66c3b/

Автореферат разослан «____» ____________________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В.Д. Кряквин

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Дробное интегрирование и дифференцирование является стремительно развивающейся областью современного анализа, имеет давнюю историю и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений. Дробное исчисление получило значительную популярность главным образом благодаря многочисленным приложениям в различных областях науки, поскольку оно предоставляет некоторые полезные инструменты для решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также различных других задач. Оно находится в постоянном развитии, которое питается идеями и результатами различных направлений современного анализа. Дробное исчисление функций одной и многих переменных продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время, свидетельством чему служит как большой поток публикаций, так и международные конференции, специально посвященные вопросам дробного исчисления.

**Степень разработанности темы исследования.** Интерес к дробному математическому исчислению, дифференциальным и интегральным уравнениям дробного порядка возник почти одновременно с появлением классического анализа. Его основы были заложены в работах классиков: Лейбница, Абеля, Лиувилля, Римана, Хольмгрена, Грюнвальда, Летникова, Хэвисайда. В первой половине XX в. заметный вклад, как в теорию, так и в практику дробного анализа внесли Г. Харди, Г. Вейль, М. Рисс, П. Монтель, А. Маршо, Д. Литтлвуд, Я. Тамаркин, Э. Пост, С.Л. Соболев, А. Зигмунд, Б. Надь, А. Эрдейи, Х. Кобер, Ж. Коссар, и ряд других ученых. В 1915 г. Г. Харди и М. Рисс использовали дробное интегрирование для суммирования расходящихся рядов. В 1917 г. Г. Вейль определил дробное интегрирование для периодических функций в виде свертки с некоторой специальной функцией. В работе А. Маршо (1927 г.) была введена новая форма дробного дифференцирования, которая применима в случае функций с «плохим» поведением на бесконечности. В работах М. Рисса (1936, 1938, 1949 гг.) были получены операторы типа потенциала (потенциалы Рисса), позволившие определить дробное интегрирование функций многих переменных. Для некоторых интегральных операторов и интегральных уравнений очень полезными оказались дробные интегралы Эрдейи и Кобера (1940 г.).

В современной математике продолжалось и продолжается изучение дробного исчисления и дифференциальных уравнений дробного порядка, дробных степеней дифференциальных операторов. Выдающийся вклад в изучение дробного исчисления и его приложений внес А.А. Килбас вместе со своими учениками. Существенный вклад в изучение операторов дробного интегрирования и дифференцирования, связанных с ними одномерных и многомерных операторов типа потенциала, а также теорию дифференциальных уравнений дробного порядка и их приложений был внесен С.Н. Асхабовым, Э. Бажлековой, О.В. Бесовым, И.Л. Васильевым, А.А. Ворошиловым, Ф.Д. Гаховым, А.Н. Герасимовым, Х.Ю. Глезке, М.Л. Гольдманом, Р. Горенфло, А.П. Гринько, М.М. Джрбашяном, А.Н. Зарубиным, М. Капуто, И.А. Киприяновым, В. Киряковой, А.Н. Кочубеем, А.Ф. Леонтьевым, П.И. Лизоркиным, Ю.Г. Лучко, Л.Н. Ляховым, Ф. Майнарди, О.И. Маричевым, А.М. Нахушевым, И. Подлюбным, А.В. Псху, О.А. Репиным, Ю.Н. Работновым, С.В. Рогозиным, Ю.А. Россихиным, Б.С. Рубиным, М. Сайго, С.Г. Самко, В.Е. Федоровым, Ф.В. Чумаковым, М.В. Шитиковой, Э.Л. Шишкиной, С.Б. Якубовичем, и другими.

Следует также отметить, что методы дробного исчисления и дифференциальных уравнений дробного порядка существенно связаны с теорией операторов преобразования. Например, классические операторы преобразования Сонина и Пуассона являются дробными интегральными операторами Эрдейи—Кобера. Этот круг вопросов изучен в работах В.В. Катрахова и С.М. Ситника. Кроме того, в работах С.М. Ситника и Э.Л. Шишкиной были изучены задачи для дробных степеней операторов Бесселя. Абстрактные дифференциальные уравнения типа Эйлера второго порядка рассматривались В.И. Фоминым.

Отметим, что в перечисленных выше работах задачи, исследованные в диссертации, не рассматривались.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является изучение условий разрешимости и получение формул представления решений однородного и неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка, являющегося аналогом обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера, в некоторых классах функций.

Цель обусловила постановку следующих задач исследования:

**1.** Получить формулы представления решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с двумя, тремя и любым конечным числом производных Римана–Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ и доказать, что полученные решения образуют фундаментальную систему.

**2.** Получить необходимые и достаточные условия разрешимости и найти формулы представления решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Римана—Лиувилля на интервале $(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$ в терминах характеристической эрмитовой формы.

**3.** Получить формулы представления частных решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с тремя и любым конечным числом дробных производных Римана–Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$, построить общее решение и доказать теоремы разрешимости в терминах дробного аналога функции Грина.

**4.** Доказать теоремы об ограниченности операторов взвешенного дробного интегрирования и найти формулы представления решений обобщенного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом производных любого порядка в специально построенных весовых банаховых пространствах аналитических функций.

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

**1.** Исследовано однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(0;+\infty)$. Разработан метод эрмитовых форм для его исследования, на интервале $(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$ такое уравнение ранее не рассматривалось.

**2.** Методом интегральных преобразований Меллина построен дробный аналог функции Грина для неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(0;+\infty)$ с тремя и любым конечным числом дробных производных Римана–Лиувилля. Аналогичный результат был получен ранее, но для уравнения типа Эйлера с двумя дробными производными Римана–Лиувилля.

**3.** Исследовано обобщенное дифференциальное уравнение типа Эйлера дробного порядка в банаховых пространствах аналитических функций.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие положения:

**1.** Доказательство необходимых и достаточных условий разрешимости однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Римана–Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$. Доказательство, что полученные решения образуют фундаментальную систему.

**2.** Доказательство необходимых и достаточных условий разрешимости в терминах характеристической эрмитовой формы и формул представления решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Римана—Лиувилля на интервале $(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$.

**3.** Теоремы разрешимости в терминах дробного аналога функции Грина и формулы представления частных решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(0;+\infty)$, формулы представления общего решения.

**4.** Теоремы об ограниченности операторов взвешенного дробного интегрирования и формулы представления решений обобщенного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом производных Римана–Лиувилля любого порядка в весовых банаховых пространствах аналитических функций.

Все положения, выносимые на защиту, являются новыми и могут быть использованы в исследованиях по теории дифференциальных уравнений дробного порядка.

**Личный вклад соискателя.** Диссертация представляет собой самостоятельное исследование соискателя. Основные результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Соавторам публикаций в совместных работах А.А. Килбасу, И.Л. Васильеву, С.М. Ситнику из списка публикаций принадлежали предметные постановки и выбор направления исследований, а также формирование основной структуры диссертации.

**Методы исследования.** Используются методы теории функций, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, интегральных преобразований, теории операторов дробного интегрирования и дифференцирования, теории распределения корней алгебраических уравнений.

**Теоретическая и практическая ценность.** Полученные результаты диссертации имеют теоретический характер. Их практическая значимость определяется возможностью использования в научных исследованиях по теории дифференциальных уравнений дробного порядка, а также в учебном процессе при чтении специальных курсов.

**Апробация диссертации.** Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на научно–методическом семинаре кафедры теории функций имени академика Ф.Д. Гахова (Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский государственный университет, 2007—2017 гг., руководители семинара А.А. Килбас, Э.И. Зверович, В.Г. Кротов), на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Белгородского государственного национального исследовательского университета (руководители семинара А.П. Солдатов, В.Б. Васильев, 2018 г.), семинаре ЮФУ, семинаре Регионального научно–образовательного математического центра ЮФУ, Ростов–на–Дону, 2018 г. Результаты диссертации также неоднократно докладывались на международных конференциях в период 2007—2018 гг.

**Опубликование результатов диссертации.** Результаты диссертации опубликованы в 34 научных работах, 7 из которых [1–7] входят в перечень ВАК, а публикации [1–3] в базы данных Scopus и Web of Science. В автореферат включен список из 12 основных публикаций соискателя.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из содержания, введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем рукописи диссертации составляет 139 страниц, из которых 11 страниц занимает список литературы, насчитывающий 114 наименований, в том числе 34 наименования — публикации автора по теме диссертации.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** кратко изложены структура и содержание диссертации. Рассмотрены актуальность темы и цель работы, методы исследования и научная новизна, положения, выносимые на защиту, публикации по теме диссертации и личный вклад автора в совместные работы, апробация диссертационного исследования, характеризуются основные методы исследования.

В **первой главе** «Обзор литературы по теме диссертации и вспомогательные сведения» дается обзор основных результатов, полученных зарубежными и российскими математиками по вопросам, связанным с дифференциальными уравнениями дробного порядка и их приложениям. Приводятся основные сведения из теории дробного интегрирования и дифференцирования, интегральных преобразований и специальных функций.

Во **второй главе** «Фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка» с помощью интегрального преобразования Меллина построена фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с двумя, тремя и любым конечным числом дробных производных Римана–Лиувилля на полуоси $(0; +\infty)$. Введено понятие обобщенного аналога Вронскиана, рассмотрены его свойства. Также в главе 2 дано решение однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на интервале $(0;1)$ в классе $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ функций, представимых дробным интегралом Римана—Лиувилля порядка $\alpha$ с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$ в классе $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом Римана–Лиувилля порядка $\alpha$ с плотностью из $\mathcal{L}_1(1;+\infty)$. С помощью метода эрмитовых форм (метода Льенара—Шипара) получены условия разрешимости в классах $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ и $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$ для случаев двух, трех и любого конечного числа производных. Показано, что в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, исходное уравнение допускает решение с логарифмическими особенностями. Рассмотрим результаты, полученные во 2 главе, более подробно.

В §2.1 главы 2 рассмотрена общая схема для нахождения решения однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом дробных производных:

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{\alpha+k}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}y\big)(x)=0, \tag{1}$$

с коэффициентами $A_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{0,m}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+=(0;+\infty)$. Здесь $(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y)(x)$ — левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha\geq 0$, определяемая формулой:

$$\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y\big)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt. \tag{2}$$

Используется операционный метод на основе прямого и обратного преобразований Меллина. Этим методом получено формальное описание множества решений уравнения (1) в зависимости от величин параметров уравнения (1).

Применяя схему, предложенную в монографии *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo «Theory and applications of fractional differential equations»*, для решения неоднородного уравнения (9) с двумя дробными производными Римана–Лиувилля (2), получаем формулу преобразования Меллина решения уравнения (1):

$$\big(\mathcal{M}y\big)(s)=\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)\mathrm{P}_m(1-s)}g(s), \tag{3}$$

$$g(s)=-\sum_{k=0}^{m}A_k\sum_{j=0}^{n+k-1}d_j^k\frac{\Gamma(1+j-s-\alpha-k)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)},\quad d_j^k=\Big[x^{s+\alpha+k-j-1}\big(\mathcal{I}_{0+}^{n+k-\alpha}y\big)(x)\Big]_0^{\infty}.$$

Здесь $\mathrm{P}_m(s)$ — многочлен степени $m$:

$$\mathrm{P}_m(s) = A_m(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_m). \tag{4}$$

Применяя обратное преобразование Меллина к (3), получим формальное решение уравнения (1) в виде интеграла Меллина—Барнса:

$$y(x) = \frac{(-1)^m}{2\pi i A_m}\int\limits_L \frac{\Gamma(1-\alpha-s)g(s)x^{-s}ds}{\Gamma(1-s)\prod\limits_{j=1}^{m}(s-1+s_j)}. \tag{5}$$

Обобщенный аналог Вронскиана. Пусть $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ — функции от $x$, имеющие непрерывные производные до $n$–1–го порядка.

**Определение 2.1.** *Определителем Вронского* или *Вронскианом* $\mathcal{W}(x)$ функций $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ называют определитель:

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(u_1,...,u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \\ u_1' & u_2' & ... & u_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & ... & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

**Определение 2.2.** *Обобщенным аналогом Вронскиана* $\mathcal{W}_\alpha(x)$ назовем функцию:

$$\mathcal{W}_\alpha(x)=\det\Big(\big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k}u_j\big)(x)\Big)_{k,j=1}^{n} = \begin{vmatrix} \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-1}u_1\big) & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-1}u_2\big) & ... & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-1}u_n\big) \\ \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-2}u_1\big) & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-2}u_2\big) & ... & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-2}u_n\big) \\ ... & ... & ... & ... \\ \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}u_1\big) & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}u_2\big) & ... & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}u_n\big) \end{vmatrix}.$$

**Теорема 2.1.** *Если* $y_1,...,y_m$ *— решения уравнения* (1), *то и* $y = C_1y_1 + ... + C_my_m$ *— также решение уравнения* (1) *при произвольных* $C_1$, ..., $C_m$.

**Теорема 2.2.** *Если* $y_1,...,y_{n+m}$ *— решения уравнения* (1) *и* $\mathcal{W}_\alpha(y_1,...,y_{n+m})\Big|_{x=x_0} = 0$, *то* $\mathcal{W}_\alpha(y_1,...,y_{n+m}) \equiv 0$, $0<x<+\infty$ *и* $y_1,...,y_{n+m}$ *— линейно независимые решения в промежутке* $0<x<+\infty$.

В п.2.1.1 §2.1 построена фундаментальная система решений для однородного дифференциального уравнения типа Эйлера (1) с конечным числом дробных производных Римана–Лиувилля (2).

Следующая теорема дает решение уравнения (1) для первого случая расположения корней характеристического многочлена $\mathrm{P}_m(s)$ из (4), когда все полюсы подынтегральной функции в (5) простые.

**Теорема 2.3.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $n = [\mathrm{Re}\,\alpha] + 1$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что* $s_i \neq s_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, m}$, $\mathrm{Re}\,s_i > 0$, $i = \overline{1, m}$ *и* $s_i \neq \alpha - k$, $i = \overline{1, m}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (1) *имеет* $m + n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{\alpha - i}$, $i = \overline{1, n}$, $y_j(x) = x^{s_j - 1}$, $j = \overline{1, m}$. *Общее решение уравнения* (1) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha - i} + \sum\limits_{j=1}^{m} D_j\, x^{s_j - 1}$, *где* $C_i$, $i = \overline{1, n}$ *и* $D_j$, $j = \overline{1, m}$ *— произвольные постоянные.*

Следующее утверждение дает решение уравнения (1) в случае, когда все полюсы подынтегральной функции в (5) совпадают и отличны от полюсов $\Gamma(1 - \alpha - s)$.

**Теорема 2.5.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $n = [\mathrm{Re}\,\alpha] + 1$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что* $s_1 = ... = s_m$, $\mathrm{Re}\,s_1 > 0$ *и* $s_i \neq \alpha - k$, $i = \overline{1, m}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (1) *имеет* $m + n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{\alpha - i}$, $i = \overline{1, n}$, $y_j(x) = x^{s_1 - 1} \ln^{j-1} x$, $j = \overline{1, m}$. *Общее решение уравнения* (1) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha - i} + \sum\limits_{j=1}^{m} D_j\, x^{s_1 - 1} \ln^{j-1} x$, *где* $C_i$, $i = \overline{1, n}$ *и* $D_j$, $j = \overline{1, m}$ *— произвольные постоянные.*

Аналогично теоремам 2.3, 2.5 доказываются утверждения приведенных ниже теорем, дающие решение уравнения (1) соответственно в случаях, когда некоторые полюсы $s_i$ и все полюсы $s_j$ подынтегральной функции в (5) совпадают между собой и с полюсом $\Gamma(1 - \alpha - s)$.

**Теорема 2.7.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $n = [\mathrm{Re}\,\alpha] + 1$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что* $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < m + n$ *и* $l$, $1 < l < m$ *такие, что* $s_1 = ... = s_l = \alpha - n_0$, $s_1 \neq s_j$, $j = l + 1, ..., m$, $\mathrm{Re}\,s_i > 0$, $i = \overline{1, m}$ *и* $s_i \neq \alpha - k$, $i = \overline{l + 1, m}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (1) *имеет* $m + n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{\alpha - i}$, $i = \overline{1, n}$, $y_j(x) = x^{\alpha - n_0 - 1} \ln^{j-1} x$, $j = \overline{1, l}$, $y_j(x) = x^{s_j - 1}$, $j = \overline{l + 1, m}$. *Общее решение уравнения* (1) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha - i} + \sum\limits_{j=1}^{l} D_j\, x^{\alpha - n_0 - 1} \ln^{j-1} x + \sum\limits_{j=l+1}^{m} D_j\, x^{s_j - 1}$, *где* $C_i$, $i = \overline{1, n}$ *и* $D_j$, $j = \overline{1, m}$ *— произвольные постоянные.*

**Теорема 2.9.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $n = [\mathrm{Re}\,\alpha] + 1$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что* $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < m + n$ *такое, что* $s_1 = ... = s_m = \alpha - n_0$, $\mathrm{Re}\,s_1 > 0$. *Тогда уравнение* (1) *имеет* $m + n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{\alpha - i}$, $i = \overline{1, n}$, $y_j(x) = x^{\alpha - n_0 - 1} \ln^{j-1} x$, $j = \overline{1, m}$. *Общее решение уравнения* (1) *имеет вид:* $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha-i}+\sum\limits_{j=1}^{m} D_j\, x^{\alpha-n_0-1}\ln^{j-1} x$, *где* $C_i$, $i=\overline{1,n}$ *и* $D_j$, $j=\overline{1,m}$ — *произвольные постоянные.*

При $\alpha=n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup 0$ из теорем 2.3, 2.5, 2.7 и 2.9 получаются утверждения, сформулированные в п.2.1.1 §2.1 и дающие решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера $\sum\limits_{k=0}^{m} A_k x^{n+k} y^{(n+k)}(x)=0$.

В пп.2.1.2, 2.1.3 §2.1 с помощью применения прямого и обратного интегрального преобразования Меллина построена фундаментальная система решений для однородного дифференциального уравнения типа Эйлера (1) с двумя и тремя дробными производными Римана–Лиувилля (2). Сформулированы утверждения, дающие решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера, являющегося частным случаем такого уравнения.

В п.2.2.1 §2.2 рассмотрено однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера порядка $\alpha+m$ :

$$A_m x^m\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m}y\big)(x)+A_{m-1}x^{m-1}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-1}y\big)(x)+\ldots+A_0(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y)(x)=0, \tag{6}$$

где $0<\alpha<1$, $m\in\mathbb{N}$, $0<x<1$, коэффициенты $A_0$, $A_1$, ..., $A_m\in\mathbb{C}$, $(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y)(x)$ — дробная производная Римана—Лиувилля (2).

Решение $y(x)$ ищется в классе $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка $\alpha$ с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;1)$.

Обозначив $z=\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_m x^m z^{(m)}(x)+A_{m-1}x^{m-1}z^{(m-1)}(x)+\ldots+A_0 z(x)=0. \tag{7}$$

Уравнению (7) ставится в соответствие характеристический многочлен:

$$\mathrm{P}_m(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0. \tag{8}$$

**Теорема 2.24.** *Пусть характеристический многочлен* $\mathrm{P}_m(\lambda)$ *в* (8) *имеет* $\kappa_1$ *простых корней* $\lambda_{j1}$, $j=1,\ldots,\kappa_1$, $\kappa_2$ *корней* $\lambda_{j2}$, $j=1,\ldots,\kappa_2$ *кратности* 2, ..., $\kappa_l$ *корней* $\lambda_{jl}$, $j=1,\ldots,\kappa_l$ *кратности* $l$ *в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$, *причем* $\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_l=\kappa$, $\kappa\le m$. *Тогда общее решение уравнения* (6) *имеет вид:*

$$y(x)=c_0x^{\alpha-1}+\sum_{j=1}^{\kappa_1} c_{j1}\frac{\Gamma(\lambda_{j1}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{j1}+1)}x^{\alpha+\lambda_{j1}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\kappa_2} c_{j2}\frac{\Gamma(\lambda_{j2}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{j2}+1)}x^{\alpha+\lambda_{j2}}\,(1+\psi(\lambda_{j2}+1)-\psi(\alpha+\lambda_{j2}+1)+\ln x)+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{\kappa_l} c_{jl}x^{\alpha+\lambda_{jl}}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda_{jl}^i}\left(\frac{\Gamma(\lambda_{jl}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{jl}+1)}\right)\ln^{k-i-1}x,$$

*где* $c_0$, $c_{ij}$ *— произвольные постоянные.*

Представляют интерес методы нахождения числа корней многочлена $\mathrm{P}_m(\lambda)$ из (8) в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$, не основанные на явном решении характеристического уравнения. Обозначим $Q_m(t)=\mathrm{P}_m(-it-1)$ и пусть $\overline{Q_m}(t)$ — многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены к коэффициентам $Q_m(t)$. Строим функцию:

$$h(Q_m;t,\tau)=-i\frac{Q_m(t)\overline{Q_m}(\tau)-Q_m(\tau)\overline{Q_m}(t)}{t-\tau}=\sum_{k,\,l=0}^{m-1}B_{kl}t^k\tau^l.$$

Этой функции ставим в соответствие эрмитову форму:

$$\mathcal{H}(Q_m;t_0,...,t_{m-1})=\sum_{k,\,l=0}^{m-1}B_{kl}t_k\overline{t_l}.$$

Пусть НОД( $Q_m(t),\overline{Q_m}(t)$ )$=d_p(t)$ — многочлен степени $p\leq m$.

**Теорема 2.25.** *Пусть* $r$ *и* $s$ *— ранг и сигнатура эрмитовой формы* $\mathcal{H}(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$. *Тогда уравнение* (6) *имеет* $(r+s)/2+1$ *линейно независимое решение. Если эрмитова форма* $\mathcal{H}(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$ *определена положительно, то уравнение* (6) *имеет* $(m+1)$ *линейно независимое решение. Если эрмитова форма* $\mathcal{H}(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$ *определена отрицательно, то уравнение* (6) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x)=c_0\,x^{\alpha-1}$, *где* $c_0$ *— произвольная постоянная.*

Пусть $0<p\leq m$. Если многочлен $d_p(t)$ не имеет вещественных корней, то $p$ обязательно четное и корни многочлена $d_p(t)$ образуют пары комплексно сопряженных чисел. Решениям уравнения (6) соответствуют корни, лежащие в верхней полуплоскости. Их будет ровно $p/2$. Если многочлен $d_p(t)$ имеет $w$ действительных корней, то в верхней полуплоскости будет ровно $(p-w)/2$ корней. В этих случаях вместо теоремы 2.25 имеет место

**Теорема 2.26.** *Пусть* $r$ *и* $s$ *— ранг и сигнатура эрмитовой формы* $\mathcal{H}(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$. *Тогда уравнение* (6) *имеет* $(r+s)/2+1+(p-w)/2$ *линейно независимых решений.*

В п.2.2.2 §2.2 рассмотрено неоднородное уравнение типа Эйлера на интервале $(0;1)$, приведен конкретный пример. Частный случай уравнения (6) на интервале $(0;1)$ с двумя дробными производными Римана—Лиувилля (2) рассмотрен в п.2.2.3 §2.2, с тремя дробными производными Римана—Лиувилля (2) — в п.2.2.4 §2.2.

Весь §2.3 главы 2 посвящен исследованию однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(1;+\infty)$ методом эрмитовых форм.

В **третьей главе** «Представление решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера в терминах дробного аналога функции Грина» построены частные решения неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с левосторонними дробными производными Римана–Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$. Используя интегральное преобразование Меллина и теорию вычетов, в 3 главе получено представление частных решений в виде свертки правой части с дробным аналогом Меллина функции Грина. Глава 3 обобщает результаты, полученные впервые А.А. Килбасом в монографии *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo «Theory and applications of fractional differential equations»*, для неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с двумя дробными производными Римана–Лиувилля. Также в 3 главе сформулированы и доказаны теоремы разрешимости неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с двумя, тремя и любым конечным числом левосторонних дробных производных Римана–Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ в классе $\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\big(\mathcal{L}_1(0;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка $\alpha$ с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;+\infty)$ в терминах дробного аналога функции Грина. Рассмотрены частные случаи и примеры. Рассмотрим более подробно результаты, полученные в 3 главе.

В §3.1 главы 3 рассмотрена общая схема для нахождения частных решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом дробных производных Римана–Лиувилля (2):

$$\sum_{k=0}^{m} A_k\, x^{\alpha+k}\big(\mathcal{D}^{\alpha+k}_{0+}y\big)(x) = f(x), \tag{9}$$

где $x > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $A_m \neq 0$ с действительными коэффициентами $A_0$, ..., $A_m \in \mathbb{R}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0;+\infty)$.

В п.3.2.1 §3.2 найдено представление *дробного аналога Меллина функции Грина*

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i A_m}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)...(s-s_m)} x^{-s} ds, \quad \gamma = \operatorname{Re} s \tag{10}$$

для неоднородного уравнения типа Эйлера (9) на полуоси $(0;+\infty)$.

Решение уравнения (9) задается

$$y(x) = \int\limits_0^1 G_\alpha(t) f(xt) dt = \int\limits_0^x G_\alpha\Big(\frac{t}{x}\Big) f(t) \frac{dt}{x} \tag{11}$$

при условии, что интегралы в правой части (11) сходятся.

Следующие утверждения дают представления $G_\alpha(x)$ из (10).

**Теорема 3.1.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что* $s_i \neq s_j$, $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, $s_i \neq \alpha - k$, $i = \overline{1, m}$ *ни при каком* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда при* $0 < x \leq 1$ :

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m} {}_m\Psi_{m+1}\left[\begin{matrix}(\alpha - s_1, -1), ..., (\alpha - s_m, -1) \\ (\alpha, -1), (\alpha - s_1 + 1, -1), ..., (\alpha - s_m + 1, -1)\end{matrix}\bigg| - x\right] +$$

$$+ \frac{1}{A_m} \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma(s_i - \alpha) x^{-s_i}}{\Gamma(s_i) \prod\limits_{j=1, j\neq i}^m (s_i - s_j)} = \frac{x^{-\alpha}}{A_m \Gamma(\alpha) \prod\limits_{j=1}^m (\alpha - s_j)} \times$$

$$\times {}_{m+1}\mathrm{F}_m\left[\begin{matrix}1 - \alpha, s_1 - \alpha, ..., s_m - \alpha \\ s_1 - \alpha + 1, ..., s_m - \alpha + 1\end{matrix}\bigg| x\right] + \frac{1}{A_m} \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma(s_i - \alpha) x^{-s_i}}{\Gamma(s_i) \prod\limits_{j=1, j\neq i}^m (s_i - s_j)}.$$

*Частное решение* $y(x)$ *уравнения* (9) *задается* (11) *при условии, что интегралы в правых частях* (11) *сходятся.*

**Теорема 3.2.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что* $s_1 = s_2 = ... = s_m \neq \alpha - k$ *ни при каком* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда для* $0 < x \leq 1$ :

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m} {}_m\Psi_{m+1}\left[\begin{matrix}(\alpha - s_1, -1), ..., (\alpha - s_1, -1) \\ (\alpha, -1), (\alpha - s_1 + 1, -1), ..., (\alpha - s_1 + 1, -1)\end{matrix}\bigg| - x\right] +$$

$$+ \frac{1}{A_m (m-1)!} \lim_{s \to s_1} \left(\frac{\Gamma(s - \alpha) x^{-s}}{\Gamma(s)}\right)^{(m-1)} =$$

$$= \frac{x^{-\alpha}}{A_m \Gamma(\alpha)(\alpha - s_1)^m} {}_{m+1}\mathrm{F}_m\left[\begin{matrix}1 - \alpha, s_1 - \alpha, ..., s_1 - \alpha \\ s_1 - \alpha + 1, ..., s_1 - \alpha + 1\end{matrix}\bigg| x\right] +$$

$$+ \frac{1}{A_m (m-1)!} \lim_{s \to s_1} \left(\frac{\Gamma(s - \alpha) x^{-s}}{\Gamma(s)}\right)^{(m-1)}.$$

*Если* $m \geq 2$, *то для* $0 < x \leq 1$ :

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m \Gamma(\alpha)(\alpha - s_1)^m} {}_{m+1}\mathrm{F}_m\left[\begin{matrix}1 - \alpha, s_1 - \alpha, ..., s_1 - \alpha \\ s_1 - \alpha + 1, ..., s_1 - \alpha + 1\end{matrix}\bigg| x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_m(m-1)!}\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m-2}{j}\lim_{s\to s_1}\left(\left(\frac{\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\Gamma(s)}\right)^{(m-2-j)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\psi(s-\alpha)-\psi(s)-\ln x\right]^{(j)}\right),$$ *где* $\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}$ *— биномиальный коэффициент. Частное решение* $y(x)$ *уравнения* (9) *задается* (11) *при условии, что интегралы в правых частях* (11) *сходятся.*

**Теорема 3.3.** *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$, $A_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{0,m}$, $A_m\neq 0$, $n_0=-1$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что* $\exists n_1,...,n_l\in\mathbb{N}_0$, *что* $s_1=\alpha-n_1$, ..., $s_l=\alpha-n_l$, $s_i\neq s_j$, $i,j=\overline{l+1,m}$, $i\neq j$, $s_i\neq\alpha-k$, $i=\overline{l+1,m}$. *Тогда для* $0<x\leq 1$ :

$$G_\alpha(x)=\frac{x^{-\alpha}}{A_m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!\Gamma(\alpha-k)\prod\limits_{i=1}^{l}(n_i-k)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(\alpha-k-s_j)}+$$

$$+\frac{1}{A_m}\sum_{i=l+1}^{m}\frac{\Gamma(s_i-\alpha)x^{-s_i}}{\Gamma(s_i)\prod\limits_{j=1}^{l}(s_i+n_j-\alpha)\prod\limits_{j=l+1,j\neq i}^{m}(s_i-s_j)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_l+m+1}x^{-\alpha+n_l+1}}{A_m(n_l+1)!\Gamma(\alpha-n_l-1)\prod\limits_{j=1}^{l-1}(n_l-n_j+1)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(n_l+s_j-\alpha+1)}\times{}_{m+2}\mathrm{F}_{m+1}$$

$$\left[\left.\begin{matrix}1,1,n_l-\alpha+2,n_l-n_1+1,...,n_l-n_{l-1}+1,n_l+s_{l+1}-\alpha+1,...,n_l+s_m-\alpha+1\\2,n_l+2,n_l-n_1+2,...,n_l-n_{l-1}+2,n_l+s_{l+1}-\alpha+2,...,n_l+s_m-\alpha+2\end{matrix}\right|x\right]+$$

$$+\frac{1}{A_m}\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^{n_i+1}x^{-\alpha+n_i}}{n_i!\Gamma(\alpha-n_i)\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{l}(n_j-n_i)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(\alpha-n_i-s_j)}\times$$

$$\times\left[\gamma+\ln x+\psi(\alpha-n_i)+\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{j-n_i}+\sum_{j=1,j\neq i}^{l}\frac{1}{n_j-n_i}+\sum_{j=l+1}^{m}\frac{1}{\alpha-n_i-s_j}\right].$$

*Частное решение* $y(x)$ *уравнения* (9) *задается* (11) *при условии, что интегралы в правых частях* (11) *сходятся.*

**Теорема 3.4.** *Пусть* $m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\alpha>0$, $A_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{0,m}$, $A_m\neq 0$, $1<l<m$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что*

$\exists n_0 \in \mathbb{N}_0$, *что* $s_1 = s_2 = \ldots = s_l = \alpha - n_0$, $s_1 \neq s_j$, $j = \overline{l+1,m}$. *Тогда для* $0 < x \leq 1$ :

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m} \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!\Gamma(\alpha-k)(n_0-k)^l \prod\limits_{j=l+1}^{m} (\alpha-k-s_j)} +$$

$$+\frac{1}{A_m} \sum_{i=l+1}^{m} \frac{\Gamma(s_i-\alpha)x^{-s_i}}{\Gamma(s_i)(s_i-\alpha+n_0)^l \prod\limits_{j=l+1, j\neq i}^{m} (s_i-s_j)} +$$

$$+\frac{(-1)^{n_0+m+1} x^{-\alpha+n_0+1}}{A_m(n_0+1)!\Gamma(\alpha-n_0-1) \prod\limits_{j=l+1}^{m} (n_0+1+s_j-\alpha)} \times$$

$$\times {}_{m+2}\mathrm{F}_{m+1}\left[\begin{matrix} 1, \ldots, 1, n_0-\alpha, n_0+1+s_{l+1}-\alpha, \ldots, n_0+1+s_m-\alpha \\ 2, \ldots, 2, n_0+2, n_0+2+s_{l+1}-\alpha, \ldots, n_0+2+s_m-\alpha \end{matrix} \middle| x \right] +$$

$$+\frac{1}{A_m(l-1)!} \sum_{k=0}^{l-2} \binom{l-2}{k} \lim_{s\to\alpha-n_0} \left( \frac{\Gamma(s-\alpha+n_0+1)x^{-s}}{\Gamma(s)\prod\limits_{i=0}^{n_0-1}(s-\alpha+i)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(s-s_j)} \right)^{(l-2-k)} \times$$

$$\times\left(\psi^{(k)}(1) - \psi^{(k)}(\alpha-n_0) - \sum_{i=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^k k!}{(i-n_0)^{k+1}} - \sum_{j=l+1}^{m} \frac{(-1)^k k!}{(\alpha-n_0-s_j)^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{(\alpha-n_0)^k}\right).$$

*Частное решение* $y(x)$ *уравнения* (9) *задается* (11) *при условии, что интегралы в правых частях* (11) *сходятся.*

**Теорема 3.5.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\alpha > 0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (4) *такие, что* $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0$, *что* $s_1 = s_2 = \ldots = s_m = \alpha - n_0$. *Тогда для* $0 < x \leq 1$ :

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m} \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!\Gamma(\alpha-k)(n_0-k)^m} +$$

$$+\frac{(-1)^{n_0+m+1} x^{-\alpha+n_0+1}}{A_m(n_0+1)!\Gamma(\alpha-n_0-1)} \, {}_{m+2}\mathrm{F}_{m+1}\left[\begin{matrix} n_0-\alpha, 1, 1, \ldots, 1 \\ n_0+2, 2, 2, \ldots, 2 \end{matrix} \middle| x \right] +$$

$$+\frac{1}{A_m(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-2}{k} \lim_{s\to\alpha-n_0} \left( \frac{\Gamma(s-\alpha+n_0+1)x^{-s}}{\Gamma(s)\prod\limits_{i=0}^{n_0-1}(s-\alpha+i)} \right)^{(m-2-k)} \times$$

$$\times\left(\psi^{(k)}(1)-\psi^{(k)}(\alpha-n_0)-(-1)^k k!\sum_{i=0}^{n_0-1}\frac{1}{(i-n_0)^{k+1}}+\frac{(-1)^k}{(\alpha-n_0)^k}\right).$$

*Частное решение* $y(x)$ *уравнения* (9) *задается* (11) *при условии, что интегралы в правых частях* (11) *сходятся.*

В п.3.2.2 §3.2 на полуоси $(0;+\infty)$ рассмотрено неоднородное уравнение типа Эйлера порядка $\alpha+n$ с конечным числом дробных производных Римана–Лиувилля (2):

$$a_n x^{\alpha+n}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+n}y\right)(x)+a_{n-1}x^{\alpha+n-1}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+n-1}y\right)(x)+...+a_0x^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y\right)(x)=f(x), \quad (12)$$

где $0<\alpha<1$. Решение $y(x)$ ищется в классе $\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\left(\mathcal{L}_1(0;+\infty)\right)$ функций, представимых дробным интегралом порядка $\alpha$ с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;+\infty)$.

Обозначив $y=\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi\in\mathcal{L}_1(0;+\infty)$, из (12) получим уравнение Эйлера:

$$a_n x^{\alpha+n}\varphi^{(n)}(x)+a_{n-1}x^{\alpha+n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+...+a_0x^{\alpha}\varphi(x)=f(x).$$

Если $\varphi(x)\in\mathcal{L}_1(0;+\infty)$, то решение уравнения (12) получим в виде:

$$y(x)=\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\left(x^{-\alpha}\int_0^{\infty}G(t)f(xt)dt\right). \quad (13)$$

Пусть все корни $s_1,\ s_2,\ ...,\ s_n$ многочлена

$$\mathrm{P}(1-s)=a_n(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n) \quad (14)$$

различны. Тогда:

$$G(x)=\begin{cases}A_1x^{-s_1}+A_2x^{-s_2}+...+A_nx^{-s_n},\ 0<x<1,\\ 0,\ \left[\begin{array}{l}x\le 0,\\ x\ge 1,\end{array}\right.\end{cases} \quad (15)$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

**Теорема 3.6.** *Пусть все корни* $s_1,\ s_2,\ ...,\ s_n$ *многочлена* $\mathrm{P}(1-s)$ *в* (14) *различны, функция* $f$ $n$ *раз дифференцируема и* $f,\ f',\ ...,\ f^{(n)}\in\mathcal{L}_{1-\alpha,1}$. *Если* $\operatorname{Re}s_j<\alpha,\ \forall j=\overline{1,n}$, *то уравнение* (12) *имеет единственное решение* (13) *с дробным аналогом функции Грина* (15).

Пусть среди корней многочлена $\mathrm{P}(1-s)$ в (14) есть кратные. Без ограничения общности будем считать $s_1$ — корень кратности $l_1$, $s_2$ — корень кратности $l_2$, $s_k$ — корень кратности $l_k$, причем $l_1+l_2+\ldots+l_k=n$. Тогда:

$$G(x)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{m_j=1}^{l_j}A_{km}\frac{(-1)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}x^{-s_j}\ln^{m_j-1}x, & 0<x<1,\\ 0, \left[\begin{array}{l}x\le 0,\\ x\ge 1.\end{array}\right.\end{cases} \tag{16}$$

**Теорема 3.7.** *Пусть среди корней многочлена* $\mathrm{P}(1-s)$ *в* (14) *есть кратные, функция* $f$ $n$ *раз дифференцируема и* $f,\ f',\ \ldots,\ f^{(n)}\in\mathcal{L}_{1-\alpha,1}$. *Если* $\operatorname{Re}s_j<\alpha$, *где* $j=\overline{1,k}$, *то уравнение* (12) *имеет единственное решение* (13) *с дробным аналогом функции Грина* (16).

В пп.3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 §3.2 на полуоси $(0;+\infty)$ рассмотрены специальные частные случаи и примеры неоднородного уравнения типа Эйлера (9) и (12) с двумя и тремя дробными производными Римана–Лиувилля (2). Для них построены дробные аналоги функции Грина, сформулированы и доказаны соответствующие теоремы. Также в п.3.2.4 §3.2 получены утверждения для обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера $\sum\limits_{j=0}^{m}A_jx^{l+j}y^{(l+j)}(x)=f(x)$, являющегося предельным случаем уравнения (9).

В **четвертой главе** «Обобщенное дифференциальное уравнение типа Эйлера дробного порядка» введены специальные банаховы пространства функций $\mathrm{PS}_p^+$, $\mathrm{PS}_p^-$ и их весовые аналоги, в которых изучено действие операторов взвешенного дробного интегрирования на интервале $(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$. Рассмотрено обобщенное дифференциальное уравнение Эйлерова типа с конечным числом производных Римана—Лиувилля любого порядка на интервале $(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$. Подробно изучен частный случай такого уравнения — однородное и неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Римана—Лиувилля на интервале $(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$. С помощью свойств операторов взвешенного дробного интегрирования данные уравнения сведены к системе алгебраических уравнений, для них сформулированы условия разрешимости и получены решения в замкнутой форме. Рассмотрим подробнее результаты 4 главы.

**Определение 4.1.** $\mathrm{PS}_p^+=\Big\{f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k\,x^k\mid x\in(0;1),\ \{f_k\}\in l_p,$ $1\le p\le+\infty\Big\}$. Пространство $\mathrm{PS}_p^+$ является банаховым с нормой: $\|f\|_{\mathrm{PS}_p^+}=$ $\|\{f_k\}\|_{l_p}=\Big\{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|f_k|^p\Big\}^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<+\infty,\ \|f\|_{\mathrm{PS}_\infty^+}=\|\{f_k\}\|_{l_\infty}=\sup\limits_k|f_k|,\ p=+\infty.$

В §4.1 главы 4 изучено действие на функции из $\mathrm{PS}_p^+$ операторов дробного интегрирования и дифференцирования Римана—Лиувилля порядка $\alpha$, $0<\alpha<1$, определяемых соответственно формулами:

$$(\mathcal{I}_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad (\mathcal{D}_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{0}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}. \qquad (17)$$

**Определение 4.2.** $(\mathcal{K}_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}\,(\mathcal{I}_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{x^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad \alpha>0.$

**Теорема 4.1.** $x^{m}$ — *собственные функции оператора* $\mathcal{K}_{+}^{\alpha}$ *в* $\mathrm{PS}_{p}^{+}$, *соответствующие собственным значениям* $\frac{m!}{\Gamma(m+1+\alpha)}$.

**Теорема 4.2.** *Оператор* $\mathcal{K}_{+}^{\alpha}$ *ограничен в* $\mathrm{PS}_{p}^{+}$, $1\le p\le+\infty$, *при этом:* $\|\mathcal{K}_{+}^{\alpha}\|=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Также в §4.1 главы 4 рассмотрены операторы взвешенного дробного интегрирования в прямых суммах весовых банаховых пространств аналитических функций.

В §4.2 главы 4 рассмотрено обобщенное неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера любого порядка с конечным числом дробных производных Римана—Лиувилля (17):

$$a_{n}x^{m_{n}}(\mathcal{D}_{+}^{m_{n}}y)(x)+a_{n-1}x^{m_{n-1}}\big(\mathcal{D}_{+}^{m_{n-1}}y\big)(x)+...+a_{1}x^{m_{1}}(\mathcal{D}_{+}^{m_{1}}y)(x)=f(x), \qquad (18)$$

где $0<x<1$, $m_{n}>m_{n-1}>...>m_{1}>0$. Здесь $y\in\mathcal{I}_{+}^{m_{n}}\{\mathrm{PS}_{p}^{+}\}$, $f$ такое, что $x^{-m_{n}}f(x)\in\mathrm{PS}_{p}^{+}$. Уравнение (18) приводится к виду:

$$u+A_{1}\mathcal{K}_{+}^{\gamma_{1}}u+A_{2}\mathcal{K}_{+}^{\gamma_{2}}u+...+A_{n-1}\mathcal{K}_{+}^{\gamma_{n-1}}u=g, \qquad (19)$$

где введены обозначения: $\mathcal{K}_{+}^{\gamma_{1}}u=\frac{1}{x^{\gamma_{1}}}\mathcal{I}_{+}^{\gamma_{1}}u,...,\mathcal{K}_{+}^{\gamma_{n-1}}u=\frac{1}{x^{\gamma_{n-1}}}\mathcal{I}_{+}^{\gamma_{n-1}}u.$

Подставляя разложения $u=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_{k}x^{k}$, $g=\sum\limits_{k=0}^{\infty}t_{k}x^{k}$, где $c_{k}$ неизвестны, $t_{k}$ заданы, в уравнение (19), получим бесконечную систему уравнений:

$$c_{k}\left(1+A_{1}d_{k}^{\gamma_{1}}+...+A_{n-1}d_{k}^{\gamma_{n-1}}\right)=t_{k},\ k=\overline{0,\infty}, \qquad (20)$$

где $d_{k}^{\gamma_{i}}=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\gamma_{i})}=k^{-\gamma_{i}}\left[1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$ при $k\to\infty$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty}d_{k}^{\gamma_{i}}=0$ и в системе (20) лишь конечное число коэффициентов $\left(1+A_{1}d_{k}^{\gamma_{1}}+...+A_{n-1}d_{k}^{\gamma_{n-1}}\right)$ может обратиться в нуль. Кроме того, $\{c_{k}\}\in l_{p}$.

**Теорема 4.10.** 1. *Пусть* $1+A_{1}d_{k}^{\gamma_{1}}+...+A_{n-1}d_{k}^{\gamma_{n-1}}\neq0$, $\forall k=\overline{0,\infty}$. *Тогда уравнение* (18) *имеет в пространстве* $\mathrm{PS}_{p}^{+}$ *единственное решение*

$$y=\frac{x^{m_{n}}}{\Gamma(m_{n})}\sum_{k=0}^{\infty}c_{k}\frac{k!}{(m_{n})_{k+1}}x^{k}, \qquad (21)$$

*где*

$$c_k = \frac{t_k}{1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}}}. \tag{22}$$

2. *Пусть* $\exists k_1, ..., k_N :\ 1 + A_1 d_{k_i}^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_{k_i}^{\gamma_{n-1}} = 0,\ i = \overline{1, N},$ *а* $\forall k \neq k_i,$ $i = \overline{1, N} :\ 1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}} \neq 0.$ *Тогда если* $t_{k_i} = 0,\ i = \overline{1, N},$ *то уравнение* (18) *имеет в пространстве* $\mathrm{PS}_p^+$ $N$ *линейно независимых решений* (21), *где* $c_k,\ k \neq k_i,\ i = \overline{1, N}$ *находят из* (22), $c_{k_i},\ i = \overline{1, N}$ *— произвольные постоянные. Если хотя бы одно* $t_{k_i} \neq 0,\ i = \overline{1, N},$ *то уравнение* (18) *не имеет решений в* $\mathrm{PS}_p^+$.

В §4.3 главы 4 рассмотрено однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Римана—Лиувилля (17):

$$x^{\alpha+2}\big(\mathcal{D}_+^{\alpha+2} y\big)(x) + \mathrm{A} x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}_+^{\alpha+1} y\big)(x) + \mathrm{B} x^{\alpha}(\mathcal{D}_+^{\alpha} y)(x) = 0, \tag{23}$$

где $0 < x < 1,\ 0 < \alpha < 1,\ \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{C}$ — постоянные коэффициенты. Полагая $u = \mathcal{D}_+^{\alpha+2} y,$ представим (23) в виде: $u(x) + \mathrm{A}\left(\mathcal{K}_+^1 u\right)(x) + \mathrm{B}\left(\mathcal{K}_+^2 u\right)(x) = 0.$ Пусть $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{\mu+n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^{\mu+n} \ln x.$ Полагая минимально возможное значение $n = 0,$ для коэффициентов $c_n,\ \ d_n$ получим уравнение:

$$c_0 \left\{1 + \frac{\mathrm{A}}{\mu+1} + \frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}\right\} + d_0 \left\{1 + \frac{\mathrm{A}}{\mu+1} + \frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}\right\} \ln x +$$

$$+ d_0 \left(\mathrm{F}_2(\mu)\frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \mathrm{F}_1(\mu)\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}\right) = 0. \tag{24}$$

Для того, чтобы в (24) существовало решение $c_0 \neq 0,\ \ d_0 \neq 0,$ необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$1 + \frac{\mathrm{A}}{\mu + 1} + \frac{\mathrm{B}}{(\mu + 1)(\mu + 2)} = 0, \tag{25}$$

$$\mathrm{F}_2(\mu)\frac{\mathrm{B}}{(\mu + 1)(\mu + 2)} + \mathrm{F}_1(\mu)\frac{\mathrm{A}}{\mu + 1} = 0. \tag{26}$$

Уравнение (25) играет роль характеристического. Пусть его корни удовлетворяют условию $\mu > \alpha - 1.$

**Теорема 4.11.** *Однородное уравнение* (23) *имеет* 2 *линейно независимых решения вида* $y_0(x) = \gamma x^{\mu+2} + \delta x^{\mu+2} \ln x,$ *где* $\gamma, \delta$ *— произвольные постоянные, если характеристическое уравнение* (25) *имеет* 1 *корень кратности* 2 *и вида* $y_0(x) = \gamma x^{\mu_1+2} + \delta x^{\mu_2+2},$ *если уравнение* (25) *имеет* 2 *различных корня. Эти решения принадлежат пространствам* $\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}$ *или* $\mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_1}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_2}\}$ *соответственно.*

В §4.4 главы 4 дано решение неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с тремя дробными производными Римана—Лиувилля (17):

$$x^{\alpha+2}\big(\mathcal{D}_{+}^{\alpha+2}y\big)(x)+\mathrm{A}x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}_{+}^{\alpha+1}y\big)(x)+\mathrm{B}x^{\alpha}(\mathcal{D}_{+}^{\alpha}y)(x)=f(x), \qquad (27)$$

где $0<x<1$, $0<\alpha<1$, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{C}$ — постоянные коэффициенты.

**Теорема 4.12.** *Неоднородное уравнение* (27) *имеет* 2 *линейно независимых решения вида* $y(x) = \gamma x^{\nu+2} + \delta x^{\nu+2}\ln x + \mathcal{I}_{+}^{\alpha+2}\Bigg\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\tilde{c}_n x^{\nu}+\tilde{d}_n x^{\nu}\ln x\Big]\Bigg\}$, *если* $\nu$ — *кратный корень уравнения* (25), *вида* $y(x)=\gamma x^{\mu_1+2}+\delta x^{\mu_2+2}+\mathcal{I}_{+}^{\alpha+2}\Bigg\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\tilde{c}_n x^{\nu}+ \tilde{d}_n x^{\nu}\ln x\Big]\Bigg\}$, *если* $\nu$ — *простой корень уравнения* (25), *вида* $y(x) = y_0(x) + \mathcal{I}_{+}^{\alpha+2}\Bigg\{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big[\tilde{c}_n x^{\nu}+\tilde{d}_n x^{\nu}\ln x\Big]\Bigg\}$, *если* $\nu$ *не является корнем уравнения* (25), *где* $y_0(x)$ — *общее решение однородного уравнения* (23) *вида* $y_0(x) = \gamma x^{\mu+2} + \delta x^{\mu+2}\ln x$ *или вида* $y_0(x) = \gamma x^{\mu_1+2} + \delta x^{\mu_2+2}$. *Это решение имеет степенно–логарифмические особенности и принадлежит прямой сумме соответствующих пространств.*

В §§4.5, 4.6, 4.7 главы 4 на полуоси $(1;+\infty)$ введено специальное банахово пространство функций $\mathrm{PS}_p^{-}$ и его весовые аналоги, в которых изучено действие оператора взвешенного дробного интегрирования. В §4.6 главы 4 на полуоси $(1;+\infty)$ рассмотрено обобщенное дифференциальное уравнение Эйлерова типа любого порядка с конечным числом дробных производных Римана–Лиувилля. Данное уравнение сведено к системе алгебраических уравнений, для него сформулированы условия разрешимости и дано решение в замкнутой форме. В §4.7 главы 4 подробно изучен частный случай такого уравнения — однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Римана–Лиувилля.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ


1. Zhukovskaya N.V. Euler–type non–homogeneous differential equations with three Liouville fractional derivatives / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Fractional calculus & applied analysis.—2009.—Volume 12.— Number 2.— P. 205–234.
2. Жуковская Н.В. Решение однородных дифференциальных уравнений типа Эйлера дробного порядка / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Дифференциальные уравнения.—2011.—Т. 47.— № 12.—С. 1693–1704.
3. Zhukovskaya N.V. Solutions of Euler–type homogeneous differential equations with finite number of fractional derivatives / N.V. Zhukovskaya //

Integral transforms and special functions.—2012.—Vol. 23.—№ 3.—P. 161–175.

4. Жуковская Н.В. Представление решений дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с помощью дробного аналога функции Грина / Н.В. Жуковская // Челябинский физико–математический журнал.—2018.—Т. 3.—Вып. 2.—С. 129–143.
5. Жуковская Н.В. Применение метода Льенара—Шипара к решению однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси / Н.В. Жуковская // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика.—2018.—Том 50.—№ 2.—С. 121–135.
6. Жуковская Н.В. Дифференциальные уравнения типа Эйлера дробного порядка / Н.В. Жуковская, С.М. Ситник // Математические заметки СВФУ.— 2018.—Т. 25.—№ 2(98).—С. 27–39.
7. Жуковская Н.В. Применение метода Льенара—Шипара к решению однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на интервале / Н.В. Жуковская, С.М. Ситник // Математические заметки СВФУ.—2018.—Т. 25.—№ 3(99).— С. 33–42.
8. Жуковская Н.В. Однородные дифференциальные уравнения типа Эйлера с двумя дробными производными / Н.В. Жуковская // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика, математика, информатика.—2010.—№ 1.—С. 103–109.
9. Жуковская Н.В. Решение линейных неоднородных уравнений типа Эйлера с правосторонними дробными производными / А.А. Килбас, Н.В. Жуковская // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика, математика, информатика.—2009.—№ 2.—С. 98–103.
10. Жуковская Н.В. Решение в замкнутой форме линейных неоднородных уравнений типа Эйлера с дробными производными / А.А. Килбас, Н.В. Жуковская // Доклады Национальной академии Наук Беларуси.—2009.—Т. 53.— № 4.—С. 30–36.
11. Zhukovskaya N.V. Solution of Euler–type non–homogeneous differential equations with three fractional derivatives / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE–2009.—S.V. Rogosin eds.—Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, Cambridge: CSP.—2012.—P. 71–95.
12. Жуковская Н.В. Представление решений уравнения типа Эйлера с помощью дробного аналога функции Грина / Н.В. Жуковская // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов международного научного семинара AMADE–2018, Минск, 17–21 сентября 2018 г.—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2018.—С. 32–33.