Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Белгородский государственный национальный
исследовательский университет»

На правах рукописи

Жуковская Наталья Владимировна

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Формулы представления решений дифференциальных уравнений типа Эйлера дробного порядка

01.01.02 —дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук,
доцент С.М. Ситник

Белгород—2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дробное интегрирование и дифференцирование является стремительно развивающейся областью современного анализа, которая имеет давнюю историю и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений, функционального анализа, специальных функций, интегральных преобразований. Дробное исчисление получило значительную популярность главным образом благодаря многочисленным приложениям в различных областях науки, поскольку оно предоставляет некоторые полезные инструменты для решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также различных других задач. Дробное исчисление функций одной и многих переменных, а также теория дифференциальных уравнений дробного порядка, продолжают интенсивно развиваться и в настоящее время, свидетельством чему служат большой поток публикаций по данной тематике, издание ряда известных специализированных журналов, а также международные конференции, посвященные вопросам дробного исчисления и дифференциальных уравнений дробного порядка.

Подробный обзор литературы и полученных ранее результатов по тематике диссертации вынесен в отдельный параграф 1.1 главы 1. Таким образом, тема диссертации является актуальной для теории дифференциальных уравнений.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию однородного и неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Лиувилля и Римана—Лиувилля, являющегося аналогом обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера. С помощью методов теории интегральных преобразований (интегрального преобразования Меллина), комплексного анализа и специальных функций на полуоси $(0;+\infty)$ получены частные решения рассматриваемого неоднородного дифференциального уравнения с дробными производными Лиувилля в терминах дробного аналога Меллина функции Грина, выраженного через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_p\mathrm{F}_q$, обобщенную функцию Райта ${}_p\Psi_q$ и пси–функцию Эйлера. Найдено решение неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ в классе функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1$ в терминах дробного аналога функции Грина. Найдены решения однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с дробными производными Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ и доказано, что полученные решения образуют фундаментальную систему решений. На основании полученных результатов построено общее решение. С помощью метода эрмитовых форм (метода Льенара—Шипара) получены условия разрешимости однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на интервале $(0;1)$ и полуоси $(1;+\infty)$ в классе функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1$. Изучены операторы взвешенного дробного интегрирования в специально построенных банаховых пространствах аналитических функций PS_p, представимых в виде суммы некоторых степенных рядов, и их весовых аналогах. В этих пространствах изучено обобщенное дифференциальное уравнение типа Эйлера с конечным числом производных любого порядка. Рассмотрен частный случай такого уравнения — однородное и неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Римана—Лиувилля на интервале $(0;1)$ и тремя дробными производными Лиувилля на полуоси $(1;+\infty)$. Используя свойства операторов взвешенного дробного интегрирования, данные уравнения удалось свести к системе алгебраических уравнений, сформулировать условия разрешимости и получить решение в замкнутой форме.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является изучение условий разрешимости и получение формул представления решений однородного и неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка, являющегося аналогом обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера, в некоторых классах функций.

Цель обусловила постановку следующих задач исследования:

1. Получить формулы представления решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с двумя, тремя и любым конечным числом производных Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ и доказать, что полученные решения образуют фундаментальную систему.

2. Получить необходимые и достаточные условия разрешимости и найти формулы представления решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Римана—Лиувилля на интервале $(0;1)$ и с дробными производными Лиувилля на полуоси $(1;+\infty)$ в терминах характеристической эрмитовой формы.

3. Получить формулы представления частных решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с любым конечным числом производных Лиувилля на полуоси $(0; +\infty)$, построить общее решение и доказать теоремы разрешимости в терминах дробного аналога функции Грина.

4. Доказать теоремы об ограниченности операторов взвешенного дробного интегрирования и найти формулы представления решений обобщенного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом производных любого порядка в специально построенных весовых банаховых пространствах аналитических функций.

Научная новизна

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Исследовано однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(0; +\infty)$. Разработан метод эрмитовых форм для его исследования на интервале $(0; 1)$ и на полуоси $(1; +\infty)$.

2. Методом интегральных преобразований Меллина построен дробный аналог функции Грина для неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(0; +\infty)$ с любым конечным числом дробных производных Лиувилля.

3. Исследовано обобщенное дифференциальное уравнение типа Эйлера дробного порядка в банаховых пространствах аналитических функций.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

1. Получены формулы представления решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с любым конечным числом производных Лиувилля на полуоси $(0; +\infty)$. Доказано, что полученные решения образуют фундаментальную систему.

2. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости и найдены формулы представления решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Римана—Лиувилля на интервале $(0; 1)$ и с дробными производными Лиувилля на полуоси $(1; +\infty)$ в терминах характеристической эрмитовой формы.

3. Получены формулы представления частных решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с любым конечным числом производных Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$. Построено общее решение и доказаны теоремы разрешимости в терминах дробного аналога функции Грина.

4. Получены результаты об ограниченности операторов взвешенного дробного интегрирования и формулы представления решений обобщенного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом производных любого порядка в весовых банаховых пространствах аналитических функций.

Все положения, выносимые на защиту, являются новыми и могут быть использованы в исследованиях по теории дифференциальных уравнений дробного порядка, а также их приложениям к задачам оптимального управления и теории динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка. Основные результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Соавторам публикаций в совместных работах из списка публикаций принадлежали предметные постановки и выбор направления исследований, а также формирование основной структуры диссертации.

Апробация диссертации и опубликование ее результатов

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научно–методическом семинаре кафедры теории функций имени академика Ф.Д. Гахова (Республика Беларусь, г. Минск, Белорусский государственный университет, 2007–2017 гг., руководители семинара А.А. Килбас, Э.И. Зверович, В.Г. Кротов), на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Белгородского государственного национального исследовательского университета (руководители семинара А.П. Солдатов, В.Б. Васильев, 2018 г.), семинаре ЮФУ, семинаре Регионального научно–образовательного математического центра ЮФУ, Ростов–на–Дону, 2018 г. Результаты диссертации также докладывались на международных конференциях:

1. X, XI, XII Международная конференция «Белорусская математическая конференция» (2008 г., 2012 г., 2016 г., г. Минск);

2. Международная конференция «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (2009 г., 2011 г., 2012 г., 2015 г., 2018 г., г. Минск);

3. XII, XIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения» (2007 г., г. Минск; 2009 г., г. Пинск);

4. Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (2008 г., г. Стерлитамак);

5. Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений» (2009 г., г. Москва);

6. Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (2009 г., г. Москва);

7. Международный симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (2009 г., 2010 г., г. Нальчик).

Результаты диссертации опубликованы в 34 научных работах [10]—[37], [109]—[114], 7 из которых [22], [33]—[36], [110], [113] входят в перечень ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из содержания, введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем рукописи диссертации составляет 138 страниц, из которых 11 страниц занимает список литературы, насчитывающий 114 наименований, в том числе 34 наименования — публикации автора по теме диссертации.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Обзор литературы в области дробного исчисления и дифференциальных уравнений дробного порядка

Дробный математический анализ имеет давнюю историю и чрезвычайно богатое содержание. Современное состояние дробного исчисления характеризуется большим потоком публикаций, созданием журналов и ежегодным проведением международных конференций. Интерес к дробному математическому анализу возник почти одновременно с появлением классического анализа. Лейбниц в письмах к Лопиталю в 1695 г. при рассмотрении дифференциалов и производных порядка $\frac{1}{2}$ высказал пророческие слова: «Из этого парадокса со временем будут выведены полезные следствия». Вероятно, самое раннее более или менее систематическое исследование этого вопроса относится к XIX в. и принадлежит Абелю (1823 г.), Лиувиллю (1832 г.), Риману (1847 г.), Хольмгрену (1864 г.), хотя ранее вклад внесли Эйлер (1730 г.) и Лагранж (1772 г.). Именно в своем цикле работ Лиувилль (1832—1835 гг.), применяя разложение функций в степенные ряды, определял «q»–ю производную путем почленного дифференцирования. Он же, в частности, дал первые практические приложения созданной им теории к решению задач математической физики. Затем Риман (1847 г.) предложил иное решение на основе определенного интеграла, пригодное к степенным рядам с нецелыми показателями. Данная работа, выполненная Риманом в студенческие годы, была опубликована лишь в 1876 г. спустя 10 лет после его смерти. Конструкции Лиувилля и Римана являются основными формами дробного интегрирования. Развивая идею Лиувилля, Грюнвальд (1867 г.) ввел понятие дробной производной как предела разностных отношений. Параллельно с теоретическими начинаниями разрабатывались приложения дробного анализа к решению различных задач. Одним из первых таких приложений явился результат Абеля (1823 г.), показавшего, что решение задачи о таутохроне может быть получено путем интегрального преобразования, которое записывается как производная полуцелого порядка. Существует историческое заблуждение, что Абель решил задачу только при значении индекса, равном $\frac{1}{2}$. На самом деле, Абель рассмотрел решение в общем случае, и его работы сыграли огромную роль в развитии идей дробного интегродифференцирования. Результаты Абеля впоследствии были существенно обобщены Н.Я.Сониным. Заслугой Хольмгрена является рассмотрение дробного дифференцирования как операции, обратной интегрированию и приложение данных понятий к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует особо отметить цикл работ члена–корреспондента Петербургской Академии наук (1884 г.) А.В. Летникова (1837—1888 гг.), который за время своей 20–летней научной деятельности разработал полную теорию дифференцирования с произвольным показателем. В настоящее время его работы преданы почти полному забвению. Работы А.В. Летникова остались почти неизвестными за рубежом. Признавая важность работ упомянутых выше ученых, необходимо, однако, отметить, что дробное исчисление стало строгой математической теорией, только начиная с работ А.В. Летникова. Кроме того, по существу А.В. Летников первым применил операторы дробного интегродифференцирования как операторы преобразования, получая на этом пути интегральные формулы представления решений дифференциальных уравнений гипергеометрического типа. В наше время на важность результатов А.В. Летникова для теории операторов преобразования указано Т. Корнвиндером и С.М.Ситником.

В первой половине XX в. заметный вклад, как в теорию, так и в практику дробного анализа внесли Г. Харди, Г. Вейль, М. Рисс, П. Монтель, А. Маршо, Д. Литтлвуд, Я. Тамаркин, Э. Пост, С.Л. Соболев, А. Зигмунд, Б. Надь, А. Эрдейи, Х. Кобер, Ж. Коссар, и ряд других ученых. В 1915 г. Г. Харди и М. Рисс использовали дробное интегрирование для суммирования расходящихся рядов. В 1917 г. Г. Вейль определил дробное интегрирование для периодических функций в виде свертки с некоторой специальной функцией. В работе А. Маршо (1927 г.) была введена новая форма дробного дифференцирования, которая применима в случае функций с «плохим» поведением на бесконечности. В работах М. Рисса (1936, 1938, 1949 гг.) были получены операторы типа потенциала (потенциалы Рисса), позволившие определить дробное интегрирование функций многих переменных. Для некоторых интегральных операторов и интегральных уравнений очень полезными оказались дробные интегралы Эрдейи–Кобера (1940 г.).

Отметим тот факт, что операционное исчисление, разработанное О. Хевисайдом (1892, 1893, 1920 гг.), оказалось важным этапом в применении обобщенных производных. Именно О. Хевисайд (1920 г.) применил дробное дифференцирование в теории линий передач. После этого другие теоретики, такие как Н. Винер, Дж. Карсон (1926 г.)

признали преимущества такого подхода и стали развивать его в соответствии с принятыми математическими концепциями. В России важные результаты по основам операционного исчисления получил Д.Д. Мордухай–Болтовской, основатель математической школы в Ростове–на–Дону.

Дробные производные и интегралы имеют много приложений. Этот аппарат используется в самых различных областях — в физике, механике, химии. После известной задачи Абеля о таутохроне (N.H. Abel [68], 1823 г.) первые приложения были даны Лиувиллем (J. Liouville [88], 1832 г.) к задачам геометрии, механики и физики. Среди них задача Лапласа о влиянии бесконечного прямолинейного проводника на магнит, задача Ампера о взаимодействии двух таких проводников, задачи, связанные с притяжением тел, задача о распределении тепла в шаре, задача Гаусса о приближенных квадратурах. Важность изучения дифференциального и интегрального исчисления дробного порядка обусловлена их широким применением в теории дробного исчисления, а также в задачах физики, механики, химии, биологии, теории управления, гидрологии, теории гравитации и других прикладных науках. В последние годы интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка вырос в связи с тем, что эти уравнения позволяют дать эффективные модели различных аномальных явлений, возникающих в природе и естествознании. Одной из областей приложений дробного исчисления является фрактальная радиофизика и фрактальная радиолокация.

В последние годы получен ряд результатов, устанавливающих связь данного направления со многими разделами математического анализа, геометрии, математической физики. Возникающие при этом модели зачастую могут быть представлены в виде дифференциальных уравнений дробного порядка. Началом развития теории дифференциальных уравнений дробного порядка, по–видимому, следует считать дискуссию о способах решения уравнения $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y = \frac{y}{x}$, начатую в заметке L. O'Shaughnessy в 1918 г. [103], [101]. Позже к дифференциальному уравнению дробного порядка пришел С. Мандельбройт (S. Mandelbrojt [93], 1925 г.). Методы решения задач типа Коши для уравнений дробного порядка тесно связаны с классическими методами для обыкновенных дифференциальных уравнений, такими, как сведение задач типа Коши к интегральным уравнениям Вольтерра, метод преобразования Лапласа, операционный и композиционный методы и изучались многими авторами [4, 9, 70, 73, 77, 92, 97, 100], [51, 52, 58, 40, 60]. Исторические сведения и обзор методов и результатов приведен в книгах [59], [78], [85], [94], [98], [102], [40] и обзорных статьях [82], [83], [95].

Существенный вклад в изучение операторов дробного интегрирования и дифференцирования и связанных с ними одномерных и многомерных операторов типа потенциала внесли О.К. Бесов, И.Л. Васильев, М.Л. Гольдман, М.М. Джрбашян, В.В. Катрахов, А.А. Килбас, И.А. Киприянов, А.Ф. Леонтьев, П.И. Лизоркин, Л.Н. Ляхов, Ю.Г. Лучко, О.И. Маричев, А.М. Нахушев, А.В. Псху, С.В. Рогозин, С.Г. Самко, Л.И. Сербина, В.Е. Федоров, Ф.В. Чумаков, С.Б. Якубович, и их ученики. Обзор результатов и библиографию можно найти в [59], [102, 40], а также в работах [66, 67, 3, 43, 44, 48, 78, 79, 106, 81, 89, 91, 107, 108, 7, 63, 46, 62, 64].

Следует также отметить, что методы дробного исчисления и дифференциальных уравнений дробного порядка существенно связаны с теорией операторов преобразования. Например, классические операторы преобразования Сонина и Пуассона являются дробными интегральными операторами Эрдейи—Кобера. Этот круг вопросов изложен в монографиях В.В. Катрахова и С.М. Ситника [40] и С.М. Ситника и Э.Л. Шишкиной [60]. Абстрактные дифференциальные уравнения типа Эйлера второго порядка рассматривались в монографии [65]. Необычные свойства дифференциальных операторов Эйлера в пространствах распределений Шварца рассмотрены в работе [105], эта работа подчеркивает нетривиальные свойства этих операторов в конкретных функциональных пространствах, ту же проблему приходится преодолевать и в данной работе. Отметим, что в перечисленных выше работах задачи, исследованные в диссертации, не рассматривались.

1.2. Вспомогательные сведения и конструкции

1.2.1. Дробные интегралы и производные Лиувилля и Римана—Лиувилля

Для n—кратного интеграла известна формула

$$\int\limits_a^x dx_n \int\limits_a^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int\limits_a^{x_2} \varphi(x_1)dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt, \qquad (1.1)$$

доказательство которой осуществляется методом математической индукции. Здесь $\varphi(x)$ — функция, для которой сходится интеграл в (1.1). Правой части (1.1) можно придать смысл и при нецелых значениях

n. Поэтому естественно определить интегрирование нецелого порядка следующим образом [59], [102].

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{L}_1(a,b)$.

Определение 1.1. Интегралы

$$\big(\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\varphi(x)\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \quad x > a, \tag{1.2}$$

$$\big(\mathcal{I}^{\alpha}_{b-}\varphi(x)\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \quad x < b, \tag{1.3}$$

где $\alpha > 0$, называются *интегралами дробного порядка* α. Первый из них называют иногда *левосторонним*, а второй — *правосторонним.* Операторы $\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}$ и $\mathcal{I}^{\alpha}_{b-}$ называют *операторами дробного интегрирования Римана—Лиувилля.*

Определение 1.2. Выражения

$$\big(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f\big)(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt, \tag{1.4}$$

$$\big(\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f\big)(x) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt \tag{1.5}$$

называются *дробными производными Римана—Лиувилля* порядка α, $0 < \alpha < 1$, соответственно *левосторонней* и *правосторонней.*

Дробные интегралы (1.2)—(1.3) и производные (1.4)—(1.5) легко распространить со случая конечного отрезка на случай полуоси.

Определение 1.3. Интегралы

$$\big(\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\varphi\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \tag{1.6}$$

$$\big(\mathcal{I}^{\alpha}_{-}\varphi\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \tag{1.7}$$

где $x > a$, называются соответственно *левосторонним* и *правосторонним дробными интегралами Лиувилля* на полуоси $(a;+\infty)$.

Определение 1.4. Выражения

$$\big(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f\big)(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt, \tag{1.8}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt, \tag{1.9}$$

где $x > a$, называются соответственно *левосторонней* и *правосторонней дробной производной Лиувилля* на полуоси $(a; +\infty)$.

Более подробно с условиями существования, а также со свойствами операторов дробного интегрирования и дифференцирования можно ознакомиться в книгах [59], [102].

1.2.2. Гамма–функция, бета–функция, пси–функция и их свойства

Дадим определения некоторых специальных функций, которые используются в диссертации.

Определение 1.5. *Символ Похгаммера* $(z)_n$ при $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ определяется равенством:

$$(z)_0 \equiv 1, \ (z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Очевидно, что

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}, \tag{1.11}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма–функция Эйлера. Равенство (1.11) используется для введения символа $(z)_n$ при комплексных n.

Определение 1.6. *Биномиальные коэффициенты* при $\alpha \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}_0$ определяются по формуле:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n(-\alpha)_n}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}. \tag{1.12}$$

В частности, при $\alpha = m \in \mathbb{N}$ имеют место равенства:
$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ при $m \geq n$, $\binom{m}{n} = 0$ при $0 \leq m < n$.
В случае комплексных α и β, $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ полагают:

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} = \frac{\sin(\beta-\alpha)\pi}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Определение 1.7. *Гамма–функцией* $\Gamma(z)$ называется интеграл Эйлера второго рода:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx, \tag{1.13}$$

который сходится при всех $z \in \mathbb{C}$, для которых $\operatorname{Re} z > 0$.

На полуплоскость $\operatorname{Re} z \le 0$, $z \ne 0, -1, -2, ...$ гамма–функция $\Gamma(z)$ доопределяется с помощью аналитического продолжения этого интеграла. Так, получаемая из (1.13) интегрированием по частям формула понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0 \tag{1.14}$$

после многократного применения приводит к равенству:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)...(z+n-1)}, \tag{1.15}$$

где $\operatorname{Re} z > -n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \ne 0,\ -1,\ -2, \dots,$ позволяющему осуществить аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z > -n$ при любом n. Из (1.15) следует, что $\Gamma(z)$ аналитична в комплексной плоскости всюду, кроме точек $z = 0,\ -1,\ -2, ...,$ где она имеет простые полюсы и разлагается по формуле:

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}\Big[1 + O(z+n)\Big], \quad z \to -n,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.16}$$

Отметим некоторые *свойства* гамма–функции $\Gamma(z)$ (1.13).

Формула Эйлера—Гаусса:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1)}{z(z+1)(z+2)...(z+n-1)}.$$

Формула дополнения:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}, \quad \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}.$$

Формула Лежандра (*формула удвоения*):

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big).$$

Формула Гаусса—Лежандра:

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\Big(z + \frac{k}{m}\Big), \quad m = 2, 3, \dots .$$

Асимптотическая формула Стирлинга:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}}\, e^{-z}\Big[1 + O\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big], \quad |\arg z| < \pi, \quad z \to \infty,$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big[1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big], \quad n \to \infty.$$

Разложение отношения двух гамма–функций на бесконечности:

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{z^k} + z^{a-b}O\big(z^{-N-1}\big),$$

где $c_0 = 1$, $|\arg(z+a)| < \pi$, $|z| \to \infty$, коэффициенты c_k выражаются через обобщенные многочлены Бернулли по формуле

$$c_k = \frac{(-1)^k (b-a)_k}{k!}\mathrm{B}_a^{a-b+1}.$$

Определение 1.8. *Бета–функцией* $\mathrm{B}(x, y)$ называется интеграл Эйлера первого рода:

$$\mathrm{B}(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{1.17}$$

Бета–функция $\mathrm{B}(x, y)$ определена при $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$.

Приведем некоторые *свойства* бета–функции $\mathrm{B}(x, y)$ (1.17).

$$\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x), \quad \mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма–функция (1.13).

$$\mathrm{B}(x, y) = 2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t\, dt, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0,$$

$$\mathrm{B}(x, y) = \int\limits_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0,$$

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(y)_{n+1}}{n!(x+n)},$$

где $(x)_n = x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot \ldots \cdot(x-n+1)$ — нисходящий факториал.

Функциональные уравнения для бета–функции $\mathrm{B}(x, y)$ (1.17):

$$\mathrm{B}(x, y) - \mathrm{B}(x+1, y) - \mathrm{B}(x, y+1) = 0,$$

$$\mathrm{B}(x,y+1)=\frac{y}{x}\mathrm{B}(x+1,y)=\frac{y}{x+y}\mathrm{B}(x,y),$$

$$\mathrm{B}(x,y)\mathrm{B}(x+y,z)=\mathrm{B}(y,z)\mathrm{B}(y+z,x)=\mathrm{B}(z,x)\mathrm{B}(x+z,y),$$

$$\mathrm{B}(x,y)\mathrm{B}(x+y,z)\mathrm{B}(x+y+z,u)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(x+y+z+u)}.$$

Подобно тому, как гамма–функция (1.13) для целых чисел является обобщением факториала, бета–функция (1.17) является обобщением биномиальных коэффициентов (1.12):

$$\binom{n}{k}=\frac{1}{(n+1)\mathrm{B}(n-k+1,k+1)},$$

$$\frac{1}{\mathrm{B}(n,m)}=m\binom{n+m-1}{n-1}=n\binom{n+m-1}{m-1},$$

здесь n, m — целые положительные числа.

Определение 1.9. *Неполная бета–функция* — это обобщение B–функции, заменяющее интеграл по отрезку $[0;1]$ на интеграл с переменным верхним пределом:

$$\mathrm{B}_x(a,b)=\int\limits_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt. \tag{1.18}$$

При $x=1$ неполная B–функция (1.18) совпадает с полной B–функцией (1.17).

Определение 1.10. *Пси–функция Эйлера* $\psi(z)$ определяется как логарифмическая производная гамма–функции (1.13):

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\Big(\ln\Gamma(z)\Big)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \tag{1.19}$$

здесь $\ln\Gamma(z)=\int\limits_1^z\psi(z)dz,\quad z\in\mathbb{C}.$

Имеют место следующие *представления* для пси–функции Эйлера $\psi(z)$ (1.19):

$$\psi(z)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-...-\frac{1}{z+n}\right],$$

$$\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)}=-\gamma+(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(z+n)},$$

где

$$\gamma = -\psi(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big) = -\int\limits_0^{\infty} e^{-t}\ln t dt.$$

Функция $\psi(z)$ (1.19) мероморфна и имеет простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, ...$.

Функциональные уравнения для пси–функции Эйлера $\psi(z)$ (1.19):

$$\psi(z) = \psi(1+z) - \frac{1}{z}, \quad \psi(1+n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \gamma,$$

$$\psi(z+n) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + ... + \frac{1}{z+n-1} + \psi(z), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\psi(mz) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\psi\Big(z+\frac{k}{m}\Big) + \ln m.$$

Интегральное представление для пси–функции Эйлера $\psi(z)$ (1.19):

$$\psi(z) = -\gamma + \int\limits_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Интегральная формула Гаусса:

$$\psi(z) = \int\limits_0^{\infty}\Big(t^{-1}e^{-t} - (1-e^{-t})^{-1}e^{-tz}\Big)dt, \quad \mathrm{Re} z > 0.$$

Другие свойства пси–функции Эйлера $\psi(z)$ (1.19) представлены в [1], [56], [57], [69].

1.2.3. Гипергеометрическая функция Гаусса и ее обобщение

Определение 1.11. *Гипергеометрическая функция Гаусса* ${}_2\mathrm{F}_1(a, b; c; z)$ определена при $z \in \mathbb{C}$ и $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, ...$ рядом [1], [69], [85], [99]:

$${}_2\mathrm{F}_1\,(a, b; c; z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}. \tag{1.20}$$

Здесь $(a)_k = a(a+1)...(a+k-1)$, $k \in \mathbb{N}$ — символ Похгаммера (1.10). Полагают $(a)_0 = 1$, $(1)_k = k!$.

Известно, что ряд (1.20) абсолютно сходится при $|z|<1$ и при $|z|=1$, когда Re(c–a–b)>0 и условно сходится при $|z|$=1, $z \neq 1$ если $-1 < \mathrm{Re}(c$–$a-b) \leq 0$. Для других значений z гипергеометрическая функция Гаусса

${}_2\mathrm{F}_1\,(a,b;c;z)$ определена как аналитическое продолжение ряда (1.20). Аналитическое продолжение задается интегральным представлением Эйлера:

$$
{}_2\mathrm{F}_1\,(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt,
$$

где $0<\mathrm{Re}\,b<\mathrm{Re}\,c$, $|\arg(1-z)|<\pi$. Если $c\neq 0,-1,-2,...,$ то ${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$ имеет другое интегральное представление в терминах интеграла Меллина—Барнса:

$$
{}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}(-z)^{-s}\Gamma(s)ds.
$$

Перечислим некоторые *свойства* гипергеометрической функции Гаусса ${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$ (1.20):

$$
{}_2\mathrm{F}_1(b,a;c;z)={}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)\,,
$$

$$
{}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;0)={}_2\mathrm{F}_1(0,b;c;z)=1,
$$

$$
{}_2\mathrm{F}_1(a,b;b;z)=(1-z)^{-a},
$$

$$
{}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad \mathrm{Re}(c-a-b)>0,
$$

$$
{}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}\,{}_2\mathrm{F}_1(c-a,c-b;c;z)\,,
$$

$$
\left(\frac{d}{dz}\right)^n{}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,{}_2\mathrm{F}_1(a+n,b+n;c+n;z)\,,\quad n\in\mathbb{N}.
$$

Определение 1.12. *Обобщенная гипергеометрическая функция* ${}_p\mathrm{F}_q(z)$ определяется для $z\in\mathbb{C}$, $a_i,b_j\in\mathbb{C}$, $b_j\neq 0$ $(i=1,\,2,\,...,\,p;$ $j=1,\,2,\,...,\,q)$ рядом [1], [69], [85], [99]:

$$
{}_p\mathrm{F}_q(z)\equiv{}_p\mathrm{F}_q\left[\begin{matrix}a_1,...,a_p\\ b_1,...,b_q\end{matrix}\middle|\,z\right]:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\,...(a_p)_k}{(b_1)_k\,...(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}. \tag{1.21}
$$

Здесь $(a)_k=a(a+1)...(a+k-1)$, $k\in\mathbb{N}$ — символ Похгаммера (1.10).

Известно [1], [69], [85], [99], что ряд (1.21) абсолютно сходится для всех $z\in\mathbb{C}$, если $p\leq q$, и для $|z|<1$ и $|z|=1$, $\mathrm{Re}\Big(\sum\limits_{j=1}^{q}b_j-\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\Big)>0$, если $p=q+1$.

1.2.4. Функция Райта и ее обобщение

Определение 1.13. *Обобщенная гипергеометрическая функция Райта* ${}_p\Psi_q(z)$ определяется для $z \in \mathbb{C}$, $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$, $\beta_j \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., p;\ j = 1, 2, ..., q)$ рядом [85], [99]:

$$
{}_p\Psi_q(z) \equiv {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_i, \alpha_i)_{1,p}\\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\middle| z\right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}. \tag{1.22}
$$

Условия существования функции ${}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_i, \alpha_i)_{1,p}\\ (b_j, \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\middle| z\right]$ выражаются с помощью вспомогательных величин Δ, δ и μ, определяемых формулами [85]:

$$
\Delta = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i, \quad \delta = \prod_{i=1}^{p} |\alpha_i|^{-\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} |\beta_j|^{\beta_j}, \tag{1.23}
$$

$$
\mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} a_i + \frac{p-q}{2}. \tag{1.24}
$$

Лемма 1.1. *Пусть* $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ *и* $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., p$, $j = 1, ..., q$ *и пусть* Δ, δ, μ *задаются формулами* (1.23), (1.24). *Тогда:*

а) если $\Delta > -1$, *то ряд в* (1.22) *сходится абсолютно* $\forall z \in \mathbb{C}$.

б) если $\Delta = -1$, *то ряд в* (1.22) *сходится абсолютно для* $|z| < \delta$ *и* $|z| = \delta$, $\operatorname{Re}\mu > \frac{1}{2}$.

Определение 1.14. Частный случай функции (1.22) вида:

$$
\varphi\,(\alpha, \beta; z) \equiv {}_0\Psi_1\left[\begin{matrix}--\\ (\beta, \alpha)\end{matrix}\middle| z\right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \tag{1.25}
$$

где z, α, $\beta \in \mathbb{C}$, называется *функцией Райта.*

Интегральное представление функции Райта в терминах интеграла Меллина—Барнса:

$$
\varphi\,(\alpha, \beta; z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\beta - \alpha s)} (-z)^{-s} ds, \tag{1.26}
$$

где путь интегрирования оставляет все полюсы $s = -k$, $k \in \mathbb{N}_0$ слева.

Если $L = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, то представление (1.26) имеет место при выполнении одного из условий:

$$
0 < \alpha < 1, \quad |\arg(-z)| < \frac{(1-\alpha)\pi}{2}, \quad z \neq 0
$$

или

$$\alpha = 1, \quad \operatorname{Re}\beta > 1 + 2\gamma, \quad \arg(-z) = 0, \quad z \neq 0.$$

Из леммы 1.1 вытекают следующие утверждения [85]:

Следствие 1.1. *Пусть* $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, p;$ $j = 1, 2, \ldots, q)$ *и* $\Delta > -1$. *Тогда обобщенная гипергеометрическая функция Райта* ${}_p\Psi_q(z)$ (1.22) *является целой функцией переменной* z.

Следствие 1.2. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$ *и* $\beta \in \mathbb{C}$. *Тогда при* $\alpha > -1$ *ряд в* (1.25) *сходится абсолютно для всех* $z \in \mathbb{C}$, *а при* $\alpha = -1$ *сходится абсолютно для всех* $|z| < 1$ *и* $|z| = 1$, $\operatorname{Re}\beta > -1$.

Следствие 1.3. *Если* $\alpha > -1$ *и* $\beta \in \mathbb{C}$, *то функция Райта* $\varphi\,(\alpha, \beta; z)$ (1.25) *является целой функцией переменной* z.

Замечание 1.1. Заметим, что если $\alpha_i = \beta_j = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p;$ $j = 1, 2, \ldots, q)$, то обобщенная функция Райта (1.22) с точностью до множителя совпадает с обобщенной гипергеометрической функцией (1.21):

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(a_i)}\ {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1, 1), \ldots, (a_p, 1)\\(b_1, 1), \ldots, (b_q, 1)\end{matrix}\middle| z\right] = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j)}\ {}_p\mathrm{F}_q\left[\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\middle| z\right].$$

1.2.5. Интегральное преобразование Меллина

Определение 1.15. *Прямое преобразование Меллина* $\mathcal{M}$ функции $\varphi(x)$, $x > 0$ определяется формулой:

$$\mathcal{M}\{\varphi(x); s\} = \varphi^*(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)dx, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{1.27}$$

Обратное преобразование Меллина $\mathcal{M}^{-1}$ осуществляется с помощью равенства:

$$\mathcal{M}^{-1}\{\varphi^*(s); x\} = \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} x^{-s}\varphi^*(s)ds, \quad \gamma = \operatorname{Re} s. \tag{1.28}$$

Следует отметить, что операторы $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{-1}$, вообще говоря, не являются обратными по отношению друг к другу.

Имеет место [61], [104]:

Теорема 1.1. *Пусть* $y^{k-1}f(y) \in \mathcal{L}_1(0;\infty)$ *и пусть* $f(y)$ *имеет ограниченное изменение в окрестности точки* $y = x$. *Положим*

$$f^*(s) = \int\limits_0^\infty y^{s-1} f(y) dy \quad (s = k + it).$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\Big[f(x+0) + f(x-0)\Big] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int\limits_{k-i\mathrm{T}}^{k+i\mathrm{T}} x^{-s} f^*(s) ds.$$

Теорема 1.2. *Пусть* $f(x)x^{k-1} \in \mathcal{L}_1(0;\infty)$ *или, более обще, пусть интеграл*

$$\int\limits_0^\infty x^{s-1} f(x) dx = f^*(s)$$

равномерно сходится для $s = k + it$ *в любом конечном интервале изменения* t. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right) x^{-s} f^*(s) ds = \frac{1}{2}\Big[f(x+0) + f(x-0)\Big],$$

когда последнее выражение имеет смысл; в частности, равно $f(x)$, *когда* $f(x)$ *непрерывна; и, наконец, во всяком случае, равно* $f(x)$ *почти для всех* x.

Из этих теорем вытекает

Следствие 1.4. *Пусть* $x^{k-1}f(x) \in \mathcal{L}_1(0;\infty)$, $f^*(k+it) \in \mathcal{L}_1(-\infty;\infty)$ *по переменной* t, *тогда почти для всех* x

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int\limits_{k-i\mathrm{T}}^{k+i\mathrm{T}} x^{-s} f^*(s) ds.$$

Приведем основные *свойства* преобразования Меллина, считая, что все величины, входящие в соответствующие формулы, определены [9], [45], [72].

Масштабирующее свойство:

$$\mathcal{M}\big(f(ax)\big) = a^{-s} f^*(s)\,, \quad a > 0.$$

Свойство сдвига:

$$\mathcal{M}\big(x^a f(x)\big) = f^*(s + a)\,,$$

$$\mathcal{M}\big(f(x^a)\big) = \frac{1}{a} f^*\Big(\frac{s}{a}\Big)\,,$$

$$\mathcal{M}\bigg(\frac{1}{x} f\Big(\frac{1}{x}\Big)\bigg) = f^*(1-s)\,.$$

Дифференцирование изображения:

$$\mathcal{M}\Big((\ln x)^n f(x)\Big) = \frac{d^n}{ds^n} f^*(s)\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Преобразование Меллина от производной:

$$\mathcal{M}\Big(f^{(n)}(x)\Big) = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} f^*(s-n)\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

при условии, что $x^{s-r-1} f^{(r)}(x) = 0$ при $x \to 0$, $r = 0, 1, 2, ..., n-1$;

$$\mathcal{M}\Big(x^n f^{(n)}(x)\Big) = (-1)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} f^*(s)\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Свойство свертки: если $\mathcal{M}\big(f(x)\big) = f^*(s)$ и $\mathcal{M}\big(g(x)\big) = g^*(s)$, то

$$\mathcal{M}\left(\int\limits_0^\infty f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}\right) = f^*(s)\, g^*(s)\,;$$

$$\mathcal{M}\left(\int\limits_0^\infty f(xt) g(t) dt\right) = f^*(s)\, g^*(1-s)\,.$$

Более подробно со свойствами преобразования Меллина можно ознакомиться в книгах [73], [74], [78], [99].

1.2.6. Общая схема вычисления интеграла Меллина—Барнса

Хорошо известно, что многие элементарные и большинство изученных специальных функций являются функциями гипергеометрического типа и поэтому могут быть определены как линейные комбинации интегралов Меллина—Барнса [1], [49], [69]:

$$\mathrm{R}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \prod_{i,j,k,l} \frac{\Gamma(a_i + \alpha_i s)\Gamma(b_j - \beta_j s)}{\Gamma(c_k + \gamma_k s)\Gamma(d_l - \delta_l s)} z^{-s} ds, \tag{1.29}$$

где L — некоторый бесконечный контур, α_i, β_j, γ_k, δ_l — действительные положительные, a_i, b_j, c_k, d_l — комплексные параметры и z — переменная. Если все $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = \delta_l = 1$, а контур L, количество и величины параметров $a_i,\, b_j,\, c_k,\, d_l$ удовлетворяют некоторым условиям, то формула (1.29) осуществляет обратное преобразование Меллина произведения:

$$\mathrm{K}^*(s) = \prod_{i,j,k,l} \frac{\Gamma(a_i+s)\Gamma(b_j-s)}{\Gamma(c_k+s)\Gamma(d_l-s)}. \tag{1.30}$$

Особый интерес для вычисления интегралов от специальных функций представляет метод нахождения функции $\mathrm{K}(x)$, преобразование Меллина (1.27) которой $\mathrm{K}^*(x)$ является отношением произведений гамма–функций (1.30), или, другими словами, задача вычисления интегралов Меллина—Барнса (1.29) в частном случае, когда все коэффициенты при s равны единице $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = \delta_l = 1$, L — некоторый бесконечный контур, $\alpha_i,\, \beta_j,\, \gamma_k,\, \delta_l$ — действительные положительные, $a_i,\, b_j,\, c_k,\, d_l$ — комплексные параметры и z — переменная.

В [49] устанавливается, что такая функция $\mathrm{K}(x)$ выражается в виде некоторых комбинаций обобщенных гипергеометрических рядов, то есть принадлежит к классу функций гипергеометрического типа.

Обозначим

$$\Gamma\begin{bmatrix} a_1, a_2, ..., a_A \\ b_1, b_2, ..., b_B \end{bmatrix} \equiv \Gamma\Big[\,(a);(b)\,\Big] = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)...\Gamma(a_A)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)...\Gamma(b_B)}$$

(пустое произведение заменяется единицей),

$$(a)+s = a_1+s,\; a_2+s, ..., a_A+s,$$

$$(b)'-b_k = b_1-b_k, ..., b_{k-1}-b_k,\; b_{k+1}-b_k, ..., b_B-b_k,$$

$$\Sigma_A(z) = \sum_{j=1}^{A} z^{a_j}\Gamma\begin{bmatrix} (a)'-a_j,\,(b)+a_j \\ (c)-a_j,\,(d)+a_j \end{bmatrix} \times$$

$$\times_{B+C}\mathrm{F}_{A+D-1}\begin{pmatrix} (b)+a_j,\, 1+a_j-(c);\, (-1)^{C-A}z \\ 1+a_j-(a)', \quad (d)+a_j \end{pmatrix}, \tag{1.31}$$

$$\Sigma_B(1/z) = \sum_{k=1}^{B} z^{-b_k}\Gamma\begin{bmatrix} (b)'-b_k,\,(a)+b_k \\ (d)-b_k,\,(c)+b_k \end{bmatrix} \times$$

$$\times_{A+D}\mathrm{F}_{B+C-1}\begin{pmatrix} (a)+b_k,\, 1+b_k-(d);\, \frac{(-1)^{D-B}}{z} \\ 1+b_k-(b)', \quad (c)+b_k \end{pmatrix}, \qquad |\arg(z)|<\pi. \tag{1.32}$$

Если ряды (1.31), (1.32) сходятся, то функции $\Sigma_A(z), \Sigma_B(1/z)$ являются функциями гипергеометрического типа, причем переходят друг в друга, если поменять местами A–мерный комплексный вектор

$(a) = a_1,\, a_2, ..., a_A$ с аналогичным B–мерным вектором (b), C–мерный вектор (c) с D–мерным (d), а z заменить на $1/z$. Эти функции аналитически зависят от комплексных параметров $(a), (b), (c), (d)$ и переменной z. Следует отметить, что без ограничения $|\arg(z)| < \pi$ функции $\Sigma_A(z),\, \Sigma_B(1/z)$ в общем случае являются многозначными.

Теорема 1.3. (Слейтер) *Пусть*

$$\mathrm{K}^*(s) = \Gamma\begin{bmatrix} (a)+s,\ (b)-s \\ (c)+s,\ (d)-s \end{bmatrix}, \tag{1.33}$$

где векторы $(a), (b), (c), (d)$ *имеют соответственно* A, B, C, D *компонент* a_i, b_k, c_l, d_m. *Тогда, если выполняются следующие две группы условий*

$$-\mathrm{Re}\, a_i < \mathrm{Re}\, s < \mathrm{Re}\, b_k \quad (j = 1, 2, ..., A, \quad k = 1, 2, ..., B), \tag{1.34}$$

$$\begin{cases} A+B>C+D, \\ A+B=C+D, \quad \mathrm{Re}\, s(A+D-B-C)<-\mathrm{Re}\,\nu, \\ A=C, \quad B=D, \quad \mathrm{Re}\,\nu < 0, \quad \nu=\sum\limits_{j=1}^{A} a_j+\sum\limits_{k=1}^{B} b_k-\sum\limits_{l=1}^{C} c_l-\sum\limits_{m=1}^{D} d_m, \end{cases} \tag{1.35}$$

то для таких s *справедливы равенства*

$$\mathrm{K}^*(s) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty x^{s-1}\Sigma_A(x)dx, \quad A+D>B+C, \\ \int\limits_0^1 x^{s-1}\Sigma_A(x)dx + \int\limits_1^\infty x^{s-1}\Sigma_B(1/x)dx, \quad A+D=B+C, \\ \int\limits_0^\infty x^{s-1}\Sigma_B(1/x)dx, \quad A+D<B+C, \end{cases}$$

$\Sigma_A(1) = \Sigma_B(1)$, *если* $A+D=B+C, \quad \mathrm{Re}\,\nu+C-A+1<0, \quad A \geq C$.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в [49].

Следствие 1.5. *При условиях* (1.34), (1.35) *прообразом функции* (1.33) *является функция* $\mathrm{K}(x)$ *гипергеометрического типа, задаваемая по одной из следующих формул:*

$$\mathrm{K}(x) = \begin{cases} \Sigma_A(x), \quad x > 0, \quad A+D>B+C, \\ \Sigma_A(x), \quad 0 < x < 1, \quad \Sigma_B(1/x), \quad x > 1, \quad A+D=B+C, \\ \Sigma_B(1/x), \quad x > 0, \quad A+D<B+C. \end{cases}$$

$\mathrm{K}(1)=\Sigma_A(1)=\Sigma_B(1)$, *если* $A+D=B+C,\ \mathrm{Re}\,\nu+C-A+1<0,\ A \geq C$.

Замечание 1.2. В случае $|A+D-B-C|>1,\ A+B=C+D$ ограничение на $\mathrm{Re}\, s$, указанное в (1.35), может быть несколько ослаблено до условия $\mathrm{Re}\, s(A+D-B-C)<\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,\nu$.

1.2.7. Теорема Эрмита

Эрмитом была рассмотрена следующая задача [47], [87]: *дано алгебраическое уравнение* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ *с произвольными комплексными коэффициентами. Требуется узнать, сколько корней оно имеет в верхней полуплоскости.*

Эта задача была решена Эрмитом с помощью некоторой эрмитовой формы. Льенаром и Шипаром была предложена модификация метода Эрмита, суть которого заключается в следующем [6], [54], [75], [76].

Рассмотрим функцию:

$$-i\frac{f(x)\overline{f}(y) - f(y)\overline{f}(x)}{x-y} = \sum_{k,l=0}^{n-1} A_{kl}x^ky^l,$$

где $\overline{f}(x) = \overline{a_0}x^n + \overline{a_1}x^{n-1} + \ldots + \overline{a_n}$ — многочлен с комплексно сопряженными коэффициентами. По этой функции строим эрмитову форму:

$$\mathcal{H}(f; x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{k,l=0}^{n-1} A_{kl}x_k\overline{x_l},$$

коэффициенты которой, как легко видеть, действительны.

Теорема 1.4. *Если* n^+ *— число положительных,* n^- *— число отрицательных квадратов формы* $\mathcal{H}(f; x_0, \ldots, x_{n-1})$, *то* $f(x)$ *имеет ровно* $(n - n^+ - n^-)$ *корней общих с* $\overline{f}(x)$ *и, кроме того, еще* n^+ *корней в верхней полуплоскости и* n^- *корней в нижней.*

Доказательство теоремы 1.4 приведено в [47], [87].

Краткие выводы по главе. В главе 1 дан обзор исторических сведений по вопросам, связанным с дифференциальными уравнениями дробного порядка, аналитический обзор литературы по теме диссертационной работы, приведены некоторые сведения из теории дробного интегрирования и дифференцирования, интегральных преобразований и специальных функций.

ГЛАВА 2

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Глава 2 посвящена построению фундаментальной системы решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с двумя, тремя и любым конечным числом дробных производных Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ с помощью теории вычетов и общей схемы применения интегрального преобразования Меллина. Данная схема впервые была рассмотрена в монографии [85]. Введено понятие обобщенного аналога Вронскиана, рассмотрены его свойства. Отметим, что автором диссертации было рассмотрено также дифференциальное уравнение типа Эйлера с правосторонними дробными производными Лиувилля. Данный результат в тексте диссертации не приводится, однако с ним можно ознакомиться в работе автора [16]. Также во 2 главе дается решение однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на интервале $(0;1)$ в классе $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ функций, представимых дробным интегралом Римана—Лиувилля порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$ в классе $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом Лиувилля порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(1;+\infty)$. С помощью метода эрмитовых форм (метода Льенара—Шипара) получены условия разрешимости в классах $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ и $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$ для случаев двух, трех и любого конечного числа производных.

2.1. Общая схема применения интегрального преобразования Меллина для решения однородного дифференциального уравнения типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$

Рассмотрим общую схему нахождения решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом дробных производных Лиувилля $\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}y\right)$ вида:

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{\alpha+k} \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}y\right)(x) = 0, \tag{2.1}$$

с коэффициентами $A_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0,m}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0;+\infty)$. Здесь $(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y)(x)$ — левосторонняя дробная производная

Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$, определяемая формулой (1.8).

В [85] для решения неоднородного уравнения вида (2.1) с двумя дробными производными Лиувилля используется метод, основанный на применении прямого и обратного преобразований Меллина (1.27) и (1.28). Данный метод, использованный в [85] для решения неоднородного уравнения вида (2.1), основан на формуле:

$$\big(\mathcal{M}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y\big)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\big(\mathcal{M}y\big)(s-\alpha)\,, \quad \operatorname{Re}(s-\alpha) < 1. \tag{2.2}$$

Предложенный в диссертации метод нахождения решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера (2.1) основан на использовании следующей формулы:

$$\big(\mathcal{M}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y\big)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\big(\mathcal{M}y\big)(s-\alpha) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1+j-s)}{\Gamma(1-s)}\Big[x^{s-j-1}\big(\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha}y\big)(x)\Big]_0^{\infty}. \tag{2.3}$$

Заметим, что формула (2.2) является частным случаем формулы (2.3) и может быть получена из нее при условии $\Big[x^{s-j-1}\big(\mathcal{I}_{0+}^{n-\alpha}y\big)(x)\Big]_0^{\infty} = 0$, $j=\overline{0,n-1}$.

Применяя прямое преобразование Меллина (1.27) к (2.1) и учитывая (2.3), имеем:

$$\Big(\mathcal{M}\sum_{k=0}^{m}A_k x^{\alpha+k}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}y\big)(x)\Big)(s) = \sum_{k=0}^{m}A_k\big(\mathcal{M}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}y\big)(s+\alpha+k) =$$

$$=\sum_{k=0}^{m}A_k\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha-k-s)}\big(\mathcal{M}y\big)(s)+\sum_{k=0}^{m}A_k\sum_{j=0}^{n+k-1}d_j^k\frac{\Gamma(1+j-s-\alpha-k)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)}=0, \tag{2.4}$$

где

$$d_j^k = \Big[x^{s+\alpha+k-j-1}\big(\mathcal{I}_{0+}^{n+k-\alpha}y\big)(x)\Big]_0^{\infty}.$$

Здесь $\big(\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}y\big)(x)$ — левосторонний дробный интеграл Лиувилля (1.6) порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Введя обозначение

$$g(s) = -\sum_{k=0}^{m}A_k\sum_{j=0}^{n+k-1}d_j^k\frac{\Gamma(1+j-s-\alpha-k)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)},$$

перепишем равенство (2.4) следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha-k-s)} \big(\mathcal{M}y\big)(s) = g(s).$$

Используя формулу понижения для гамма–функции (1.14) и положив $1-s=u$, имеем:

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha-k-s)} = \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u-\alpha-k)} = \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{(u-\alpha-k)\Gamma(u)}{\Gamma(u+1-\alpha-k)} =$$

$$= ... = \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{(u-\alpha-k)(u+1-\alpha-k)...(u-\alpha-1)\Gamma(u)}{\Gamma(u-\alpha)}.$$

Отсюда получаем формулу преобразования Меллина решения уравнения (2.1):

$$\big(\mathcal{M}y\big)(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)\mathrm{P}_m(1-s)} g(s). \tag{2.5}$$

Здесь $\mathrm{P}_m(s)$ — многочлен степени m:

$$\mathrm{P}_m(s) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k (s-\alpha-k)...(s-\alpha-1) = A_m(s-s_1)...(s-s_m). \tag{2.6}$$

Заметим, что многочлен $\mathrm{P}_m(s)$ в правой части (2.6) разложен на множители, где $s_1, s_2, ..., s_m$ — корни полинома $\mathrm{P}_m(s)$, действительные или комплексные. Вопрос нахождения корней многочлена $\mathrm{P}_m(s)$ для степеней старше третьей достаточно сложен и является предметом для изучения в курсе высшей алгебры.

Применяя обратное преобразование Меллина (1.28) к (2.5), получим формальное решение уравнения (2.1) в виде интеграла Меллина—Барнса [1], [49], [69]:

$$y(x) = \frac{(-1)^m}{2\pi i A_m} \int\limits_L \frac{\Gamma(1-\alpha-s)g(s)x^{-s}ds}{\Gamma(1-s)\prod\limits_{j=1}^{m}(s-1+s_j)}. \tag{2.7}$$

Известно [1], [49], [69], что функция $\Gamma(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением простых полюсов $z=-l$, $l \in \mathbb{N}$ с вычетом $\frac{(-1)^l}{l!}$, что означает:

$$\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^l}{l!(z+l)}, \quad z \to -l,\ l \in \mathbb{N}_0.$$

Поэтому подынтегральная функция в правой части (2.7) при любом фиксированном $x \neq 0$ есть аналитическая функция от s за исключением полюсов $s = 1-s_k,\ k=\overline{1,m}$ и $s = 1-\alpha+l,\ l \in \mathbb{N}_0$.

Обобщенный аналог Вронскиана. Пусть u_1, u_2, ..., u_n — функции от x, имеющие непрерывные производные до $n{-}1$–го порядка.

Определение 2.1. *Определителем Вронского* или *Вронскианом* $\mathcal{W}(x)$ функций u_1, u_2, ..., u_n называют определитель:

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(u_1, ..., u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \\ u_1' & u_2' & ... & u_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & ... & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Определение 2.2. *Обобщенным аналогом Вронскиана* $\mathcal{W}_\alpha(x)$ назовем функцию:

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \det\Big(\big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k}u_j\big)(x)\Big)_{k,j=1}^{n} =$$

$$= \begin{vmatrix} \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-1}u_1\big) & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-1}u_2\big) & ... & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-1}u_n\big) \\ \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-2}u_1\big) & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-2}u_2\big) & ... & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-2}u_n\big) \\ ... & ... & ... & ... \\ \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}u_1\big) & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}u_2\big) & ... & \big(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}u_n\big) \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.1. Решение $y(x)$ уравнения (2.1) с нулевыми начальными условиями $\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-1}y\right)(x_0) = 0$, ..., $\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha-n}y\right)(x_0) = 0$ единственно и $y(x) \equiv 0$ на $0 < x < +\infty$.

Справедливость следующей теоремы непосредственно следует из свойств операторов дробного дифференцирования:

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(Cy) = C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(y), \quad \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(y_1+y_2) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(y_1) + \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(y_2),$$

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(C_1y_1 + ... + C_my_m) = C_1\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(y_1) + ... + C_m\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(y_m),$$

где C, C_1, ..., C_m — произвольные постоянные.

Теорема 2.1. *Если* $y_1, ..., y_m$ *— решения уравнения* (2.1), *то и* $y = C_1y_1 + ... + C_my_m$ *— также решение уравнения* (2.1) *при произвольных* C_1, ..., C_m.

Справедлива следующая

Теорема 2.2. *Если* $y_1, ..., y_{n+m}$ *— решения уравнения* (2.1) *и*

$$\mathcal{W}_\alpha(y_1, ..., y_{n+m})\Big|_{x=x_0} = 0, \tag{2.8}$$

то

$$\mathcal{W}_\alpha(y_1, ..., y_{n+m}) \equiv 0, \quad 0<x<+\infty \tag{2.9}$$

и $y_1, ..., y_{n+m}$ *— линейно зависимые решения в промежутке* $0<x<+\infty$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-1}y_1\big)(x_0)+...+\alpha_{n+m}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-1}y_{n+m}\big)(x_0)=0, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \alpha_1\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha-n}y_1\big)(x_0)+...+\alpha_{n+m}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha-n}y_{n+m}\big)(x_0)=0, \end{cases} \tag{2.10}$$

с неизвестными $\alpha_1,...,\alpha_{n+m}$. Определитель этой линейной однородной алгебраической системы равен нулю согласно (2.8). В силу известной теоремы из алгебры система (2.10) имеет ненулевое решение $\alpha_1^0,...,\alpha_{n+m}^0$, то есть здесь не все $\alpha_1^0,...,\alpha_{n+m}^0$ равны нулю. При таких $\alpha_1^0,...,\alpha_{n+m}^0$ рассмотрим функцию $y^*=\alpha_1^0y_1+...+\alpha_{n+m}^0y_{n+m}$. Согласно теореме 2.1, y^* есть решение уравнения (2.1), а согласно (2.10) и замечанию 2.1, это решение есть $y^*=\alpha_1^0y_1+...+\alpha_{n+m}^0y_{n+m}\equiv 0$. А это означает, что $y_1,...,y_{n+m}$ — линейно зависимые. Тогда имеем (2.9). Теорема доказана.

2.1.1. Система решений однородного дифференциального уравнения с конечным числом дробных производных Лиувилля

Лемма 2.1. *Решения* $y_i(x)=x^{\alpha-i}$, $i=\overline{1,n}$, $y_j(x)=x^{s_j-1}$, $j=\overline{1,m}$ *уравнения* (2.1) *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $\mathcal{W}_\alpha(x_0)\neq 0$ *в некоторой точке* $x_0\in(0;+\infty)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $y_i(x)=x^{\alpha-i}$, $i=\overline{1,n}$, $y_j(x)=x^{s_j-1}$, $j=\overline{1,m}$ линейно независимые решения уравнения (2.1). Тогда $\mathcal{W}_\alpha(x_0)\neq 0$, так как иначе они, согласно теореме 2.3, будут линейно зависимые. Достаточность. Пусть $\mathcal{W}_\alpha(x_0)\neq 0$. Тогда и $\mathcal{W}_\alpha(x)\neq 0$, так как если бы оказалось $\mathcal{W}_\alpha(x_1)=0$, то было бы, согласно теореме 2.3 и равенство $\mathcal{W}_\alpha(x)\equiv 0,\ \ 0<x<+\infty$, то есть $\mathcal{W}_\alpha(x_0)=0$, чего нет. Таким образом, лемма 2.1 доказана.

Следующая теорема дает решение уравнения (2.1) в простейшем случае, когда все полюсы подынтегральной функции в (2.7) простые.

Теорема 2.3. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $n=[\operatorname{Re}\alpha]+1$, $A_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{0,m}$, $A_m\neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2,..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что* $s_i\neq s_j, i\neq j, i,j=\overline{1,m}$, $\operatorname{Re}s_i>0, i=\overline{1,m}$ *и* $s_i\neq\alpha-k, i=\overline{1,m}$ *для любого* $k\in\mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.1) *имеет* $m+n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x)=x^{\alpha-i}$, $i=\overline{1,n}$, $y_j(x)=x^{s_j-1}$, $j=\overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.1) *имеет вид:* $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\,x^{\alpha-i}+\sum\limits_{j=1}^{m}D_j\,x^{s_j-1}$, *где* C_i, $i=\overline{1,n}$ *и* D_j, $j=\overline{1,m}$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Покажем сначала, что $y_i(x)=x^{\alpha-i}$, $i=\overline{1,n}$, $n=[\operatorname{Re}(\alpha)]+1$ являются решениями уравнения (2.1). Используя формулу

(2.17) с $\beta = \alpha - i + 1$, $i = \overline{1,n}$ и свойство гамма–функции (2.18), имеем:

$$\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_i\right)(x) = \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} t^{\alpha-i}\right)(x) = \frac{\Gamma(\alpha-i+1)}{\Gamma(1-k-i)} x^{-k-i} = 0, \quad k = \overline{0,m}, \ i = \overline{1,n}.$$

Следовательно, $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$ являются решениями уравнения (2.1).

Покажем теперь, что функции $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{1,m}$, где s_j, $j = \overline{1,m}$ — простые корни многочлена (2.6), также являются решениями уравнения (2.1). Для этого вычислим интеграл в правой части (2.7), используя известную технику, основанную на теории вычетов. Имеем:

$$y(x) = \frac{(-1)^m}{A_m} \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{res}_{s=1-s_j} \left[\frac{\Gamma(1-\alpha-s) g(s) x^{-s}}{\Gamma(1-s) \prod\limits_{i=1}^{m} (s-1+s_i)} \right] =$$

$$= \frac{(-1)^m}{A_m} \sum_{j=1}^{m} \lim_{s \to 1-s_j} \left[(s-1+s_j) \frac{\Gamma(1-\alpha-s) g(s) x^{-s}}{\Gamma(1-s) \prod\limits_{i=1}^{m} (s-1+s_i)} \right] =$$

$$= \frac{(-1)^m}{A_m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(s_j-\alpha) g(1-s_j) x^{s_j-1}}{\Gamma(s_j) \prod\limits_{i=1, i\neq j}^{m} (s_i - s_j)}.$$

Полагая

$$D_j = \frac{(-1)^m}{A_m} \frac{\Gamma(s_j-\alpha) g(1-s_j)}{\Gamma(s_j) \prod\limits_{i=1, i\neq j}^{m} (s_i - s_j)},$$

представим решение в виде:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} D_j \, y_j(x), \quad y_j(x) = x^{s_j-1}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Докажем, что функции $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{1,m}$ при условии теоремы $\operatorname{Re} s_i > 0$ являются решениями уравнения (2.1). Подставляя $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{1,m}$ в левую часть уравнения (2.1), используя формулу (2.17) с $\beta = s_j$, $j = \overline{1,m}$ и учитывая (2.6), имеем:

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{\alpha+k} \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_j\right)(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k x^{\alpha+k} \frac{\Gamma(s_j)}{\Gamma(s_j-\alpha-k)} x^{-1+s_j-\alpha-k} =$$

$$= x^{s_j-1} \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma(s_j)}{\Gamma(s_j-\alpha-k)} = x^{s_j-1} \frac{\Gamma(s_j)}{\Gamma(s_j-\alpha)} \sum_{k=0}^{m} A_k (s_j-\alpha-k)\ldots(s_j-\alpha-1) =$$

$$= x^{s_j-1} \frac{\Gamma(s_j)}{\Gamma(s_j-\alpha)} \mathrm{P}_m(s_j) = 0.$$

Следовательно, $y_j(x)=x^{s_j-1}, j=\overline{1,m}$ являются решениями уравнения (2.1).

Докажем теперь, что решения $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$ и $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{1,m}$ линейно независимы. Введем обозначения: $y_{n+j}(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{1,m}$. Известно [85], что решения $y_j(x)$, $j = \overline{1,n+m}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\mathcal{W}_{\alpha+m}(x_0) \neq 0$ в некоторой точке x_0. Здесь

$$\mathcal{W}_{\alpha+m}(x) = \det\Big(\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-k}y_j\big)(x)\Big)_{k,j=1}^{n+m}$$

— так называемый *дробный аналог Вронскиана* обыкновенного дифференциального уравнения типа Эйлера $n+m$–го порядка (2.1).

Используя формулу (2.17) и свойство гамма–функции (2.18), вычислим значения элементов $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-k}y_j\big)(x)$ аналога Вронскиана в точке $x_0 = 1$:

$$\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-k}y_i\big)(x_0)\Big|_{x_0=1} = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-k}t^{\alpha-i}\big)(x_0)\Big|_{x_0=1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha-i+1)x_0^{k-m-i}}{\Gamma(k-m-i+1)}\Bigg|_{x_0=1} = \frac{\Gamma(\alpha-i+1)}{\Gamma(k-m-i+1)}, \quad k = \overline{1,n+m},\ i = \overline{1,n};$$

$$\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-k}y_{n+j}\big)(x_0)\Big|_{x_0=1} = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-k}t^{s_j-1}\big)(x_0)\Big|_{x_0=1} =$$

$$=\frac{\Gamma(s_j)}{\Gamma(s_j-\alpha-m+k)}x_0^{s_j-\alpha-m+k-1}\Bigg|_{x_0=1}=\frac{\Gamma(s_j)}{\Gamma(s_j-\alpha-m+k)},\ k = \overline{1,n+m},\ j = \overline{1,m}.$$

Тогда, $\mathcal{W}_{\alpha+m}(1) \neq 0$. Значит, $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$ и $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{1,m}$ линейно независимы. Таким образом, теорема 2.3 доказана.

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, то многочлен (2.6) принимает вид:

$$\mathrm{P}_m(s) = \sum_{k=0}^{m} A_k(s-n-k)...(s-n-1) = A_m(s-s_1)...(s-s_m). \quad (2.11)$$

Тогда из теоремы 2.3 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера:

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{n+k} y^{(n+k)}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.12)$$

Заметим, что условие теоремы 2.3 $\operatorname{Re} s_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, дающее условие справедливости формулы (2.17) при $\beta = s_i$, $i = \overline{1,m}$, можно опустить.

Теорема 2.4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, A_j \in \mathbb{C}, j = \overline{0,m}, A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.11) *такие, что* $s_i \neq s_j, i \neq j, i,j = \overline{1,m}$ *и* $s_i \neq n-k, i = \overline{1,m}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.12) *имеет* $m+n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{n-i}, i = \overline{1,n}, y_j(x) = x^{s_j-1}, j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.12) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{n-i} + \sum\limits_{j=1}^{m} D_j\, x^{s_j-1}$, *где* $C_i, i = \overline{1,n}$ *и* $D_j, j = \overline{1,m}$ *— произвольные постоянные.*

Следствие 2.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, A_j \in \mathbb{C}, j = \overline{0,m}, A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.11) *такие, что* $s_i \neq s_j, i \neq j, i,j = \overline{1,m}$ *и* $s_i \neq -k, i = \overline{l+1,m}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.12) *при* $n = 0$

$$\sum_{j=0}^{m} A_j x^j y^{(j)}(x) = 0 \qquad (2.13)$$

имеет m *линейно независимых решений:* $y_j(x) = x^{s_j-1}, j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.13) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} C_j\, x^{s_j-1}$, *где* $C_j, j = \overline{1,m}$ *— произвольные постоянные.*

Лемма 2.2. *Решения* $y_i(x) = x^{\alpha-i}, i = \overline{1,n}, y_j(x) = x^{s_1-1}\ln^{j-1} x, j = \overline{1,m}$ *уравнения* (2.1) *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $\mathcal{W}_\alpha(x_0) \neq 0$ *в некоторой точке* $x_0 \in (0; +\infty)$.

Следующая теорема дает решение уравнения (2.1) в случае, когда все полюсы подынтегральной функции в (2.7) совпадают и отличны от полюсов $\Gamma(1-\alpha-s)$.

Теорема 2.5. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\alpha > 0, n = [\operatorname{Re}\alpha] + 1, A_j \in \mathbb{C}, j = \overline{0,m}, A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что* $s_1 = ... = s_m, \operatorname{Re} s_1 > 0$ *и* $s_i \neq \alpha - k, i = \overline{1,m}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.1) *имеет* $m+n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{\alpha-i}, i = \overline{1,n}, y_j(x) = x^{s_1-1}\ln^{j-1} x, j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.1) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha-i} + \sum\limits_{j=1}^{m} D_j\, x^{s_1-1}\ln^{j-1} x$, *где* $C_i, i = \overline{1,n}$ *и* $D_j, j = \overline{1,m}$ *— произвольные постоянные.*

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, то из теоремы 2.5 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера (2.12).

Теорема 2.6. *Пусть* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, A_j \in \mathbb{C}, j = \overline{0,m}, A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.11) *такие, что* $s_i =$

$... = s_m$ *и* $s_i \neq n-k$, $i = \overline{1,m}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.12) *имеет* $m+n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{n-i}$, $i = \overline{1,n}$, $y_j(x) = x^{s_1-1}\ln^{j-1}x$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.12) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{n-i} + \sum\limits_{j=1}^{m} D_j\, x^{s_1-1}\ln^{j-1}x$, *где* C_i, $i = \overline{1,n}$ *и* D_j, $j = \overline{1,m}$ *— произвольные постоянные.*

Следствие 2.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.11) *такие, что* $s_1 = ... = s_m$ *и* $s_i \neq -k$, $i = \overline{1,m}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.12) *при* $n = 0$ (2.13) *имеет* m *линейно независимых решений:* $y_j(x) = x^{s_1-1}\ln^{j-1}x$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.13) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} C_j\, x^{s_1-1}\ln^{j-1}x$, *где* C_j, $j = \overline{1,m}$ *— произвольные постоянные.*

Аналогично теоремам 2.3, 2.5 доказываются утверждения приведенных ниже теорем, дающие решение уравнения (2.1) соответственно в случаях, когда некоторые полюсы s_i и все полюсы s_j подынтегральной функции в (2.7) совпадают между собой и с полюсом $\Gamma(1-\alpha-s)$.

Лемма 2.3. *Решения* $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$, $y_j(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^{j-1}x$, $j = \overline{1,l}$, $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{l+1,m}$ *уравнения* (2.1) *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $\mathcal{W}_\alpha(x_0) \neq 0$ *в некоторой точке* $x_0 \in (0;+\infty)$.

Теорема 2.7. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\ \alpha > 0$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что существуют* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < m+n$ *и* l, $1 < l < m$ *такие, что* $s_1 = ... = s_l = \alpha - n_0$, $s_1 \neq s_j$, $j = l+1, ..., m$, $\mathrm{Re}\, s_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ *и* $s_i \neq \alpha - k$, $i = \overline{l+1,m}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.1) *имеет* $m+n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$, $y_j(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^{j-1}x$, $j = \overline{1,l}$, $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{l+1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.1) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha-i} + \sum\limits_{j=1}^{l} D_j\, x^{\alpha-n_0-1}\ln^{j-1}x + \sum\limits_{j=l+1}^{m} D_j\, x^{s_j-1}$, *где* C_i, $i = \overline{1,n}$ *и* D_j, $j = \overline{1,m}$ *— произвольные постоянные.*

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, то из теоремы 2.7 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера (2.12).

Теорема 2.8. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.11) *такие, что существуют* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < m+n$ *и* l, $1 < l < m$ *такие, что* $s_1 = ... = s_l = n - n_0$, $s_1 \neq s_j$, $j = \overline{l+1,m}$ *и* $s_i \neq n-k$, $i = \overline{l+1,m}$

для любого $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.12) *имеет* $m+n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{n-i}$, $i = \overline{1,n}$, $y_j(x) = x^{n-n_0-1}\ln^{j-1} x$, $j = \overline{1,l}$, $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{l+1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.12) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{n-i} + \sum\limits_{j=1}^{l} D_j\, x^{n-n_0-1}\ln^{j-1} x + \sum\limits_{j=l+1}^{m} D_j\, x^{s_j-1}$, *где* C_i, $i = \overline{1,n}$ *и* D_j, $j = \overline{1,m}$ — *произвольные постоянные.*

Следствие 2.3. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.11) *при* $n = 0$ *такие, что существуют* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < m$ *и* l, $1 < l < m$ *такие, что* $s_1 = ... = s_l = -n_0$, $s_1 \neq s_j$, $j = \overline{l+1,m}$ *и* $s_i \neq -k$, $i = \overline{l+1,m}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.12) *при* $n = 0$ (2.13) *имеет* m *линейно независимых решений:* $y_j(x) = x^{-n_0-1}\ln^{j-1} x$, $j = \overline{1,l}$, $y_j(x) = x^{s_j-1}$, $j = \overline{l+1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.13) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{l} C_j\, x^{-n_0-1}\ln^{j-1} x + \sum\limits_{j=l+1}^{m} C_j\, x^{s_j-1}$, *где* C_j, $j = \overline{1,m}$ — *произвольные постоянные.*

Лемма 2.4. *Решения* $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$, $y_j(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^{j-1} x$, $j = \overline{1,m}$ *уравнения* (2.1) *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $\mathcal{W}_\alpha(x_0) \neq 0$ *в некоторой точке* $x_0 \in (0;+\infty)$.

Теорема 2.9. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $n = [\mathrm{Re}\ \alpha] + 1$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < m+n$ *такое, что* $s_1 = ... = s_m = \alpha - n_0$, $\mathrm{Re}\, s_1 > 0$. *Тогда уравнение* (2.1) *имеет* $m+n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$, $y_j(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^{j-1} x$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.1) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha-i} + \sum\limits_{j=1}^{m} D_j\, x^{\alpha-n_0-1}\ln^{j-1} x$, *где* C_i, $i = \overline{1,n}$ *и* D_j, $j = \overline{1,m}$ — *произвольные постоянные.*

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, то из теоремы 2.9 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера (2.12).

Теорема 2.10. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.11) *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < m+n$ *такое, что* $s_1 = ... = s_m = n - n_0$. *Тогда уравнение* (2.12) *имеет* $m+n$ *линейно независимых решений:* $y_i(x) = x^{n-i}$, $i = \overline{1,n}$, $y_j(x) = x^{n-n_0-1}\ln^{j-1} x$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.12) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{n-i} + \sum\limits_{j=1}^{m} D_j\, x^{n-n_0-1}\ln^{j-1} x$, *где* C_i, $i = \overline{1,n}$ *и* D_j, $j = \overline{1,m}$ — *произвольные постоянные.*

Следствие 2.4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.11) *при* $n = 0$ *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < m$ *такое, что* $s_1 = ... = s_m = -n_0$. *Тогда уравнение* (2.12) *при* $n = 0$ (2.13) *имеет* m *линейно независимых решений:* $y_j(x) = x^{-n_0-1}\ln^{j-1} x$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.13) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} C_j \, x^{-n_0-1}\ln^{j-1} x$, *где* C_j, $j = \overline{1,m}$ *— произвольные постоянные.*

2.1.2. Система решений однородного дифференциального уравнения с двумя дробными производными Лиувилля

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера порядка $\alpha + 1$:

$$x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1}y\big)(x) + \lambda x^{\alpha}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y\big)(x) = 0, \tag{2.14}$$

$x > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha \geq 0$ с дробными производными Лиувилля $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}y\big)$, $k = 0,\, 1$, задаваемыми (1.8) и комплексным коэффициентом $\lambda \in \mathbb{C}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$.

Применяя схему из п. 2.1, основанную на применении интегрального преобразования Меллина (1.27), для решения однородного уравнения с двумя дробными производными Лиувилля, получим формулу преобразования Меллина решения уравнения (2.14):

$$\big(\mathcal{M}y\big)(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)(\lambda-\alpha-s)}g(s). \tag{2.15}$$

Применяя обратное преобразование Меллина (1.28) к (2.15), получим решение уравнения (2.14) в виде интеграла Меллина—Барнса:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} G(s)ds, \quad G(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha-s)g(s)}{(\lambda-\alpha-s)\Gamma(1-s)}x^{-s}. \tag{2.16}$$

Вычислим интеграл в правой части (2.16), используя известную технику, основанную на теории вычетов [55]. Подынтегральная функция в правой части (2.16) при любом фиксированном $x \neq 0$ есть аналитическая функция от s за исключением полюсов $s = \lambda - \alpha$ и $s = 1 - \alpha + l$, $l \in \mathbb{N}_0$.

Предположим сначала, что полюсы $G(s)$ в (2.16) не совпадают: $\lambda \neq k+1$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Тогда из (2.16) получаем решение $y(x)$ уравнения (2.14):

$$y(x) = \operatorname*{res}_{s=\lambda-\alpha} G(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=1-\alpha+k} G(s) =$$

$$= Ax^{\alpha-\lambda} + \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^{\alpha-l-1} = Ax^{\alpha-\lambda} + \sum_{j=1}^{n} d_j x^{\alpha-j},$$

где $A, d_j, \quad j = \overline{1,n}$ — некоторые постоянные. Заметим, что в последнем равенстве бесконечная сумма становится конечной, поскольку $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_j\big)(x) = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} t^{\alpha-j}\big)(x) = 0$ при $j \geq n+1$.

Известно [85], что решения $y_j(x), \quad j = \overline{1, n+1}$ уравнения (2.14) линейно независимы тогда и только тогда, когда $\mathcal{W}_{\alpha+1}(x_0) \neq 0$ в некоторой точке $x_0 \geq 0$. Здесь

$$\mathcal{W}_{\alpha+1}(x) = \det\Big(\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1-k} y_j\big)(x)\Big)_{k,j=1}^{n+1}$$

— так называемый дробный аналог Вронскиана обыкновенного дифференциального уравнения типа Эйлера порядка $\alpha+1$ (2.14).

Сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 2.5. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\lambda \neq k+1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(1+\alpha-\lambda) > 0$, $\operatorname{Re}(1+\alpha-i) > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$ *и пусть* $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$, $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-\lambda}$. *Тогда:*

$$\mathcal{W}_{\alpha+1}(1) = \frac{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}{\Gamma(1-\lambda)} \prod_{l=1}^{n} \Gamma(\alpha-l+1).$$

Доказательство леммы 2.5 основано на использовании формулы из монографии [85]

$$\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} t^{\beta-1}\big)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1}, \quad \operatorname{Re}\alpha \geq 0, \operatorname{Re}\beta > 0, \tag{2.17}$$

свойстве гамма–функции

$$\lim_{z\to -k} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{2.18}$$

и функционального уравнения (1.14) для гамма–функции.

Следующая теорема дает решение уравнения (2.14) в простейшем случае, когда все полюсы подынтегральной функции в (2.16) простые.

Теорема 2.11. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, $n = [\operatorname{Re}\alpha]+1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq k+1$, $\operatorname{Re}(1+\alpha-\lambda) > 0$, $\operatorname{Re}(1+\alpha-i) > 0$, $i = \overline{1,n}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.14) *имеет* $n+1$ *линейно независимое решение:* $y_i(x) = x^{\alpha-i}, i = \overline{1,n}, y_{n+1}(x) = x^{\alpha-\lambda}$. *Общее решение уравнения* (2.14) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha-i} + C_{n+1}\, x^{\alpha-\lambda}$, *где* C_j, $j = \overline{1,n+1}$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Покажем сначала, что $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$, $n = [\mathrm{Re}\,\alpha] + 1$ являются решениями уравнения (2.14). Используя формулу (2.17) с $\beta = \alpha - i + 1$, $i = \overline{1,n}$ и свойство (2.18), имеем:

$$\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_i\big)(x) = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} t^{\alpha-i}\big)(x) = \frac{\Gamma(\alpha-i+1)}{\Gamma(1-i-k)} x^{-i-k} = 0, \quad i = \overline{1,n},\ k = 0,\,1.$$

Следовательно, $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$ являются решениями уравнения (2.14). Покажем теперь, что функция $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-\lambda}$ также является решением уравнения (2.14). Для этого вычислим интеграл в правой части (2.16), используя теорию вычетов. Имеем:

$$y_{n+1}(x) = \operatorname*{res}_{s=\lambda-\alpha}\left[\frac{\Gamma(1-\alpha-s)g(s)x^{-s}}{\Gamma(1-s)(\lambda-\alpha-s)}\right] =$$

$$= -\lim_{s\to\lambda-\alpha}\left[(s-\lambda+\alpha)\frac{\Gamma(1-\alpha-s)g(s)x^{-s}}{\Gamma(1-s)(s-\lambda+\alpha)}\right] = -\frac{\Gamma(1-\lambda)g(\lambda-\alpha)x^{\alpha-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda+\alpha)}.$$

Полагая

$$C = -\frac{\Gamma(1-\lambda)g(\lambda-\alpha)}{\Gamma(1-\lambda+\alpha)},$$

представим решение в виде: $y_{n+1}(x) = C\,x^{\alpha-\lambda}$. Покажем, что функция $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-\lambda}$ при условии $\mathrm{Re}(1+\alpha-\lambda) > 0$ является решением уравнения (2.14). Подставляя $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-\lambda}$ в левую часть уравнения (2.14) и используя формулу (2.17) с $\beta = \alpha - \lambda + 1$, имеем:

$$x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1} y_{n+1}\big)(x) + \lambda x^{\alpha}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} y_{n+1}\big)(x) = \lambda x^{\alpha-\lambda}\left(\frac{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}{\Gamma(1-\lambda)} - \frac{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}{\Gamma(1-\lambda)}\right) = 0.$$

Докажем теперь, что решения $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$ и $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-\lambda}$ линейно независимы. В силу леммы 2.5 и условий теоремы 2.11 имеем:

$$\mathcal{W}_{\alpha+1}(1) = \frac{\Gamma(\alpha-\lambda+1)}{\Gamma(1-\lambda)} \prod_{l=1}^{n} \Gamma(\alpha-l+1) \neq 0.$$

Таким образом, решения $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i = \overline{1,n}$ и $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-\lambda}$ линейно независимы. Теорема 2.11 доказана.

Если $\alpha{=}m \in \mathbb{N}_0$, то применяя преобразование Меллина к уравнению (2.14), получим решения, совпадающие с решениями из теоремы 2.11. Поэтому можно считать $\alpha{=}m \in \mathbb{N}_0$ частным случаем теоремы 2.11 и из теоремы 2.11 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера:

$$x^{m+1}y^{(m+1)}(x) + \lambda x^m y^{(m)}(x) = 0, \qquad m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.19}$$

Теорема 2.12. *Пусть* $m \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq k+1$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.19) *имеет* $m+1$ *линейно независимое решение:* $y_0(x) = x^{m-\lambda}$, $y_i(x) = x^{m-i}$, $i = \overline{1,n}$. *Общее решение уравнения* (2.19) *имеет вид:* $y(x) = C_0\, x^{m-\lambda} + \sum\limits_{i=1}^{m} C_i\, x^{m-i}$, *где* C_i, $i = \overline{0,m}$ *— произвольные постоянные.*

Предположим теперь, что $\exists k_0 \in \mathbb{N}_0$, что $\lambda = k_0 + 1$. Тогда из (2.16) получаем решение $y(x)$ уравнения (2.14):

$$y(x) = \operatorname*{res}_{s=1-\alpha+k_0} G(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=1-\alpha+k} G(s) =$$

$$= Ax^{\alpha-k_0-1}\ln x + \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^{\alpha-l-1} = Ax^{\alpha-k_0-1}\ln x + \sum_{j=1}^{n} d_j x^{\alpha-j},$$

где A, d_j, $j = \overline{1,n}$ — некоторые постоянные. Заметим, что в последнем равенстве бесконечная сумма становится конечной, поскольку $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_j\big)(x) = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} t^{\alpha-j}\big)(x) = 0$ при $j \geq n+1$.

Сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 2.6. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha-k_0) > 0$, $\operatorname{Re}(1+\alpha-i) > 0$, $i = \overline{1,n}$ *и пусть существует* $k_0 < n$, $k_0 \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $\lambda = k_0+1$ *и пусть* $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-k_0-1}\ln x$, $i = \overline{1,n}$. *Тогда:*

$$\mathcal{W}_{\alpha+1}(1) = (-1)^{k_0} k_0!\,\Gamma(\alpha-k_0)\prod_{l=1}^{n}\Gamma(\alpha-l+1).$$

Доказательство леммы 2.6 основано на использовании формул (2.17),

$$\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} t^{\beta-1}\ln t\big)(x) = \frac{x^{\beta-\alpha-1}\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\big[\psi(\beta)-\psi(\beta-\alpha)+\ln x\big],\ \operatorname{Re}\alpha \geq 0, \operatorname{Re}\beta > 0, \quad (2.20)$$

свойства гамма–функции (2.18), формулы для ψ–функции Эйлера

$$\psi(x) \equiv -\frac{1}{x+k}, \quad x \to -k, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

и асимптотической оценки

$$\lim_{x\to -k}\frac{\psi(x)}{\Gamma(x)} = (-1)^{k+1}k!, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.21)$$

Следующая теорема дает решение уравнения (2.14) в случае, когда подынтегральная функция в (2.16) имеет полюс второго порядка.

Теорема 2.13. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$, $n = [\operatorname{Re}\alpha]+1$, $\operatorname{Re}(\alpha-k_0)>0$, $\operatorname{Re}(1+\alpha-i)>0$, $i=\overline{1,n}$ *и пусть существует* $k_0 < n$, $k_0 \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $\lambda = k_0+1$. *Тогда уравнение* (2.14) *имеет* $n+1$ *линейно независимое решение:* $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i=\overline{1,n}$, $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-k_0-1}\ln x$. *Общее решение уравнения* (2.14) *имеет вид:* $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, x^{\alpha-i} + C_{n+1}\, x^{\alpha-k_0-1}\ln x$, *где* C_j, $j=\overline{1,n+1}$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Используя формулу (2.17) с $\beta=\alpha-i+1$, $i=\overline{1,n}$ и свойство гамма–функции (2.18) непосредственно проверяется, что $y_i(x) = x^{\alpha-i}$, $i=\overline{1,n}$, $n=[\operatorname{Re}\alpha]+1$, $i \neq k_0+1$ являются решениями уравнения (2.14). Покажем теперь, что функции $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-k_0-1}\ln x$, $y_{k_0+1}(x)=x^{\alpha-k_0-1}$ также являются решениями уравнения (2.14). Для этого вычислим интеграл в правой части (2.16) используя известную технику, основанную на теории вычетов:

$$y(x)=\operatorname*{res}_{s=\lambda-\alpha}\left[\frac{\Gamma(1-\alpha-s)g(s)x^{-s}}{\Gamma(1-s)(\lambda-\alpha-s)}\right]=-\lim_{s\to\lambda-\alpha}\left[(s-\lambda+\alpha)^2\frac{\Gamma(1-\alpha-s)g(s)x^{-s}}{\Gamma(1-s)(s-\lambda+\alpha)}\right]'=$$

$$=\lim_{s\to k_0+1-\alpha}\left[(1-\alpha-s+k_0)\frac{\Gamma(2-\alpha-s+k_0)g(s)x^{-s}}{\Gamma(1-s)\prod\limits_{j=1}^{k_0}(j-\alpha-s)(1-\alpha-s+k_0)}\right]'=$$

$$=\lim_{s\to k_0+1-\alpha}\frac{\Gamma(2-\alpha-s+k_0)g(s)x^{-s}}{\Gamma(1-s)\prod\limits_{j=1}^{k_0}(j-\alpha-s)}\left[-\psi(2-\alpha-s+k_0)+\frac{g'(s)}{g(s)}+\right.$$

$$\left.+\psi(1-s)+\sum_{j=1}^{k_0}\frac{1}{(j-\alpha-s)^2}-\ln x\right]=\frac{(-1)^{k_0}g(k_0+1-\alpha)x^{\alpha-k_0-1}}{\Gamma(\alpha-k_0)m!}\times$$

$$\times\left[\gamma+\frac{g'(k_0+1-\alpha)}{g(k_0+1-\alpha)}+\psi(\alpha-k_0)+\sum_{j=1}^{k_0}\frac{1}{(k_0+1-j)^2}-\ln x\right].$$

Полагая

$$C_1=\frac{(-1)^{k_0}g(k_0+1-\alpha)}{\Gamma(\alpha-k_0)m!}\left[\gamma+\frac{g'(k_0+1-\alpha)}{g(k_0+1-\alpha)}+\psi(\alpha-k_0)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{k_0}\frac{1}{(k_0+1-j)^2}\right],\quad C_2=\frac{(-1)^{k_0+1}g(k_0+1-\alpha)}{\Gamma(\alpha-k_0)m!},$$

представим решение в виде: $y(x) = C_1\, x^{\alpha-k_0-1} + C_2\, x^{\alpha-k_0-1}\ln x$.

Докажем, что функции $y_{k_0+1}(x) = x^{\alpha-k_0-1}$, $y_{n+1}(x) = x^{\alpha-k_0-1}\ln x$ при условии теоремы $\operatorname{Re}(\alpha-k_0)>0$ являются решениями уравнения

(2.14). Подставляя $y_{k_0+1}(x)=x^{\alpha-k_0-1}$ в левую часть уравнения (2.14) и используя формулу (2.17) с $\beta=\alpha-k_0$, имеем:

$$x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{0+}y_{k_0+1}\big)(x)+(k_0+1)x^{\alpha}\big(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y_{k_0+1}\big)(x)=\frac{\Gamma(\alpha-k_0)}{\Gamma(-k_0-1)}x^{\alpha-k_0-1}+$$

$$+(k_0+1)\frac{\Gamma(\alpha-k_0)}{\Gamma(-k_0)}x^{\alpha-k_0-1}=\left(\frac{\Gamma(\alpha-k_0)}{\Gamma(-k_0)}-\frac{\Gamma(\alpha-k_0)}{\Gamma(-k_0)}\right)(k_0+1)x^{\alpha-k_0-1}=0.$$

Далее, подставляя $y_{n+1}(x)=x^{\alpha-k_0-1}\ln x$ в левую часть уравнения (2.14) и используя формулу (2.20) с $\beta=\alpha-k_0$ и свойство гамма–функции (2.18), имеем:

$$x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{0+}y_{n+1}\big)(x)+(k_0+1)x^{\alpha}\big(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y_{n+1}\big)(x)=x^{\alpha+1}\frac{\Gamma(\alpha-k_0)}{\Gamma(-k_0-1)}x^{-k_0-2}\times$$

$$\times\big[\psi(\alpha-k_0)-\psi(-k_0-1)+\ln x\big]+(k_0+1)x^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha-k_0)}{\Gamma(-k_0)}\big[\psi(\alpha-k_0)-\psi(-k_0)+\ln x\big]=$$

$$=\frac{(k_0+1)\Gamma(\alpha-k_0)x^{\alpha-k_0-1}}{\Gamma(-k_0)}\big[\psi(-k_0-1)-\psi(-k_0)\big]=0.$$

Докажем теперь, что решения $y_i(x)=x^{\alpha-i}$, $i=\overline{1,n}$, $y_{n+1}(x)=x^{\alpha-k_0-1}\ln x$ линейно независимы. В силу леммы 2.6 и условий теоремы 2.13 имеем:

$$\mathcal{W}_{\alpha+1}(1)=(-1)^{k_0}k_0!\Gamma(\alpha-k_0)\prod_{l=1}^{n}\Gamma(\alpha-l+1)\neq 0,$$

при условии, что $k_0<n$. Значит, $y_i(x)=x^{\alpha-i}$, $i=\overline{1,n}$ и $y_{n+1}(x)=x^{\alpha-k_0-1}\ln x$ линейно независимы. Таким образом, теорема 2.13 доказана.

Если $\alpha=m\in\mathbb{N}_0$, то применяя преобразование Меллина к уравнению (2.14), получим решения, совпадающие с решениями из теоремы 2.13. Поэтому можно считать $\alpha=m\in\mathbb{N}_0$ частным случаем теоремы 2.13 и из теоремы 2.13 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера (2.19).

Теорема 2.14. *Пусть $m\in\mathbb{N}_0$ и пусть существует $k_0<m$, $k_0\in\mathbb{N}_0$ такое, что $\lambda=k_0+1$. Тогда уравнение (2.19) имеет $m+1$ линейно независимое решение: $y_0(x)=x^{m-k_0-1}\ln x$, $y_i(x)=x^{m-i}$, $i=\overline{1,m}$. Общее решение уравнения (2.19) имеет вид: $y(x)=C_0\,x^{m-k_0-1}\ln x+\sum\limits_{i=1}^{m}C_i\,x^{m-i}$, где C_i, $i=\overline{0,m}$ — произвольные постоянные.*

2.1.3. Система решений однородного дифференциального уравнения с тремя дробными производными Лиувилля

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное типа Эйлера уравнение порядка $\alpha+2$:

$$x^{\alpha+2}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2}y\big)(x)+\mu x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1}y\big)(x)+\lambda x^{\alpha}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y\big)(x)=0, \tag{2.22}$$

$x>0,\ \alpha\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}\alpha\geq 0$ с дробными производными $\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}y,\quad k=0,\,1,\,2$ и комплексными коэффициентами $\mu,\,\lambda\in\mathbb{C}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+=(0;+\infty)$. Здесь $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y\big)(x)$ — левосторонняя дробная производная Лиувилля порядка $\alpha\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}\alpha\geq 0,$ определяемая формулой (1.8).

Применяя схему из п. 2.1, основанную на применении интегрального преобразования Меллина (1.27), для решения однородного уравнения с тремя дробными производными Лиувилля, получаем формулу преобразования Меллина решения уравнения (2.22):

$$\big(\mathcal{M}y\big)(s)=\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)(1-s-s_1)(1-s-s_2)}g(s). \tag{2.23}$$

Применяя обратное преобразование Меллина (1.28) к (2.23), получим решение уравнения (2.22) в виде интеграла Меллина—Барнса:

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L G(s)ds,\quad G(s)=\frac{\Gamma(1-\alpha-s)g(s)}{\Gamma(1-s)(1-s-s_1)(1-s-s_2)}x^{-s}. \tag{2.24}$$

Вычислим интеграл в правой части (2.24), используя известную технику, основанную на теории вычетов [55]. Подынтегральная функция в правой части (2.24) при любом фиксированном $x\neq 0$ есть аналитическая функция от s за исключением полюсов $s=1-s_1$, $s=1-s_2$ и $s=1-\alpha+l,\quad l\in\mathbb{N}_0$.

Предположим сначала, что полюсы $G(s)$ в (2.24) не совпадают: $s_1\neq s_2,\ s_1\neq 1-\alpha+k,\ s_2\neq 1-\alpha+l,\quad \forall k,\,l\in\mathbb{N}_0$. Тогда из (2.24) получаем решение $y(x)$ уравнения (2.22):

$$y(x)=\operatorname*{res}_{s=s_1}G(s)+\operatorname*{res}_{s=s_2}G(s)+\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{s=1-\alpha+k}G(s)=$$

$$=Ax^{-s_1}+Bx^{-s_2}+\sum_{l=0}^{\infty}c_l x^{\alpha-l-1}=Ax^{-s_1}+Bx^{-s_2}+\sum_{j=1}^{n}d_j x^{\alpha-j},$$

где $A,\,B,\,d_j,\quad j=\overline{1,n}$ — некоторые постоянные. Заметим, что в последнем равенстве бесконечная сумма становится конечной, поскольку $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}y_j\big)(x)=\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k}t^{\alpha-j}\big)(x)=0$ при $j\geq n+1$.

Справедлива следующая

Лемма 2.7. *Пусть* s_1 *и* s_2 *— корни многочлена* (2.6) *такие, что* $s_1 \neq s_2$, $\operatorname{Re} s_1 < 1$, $\operatorname{Re} s_2 < 1$ *и* $s_1 \neq 1-\alpha+k$, $s_2 \neq 1-\alpha+l$ *для любых* k, $l \in \mathbb{N}_0$ *и пусть* $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$. *Тогда:*

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = \frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_2)}{\Gamma(1-s_1-\alpha)\Gamma(1-s_2-\alpha)} \prod_{l=1}^{n} \Gamma(\alpha-l+1)(s_2-s_1).$$

Доказательство леммы 2.7 основано на использовании формулы (2.17), свойстве гамма–функции (2.18) и функционального уравнения (1.14) для гамма–функции.

Следующая теорема дает решение уравнения (2.22) в простейшем случае, когда все полюсы подынтегральной функции в (2.24) простые.

Теорема 2.15. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$, μ, $\lambda \in \mathbb{C}$, s_1 *и* s_2 *— корни многочлена* (2.6) *такие, что* $s_1 \neq s_2$, $\operatorname{Re} s_1 < 1$, $\operatorname{Re} s_2 < 1$ *и* $s_1 \neq 1-\alpha+k$, $s_2 \neq 1-\alpha+l$ *для любых* k, $l \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.22) *имеет* $n+2$ *линейно независимых решений:* $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$. *Общее решение уравнения* (2.22) *дается формулой:* $y(x) = C_1 x^{-s_1} + C_2 x^{-s_2} + \sum\limits_{j=1}^{n} C_{j+2}\, x^{\alpha-j}$, *где* C_j, $j = \overline{1,n+2}$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Покажем сначала, что $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$ являются решениями уравнения (2.22). Используя формулу (2.17) с $\beta = \alpha - j + 1$, $j = \overline{1,n}$ и свойство гамма–функции (2.18), имеем:

$$\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_{j+2}\big)(x) = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} t^{\alpha-j}\big)(x) = \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(1-j-k)} x^{-j-k} = 0,\ j = \overline{1,n},\ k = 0,1,2.$$

Следовательно, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$ являются решениями уравнения (2.22). Докажем, что функции $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_2}$ также есть решения уравнения (2.22). Подставляя $y_1(x) = x^{-s_1}$ в левую часть уравнения (2.22), используя формулу (2.17) с $\beta = 1-s_1$ и свойство (1.14) гамма–функции, имеем:

$$x^{\alpha+2}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2} y_1\big)(x) + \mu x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1} y_1\big)(x) + \lambda x^{\alpha}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} y_1\big)(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(1-s_1-\alpha)} x^{-s_1}\Big[(s_1+\alpha)(s_1+\alpha+1) - \mu(s_1+\alpha) + \lambda\Big] =$$

$$= \frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(1-s_1-\alpha)} x^{-s_1}\mathrm{P}_\alpha(s_1) = 0.$$

Значит, $y_1(x) = x^{-s_1}$ является решением уравнения (2.22). Аналогично доказывается, что $y_2(x) = x^{-s_2}$ является решением уравнения (2.22).

Докажем теперь, что решения $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$ линейно независимы. В силу леммы 2.7 и условий теоремы 2.15, имеем:

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = \frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_2)}{\Gamma(1-s_1-\alpha)\Gamma(1-s_2-\alpha)} \prod_{l=1}^{n} \Gamma(\alpha-l+1)(s_2-s_1) \neq 0.$$

Таким образом, теорема 2.15 доказана.

Если $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$, то применяя преобразование Меллина к уравнению (2.22), получим решения, совпадающие с решениями из теоремы 2.15. Поэтому можно считать $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$ частным случаем теоремы 2.15 и из теоремы 2.15 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера:

$$x^{m+2}y^{(m+2)}(x) + \mu x^{m+1}y^{(m+1)}(x) + \lambda x^m y^{(m)}(x) = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.25}$$

Теорема 2.16. *Пусть* $m \in \mathbb{N}_0$, $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$, $s_1 = \frac{1}{2}\big(-1-2m+\mu-\sqrt{1-4\lambda-2\mu+\mu^2}\big)$ *и* $s_2 = \frac{1}{2}\big(-1-2m+\mu+\sqrt{1-4\lambda-2\mu+\mu^2}\big)$ *— корни многочлена* (2.11) *с* $\alpha = m$ *такие, что* $s_1 \neq s_2$, $s_1 \neq 1-m+k$, $s_2 \neq 1-m+l$ *для любых* $k, l \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.25) *имеет* $m+2$ *линейно независимых решений:* $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x) = x^{m-j}$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.25) *дается формулой:* $y(x) = C_1\, x^{-s_1} + C_2\, x^{-s_2} + \sum\limits_{j=1}^{m} C_{j+2}\, x^{m-j}$, *где* C_j, $j = \overline{1, m+2}$ *— произвольные постоянные.*

Предположим, что корни s_1 и s_2 многочлена (2.6) не совпадают ($s_1 \neq s_2$) и $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0$ такое, что $s_1 = 1-\alpha+n_0$. Тогда из (2.24) получаем решение $y(x)$ уравнения (2.22):

$$y(x) = \operatorname*{res}_{s=1-\alpha+n_0} G(s) + \operatorname*{res}_{s=s_2} G(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=1-\alpha+k} G(s) =$$

$$= Ax^{\alpha-n_0-1}\ln x + Bx^{-s_2} + \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^{\alpha-l-1} = Ax^{\alpha-n_0-1}\ln x + Bx^{-s_2} + \sum_{j=1}^{n} d_j x^{\alpha-j},$$

где A, B, d_j, $j = \overline{1,n}$ — некоторые постоянные. Заметим, что в последнем равенстве бесконечная сумма становится конечной, поскольку $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_j\big)(x) = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} t^{\alpha-j}\big)(x) = 0$ при $j \geq n+1$.

Справедлива следующая

Лемма 2.8. *Пусть* s_1 *и* s_2 *— корни многочлена* (2.6) *такие, что* $s_1 \neq s_2$, $\operatorname{Re} s_1 < 1$, $\operatorname{Re} s_2 < 1$, *пусть существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 < n$ *такое,* *что* $s_1 = 1-\alpha+n_0$ *и пусть* $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j=\overline{1,n}$. *Тогда:*

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = \frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(\alpha-n_0)}{\Gamma(1-s_2-\alpha)}\prod_{l=1}^{n}\Gamma(\alpha-l+1)(-1)^{n_0}n_0!(n_0+1-s_2-\alpha).$$

Доказательство леммы 2.8 основано на использовании формул (2.17), (2.20), свойства гамма–функции (2.18), функционального уравнения (1.14) для гамма–функции и асимптотической формулы (2.21).

Следующая теорема дает решение уравнения (2.22) в случае, когда подынтегральная функция в (2.24) имеет полюс второго порядка.

Теорема 2.17. *Пусть* $\alpha\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\mu,\lambda\in\mathbb{C}$, s_1 *и* s_2 *— корни многочлена* (2.6) *такие, что* $s_1\neq s_2$, $\operatorname{Re}s_1<1$, $\operatorname{Re}s_2<1$ *и пусть существует* $n_0\in\mathbb{N}_0$ *такое, что* $s_1=1-\alpha+n_0$. *Тогда уравнение* (2.22) *имеет* $n+2$ *линейно независимых решений:* $y_1(x)=x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x)=x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x)=x^{\alpha-j}$, $j=\overline{1,n}$. *Общее решение уравнения* (2.22) *дается формулой:* $y(x) = C_1x^{\alpha-n_0-1}\ln x + C_2x^{-s_2} + \sum\limits_{j=1}^{n}C_{j+2}x^{\alpha-j}$, *где* C_j, $j=\overline{1,n+2}$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Используя формулу (2.17) с $\beta=\alpha-j+1$, $j=\overline{1,n}$ и свойство гамма–функции (2.18) непосредственно проверяется, что $y_{j+2}(x)=x^{\alpha-j}$, $j=\overline{1,n}$ являются решениями уравнения (2.22). Докажем, что функции $y_1(x)=x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x)=x^{-s_2}$ также являются решениями уравнения (2.22). Подставляя $y_1(x)=x^{\alpha-n_0-1}\ln x$ в левую часть уравнения (2.22) и используя формулу (2.20) с $\beta=\alpha-n_0$, имеем:

$$x^{\alpha+2}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2}y_1\right)(x)+\mu x^{\alpha+1}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1}y_1\right)(x)+\lambda x^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y_1\right)(x)=$$

$$=(-1)^{n_0}n_0!x^{\alpha-n_0-1}\Gamma(\alpha-n_0)\Big[(n_0+1)(n_0+2)-\mu(n_0+1)+\lambda\Big]=$$

$$=(-1)^{n_0}n_0!x^{\alpha-n_0-1}\Gamma(\alpha-n_0)\mathrm{P}_\alpha(1-\alpha+n_0)=0,$$

в силу (2.21). Докажем теперь, что $y_2(x)=x^{-s_2}$ также является решением уравнения (2.22). Подставляя $y_2(x)=x^{-s_2}$ в левую часть уравнения (2.22) и используя формулу (2.17) с $\beta=1-s_2$, имеем:

$$x^{\alpha+2}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2}y_2\right)(x)+\mu x^{\alpha+1}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1}y_2\right)(x)+\lambda x^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y_2\right)(x)=$$

$$=\frac{\Gamma(1-s_2)}{\Gamma(-s_2-\alpha-1)}x^{-s_2}+\mu\frac{\Gamma(1-s_2)}{\Gamma(-s_2-\alpha)}x^{-s_2}+\lambda\frac{\Gamma(1-s_2)}{\Gamma(1-s_2-\alpha)}x^{-s_2}=$$

$$=\frac{\Gamma(1-s_2)}{\Gamma(1-s_2-\alpha)}x^{-s_2}\Big[(s_2+\alpha)(s_2+\alpha+1)-\mu(s_2+\alpha)+\lambda\Big]=$$

$$= \frac{\Gamma(1-s_2)}{\Gamma(1-s_2-\alpha)} x^{-s_2} \mathrm{P}_\alpha(s_2) = 0.$$

Следовательно, $y_2(x) = x^{-s_2}$ также является решением уравнения (2.22).

Докажем теперь, что решения $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$ линейно независимы. В силу леммы 2.8 и условий теоремы 2.17 имеем:

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = \frac{\Gamma(1{-}s_2)\Gamma(\alpha{-}n_0)}{\Gamma(1{-}s_2{-}\alpha)} \prod_{l=1}^{n} \Gamma(\alpha-l+1)(-1)^{n_0} n_0!(n_0{+}1{-}s_2{-}\alpha) \neq 0.$$

Значит, решения $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$ линейно независимы. Таким образом, теорема 2.17 доказана.

Если $\alpha{=}m \in \mathbb{N}_0$, то применяя преобразование Меллина к уравнению (2.22), получим решения, совпадающие с решениями из теоремы 2.17. Поэтому можно считать $\alpha{=}m \in \mathbb{N}_0$ частным случаем теоремы 2.17 и из теоремы 2.17 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера (2.25).

Теорема 2.18. *Пусть* $\alpha = m \in \mathbb{N}$, $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$, $s_1 = \frac{1}{2}\big(-1{-}2m{+}\mu{-}\sqrt{1{-}4\lambda{-}2\mu{+}\mu^2}\big)$, $s_2 = \frac{1}{2}\big(-1{-}2m{+}\mu{+}\sqrt{1{-}4\lambda{-}2\mu{+}\mu^2}\big)$ — *корни многочлена* (2.11) *такие, что* $s_1 \neq s_2$ *и пусть существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 \leq m$ *такое, что* $s_1 = 1{-}m{+}n_0$. *Тогда уравнение* (2.25) *имеет* $m+2$ *линейно независимых решений:* $y_1(x) = x^{m-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{-s_2}$, $y_{j+2}(x) = x^{m-j}$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.25) *дается формулой:* $y(x) = C_1\, x^{m-n_0-1}\ln x + C_2\, x^{-s_2} + \sum\limits_{j=1}^{m} C_{j+2}\, x^{m-j}$, *где* C_j, $j = \overline{1,m+2}$ *— произвольные постоянные.*

Предположим, что корни s_1, $\operatorname{Re} s_1 < 1$ и s_2, $\operatorname{Re} s_2 < 1$ многочлена (2.6) совпадают $4\lambda = (\mu-1)^2$, но не совпадают с полюсами гамма–функции $\Gamma(1-\alpha-s)$: $s_1 = s_2 \neq 1-\alpha+k$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Тогда из (2.24) находим решение $y(x)$ уравнения (2.22):

$$y(x) = \operatorname*{res}_{s=s_1} G(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=1-\alpha+k} G(s) =$$

$$= Ax^{-s_1} + Bx^{-s_1}\ln x + \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^{\alpha-l-1} = Ax^{-s_1} + Bx^{-s_1}\ln x + \sum_{j=1}^{n} d_j x^{\alpha-j},$$

где A, B, d_j, $j = \overline{1,n}$ — некоторые постоянные. В последнем равенстве бесконечная сумма становится конечной, поскольку $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_j\big)(x) = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} t^{\alpha-j}\big)(x) = 0$ при $j \geq n+1$.

Лемма 2.9. *Пусть корни* $s_1, \ \operatorname{Re} s_1 < 1$ *и* $s_2, \ \operatorname{Re} s_2 < 1$ *многочлена* (2.6) *совпадают, но не совпадают с полюсами гамма–функции* $\Gamma(1–\alpha–s)$: $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}(-1-2\alpha+\mu) \neq 1-\alpha+k$ *для любых* $k \in \mathbb{N}_0$ *и пусть* $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_1}\ln x$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$. *Тогда:*

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = \frac{\Gamma^2(1-s_1)}{\Gamma^2(1-s_1-\alpha)}\prod_{l=1}^{n}\Gamma(\alpha-l+1).$$

Доказательство леммы 2.9 основано на использовании формул (2.17), (2.20), свойства гамма–функции (2.18) и следующего свойства ψ–функции Эйлера:

$$\psi(z+1)-\psi(z) = \frac{1}{z}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.19. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda = \frac{(\mu-1)^2}{4}$, *пусть корни* $s_1, \ \operatorname{Re} s_1 < 1$ *и* $s_2, \ \operatorname{Re} s_2 < 1$ *многочлена* (2.6) *совпадают, но не совпадают с полюсами гамма–функции* $\Gamma(1-\alpha-s)$: $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}(-1-2\alpha+\mu) \neq 1-\alpha+k$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.22) *имеет* $n+2$ *линейно независимых решений:* $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_1}\ln x$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$. *Общее решение уравнения* (2.22) *дается формулой:* $y(x) = C_1\, x^{-s_1} + C_2\, x^{-s_1}\ln x + \sum\limits_{j=1}^{n} C_{j+2}\, x^{\alpha-j}$, *где* C_j, $j = \overline{1, n+2}$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Используя формулу (2.17) с $\beta = \alpha - j + 1$, $j = \overline{1,n}$ и свойство гамма–функции (2.18) непосредственно проверяется, что $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$ являются решениями уравнения (2.22). Докажем, что функции $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_1}\ln x$ также являются решениями уравнения (2.22). Подставляя $y_2(x) = x^{-s_1}\ln x$ в левую часть уравнения (2.22) и используя формулу (2.20) с $\beta = 1 - s_1$, имеем:

$$x^{\alpha+2}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2}y_2\right)(x) + \mu x^{\alpha+1}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1}y_2\right)(x) + \lambda x^{\alpha}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y_2\right)(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(-s_1-\alpha-1)}x^{-s_1}\Big[\ln x + \psi(1-s_1) - \psi(-s_1-\alpha-1)\Big] +$$

$$+\mu\frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(-s_1-\alpha)}x^{-s_1}\Big[\ln x + \psi(1-s_1) - \psi(-s_1-\alpha)\Big] +$$

$$+\lambda\frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(1-s_1-\alpha)}x^{-s_1}\Big[\ln x + \psi(1-s_1) - \psi(1-s_1-\alpha)\Big] = 0,$$

при условии, что $s_1 = \frac{1}{2}(-1-2\alpha+\mu)$, $\lambda = \frac{(\mu-1)^2}{4}$. Следовательно, $y_2(x) = x^{-s_1}\ln x$ является решением уравнения (2.22). Так же, как и в теореме 2.17, проверяется, что $y_1(x) = x^{-s_1}$ является решением уравнения (2.22).

Докажем теперь, что решения $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_1}\ln x$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$ линейно независимы. Согласно лемме 2.9 и условиям теоремы 2.19 получаем, что:

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = \frac{\Gamma^2(1-s_1)}{\Gamma^2(1-s_1-\alpha)} \prod_{l=1}^{n} \Gamma(\alpha-l+1) \neq 0.$$

Значит, решения $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_1}\ln x$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$ линейно независимы. Таким образом, теорема 2.19 доказана.

Если $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$, то применяя преобразование Меллина к уравнению (2.22), получим решения, совпадающие с решениями из теоремы 2.19. Поэтому можно считать $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$ частным случаем теоремы 2.19 и из теоремы 2.19 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера (2.25).

Теорема 2.20. *Пусть* $m \in \mathbb{N}_0$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda = \frac{(\mu-1)^2}{4}$, *пусть корни* s_1 *и* s_2 *многочлена* (2.11) *при* $\alpha = m$ *совпадают, но не совпадают с полюсами гамма–функции* $\Gamma(1-m-s)$*:* $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}(-1-2m+\mu) \neq 1-m+k$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда уравнение* (2.25) *имеет* $m+2$ *линейно независимых решений:* $y_1(x) = x^{-s_1}$, $y_2(x) = x^{-s_1}\ln x$, $y_{j+2}(x) = x^{m-j}$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.25) *дается формулой:* $y(x) = C_1 x^{-s_1} + C_2 x^{-s_1}\ln x + \sum\limits_{j=1}^{m} C_{j+2}\, x^{m-j}$, *где* C_j, $j = \overline{1,m+2}$ *— произвольные постоянные.*

Предположим, что $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0$ такое, что $s_1 = s_2 = 1-\alpha+n_0$. Тогда из (2.24) получаем решение $y(x)$ уравнения (2.22):

$$y(x) = \operatorname*{res}_{s=1-\alpha+n_0} G(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=1-\alpha+k} G(s) = Ax^{\alpha-n_0-1}\ln x +$$

$$+Bx^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x + \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^{\alpha-l-1} = Ax^{\alpha-n_0-1}\ln x + Bx^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x + \sum_{j=1}^{n} d_j x^{\alpha-j},$$

где A, B, d_j, $j = \overline{1,n}$ — некоторые постоянные. В последнем равенстве бесконечная сумма становится конечной, поскольку $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y_j\big)(x) = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} t^{\alpha-j}\big)(x) = 0$ при $j \geq n+1$.

Лемма 2.10. *Пусть существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0, n_0 < n$ *такое, что* $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}(-1-2\alpha+\mu) = 1-\alpha+n_0$, *где* s_1 *— корень многочлена* (2.6), $\operatorname{Re}(1-\alpha+n_0) < 1$, $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x$,

$y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}, \quad j = \overline{1,n}$. *Тогда:*

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = 2 \cdot n_0!(n_0+1)! \left(\frac{1}{n_0(n_0+1)} - 2\right) \Gamma^2(\alpha - n_0) \prod_{l=1}^{n} \Gamma(\alpha - l + 1).$$

Доказательство. Используя формулы (2.17), (2.18), (2.20) и формулу:

$$\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} t^{\beta-1} \ln^j t\right)(x) = x^{\beta-\alpha-1} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (\ln x)^{j-i} \frac{\partial^i}{\partial \beta^i} \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \right), \tag{2.26}$$

где $\mathrm{Re}\ \alpha \geq 0, \mathrm{Re}\ \beta > 0$, вычислим значения элементов аналога Вронскиана

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(x) = \det \left(\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2-k} y_j \right)(x) \right)_{k,j=1}^{n+2}$$

в точке $x_0 = 1$:

$$\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2-k} y_1\right)(x_0)\Big|_{x_0=1} = \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2-k} t^{\alpha-n_0-1} \ln t\right)(x_0)\Big|_{x_0=1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha - n_0)}{\Gamma(k - n_0 - 2)} x_0^{k-n_0-3} \Big[\ln x_0 + \psi(\alpha - n_0) - \psi(k - n_0 - 2) \Big] \Big|_{x_0=1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha - n_0)}{\Gamma(k - n_0 - 2)} \Big[\psi(\alpha - n_0) - \psi(k - n_0 - 2) \Big] =$$

$$= \Gamma(\alpha - n_0)(-1)^{n_0+2-k}(n_0 + 2 - k)!, \quad k = 1, 2, ..., n_0 + 2;$$

$$\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2-k} y_2\right)(x_0)\Big|_{x_0=1} = \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2-k} t^{\alpha-n_0-1} \ln^2 t\right)(x_0)\Big|_{x_0=1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha - n_0)}{\Gamma(k-n_0-2)} x_0^{k-n_0-3} \Big((\psi(\alpha-n_0) - \psi(k-n_0-2))^2 + \psi'(\alpha-n_0) - \psi'(k-n_0-2) +$$

$$+ 2(\psi(\alpha-n_0) - \psi(k-n_0-2)) \ln x_0 + \ln^2 x_0 \Big) \Big|_{x_0=1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha - n_0)}{\Gamma(k-n_0-2)} \Big((\psi(\alpha-n_0) - \psi(k-n_0-2))^2 + \psi'(\alpha-n_0) - \psi'(k-n_0-2) \Big) =$$

$$= \Gamma(\alpha - n_0) h_\alpha(n_0 + 2 - k), \quad k = 1, 2, ..., n_0 + 2,$$

где

$$h_\alpha(n_0 + 2 - k) = \lim_{x \to k-n_0-2} \frac{1}{\Gamma(x)} \Big((\psi(\alpha + x + 2 - k) - \psi(x))^2 +$$

$$+ \psi'(\alpha+x+2-k) - \psi'(x) \Big) = 2(-1)^{n_0+2-k}(n_0 + 2 - k)! \times$$

$$\times \left(\psi(\alpha - n_0) + \gamma - \frac{2}{n_0 + 2 - k} - \sum_{l=1,\, l \neq n_0+2-k}^{\infty} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l - (n_0 + 2 - k)} \right) \right),$$

$$\gamma = -\psi(1), \quad k = 1, 2, ..., n_0 + 1;$$

$$\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2-k} y_{j+2}\big)(x_0)\Big|_{x_0=1} = \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2-k} t^{\alpha-j}\big)(x_0)\Big|_{x_0=1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(k-j-1)} x_0^{k-j-2}\Bigg|_{x_0=1} = \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(k-j-1)}, \quad k = 1, 2, ..., n+2, \quad j = \overline{1, n}.$$

При $n-1 < \alpha \le n, \; n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = \Gamma^2(\alpha - n_0) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (-1)^{n_0+1}(n_0+1)! & h_\alpha(n_0+1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (-1)^{n_0}(n_0)! & h_\alpha(n_0) & 0 & 0 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \Gamma(\alpha) & 0 & & 0 \\ & & & \Gamma(\alpha-1) & & \ldots \\ & & & & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & & \ldots & \Gamma(\alpha-n+1) \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot n_0!(n_0+1)! \left(\frac{1}{n_0(n_0+1)} - 2\right) \Gamma^2(\alpha - n_0) \prod_{l=1}^{n} \Gamma(\alpha - l + 1).$$

Лемма доказана.

Следующая теорема дает решение уравнения (2.22) в случае, когда подынтегральная функция в (2.24) имеет полюс третьего порядка.

Теорема 2.21. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda = \frac{(\mu-1)^2}{4}$ *и пусть существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}(-1-2\alpha+\mu) = 1-\alpha+n_0$, *где* s_1 *— корень многочлена* (2.6), $\mathrm{Re}(1-\alpha+n_0) < 1$. *Тогда уравнение* (2.22) *имеет* $n+2$ *линейно независимых решений:* $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j = \overline{1,n}$. *Общее решение уравнения* (2.22) *имеет вид:* $y(x) = C_1 x^{\alpha-n_0-1}\ln x + C_2 x^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x + \sum\limits_{j=1}^{n} C_{j+2}\, x^{\alpha-j}$, *где* C_j, $j = \overline{1, n+2}$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Используя формулу (2.17) с $\beta = \alpha - j + 1, \; j = \overline{1,n}$ и свойство гамма–функции (2.18) непосредственно проверяется, что $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}, \; j = \overline{1,n}$ являются решениями уравнения (2.22). Докажем, что функции $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x$ также являются решениями уравнения (2.22). Подставляя $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$ в левую часть уравнения (2.22) и используя формулу (2.20) с $\beta = \alpha - n_0$, имеем:

$$x^{\alpha+2}\,\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2} y_1\big)(x) + \mu x^{\alpha+1}\,\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1} y_1\big)(x) + \lambda x^{\alpha}\,\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} y_1\big)(x) =$$

$$= \Gamma(\alpha - n_0) x^{\alpha-n_0-1}(-1)^{n_0} n_0! \Big[(n_0+1)(n_0+2) - \mu(n_0+1) + \lambda\Big] =$$

$$= (-1)^{n_0} n_0! x^{\alpha-n_0-1} \Gamma(\alpha-n_0) \mathrm{P}_\alpha(1-\alpha+n_0) = 0,$$

в силу (2.21). Докажем теперь, что $y_2(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x$ также является решением уравнения (2.22). Подставляя $y_2(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x$ в левую часть уравнения (2.22), используя формулу (2.26) при $j=2$ и $\beta = \alpha-n_0$ и учитывая свойство гамма–функции (2.18), имеем:

$$x^{\alpha+2}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2} y_2\right)(x) + \mu x^{\alpha+1}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1} y_2\right)(x) + \lambda x^\alpha\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} y_2\right)(x) = 0.$$

Докажем теперь, что решения $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $j=\overline{1,n}$ линейно независимы. Согласно лемме 2.10 и условиям теоремы 2.21:

$$\mathcal{W}_{\alpha+2}(1) = 2\cdot n_0!(n_0+1)!\left(\frac{1}{n_0(n_0+1)} - 2\right)\Gamma^2(\alpha-n_0)\prod_{l=1}^{n}\Gamma(\alpha-l+1) \neq 0.$$

Следовательно, решения $y_1(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{\alpha-n_0-1}\ln^2 x$, $y_{j+2}(x) = x^{\alpha-j}$, $\overline{1,n}$ линейно независимы. Таким образом, теорема 2.21 доказана.

Если $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$, то применяя преобразование Меллина к уравнению (2.22), получим решения, совпадающие с решениями из теоремы 2.21. Поэтому можно считать $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$ частным случаем теоремы 2.21 и из теоремы 2.21 получаем утверждение, дающее решение обыкновенного дифференциального уравнения Эйлера (2.25).

Теорема 2.22. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\lambda = \frac{(\mu-1)^2}{4}$ *и пусть существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 \leq m$ *такое, что* $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}(-1-2m+\mu) = 1-m+n_0$, *где* s_1 *— корень многочлена* (2.11). *Тогда уравнение* (2.25) *имеет* $m+2$ *линейно независимых решений:* $y_1(x) = x^{m-n_0-1}\ln x$, $y_2(x) = x^{m-n_0-1}\ln^2 x$, $y_{j+2}(x) = x^{m-j}$, $j = \overline{1,m}$. *Общее решение уравнения* (2.25) *имеет вид:* $y(x) = C_1 x^{m-n_0-1}\ln x + C_2 x^{m-n_0-1}\ln^2 x + \sum\limits_{j=1}^{m} C_{j+2} x^{m-j}$, *где* C_j, $j = \overline{1, m+2}$ *— произвольные постоянные.*

2.2. Применение метода эрмитовых форм к решению однородного дифференциального уравнения типа Эйлера на интервале $(0;1)$

2.2.1. Уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных Римана—Лиувилля $(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} y)$

На интервале $(0;1)$ рассмотрим однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера порядка $\alpha+m$:

$$A_m x^m\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m} y\right)(x) + A_{m-1} x^{m-1}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m-1} y\right)(x) + \ldots + A_0\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} y\right)(x) = 0, \qquad (2.27)$$

где $0 < \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$, коэффициенты $A_0, A_1, ..., A_m \in \mathbb{C}$, $\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+m}y\big)(x)$ — дробная производная Римана—Лиувилля, определяемая формулой (1.4) [59], [85], [102].

Решение $y(x)$ будем искать в классе $\mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;1)$. Обозначив $z = \mathcal{D}_{0+}^\alpha y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_m x^m z^{(m)}(x) + A_{m-1}x^{m-1}z^{(m-1)}(x) + ... + A_0 z(x) = 0. \tag{2.28}$$

Сделав замену $x = e^t$, $-\infty < t < 0$, приводим (2.28) к виду:

$$a_m \widetilde{z}^{(m)}(t) + a_{m-1}\widetilde{z}^{(m-1)}(t) + ... + a_0\widetilde{z}(t) = 0, \tag{2.29}$$

где $\widetilde{z}(t) = z(e^t)$ и коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_m$ выражаются через $A_0, A_1, ..., A_m$ [50], [53]. Уравнению (2.29) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$\mathrm{P}_m(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_1\lambda + a_0.$$

Пусть $\mathrm{P}_m(\lambda)$ не имеет кратных корней. Тогда каждому его корню λ соответствует решение уравнения (2.28) вида $z(x) = x^\lambda$. Учитывая $(\mathcal{D}_{0+}^\alpha y)(x) = x^\lambda$ и используя [59], [85], [102], получим решение исходного уравнения (2.27) в виде:

$$y(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}x^{\alpha+\lambda}.$$

Функция $y(x)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -1$, при этом $y(x) \in \mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$. Если $\operatorname{Re}\lambda \le -1$, то решению $z(x) = x^\lambda$ уравнения (2.28) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (2.27).

Справедлива следующая

Теорема 2.23. *Пусть характеристический многочлен* $\mathrm{P}_m(\lambda)$ *имеет* κ *простых корней* λ_j, $j = 1, ..., \kappa$ *в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > -1$. *Тогда общее решение уравнения* (2.27) *имеет вид:*

$$y(x) = c_0 x^{\alpha-1} + \sum_{j=1}^{\kappa} c_j \frac{\Gamma(\lambda_j+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_j+1)}x^{\alpha+\lambda_j},$$

где $c_0, c_1, ..., c_\kappa$ *— произвольные постоянные.*

Далее рассматривается общий случай, когда среди корней характеристического многочлена $\mathrm{P}_m(\lambda)$ имеются кратные.

Пусть λ — корень кратности k полинома $\mathrm{P}_m(\lambda)$. Тогда такому корню λ многочлена $\mathrm{P}_m(\lambda)$ соответствуют k решений $z_1(x) = x^\lambda$, $z_2(x) = x^\lambda \ln x$, ..., $z_k(x) = x^\lambda \ln^{k-1} x$ уравнения (2.28). Для решения уравнения (2.27) получим дифференциальные уравнения дробного порядка: $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y_1 = x^{\lambda}$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y_2 = x^{\lambda}\ln x$, ..., $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y_k = x^{\lambda}\ln^{k-1} x$.

Для $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y_1)(x) = x^{\lambda}$, используя [59], [85], [102], получим решение исходного уравнения (2.27) в виде:

$$y_1(x) = \mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y_1\right)(x) = \mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\left(t^{\lambda}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t^{\lambda}dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Сделав замену $t = x\tau$, после преобразований получим:

$$y_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{x^{\lambda+1}\tau^{\lambda}d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}x^{1-\alpha}} = \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau^{\lambda}(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(\lambda+1,\,\alpha) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}x^{\alpha+\lambda}.$$

При условии $\operatorname{Re}\lambda > -1$ функция $y_1(x) \in \mathcal{I}^{\alpha}\left(\mathcal{L}_1(0;1)\right)$. Если $\operatorname{Re}\lambda \le -1$, то решению $z_1(x) = x^{\lambda}$ уравнения (2.28) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (2.27) в искомом классе.

Решениям $z_2(x)$, ..., $z_k(x)$ соответствуют решения уравнения (2.27) вида:

$$y_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t^{\lambda}\ln t\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{x^{\alpha+\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\left(\psi(\lambda+1)-\psi(\alpha+\lambda+1)+\ln x\right),$$

$$y_3(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t^{\lambda}\ln^2 t\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{x^{\alpha+\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\times$$

$$\times\Big(\left(\psi(\lambda+1)-\psi(\alpha+\lambda+1)+\ln x\right)^2+\psi'(\lambda+1)-\psi'(\alpha+\lambda+1)\Big), \ldots$$

$$y_k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t^{\lambda}\ln^{k-1} t\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = x^{\alpha+\lambda}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\right)\ln^{k-i-1} x.$$

Здесь $\psi(x)$ — пси–функция Эйлера, $\operatorname{Re}\lambda > -1$, функции $y_2(x)$, ..., $y_k(x) \in \mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$. Если $\operatorname{Re}\lambda \le -1$, то решениям $z_k(x) = x^{\lambda}\ln^{k-1} x$ уравнения (2.28) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (2.27) в искомом классе.

Справедлива следующая

Теорема 2.24. *Пусть характеристический многочлен* $\mathrm{P}_m(\lambda)$ *имеет* κ_1 *простых корней* $\lambda_{j1},\, j = 1, ..., \kappa_1$, κ_2 *корней* $\lambda_{j2},\, j = 1, ..., \kappa_2$

кратности 2, ..., $\varkappa_l$ *корней* λ_{jl}, $j = 1, ..., \varkappa_l$ *кратности* l *в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, *причем* $\varkappa_1 + \varkappa_2 + ... + \varkappa_l = \varkappa$, $\varkappa \le m$. *Тогда общее решение уравнения* (2.27) *имеет вид:*

$$y(x) = c_0 x^{\alpha-1} + \sum_{j=1}^{\varkappa_1} c_{j1} \frac{\Gamma(\lambda_{j1}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{j1}+1)} x^{\alpha+\lambda_{j1}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\varkappa_2} c_{j2} \frac{\Gamma(\lambda_{j2}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{j2}+1)} x^{\alpha+\lambda_{j2}} (1+\psi(\lambda_{j2}+1)-\psi(\alpha+\lambda_{j2}+1)+\ln x)+ ...$$

$$... +\sum_{j=1}^{\varkappa_l} c_{jl} x^{\alpha+\lambda_{jl}} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{d^i}{d\lambda_{jl}^i} \left(\frac{\Gamma(\lambda_{jl}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{jl}+1)} \right) \ln^{k-i-1} x, \qquad (2.30)$$

где c_0, c_{ij} *— произвольные постоянные.*

Замечание 2.2. В выражении (2.30) для общего решения уравнения (2.27) под знаком суммы константы $c_{jl}\frac{\Gamma(\lambda_{jl}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{jl}+1)}$ можно было бы обозначить одной буквой. Приведенный вид формулы (2.30) выбран для того, чтобы показать явную зависимость линейно независимых решений от параметров α и λ.

Представляют интерес методы нахождения числа корней многочлена $\mathrm{P}_m(\lambda)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, не основанные на явном решении характеристического уравнения. Обозначим $Q_m(t)=\mathrm{P}_m(-it-1)$ и пусть $\overline{Q_m}(t)$ — многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены к коэффициентам $Q_m(t)$. Пусть НОД($Q_m(t), \overline{Q_m}(t)$)$= d_p(t)$ — многочлен степени $p \le m$. Без ограничения общности можно считать его старший коэффициент единичным. При $p = 0$ имеем $d_0(t) \equiv 1$.

Строим функцию:

$$h(Q_m; t, \tau) = -i \frac{Q_m(t)\overline{Q_m}(\tau) - Q_m(\tau)\overline{Q_m}(t)}{t-\tau} = \sum_{k,\,l=0}^{m-1} B_{kl} t^k \tau^l.$$

Этой функции ставим в соответствие эрмитову форму:

$$\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1}) = \sum_{k,\,l=0}^{m-1} B_{kl} t_k \overline{t_l}.$$

Из теоремы Эрмита [47], [87] вытекает

Теорема 2.25. *Пусть* r *и* s *— ранг и сигнатура эрмитовой формы* $\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$. *Тогда уравнение* (2.27) *имеет* $(r+s)/2+1$ *линейно независимое решение. Если эрмитова форма* $\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$ *определена положительно, то уравнение* (2.27) *имеет* $(m+1)$

линейно независимое решение. Если эрмитова форма $\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$ определена отрицательно, то уравнение (2.27) *имеет одно линейно независимое решение $y(x){=}c_0\,x^{\alpha-1}$, где c_0 — произвольная постоянная.*

Пусть $0 < p \leq m$. Если многочлен $d_p(t)$ не имеет вещественных корней, то p обязательно четное и корни многочлена $d_p(t)$ образуют пары комплексно сопряженных чисел. Решениям уравнения (2.27) соответствуют корни, лежащие в верхней полуплоскости. Их будет ровно $p/2$. Если многочлен $d_p(t)$ имеет w действительных корней, то в верхней полуплоскости будет ровно $(p-w)/2$ корней.

В этих случаях вместо теоремы 2.25 имеет место

Теорема 2.26. *Пусть r и s — ранг и сигнатура эрмитовой формы $\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$. Тогда уравнение* (2.27) *имеет $(r+s)/2+1+(p-w)/2$ линейно независимых решений.*

2.2.2. Неоднородное уравнение типа Эйлера на интервале $(0;1)$ с конечным числом дробных производных Римана—Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)$

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение порядка $\alpha+m$ на интервале $(0;1)$:

$$A_m x^m \big(\mathcal{D}^{\alpha+m}_{0+}y\big)(x) + A_{m-1}x^{m-1}\big(\mathcal{D}^{\alpha+m-1}_{0+}y\big)(x) + ... + A_0\big(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y\big)(x) = f(x), \quad (2.31)$$

где $0<\alpha<1$, $m\in\mathbb{N}$, коэффициенты $A_0, A_1, ..., A_m \in\mathbb{C}$, $\big(\mathcal{D}^{\alpha+m}_{0+}y\big)(x)$ — левосторонняя дробная производная Римана—Лиувилля, определяемая формулой (1.4) [59], [85], [102]. Применяя те же замены, что и в п. 2.1.1, получим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$a_m\tilde{z}^{(m)}(t) + a_{m-1}\tilde{z}^{(m-1)}(t) + ... + a_0\tilde{z}(t) = f(t). \quad (2.32)$$

Известно [2], [5], [50], [53], что частное решение неоднородного уравнения (2.32) удается явно построить только в некоторых частных случаях, когда правая часть есть линейная комбинация многочленов, экспонент и тригонометрических функций. Это же относится и к неоднородному дифференциальному уравнению типа Эйлера дробного порядка (2.31) с учетом соответствующих экспоненциальных замен. При этом общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Проиллюстрируем вышесказанное на следующем примере.

Пример 2.1. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение с тремя дробными производными Римана—Лиувилля на интервале (0;1):

$$x^2\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2}y\big)(x) - 7x\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1}y\big)(x) + 6(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y)(x) = (\ln x - 2)x, \tag{2.33}$$

где $0<\alpha<1$. Решение $y(x)$ будем искать в классе $\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;1)$. Обозначив $z = \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y$, с помощью замены $x = e^t$, $-\infty < t < 0$ приводим (2.33) к дифференциальному уравнению 2–го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\tilde{z}'' - 7\tilde{z}' + 6\tilde{z} = (t-2)e^t, \tag{2.34}$$

где $\tilde{z}(t) = z(e^t)$. Решая (2.34) известным способом [2], [5], [50], [53], найдем его общее решение

$$\tilde{z}(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^t + t\left(-\frac{1}{10}t + \frac{9}{25}\right)e^t,$$

откуда находим

$$z(x) = C_1 x^6 + C_2 x + x\ln x\left(-\frac{1}{10}\ln x + \frac{9}{25}\right).$$

Используя формулы

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{1-\alpha}} = [t = x\tau] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{x^2\tau d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}x^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(2,\alpha) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}x^{1+\alpha},$$

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}(x^6) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t^6dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = [t = x\tau] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{x^7\tau^6 d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}x^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{x^{6+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau^6(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{x^{6+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(7,\alpha) = \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7+\alpha)}x^{6+\alpha},$$

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}(x\ln x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t\ln tdt}{(x-t)^{1-\alpha}} = [t = x\tau] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{x^2\tau\ln(x\tau)d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}x^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{\tau(\ln x + \ln\tau)d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{x^{1+\alpha}\ln x}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau +$$

$$+\frac{x^{1+\alpha}\ln x}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{\alpha-1}\ln\tau d\tau = \frac{x^{1+\alpha}\ln x}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(2,\alpha) + \frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{ds}\mathrm{B}(s,\alpha)\Big|_{s=2} =$$

$$= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}x^{1+\alpha}\Big(\ln x + \psi(2) - \psi(2+\alpha)\Big),$$

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}(x\ln^2 x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t\ln^2 t dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = [t = x\tau] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{x^2\tau\ln^2(x\tau)d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}x^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{\tau(\ln x + \ln\tau)^2 d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{x^{1+\alpha}\ln^2 x}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau +$$

$$+\frac{2x^{1+\alpha}\ln x}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{\alpha-1}\ln\tau d\tau + \frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau(1-\tau)^{\alpha-1}\ln^2\tau d\tau =$$

$$= \frac{x^{1+\alpha}\ln^2 x}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(2,\alpha) + \frac{2x^{1+\alpha}\ln x}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{ds}\mathrm{B}(s,\alpha)\Big|_{s=2} + \frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^2}{ds^2}\mathrm{B}(s,\alpha)\Big|_{s=2} = \frac{\Gamma(2)x^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\times$$

$$\times\Big(\ln^2 x + 2\ln x\,(\psi(2)-\psi(2+\alpha)) + \Big(\big(\psi(2)-\psi(2+\alpha)\big)^2 + \psi'(2) - \psi'(2+\alpha)\Big)\Big),$$

получаем решение исходного дифференциального уравнения дробного порядка:

$$y(x) = C_1\frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7+\alpha)}x^{6+\alpha} + C_2\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}x^{1+\alpha} + \frac{9\Gamma(2)}{25\Gamma(2+\alpha)}x^{1+\alpha}\Big(\ln x + \psi(2) - \psi(2+\alpha)\Big) -$$

$$-\frac{\Gamma(2)x^{1+\alpha}}{10\Gamma(2+\alpha)}\Big(\ln^2 x + 2\ln x\big(\psi(2)-\psi(2+\alpha)\big) + \Big(\big(\psi(2)-\psi(2+\alpha)\big)^2 + \psi'(2) - \psi'(2+\alpha)\Big)\Big).$$

2.2.3. Уравнение типа Эйлера с двумя дробными производными Римана—Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)$

Рассмотрим частный случай уравнения (2.27) с двумя дробными производными:

$$A_1 x\,(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{0+}y)(x) + A_0\,(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)(x) = 0, \qquad (2.35)$$

где $A_0,\ A_1 \in \mathbb{C}$. Обозначив $z = \mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_1 x z'(x) + A_0 z(x) = 0. \qquad (2.36)$$

Сделав замену $x = e^t,\ -\infty < t < 0,$ приводим (2.36) к виду:

$$A_1 z'(t) + A_0 z(t) = 0. \qquad (2.37)$$

Уравнению (2.37) ставим в соответствие характеристический многочлен $\mathrm{P}_1(\lambda) = A_1\lambda + A_0$. Соответствующая эрмитова форма имеет вид $\mathcal{H}(Q_1; t_0) = E t_0 \overline{t_0}$, где $E = 2A_1\overline{A_1} - (A_1\overline{A_0} + A_0\overline{A_1}) \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.27. 1. *Пусть* $E > 0$. *Тогда уравнение* (2.35) *имеет два линейно независимых решения.*

2. *Пусть* $E \le 0$. *Тогда уравнение* (2.35) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x)=c_0\, x^{\alpha-1}$, *где* c_0 *— произвольная постоянная.*

В частном случае, когда $A_0,\ A_1 \in \mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид $\mathcal{H}(Q_1; t_0) = 2A_1(A_1 - A_0)t_0\overline{t_0}$ и картину разрешимости уравнения (2.35) в предположении, что $A_1 > 0$, определяет

Следствие 2.5. 1. *Пусть* $A_1 > 0,\ A_1 > A_0$. *Тогда уравнение* (2.35) *имеет два линейно независимых решения.*

2. *Пусть* $A_1 > 0,\ A_1 < A_0$. *Тогда уравнение* (2.35) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x) = c_0\, x^{\alpha-1}$, *где* c_0 *— произвольная постоянная.*

2.2.4. Уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Римана—Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)$

Рассмотрим частный случай уравнения (2.27) с тремя дробными производными:

$$A_2 x^2 \left(\mathcal{D}^{\alpha+2}_{0+}y\right)(x) + A_1 x \left(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{0+}y\right)(x) + A_0 \left(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y\right)(x) = 0, \qquad (2.38)$$

где $A_0,\ A_1,\ A_2 \in \mathbb{C}$. Обозначив $z = \mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_2\, x^2 z''(x) + A_1 x z'(x) + A_0 z(x) = 0. \qquad (2.39)$$

Сделав замену $x = e^t,\ -\infty < t < 0$, приводим (2.39) к виду:

$$A_2\, z''(t) + (A_1 - A_2) z'(t) + A_0 z(t) = 0. \qquad (2.40)$$

Уравнению (2.40) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$\mathrm{P}_2(\lambda) = A_2\lambda^2 + (A_1 - A_2)\lambda + A_0.$$

Соответствующая эрмитова форма имеет вид:

$$\mathcal{H}(Q_2; t_0, t_1) = A t_1\overline{t_1} + B t_1\overline{t_0} + B t_0\overline{t_1} + C t_0\overline{t_0},$$

где

$$A = A_2(3\overline{A_2} - \overline{A_1}) + \overline{A_2}(3A_2 - A_1),$$
$$B = i(A_2(2\overline{A_2} + \overline{A_0} - \overline{A_1}) - \overline{A_2}(2A_2 + A_0 - A_1)),$$
$$C = (3A_2 - A_1)(2\overline{A_2} + \overline{A_0} - \overline{A_1}) + (3\overline{A_2} - \overline{A_1})(2A_2 + A_0 - A_1).$$

Пусть НОД$(\,Q_2(t), \overline{Q_2}(t)\,) = d_2(t) \equiv 1$. Имеет место

Теорема 2.28. 1. *Пусть r и s — ранг и сигнатура эрмитовой формы $\mathcal{H}(Q_2; t_0, t_1)$. Тогда уравнение (2.38) имеет $(r+s)/2+1$ линейно независимое решение.*

2. *Пусть $A > 0$, $AC - B^2 > 0$. Тогда уравнение (2.38) имеет три линейно независимых решения.*

3. *Пусть $A < 0$, $AC - B^2 > 0$. Тогда уравнение (2.38) имеет одно линейно независимое решение $y(x) = c_0\, x^{\alpha-1}$, где c_0 — произвольная постоянная.*

4. *Пусть $AC - B^2 < 0$. Тогда уравнение (2.38) имеет два линейно независимых решения.*

5. *Пусть $AC - B^2 = 0$. Тогда уравнение (2.38) при $s = 1$ имеет два линейно независимых решения, а при $s = -1$ одно линейно независимое решение $y(x) = c_0\, x^{\alpha-1}$, где c_0 — произвольная постоянная.*

Если $d_2(t) \neq 1$, то $d_2(t) \equiv Q_2(t) \equiv \overline{Q_2}(t)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Пусть D — дискриминант многочлена $Q_2(t)$. Если D < 0, то $Q_2(t)$ имеет 2 комплексно сопряженных корня. Искомому решению соответствует корень в верхней полуплоскости. Уравнение (2.38) будет иметь 2 линейно независимых решений с учетом решения $y(x) = c_0\, x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная константа. Если D ≥ 0, то $Q_2(t)$ имеет 2 действительных корня (с учетом кратности). В этом случае уравнение (2.38) имеет 1 линейно независимое решение $y(x) = c_0\, x^{\alpha-1}$.

В частном случае, когда $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид $\mathcal{H}(Q_2; t_0, t_1) = \gamma t_1 \overline{t_1} + \beta t_0 \overline{t_0}$, где $\gamma = 2A_2(3A_2 - A_1)$, $\beta = 2(3A_2 - A_1)(2A_2 + A_0 - A_1)$ и картину разрешимости уравнения (2.38) в предположении, что $A_2 > 0$ для $d_2(t) \equiv 1$ определяет

Следствие 2.6. 1. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 > A_1, \\ 2A_2 + A_0 > A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (2.38) *имеет три линейно независимых решения.*

2. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 > A_1, \\ 2A_2 + A_0 < A_1, \end{cases}$ *или* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 < A_1, \\ 2A_2 + A_0 < A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (2.38) *имеет два линейно независимых решения.*

3. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 < A_1, \\ 2A_2 + A_0 > A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (2.38) *имеет одно линейно независимое решение $y(x) = c_0\, x^{\alpha-1}$, где c_0 — произвольная постоянная.*

Пусть $d_2(t) \neq 1$. Тогда $d_2(t)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Если w — число вещественных корней многочлена $d_2(t)$, то либо $w = 0$, либо $w = 2$. Тогда вместо теоремы 2.28 верна

Теорема 2.29. *Уравнение* (2.38) *имеет* $(2 - w)/2 + 1$ *линейно независимых решений.*

2.3. Применение метода эрмитовых форм к решению однородного дифференциального уравнения типа Эйлера на полуоси $(1;+\infty)$

2.3.1. Уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y)$

На полуоси $(1;+\infty)$ рассмотрим однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера порядка $\alpha+m$:

$$A_m x^m \left(\mathcal{D}^{\alpha+m}_{1+}y\right)(x) + A_{m-1}x^{m-1}\left(\mathcal{D}^{\alpha+m-1}_{1+}y\right)(x) + \ldots + A_0\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y\right)(x) = 0, \quad (2.41)$$

где $0 < \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$, коэффициенты $A_0, A_1, ..., A_m \in \mathbb{C}$, $\left(\mathcal{D}^{\alpha+m}_{1+}y\right)(x)$ — дробная производная Римана—Лиувилля, определяемая формулой (1.4) [59], [85], [102].

Решение $y(x)$ будем искать в классе $\mathcal{I}^{\alpha}\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(1;+\infty)$. Обозначив $z = \mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_m x^m z^{(m)}(x) + A_{m-1}x^{m-1}z^{(m-1)}(x) + ... + A_0 z(x) = 0. \quad (2.42)$$

Сделав замену $x = e^t$, $0 < t < +\infty$, приводим (2.42) к виду:

$$a_m \widetilde{z}^{(m)}(t) + a_{m-1}\widetilde{z}^{(m-1)}(t) + ... + a_0\widetilde{z}(t) = 0, \quad (2.43)$$

где $\widetilde{z}(t) = z(e^t)$ и коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_m$ выражаются через $A_0, A_1, ..., A_m$ [50], [53]. Уравнению (2.43) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$\mathrm{P}_m(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_1\lambda + a_0.$$

Пусть $\mathrm{P}_m(\lambda)$ не имеет кратных корней. Тогда каждому его корню λ соответствует решение уравнения (2.42) вида $z(x) = x^{\lambda}$. Учитывая $(\mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y)(x) = x^{\lambda}$ и используя [59], [85], [102], получим решение исходного уравнения (2.41) в виде:

$$y(x) = \frac{(-1)^{\alpha}(1-x)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\ {}_2\mathrm{F}_1\left[\begin{matrix}1, & -\lambda\\ 1+\alpha & \end{matrix}\middle| 1-x\right],$$

где ${}_2\mathrm{F}_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Функция $y(x)$ определена в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < -1$, при этом $y(x) \in \mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$. Если $\mathrm{Re}\,\lambda \geq -1$, то решению $z(x) = x^\lambda$ уравнения (2.42) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (2.41) в искомом классе.

Справедлива следующая

Теорема 2.30. *Пусть характеристический многочлен* $\mathrm{P}_m(\lambda)$ *имеет* κ *простых корней* λ_j, $j = 1, ..., \kappa$ *в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda < -1$. *Тогда общее решение уравнения* (2.41) *имеет вид:*

$$y(x) = c_0(x-1)^{\alpha-1} + \sum_{j=1}^{\kappa} c_j \frac{\Gamma(\lambda_j+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_j+1)} x^{\alpha+\lambda_j},$$

где c_0, c_1, ..., c_κ *— произвольные постоянные.*

Далее рассматривается общий случай, когда среди корней характеристического многочлена $\mathrm{P}_m(\lambda)$ имеются кратные. Пусть λ — корень кратности k полинома $\mathrm{P}_m(\lambda)$. Тогда такому корню λ многочлена $\mathrm{P}_m(\lambda)$ соответствуют k решений $z_1(x) = x^\lambda$, $z_2(x) = x^\lambda \ln x$, ..., $z_k(x) = x^\lambda \ln^{k-1} x$ уравнения (2.42). Для решения уравнения (2.41) получим дифференциальные уравнения дробного порядка: $\mathcal{D}^\alpha_{1+} y_1 = x^\lambda$, $\mathcal{D}^\alpha_{1+} y_2 = x^\lambda \ln x$, ..., $\mathcal{D}^\alpha_{1+} y_k = x^\lambda \ln^{k-1} x$.

Для $(\mathcal{D}^\alpha_{1+} y_1)(x) = x^\lambda$, используя [59], [85], [102], получим решение исходного уравнения (2.41) в виде:

$$y_1(x) = \mathcal{I}^\alpha_{1+}\,(\mathcal{D}^\alpha_{1+} y_1)(x) = \mathcal{I}^\alpha_{1+}\left(t^\lambda\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_1^x \frac{t^\lambda dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Сделав замену $t = 1 + \tau(x-1)$, после преобразований получим:

$$y_1(x) = \left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} - \frac{\mathrm{B}_{\frac{1}{x}}(\lambda+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right) x^{\alpha+\lambda} = \frac{(-1)^\alpha (1-x)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\, {}_2\mathrm{F}_1\left[\begin{matrix}1, \ -\lambda\\ 1+\alpha\end{matrix}\middle| 1-x\right],$$

где $\mathrm{B}_{\frac{1}{x}}(\lambda+1,\alpha)$ — неполная бета–функция, определяемая формулой (1.18).

При условии $\mathrm{Re}\,\lambda < -1$ функция $y_1(x) \in \mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$. Если $\mathrm{Re}\,\lambda \geq -1$, то решению $z_1(x) = x^\lambda$ уравнения (2.42) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (2.41) в искомом классе.

Решениям $z_2(x)$, ..., $z_k(x)$ соответствуют решения уравнения (2.41) вида:

$$y_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_1^x \frac{t^\lambda \ln t\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = x^{\alpha+\lambda} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} \Big(\psi(\lambda+1) - \psi(\alpha+\lambda+1) + \ln x\Big) +$$

$$+\frac{x^{\alpha-1}}{(1+\lambda)^2\Gamma(\alpha)}\ {}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1-\alpha\\ 2+\lambda,\ 2+\lambda\end{matrix}\ \Big|\ \frac{1}{x}\right],\ y_3(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_1^x\frac{t^\lambda\ln^2 t dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{x^{\alpha+\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\Big(\big(\psi(\lambda+1)-\psi(\alpha+\lambda+1)+\ln x\big)^2+\psi'(\lambda+1)-\psi'(\alpha+\lambda+1)\Big)-$$

$$-\frac{2x^{\alpha-1}}{(1+\lambda)^3\Gamma(\alpha)}\ {}_4\mathrm{F}_3\left[\begin{matrix}1+\lambda,1+\lambda,1+\lambda,1-\alpha\\ 2+\lambda,2+\lambda,2+\lambda\end{matrix}\Big|\frac{1}{x}\right],\ldots,\ y_k(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_1^x\frac{t^\lambda\ln^{k-1} t dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$

$$=x^{\alpha+\lambda}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\right)\ln^{k-i-1}x+$$

$$+\frac{(-1)^k(k-1)!x^{\alpha-1}}{(1+\lambda)^k\Gamma(\alpha)}\ {}_{k+1}\mathrm{F}_k\left[\begin{matrix}1+\lambda,\ 1+\lambda,\ \ldots,\ 1+\lambda,\ 1-\alpha\\ 2+\lambda,\ 2+\lambda,\ \ldots,\ 2+\lambda\end{matrix}\Big|\frac{1}{x}\right].$$

Здесь $\psi(x)$ — пси–функция Эйлера, $\operatorname{Re}\lambda<-1$, функции $y_2(x)$, ..., $y_k(x)\in\mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$. Если $\operatorname{Re}\lambda\geq-1$, то решениям $z_k(x)=x^\lambda\ln^{k-1}x$ уравнения (2.42) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (2.41) в искомом классе.

Справедлива следующая [6], [47], [54], [75], [76], [87]

Теорема 2.31. *Пусть характеристический многочлен* $\mathrm{P}_m(\lambda)$ *имеет* κ_1 *простых корней* $\lambda_{j1}, j=1,\ldots,\kappa_1$, κ_2 *корней* $\lambda_{j2}, j=1,\ldots,\kappa_2$ *кратности* 2, ..., κ_l *корней* λ_{jl}, $j=1,\ldots,\kappa_l$ *кратности* l *в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda<-1$, *причем* $\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_l=\kappa$, $\kappa\leq m$. *Тогда общее решение уравнения* (2.41) *имеет вид:*

$$y(x)=c_0(x-1)^{\alpha-1}+\sum_{j=1}^{\kappa_1}c_{j1}\left(\frac{\Gamma(\lambda_{j1}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{j1}+1)}-\frac{\mathrm{B}_{\frac{1}{x}}(\lambda_{j1}+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)x^{\alpha+\lambda_{j1}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\kappa_2}c_{j2}\frac{\Gamma(\lambda_{j2}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{j2}+1)}x^{\alpha+\lambda_{j2}}\big(1+\psi(\lambda_{j2}+1)-\psi(\alpha+\lambda_{j2}+1)+\ln x\big)-$$

$$-\frac{\mathrm{B}_{\frac{1}{x}}(\lambda_{j2}+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\lambda_{j2}}+\frac{x^{\alpha-1}}{(\lambda_{j2}+1)^2\Gamma(\alpha)}\ {}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}\lambda_{j2}+1,\lambda_{j2}+1,1-\alpha\\ \lambda_{j2}+2,\lambda_{j2}+2\end{matrix}\Big|\frac{1}{x}\right]+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{\kappa_l}c_{jl}\sum_{k=1}^{l}\left(x^{\alpha+\lambda_{jl}}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda_{jl}^i}\left(\frac{\Gamma(\lambda_{jl}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{jl}+1)}\right)\ln^{k-i-1}x+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^k(k-1)!}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{(\lambda_{jl}+1)^k}\ {}_{k+1}\mathrm{F}_k\left[\begin{matrix}\lambda_{jl}+1,\ \lambda_{jl}+1,\ \ldots,\ \lambda_{jl}+1,\ 1-\alpha\\ \lambda_{jl}+2,\ \lambda_{jl}+2,\ \ldots,\ \lambda_{jl}+2\end{matrix}\Big|\frac{1}{x}\right]\right),$$

где $\mathrm{B}_{\frac{1}{x}}(\lambda_{jl}+1,\alpha)$ — *неполная бета–функция* (1.18), c_0, c_{ij} — *произвольные постоянные.*

Применим к исследованию уравнения (2.41) метод эрмитовых форм (метод Льенара—Шипара). Обозначим $Q_m(t) = \mathrm{P}_m(-it-1)$ и пусть $\overline{Q_m}(t)$ — многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены к коэффициентам $Q_m(t)$. В отличие от случая уравнения на интервале $(0;1)$, для уравнения на полуоси $(1;+\infty)$ подходят решения, соответствующие корням многочлена $Q_m(t)$, лежащим в нижней полуплоскости.

Пусть НОД$(Q_m(t), \overline{Q_m}(t)) = d_p(t)$ — многочлен степени $p \leq m$. При $p = 0$ имеем $d_0(t) \equiv 1$. Из теоремы Эрмита [47], [87] вытекает:

Теорема 2.32. *Пусть r и s — ранг и сигнатура эрмитовой формы $\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$. Тогда уравнение (2.41) имеет $(r-s)/2+1$ линейно независимое решение. Если эрмитова форма $\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$ определена отрицательно, то уравнение (2.41) имеет $(m+1)$ линейно независимых решений. Если эрмитова форма $\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$ определена положительно, то уравнение (2.41) имеет одно линейно независимое решение $y(x) = c_0(x-1)^{\alpha-1}$, где c_0 — произвольная постоянная.*

Пусть $0 < p \leq m$. Если многочлен $d_p(t)$ не имеет вещественных корней, то p обязательно четное и корни многочлена $d_p(t)$ образуют пары комплексно сопряженных чисел. Решениям уравнения (2.41) соответствуют корни, лежащие в нижней полуплоскости. Их будет ровно $p/2$. Если многочлен $d_p(t)$ имеет w действительных корней, то в нижней полуплоскости будет ровно $(p-w)/2$ корней.

В этих случаях вместо теоремы 2.32 имеет место

Теорема 2.33. *Пусть r и s — ранг и сигнатура эрмитовой формы $\mathcal{H}(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$. Тогда уравнение (2.41) имеет $(r-s)/2+1+(p-w)/2$ линейно независимых решений.*

2.3.2. Уравнение типа Эйлера с двумя дробными производными Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y)$

Рассмотрим частный случай уравнения (2.41) с двумя дробными производными:

$$A_1 x \left(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{1+}y\right)(x) + A_0 \left(\mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y\right)(x) = 0, \tag{2.44}$$

где $A_0,\ A_1 \in \mathbb{C}$. Обозначив $z = \mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_1 x z'(x) + A_0 z(x) = 0. \tag{2.45}$$

Сделав замену $x = e^t,\ 0 < t < +\infty$, приводим (2.45) к виду:

$$A_1 z'(t) + A_0 z(t) = 0. \tag{2.46}$$

Уравнению (2.46) ставим в соответствие характеристический многочлен $\mathrm{P}_1(\lambda) = A_1\lambda + A_0$. Соответствующая эрмитова форма имеет вид $\mathcal{H}(Q_1; t_0) = Et_0\overline{t_0}$, где $E = 2A_1\overline{A_1} - (A_1\overline{A_0} + A_0\overline{A_1}) \in \mathbb{R}$.

Имеет место

Теорема 2.34. 1. *Пусть* $E < 0$. *Тогда уравнение* (2.44) *имеет два линейно независимых решения.*

2. *Пусть* $E \geq 0$. *Тогда уравнение* (2.44) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x) = c_0(x-1)^{\alpha-1}$, *где* c_0 — *произвольная постоянная.*

В частном случае, когда $A_0,\ A_1 \in \mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид $\mathcal{H}(Q_1; t_0) = 2A_1(A_1 - A_0)t_0\overline{t_0}$ и картину разрешимости уравнения (2.44) в предположении, что $A_1 > 0$, определяет

Следствие 2.7. 1. *Пусть* $A_1 > 0,\ A_1 < A_0$. *Тогда уравнение* (2.44) *имеет два линейно независимых решения.*

2. *Пусть* $A_1 > 0, A_1 > A_0$. *Тогда уравнение* (2.44) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x)=c_0\,(x-1)^{\alpha-1}$, *где* c_0 — *произвольная постоянная.*

2.3.3. Уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y)$

Рассмотрим частный случай уравнения (2.41) с тремя дробными производными:

$$A_2x^2\left(\mathcal{D}^{\alpha+2}_{1+}y\right)(x) + A_1x\left(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{1+}y\right)(x) + A_0\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y\right)(x) = 0, \tag{2.47}$$

где $A_0,\ A_1,\ A_2 \in \mathbb{C}$. Обозначив $z = \mathcal{D}^{\alpha}_{1+}y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_2x^2z''(x) + A_1xz'(x) + A_0z(x) = 0. \tag{2.48}$$

Сделав замену $x = e^t,\ 0 < t < +\infty$, приводим (2.48) к виду:

$$A_2z''(t) + (A_1 - A_2)z'(t) + A_0z(t) = 0. \tag{2.49}$$

Уравнению (2.49) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$\mathrm{P}_2(\lambda) = A_2\lambda^2 + (A_1 - A_2)\lambda + A_0.$$

Соответствующая эрмитова форма имеет вид:

$$\mathcal{H}(Q_2; t_0, t_1) = At_1\overline{t_1} + Bt_1\overline{t_0} + Bt_0\overline{t_1} + Ct_0\overline{t_0},$$

где

$$A = A_2(3\overline{A_2} - \overline{A_1}) + \overline{A_2}(3A_2 - A_1),$$

$$B = i(A_2(2\overline{A_2} + \overline{A_0} - \overline{A_1}) - \overline{A_2}(2A_2 + A_0 - A_1)),$$

$$C = (3A_2 - A_1)(2\overline{A_2} + \overline{A_0} - \overline{A_1}) + (3\overline{A_2} - \overline{A_1})(2A_2 + A_0 - A_1).$$

Пусть НОД$(Q_2(t), \overline{Q_2}(t)) = d_2(t) \equiv 1$. Имеет место

Теорема 2.35. 1. *Пусть r и s — ранг и сигнатура эрмитовой формы $\mathcal{H}(Q_2; t_0, t_1)$. Тогда уравнение* (2.47) *имеет $(r-s)/2+1$ линейно независимое решение.*

2. *Пусть $A<0, AC-B^2>0$. Тогда уравнение* (2.47) *имеет три линейно независимых решения.*

3. *Пусть $A > 0, AC - B^2 > 0$. Тогда уравнение* (2.47) *имеет одно линейно независимое решение $y(x) = c_0(x-1)^{\alpha-1}$, где c_0 — произвольная постоянная.*

4. *Пусть $AC - B^2 < 0$. Тогда уравнение* (2.47) *имеет два линейно независимых решения.*

5. *Пусть $AC - B^2 = 0$. Тогда уравнение* (2.47) *при $s = -1$ имеет два линейно независимых решения, а при $s = 1$ одно линейно независимое решение $y(x) = c_0(x-1)^{\alpha-1}$, где c_0 — произвольная постоянная.*

Если $d_2(t) \neq 1$, то $d_2(t) \equiv Q_2(t) \equiv \overline{Q_2}(t)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Пусть D — дискриминант многочлена $Q_2(t)$. Если $D < 0$, то $Q_2(t)$ имеет 2 комплексно сопряженных корня. Искомому решению соответствует корень в нижней полуплоскости. Уравнение (2.47) будет иметь 2 линейно независимых решений с учетом решения $y(x) = c_0\,(x-1)^{\alpha-1}$, где c_0 — произвольная константа. Если $D \geq 0$, то $Q_2(t)$ имеет 2 действительных корня (с учетом кратности). В этом случае уравнение (2.47) имеет 1 линейно независимое решение $y(x) = c_0\,(x-1)^{\alpha-1}$.

В частном случае, когда $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид $\mathcal{H}(Q_2; t_0, t_1) = \gamma t_1\overline{t_1} + \beta t_0\overline{t_0}$, где $\gamma = 2A_2(3A_2 - A_1)$, $\beta = 2(3A_2 - A_1)(2A_2 + A_0 - A_1)$ и картину разрешимости уравнения (2.47) в предположении, что $A_2 > 0$ для $d_2(t) \equiv 1$ определяет

Следствие 2.8. 1. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 < A_1, \\ 2A_2 + A_0 > A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (2.47) *имеет три линейно независимых решения.*

2. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 > A_1, \\ 2A_2 + A_0 < A_1, \end{cases}$ *или* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 < A_1, \\ 2A_2 + A_0 < A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (2.47) *имеет два линейно независимых решения.*

3. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 > A_1, \\ 2A_2 + A_0 > A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (2.47) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x)=c_0(x-1)^{\alpha-1}$, *где* c_0 *— произвольная постоянная.*

Пусть $d_2(t) \neq 1$. Тогда $d_2(t)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Если w — число вещественных корней многочлена $d_2(t)$, то либо $w = 0$, либо $w = 2$. Тогда вместо теоремы 2.35 верна

Теорема 2.36. *Уравнение* (2.47) *имеет* $(2 - w)/2 + 1$ *линейно независимых решений.*

Краткие выводы по главе. В главе 2 введено понятие обобщенного аналога Вронскиана, рассмотрены его свойства. С помощью интегрального преобразования Меллина построена фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера с двумя, тремя и любым конечным числом дробных производных Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$. Дано решение однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на интервале $(0;1)$ в классе $\mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ функций, представимых дробным интегралом Римана—Лиувилля порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;1)$ и на полуоси $(1;+\infty)$ в классе $\mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом Лиувилля порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(1;+\infty)$. С помощью метода эрмитовых форм (метода Льенара—Шипара) получены условия разрешимости в классах $\mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(0;1)\big)$ и $\mathcal{I}^\alpha\big(\mathcal{L}_1(1;+\infty)\big)$ для случаев двух, трех и любого конечного числа производных. Показано, что в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, исходное уравнение допускает решение с логарифмическими особенностями. Результаты главы опубликованы в работах [13], [16]–[26], [28], [29], [34], [36], [112], [113].

ГЛАВА 3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА В ТЕРМИНАХ ДРОБНОГО АНАЛОГА ФУНКЦИИ ГРИНА

Глава 3 посвящена построению частных решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с левосторонними дробными производными Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$. С помощью применения интегрального преобразования Меллина и теории вычетов в 3 главе получено представление в виде свертки правой части с дробным аналогом Меллина функции Грина, выраженного через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_p\mathrm{F}_q$, обобщенную функцию Райта ${}_p\Psi_q$ и пси–функцию Эйлера. Глава 3 обобщает результаты, полученные впервые в монографии [85] для неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с двумя дробными производными Лиувилля. Отметим, что автором диссертации было рассмотрено также дифференциальное уравнение типа Эйлера дробного порядка с тремя и любым конечным числом правосторонних дробных производных Лиувилля. Данный результат в тексте диссертации не приводится, однако с ним можно ознакомиться в работах автора [12], [14], [110]. Также в 3 главе сформулированы и доказаны теоремы разрешимости неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с двумя, тремя и любым конечным числом левосторонних дробных производных Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ в классе $\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\big(\mathcal{L}_1(0;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;+\infty)$ в терминах дробного аналога функции Грина.

3.1. Общая схема применения интегрального преобразования Меллина для решения неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$

Дробный аналог Меллина функции Грина. Функция Грина для неоднородного дифференциального уравнения Эйлера $\sum\limits_{k=0}^{m} A_k x^{n+k} y^{(n+k)}(x) = f(x)$ — функция, которая определяет решение данного уравнения по формуле свертки Меллина $y(x) = \int\limits_0^{\infty} G(t) f(xt)dt$.

В случае неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом дробных производных

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{\alpha+k} \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+k} y\big)(x) = f(x) \tag{3.1}$$

дробный аналог Меллина функции Грина G_α определяет решение уравнения (3.1) по формуле $y(x) = \int\limits_0^\infty G_\alpha(t) f(xt) dt$.

Приведем некоторые *свойства* дробного аналога Меллина функции Грина.

$$1) \left(\mathcal{M} \int\limits_0^\infty G_\alpha \left(\frac{x}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t}\right)(s) = \Big(\mathcal{M} G_\alpha\Big)(s) \cdot \Big(\mathcal{M} f\Big)(s),$$

$$2) \left(\mathcal{M} \int\limits_0^\infty G_\alpha(t) f(xt) dt\right)(s) = \Big(\mathcal{M} G_\alpha\Big)(1-s) \cdot \Big(\mathcal{M} f\Big)(s).$$

Применим прямое (1.27) и обратное (1.28) интегральное преобразование Меллина для нахождения частных решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом дробных производных Лиувилля вида (3.1), где $x > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $A_m \neq 0$ с $\alpha > 0$ и действительными постоянными A_0, ..., $A_m \in \mathbb{R}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$ [85]. Здесь $(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} y)(x)$ — левосторонняя дробная производная Лиувилля (1.8) порядка $\alpha > 0$.

Исследование, проведенное в диссертации, основано на результатах из [85], где приводится общая схема применения интегрального преобразования Меллина (1.27) и (1.28). Оно привело к решению уравнения (3.1) с $A_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, m}$. В частности, было доказано, что решение уравнения

$$x^{\alpha+1} \big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1} y\big)(x) + \lambda x^{\alpha} (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} y)(x) = f(x) \tag{3.2}$$

с $\lambda \in \mathbb{R}$ выражено в терминах обобщенной функции Райта ${}_1\Psi_2[z]$ и пси–функции Эйлера $\psi(z)$ [85].

Заметим, что И. Подлюбный [100] доказал, что преобразование Меллина (1.27) может применяться для получения решения задачи Коши для уравнения (3.2) при $\lambda = 1$ и $0 < \alpha < 1$.

Решаем уравнение (3.1) методом прямого (1.27) и обратного (1.28) преобразований Меллина. Этот метод, примененный в [85] для уравнения (3.1) с двумя дробными производными Лиувилля, основан на соотношении:

$$\Big(\mathcal{M}x^{\alpha+j}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+j}y\big)\Big)(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-j)}\big(\mathcal{M}y\big)(s)\,,\quad j=\overline{0,m}. \tag{3.3}$$

Применяя прямое преобразование Меллина (1.27) к обеим частям (3.1), учитывая (3.3) и (2.2), получим:

$$\Bigg(\sum_{k=0}^{m}A_k\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)}\Bigg)\big(\mathcal{M}y\big)(s)=\big(\mathcal{M}f\big)(s)\,.$$

Далее, применяя обратное преобразование Меллина (1.28) к полученному соотношению и используя равенство $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}f = f$, получим решение уравнения (3.1) в виде:

$$y(x)=\Bigg(\mathcal{M}^{-1}\Big[\frac{1}{\mathrm{P}_\alpha(1-s)}\big(\mathcal{M}f\big)(s)\Big]\Bigg)(x)\,, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{P}_\alpha(s)=\sum_{j=0}^{m}A_j\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha-j)}=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}\mathrm{P}_m(s),$$

где $\mathrm{P}_m(s)$ задается (2.6). Введя функцию

$$G_\alpha(x)=\Bigg(\mathcal{M}^{-1}\Big[\frac{1}{\mathrm{P}_\alpha(1-s)}\Big]\Bigg)(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i A_m}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)...(s-s_m)}x^{-s}ds,\quad \gamma=\operatorname{Re}s, \tag{3.5}$$

называемую *дробным аналогом Меллина функции Грина*, и учитывая 2) свойство свертки преобразования Меллина, представим решение (3.4) уравнения (3.1) в виде: $y(x)=\int\limits_0^\infty G_\alpha(t)f(xt)dt=\int\limits_0^\infty G_\alpha\big(\frac{t}{x}\big)f(t)\frac{dt}{x}$. Поскольку $G_\alpha(t)=0$ при $t>1$, то окончательно будем иметь:

$$y(x)=\int\limits_0^1 G_\alpha(t)f(xt)dt=\int\limits_0^x G_\alpha\Big(\frac{t}{x}\Big)f(t)\frac{dt}{x}. \tag{3.6}$$

Итак, решение уравнения (3.1) задается (3.6) в предположении, что интегралы в правой части (3.6) сходятся.

3.2. Представление дробного аналога функции Грина

3.2.1. Решение уравнения типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$ с конечным числом дробных производных Лиувилля $(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y)$. Часть 1.

Вычислим интеграл Меллина—Барнса в правой части (3.5), используя теорию вычетов. Известно, что функция $\Gamma(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением простых полюсов $s=-n,\ \ n\in\mathbb{N}$ с вычетом $\frac{(-1)^n}{n!}$, что означает:

$$\Gamma(s-\alpha)\sim\frac{(-1)^n}{n!(s-\alpha+n)},\quad s\to\alpha-n,\ \ n\in\mathbb{N}_0.$$

Поэтому подынтегральная функция в правой части (3.5):

$$g(s)=\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)...(s-s_m)}x^{-s}$$

при любом фиксированном $x\neq 0$ есть аналитическая функция от s за исключением полюсов $s=s_1,\ s=s_2,\ ...,\ s=s_m$ и $s=\alpha-n,\ n\in\mathbb{N}_0$. Следовательно, $G_\alpha(x)A_m$ равна сумме вычетов функции $g(s)$ относительно всех ее особых точек. В зависимости от того, какие из полюсов различны или не совпадают, $G_\alpha(x)$ в (3.5) будет иметь различные значения. Непосредственно доказывается, что во всех этих случаях $G_\alpha(x)$ выражается в терминах обобщенной функции Райта ${}_p\Psi_q[z]$ и обобщенной гипергеометрической функции ${}_p\mathrm{F}_q[z]$, определяемых при $a_i,b_j\in\mathbb{C}$ и $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ соответственно степенными рядами (1.22) и (1.21).

Далее дадим выражения для $G_\alpha(x)$ в (3.5) при следующих соотношениях между полюсами:

Случай 1. $s_i\neq s_j$, $i,j=\overline{1,m}$, $i\neq j$, $s_i\neq\alpha-k$, $i=\overline{1,m}$ ни при каком $k\in\mathbb{N}_0$.

Случай 2. $s_1=s_2=...=s_m\neq\alpha-k$ ни при каком $k\in\mathbb{N}_0$.

Случай 3. $\exists n_1,...,n_l\in\mathbb{N}_0$ такие, что $s_1=\alpha-n_1,...,s_l=\alpha-n_l$, $s_i\neq s_j$, $i,j=\overline{l+1,m}$, $i\neq j$, $s_i\neq\alpha-k$, $i=\overline{l+1,m}$.

Случай 4. $\exists n_0\in\mathbb{N}_0$ и l, $1<l<m$ такие, что $s_1=...=s_l=\alpha-n_0$, $s_1\neq s_j$, $j=\overline{l+1,m}$.

Случай 5. $\exists n_0\in\mathbb{N}_0$ такое, что $s_1=s_2=...=s_m=\alpha-n_0$.

В случаях 1)–2) выражения для $G_\alpha(x)$ будут получены в терминах обобщенной гипергеометрической функции (1.21), обобщенной функции Райта (1.22) и пси–функции Эйлера (1.19). В случаях 3)–5) выражения для $G_\alpha(x)$ будут получены в терминах обобщенной гипергеометрической функции (1.21) и пси–функции Эйлера (1.19). Ввиду громоздкости формул в случаях 3)–5) выражения для $G_\alpha(x)$ через обобщенную функцию Райта (1.22) не приводятся.

Следующая теорема дает выражение для $G_\alpha(x)$ в первом случае.

Теорема 3.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что* $s_i \neq s_j$, $i,j = \overline{1,m}$, $i \neq j$, $s_i \neq \alpha - k$, $i = \overline{1,m}$ *ни при каком* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда при* $0 < x \leq 1:$

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m}\, {}_m\Psi_{m+1}\left[\begin{matrix}(\alpha-s_1,-1),...,(\alpha-s_m,-1)\\(\alpha,-1),(\alpha-s_1+1,-1),...,(\alpha-s_m+1,-1)\end{matrix}\middle| -x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(s_i-\alpha)x^{-s_i}}{\Gamma(s_i)\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{m}(s_i-s_j)} = \frac{x^{-\alpha}}{A_m\Gamma(\alpha)\prod\limits_{j=1}^{m}(\alpha-s_j)}\times$$

$$\times\, {}_{m+1}\mathrm{F}_m\left[\begin{matrix}1-\alpha, s_1-\alpha, ..., s_m-\alpha\\ s_1-\alpha+1, ..., s_m-\alpha+1\end{matrix}\middle| x\right] + \frac{1}{A_m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(s_i-\alpha)x^{-s_i}}{\Gamma(s_i)\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{m}(s_i-s_j)}. \qquad (3.7)$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.1) *задается* (3.6) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.6) *сходятся.*

Второй случай характеризует следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что* $s_1 = s_2 = ... = s_m \neq \alpha - k$ *ни при каком* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда для* $0 < x \leq 1:$

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m}\, {}_m\Psi_{m+1}\left[\begin{matrix}(\alpha-s_1,-1),...,(\alpha-s_1,-1)\\(\alpha,-1),(\alpha-s_1+1,-1),...,(\alpha-s_1+1,-1)\end{matrix}\middle| -x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_m(m-1)!}\lim_{s\to s_1}\left(\frac{\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\Gamma(s)}\right)^{(m-1)} =$$

$$= \frac{x^{-\alpha}}{A_m\Gamma(\alpha)(\alpha-s_1)^m}\, {}_{m+1}\mathrm{F}_m\left[\begin{matrix}1-\alpha, s_1-\alpha, ..., s_1-\alpha\\ s_1-\alpha+1, ..., s_1-\alpha+1\end{matrix}\middle| x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_m(m-1)!}\lim_{s\to s_1}\left(\frac{\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\Gamma(s)}\right)^{(m-1)}. \qquad (3.8)$$

Если $m \geq 2$, *то для* $0 < x \leq 1:$

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m\Gamma(\alpha)(\alpha-s_1)^m}\, {}_{m+1}\mathrm{F}_m\left[\begin{matrix}1-\alpha,\ s_1-\alpha, ..., s_1-\alpha\\ s_1-\alpha+1, ..., s_1-\alpha+1\end{matrix}\middle| x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_m(m-1)!}\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m-2}{j}\lim_{s\to s_1}\Bigg(\Big(\frac{\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\Gamma(s)}\Big)^{(m-2-j)}\times$$

$\times\big[\psi(s-\alpha)-\psi(s)-\ln x\big]^{(j)}\Bigg)$, *где* $\binom{m}{j}$ — *биномиальный коэффициент, определяемый* (1.12). *Частное решение* $y(x)$ *уравнения* (3.1) *задается* (3.6) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.6) *сходятся.*

Следующие три утверждения дают выражения для $G_\alpha(x)$ в случаях 3)–5). При этом используем обозначения:

$$\sum_{k=0}^{-1}a_k=0,\quad a_0,\ a_{-1}\in\mathbb{C},\quad \prod_{j=l+1}^{m}a_j=1,\quad m<l+1,\ a_j\in\mathbb{C}.$$

Теорема 3.3. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $\alpha>0$, $A_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{0,m}$, $A_m\neq 0$, $n_0=-1$ *и пусть корни* $s_1,s_2,...,s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что существуют* $n_1,...,n_l\in\mathbb{N}_0$, *что* $s_1=\alpha-n_1,...,s_l=\alpha-n_l$, $s_i\neq s_j$, $i,j=\overline{l+1,m}$, $i\neq j, s_i\neq\alpha-k$, $i=\overline{l+1,m}$. *Тогда для* $0<x\leq 1:$

$$G_\alpha(x)=\frac{x^{-\alpha}}{A_m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!\Gamma(\alpha-k)\prod\limits_{i=1}^{l}(n_i-k)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(\alpha-k-s_j)}+$$

$$+\frac{1}{A_m}\sum_{i=l+1}^{m}\frac{\Gamma(s_i-\alpha)x^{-s_i}}{\Gamma(s_i)\prod\limits_{j=1}^{l}(s_i+n_j-\alpha)\prod\limits_{j=l+1,j\neq i}^{m}(s_i-s_j)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_l+m+1}x^{-\alpha+n_l+1}}{A_m(n_l+1)!\Gamma(\alpha-n_l-1)\prod\limits_{j=1}^{l-1}(n_l-n_j+1)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(n_l+s_j-\alpha+1)}\times{}_{m+2}\mathrm{F}_{m+1}$$

$$\left[\begin{matrix}1,1,n_l-\alpha+2,n_l-n_1+1,...,n_l-n_{l-1}+1,n_l+s_{l+1}-\alpha+1,...,n_l+s_m-\alpha+1\\2,n_l+2,n_l-n_1+2,...,n_l-n_{l-1}+2,n_l+s_{l+1}-\alpha+2,...,n_l+s_m-\alpha+2\end{matrix}\middle|x\right]+$$

$$+\frac{1}{A_m}\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^{n_i+1}x^{-\alpha+n_i}}{n_i!\Gamma(\alpha-n_i)\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{l}(n_j-n_i)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(\alpha-n_i-s_j)}\times$$

$$\times\Bigg[\gamma+\ln x+\psi(\alpha-n_i)+\sum_{j=0}^{n_i-1}\frac{1}{j-n_i}+\sum_{j=1,j\neq i}^{l}\frac{1}{n_j-n_i}+\sum_{j=l+1}^{m}\frac{1}{\alpha-n_i-s_j}\Bigg].\qquad(3.9)$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.1) *задается* (3.6) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.6) *сходятся.*

Теорема 3.4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\alpha > 0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$, $1 < l < m$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, *что* $s_1 = s_2 = ... = s_l = \alpha - n_0$, $s_1 \neq s_j$, $j = \overline{l+1,m}$. *Тогда для* $0 < x \leq 1$:

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m} \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!\Gamma(\alpha-k)(n_0-k)^l \prod\limits_{j=l+1}^{m}(\alpha-k-s_j)} +$$

$$+\frac{1}{A_m} \sum_{i=l+1}^{m} \frac{\Gamma(s_i-\alpha)x^{-s_i}}{\Gamma(s_i)(s_i-\alpha+n_0)^l \prod\limits_{j=l+1, j\neq i}^{m}(s_i-s_j)} +$$

$$+\frac{(-1)^{n_0+m+1}x^{-\alpha+n_0+1}}{A_m(n_0+1)!\Gamma(\alpha-n_0-1)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(n_0+1+s_j-\alpha)} \times$$

$$\times {}_{m+2}\mathrm{F}_{m+1}\left[\begin{matrix} 1, ..., 1, n_0-\alpha, n_0+1+s_{l+1}-\alpha, ..., n_0+1+s_m-\alpha \\ 2, ..., 2, n_0+2, n_0+2+s_{l+1}-\alpha, ..., n_0+2+s_m-\alpha \end{matrix}\middle| x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_m(l-1)!}\sum_{k=0}^{l-2}\binom{l-2}{k}\lim_{s\to\alpha-n_0}\left(\frac{\Gamma(s-\alpha+n_0+1)x^{-s}}{\Gamma(s)\prod\limits_{i=0}^{n_0-1}(s-\alpha+i)\prod\limits_{j=l+1}^{m}(s-s_j)}\right)^{(l-2-k)} \times$$

$$\times\left(\psi^{(k)}(1)-\psi^{(k)}(\alpha-n_0)-\sum_{i=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k k!}{(i-n_0)^{k+1}}-\sum_{j=l+1}^{m}\frac{(-1)^k k!}{(\alpha-n_0-s_j)^{k+1}}+\frac{(-1)^k}{(\alpha-n_0)^k}\right). \quad (3.10)$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.1) *задается* (3.6) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.6) *сходятся.*

Теорема 3.5. *Пусть* $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\alpha > 0$, $A_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,m}$, $A_m \neq 0$ *и пусть корни* $s_1, s_2, ..., s_m$ *многочлена* $\mathrm{P}_m(s)$ *в* (2.6) *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, *что* $s_1 = s_2 = ... = s_m = \alpha - n_0$. *Тогда для* $0 < x \leq 1$:

$$G_\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_m}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!\Gamma(\alpha-k)(n_0-k)^m} +$$

$$+\frac{(-1)^{n_0+m+1}x^{-\alpha+n_0+1}}{A_m(n_0+1)!\Gamma(\alpha-n_0-1)}\ {}_{m+2}\mathrm{F}_{m+1}\left[\begin{matrix} n_0-\alpha, 1, 1, ..., 1 \\ n_0+2, 2, 2, ..., 2 \end{matrix}\middle| x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_m(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m-2}{k}\lim_{s\to\alpha-n_0}\left(\frac{\Gamma(s-\alpha+n_0+1)x^{-s}}{\Gamma(s)\prod\limits_{i=0}^{n_0-1}(s-\alpha+i)}\right)^{(m-2-k)} \times$$

$$\times\left(\psi^{(k)}(1)-\psi^{(k)}(\alpha-n_0)-(-1)^k k!\sum_{i=0}^{n_0-1}\frac{1}{(i-n_0)^{k+1}}+\frac{(-1)^k}{(\alpha-n_0)^k}\right). \qquad (3.11)$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.1) *задается* (3.6) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.6) *сходятся.*

С доказательством теорем 3.1—3.5 можно ознакомиться в работе [15].

Замечание 3.1. При $m=1$ и $A_1=1$ из теорем 3.1 и 3.3 вытекают утверждения, полученные в [85] в теоремах 5.18, 5.19 в терминах обобщенной функции Райта (1.22).

Замечание 3.2. В теоремах 3.2, 3.4 и 3.5 получены утверждения, характерные для дифференциальных уравнений дробного порядка (3.1) при $m\geq 2$.

Замечание 3.3. Полагая $\alpha=l\in\mathbb{N}$, из теорем 3.1—3.5 получим соответствующие утверждения для обыкновенного дифференциального уравнения $\sum\limits_{j=0}^{m} A_j x^{l+j} y^{(l+j)}(x) = f(x)$, $x>0$, m, $l\in\mathbb{N}$ порядка $m+l$, при этом в формулах (3.7), (3.8), (3.9)—(3.11) нужно положить $\alpha=l$.

Замечание 3.4. Теорема 3.5 может рассматриваться как предельный случай теоремы 3.4 при $l=m$, если предположить, что $\sum\limits_{i=m+1}^{m} a_k=0$, $a_k\in\mathbb{C}$.

3.2.2. Решение уравнения типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$ с конечным числом дробных производных Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)$. Часть 2.

На полуоси $(0;+\infty)$ рассмотрим неоднородное уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных Лиувилля порядка $\alpha+n$ [85], [100]:

$$a_n x^{\alpha+n}\big(\mathcal{D}^{\alpha+n}_{0+}y\big)(x)+a_{n-1}x^{\alpha+n-1}\big(\mathcal{D}^{\alpha+n-1}_{0+}y\big)(x)+\ldots+a_0x^{\alpha}(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)(x)=f(x), \quad (3.12)$$

где $0<\alpha<1$, $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)(x)$ — левосторонняя дробная производная Лиувилля, определяемая формулой (1.8) [59], [85], [102].

Решение $y(x)$ будем искать в классе $\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\big(\mathcal{L}_1(0;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;+\infty)$. Обозначив $y=\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\varphi$, где $\varphi\in\mathcal{L}_1(0;+\infty)$, из (3.12) получим уравнение Эйлера:

$$a_n x^{\alpha+n}\varphi^{(n)}(x)+a_{n-1}x^{\alpha+n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+\ldots+a_0x^{\alpha}\varphi(x)=f(x). \qquad (3.13)$$

Далее, используя формулы для преобразования Меллина [8], [9], [45], [49], [59], [85], [102]:

$$\mathcal{M}\big(t^{\alpha}\varphi(t)\big) = \big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha)\,,$$

$$\mathcal{M}\big(t^{\alpha+1}\varphi'(t)\big) = -\,(s+\alpha)\big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha)\,,$$

$$\mathcal{M}\big(t^{\alpha+2}\varphi''(t)\big) = (s+\alpha+1)(s+\alpha)\big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha)\,, ...,$$

$$\mathcal{M}\big(t^{\alpha+n}\varphi^{(n)}(t)\big) = (-1)^n(s+\alpha+n-1)(s+\alpha+n-2)\,...\,(s+\alpha)\big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha)\,,$$

возьмем прямое преобразование Меллина (1.27) от обеих частей уравнения (3.13):

$$\big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha) = \frac{\big(\mathcal{M}f\big)(s)}{\mathrm{P}(s)},$$

где $\mathrm{P}(s) = (-1)^n a_n(s+\alpha+n-1)(s+\alpha+n-2)...(s+\alpha)+...-a_1(s+\alpha)+a_0$.

Тогда

$$x^{\alpha}\varphi(x) = \mathcal{M}^{-1}\Big(\big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha)\Big) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\big(\mathcal{M}f\big)(s)}{\mathrm{P}(s)}\right] =$$

$$= \mathcal{M}^{-1}\Big[\big(\mathcal{M}G\big)(1-s)\big(\mathcal{M}f\big)(s)\Big] = \int\limits_0^{\infty} G(t)f(xt)dt, \tag{3.14}$$

где

$$\big(\mathcal{M}G\big)(1-s) = \frac{1}{\mathrm{P}(s)},$$

откуда находим:

$$G(x) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{P}(1-s)}\right) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{a_n(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)}\right).$$

Здесь корни $s_1, s_2, ..., s_n$ не обязательно различны.

Функцию $G(x)$ назовем *дробным аналогом функции Грина* для уравнения (3.12) [85], [96]. Если $\varphi(x) \in \mathcal{L}_1(0;+\infty)$, то решение уравнения (3.12) получим в виде:

$$y(x) = \mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\left(x^{-\alpha}\int\limits_0^{\infty} G(t)f(xt)dt\right). \tag{3.15}$$

Выясним, при каких условиях формула (3.15) дает искомое решение уравнения (3.12).

Пусть все корни s_1, s_2, ..., s_n многочлена $\mathrm{P}(1-s)$ различны. Тогда:

$$\mathcal{M}G(x) = \frac{1}{a_n(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + ... + \frac{A_n}{s-s_n},$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Несложно показать, что тогда:

$$G(x) = \begin{cases} A_1 x^{-s_1} + A_2 x^{-s_2} + ... + A_n x^{-s_n}, \ 0 < x < 1, \\ 0, \ \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge 1. \end{array} \right. \end{cases} \tag{3.16}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.6. *Пусть все корни* $s_1, s_2, ..., s_n$ *многочлена* $\mathrm{P}(1-s)$ *различны, функция* f n *раз дифференцируема и* $f, f', ..., f^{(n)} \in \mathcal{L}_{1-\alpha,1}$. *Если* $\mathrm{Re}\, s_j < \alpha$, $\forall j = \overline{1,n}$, *то уравнение* (3.12) *имеет единственное решение* (3.15) *с дробным аналогом функции Грина* (3.16).

Доказательство. 1. Покажем, что $x^\alpha \varphi(x)$ в (3.14) принадлежит $\mathcal{L}_{1-\alpha,1}$. Пусть s_j — корень многочлена $\mathrm{P}(1-s)$. Имеем:

$$\int\limits_0^\infty x^{-\alpha} dx \left| \int\limits_0^1 \frac{1}{t^{s_j}} f(xt) dt \right| \le \int\limits_0^1 t^{-s_j} dt \int\limits_0^\infty x^{-\alpha} \big| f(xt) \big| dx = \big[xt = \tau \big] =$$

$$= \int\limits_0^1 t^{\alpha-1-s_j} dt \int\limits_0^\infty \tau^{-\alpha} \big| f(\tau) \big| d\tau = \left(\frac{t^{\alpha - s_j}}{\alpha - s_j} \right)_{t=0}^{t=1} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_{1-\alpha,1}} = \frac{1}{\alpha - s_j} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_{1-\alpha,1}}$$

при $\mathrm{Re}\, s_j < \alpha$, откуда вытекает $x^\alpha \varphi(x) \in \mathcal{L}_{1-\alpha,1}$.

2. Докажем, что $x^\alpha \varphi(x)$ — дифференцируема. Пусть $\gamma = 1 - \alpha$. Покажем, что тогда интеграл $\int\limits_0^1 \left(A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + ... + A_n t^{1-s_n} \right) f'(xt) dt$ сходится равномерно на любом отрезке $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \in (0; +\infty)$. Действительно, сходимость равномерная, поскольку:

$$\left| \int\limits_0^1 \left(A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + ... + A_n t^{1-s_n} \right) f'(xt) dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^1 \left(A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + ... + A_n t^{1-s_n} \right) (xt)^{\gamma-1} (xt)^{1-\gamma} f'(xt) dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^1 x^{1-\gamma} t^{1-\gamma} \left(A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + ... + A_n t^{1-s_n} \right) \left((xt)^{\gamma-1} f'(xt) \right) dt \right| \le$$

$$\le x^{1-\gamma} \int\limits_0^1 \left(A_1 t^{2-\gamma-s_1} + A_2 t^{2-\gamma-s_2} + ... + A_n t^{2-\gamma-s_n} \right) dt \int\limits_0^1 \big| f'(xt) \big| (xt)^{\gamma-1} dt =$$

$$= x^{1-\gamma}\left(A_1\frac{t^{3-\gamma-s_1}}{3-\gamma-s_1}+A_2\frac{t^{3-\gamma-s_2}}{3-\gamma-s_2}+...+A_n\frac{t^{3-\gamma-s_n}}{3-\gamma-s_n}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1}\times$$

$$\times\int\limits_0^1|f'(xt)|(xt)^{\gamma-1}dt=[xt=\tau]=x^{1-\gamma}\left(\frac{A_1}{3-\gamma-s_1}+\frac{A_2}{3-\gamma-s_2}+...+\frac{A_n}{3-\gamma-s_n}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{x}\int\limits_0^x|f'(\tau)|\tau^{\gamma-1}d\tau\leq x^{-\gamma}\left(\frac{A_1}{3-\gamma-s_1}+\frac{A_2}{3-\gamma-s_2}+...+\frac{A_n}{3-\gamma-s_n}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty|f'(\tau)|\tau^{\gamma-1}d\tau=x^{-\gamma}\left(\frac{A_1}{3-\gamma-s_1}+\frac{A_2}{3-\gamma-s_2}+...+\frac{A_n}{3-\gamma-s_n}\right)\cdot\|f'\|_{\mathcal{L}_{\gamma,1}}.$$

Поскольку $x\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$, то $0<\frac{1}{x^\gamma}<\frac{1}{{\varepsilon_1}^\gamma}$, следовательно, по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^1\left(A_1t^{1-s_1}+A_2t^{1-s_2}+...+A_nt^{1-s_n}\right)f'(xt)dt$ сходится равномерно на любом отрезке $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]\in(0;+\infty)$, то есть $x^\alpha\varphi(x)$ дифференцируема.

3. Докажем, что $x^{\alpha+1}\varphi'(x)\in\mathcal{L}_{\gamma,1}$.

$$\frac{d}{dx}\Big(x^\alpha\varphi(x)\Big)=\alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)+x^\alpha\varphi'(x),\ \varphi'(x)=x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\big(x^\alpha\varphi(x)\big)-\alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)\right),$$

$$x^{\alpha+1}\varphi'(x)=x\frac{d}{dx}\big(x^\alpha\varphi(x)\big)-\alpha x^\alpha\varphi(x)=x\int\limits_0^1\Big(A_1t^{1-s_1}+A_2t^{1-s_2}+...+A_nt^{1-s_n}\Big)f'(xt)dt-$$

$$-\alpha\int\limits_0^1\Big(A_1t^{-s_1}+A_2t^{-s_2}+...+A_nt^{-s_n}\Big)f(xt)dt.$$

Обозначим через:

$$A(x)=\int\limits_0^1\Big(A_1t^{-s_1}+A_2t^{-s_2}+...+A_nt^{-s_n}\Big)f(xt)dt,$$

$$B(x)=x\int\limits_0^1\Big(A_1t^{1-s_1}+A_2t^{1-s_2}+...+A_nt^{1-s_n}\Big)f'(xt)dt.$$

Так же, как в первом пункте доказательства теоремы 3.6, показывается, что $A(x)\in\mathcal{L}_{\gamma,1}$. Докажем, что $B(x)\in\mathcal{L}_{\gamma,1}$. Действительно,

$$B(x)=x\int\limits_0^1\Big(A_1t^{1-s_1}+A_2t^{1-s_2}+...+A_nt^{1-s_n}\Big)f'(xt)dt=$$

$$= x\Big(A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + ... + A_n t^{1-s_n}\Big)\frac{f(xt)}{x}\Big|_{t=0}^{t=1} -$$

$$-x\int_0^1 \frac{f(xt)}{x}\Big[A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + ... + A_n(1-s_n)t^{-s_n}\Big]dt =$$

$$= \Big(A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + ... + A_n t^{1-s_n}\Big)f(xt)\Big|_{t=0}^{t=1} -$$

$$-\int_0^1 \Big[A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + ... + A_n(1-s_n)t^{-s_n}\Big]f(xt)dt =$$

$$= \Big(A_1 + A_2 + ... + A_n\Big)f(x) -$$

$$-\int_0^1 \Big[A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + ... + A_n(1-s_n)t^{-s_n}\Big]f(xt)dt \in \mathcal{L}_{\gamma,1}.$$

Доказательство проводится так же, как и для $A(x)$. Здесь использовалась формула интегрирования по частям:

$$u = A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + ... + A_n t^{1-s_n}, \quad dv = f'(xt)dt,$$

$$du = \Big[A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + ... + A_n(1-s_n)t^{-s_n}\Big]dt, \; v = \frac{1}{x}f(xt).$$

4. Аналогично доказывается, что $x^{\alpha+\nu}\varphi^{(\nu)}(x) \in \mathcal{L}_{\gamma,1}, \; \forall \nu = \overline{1,n}$. Теорема доказана.

Пусть среди корней многочлена $\mathrm{P}(1-s)$ есть кратные. Без ограничения общности будем считать s_1 — корень кратности l_1, s_2 — корень кратности l_2, s_k — корень кратности l_k, причем $l_1 + l_2 + ... + l_k = n$. Тогда:

$$\mathcal{M}G(x) = \frac{1}{a_n(s-s_1)^{l_1}(s-s_2)^{l_2}...(s-s_k)^{l_k}} =$$

$$= \frac{A_{11}}{s-s_1} + \frac{A_{12}}{(s-s_1)^2} + ... + \frac{A_{1l_1}}{(s-s_1)^{l_1}} + ... + \frac{A_{k1}}{s-s_k} + \frac{A_{k2}}{(s-s_k)^2} + ... + \frac{A_{kl_k}}{(s-s_k)^{l_k}}.$$

В этом случае дробный аналог функции Грина имеет вид:

$$G(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{m_j=1}^{l_j} A_{km}\frac{(-1)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}x^{-s_j}\ln^{m_j-1}x, & 0 < x < 1, \\ 0, \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases} \tag{3.17}$$

Имеет место

Теорема 3.7. *Пусть среди корней многочлена* $\mathrm{P}(1-s)$ *есть кратные, функция* f n *раз дифференцируема и* $f,\ f',\ \ldots,\ f^{(n)} \in \mathcal{L}_{1-\alpha,1}$. *Если* $\operatorname{Re} s_j < \alpha$, *где* $j = \overline{1,k}$, *то уравнение* (3.12) *имеет единственное решение* (3.15) *с дробным аналогом функции Грина* (3.17).

Доказательство. Достаточно показать, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln^m t}{t^s} f(xt)dt \in \mathcal{L}_{1-\alpha,1}(0;+\infty),\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall s < \alpha.$$

Имеем:

$$\left|\frac{\ln^m t}{t^s}\right| \le \frac{\mathrm{M}}{t^{s+\varepsilon}} \tag{3.18}$$

при $t \to 0$, где $\mathrm{M} > 0$ — постоянная, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое, такое, что $s+\varepsilon < \alpha$. Тогда:

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}dx\left|\int_0^1 \frac{\ln^m t}{t^s} f(xt)dt\right| \le \int_0^\infty x^{-\alpha}dx \int_0^1 \frac{|\ln^m t|}{t^s}|f(xt)|dt \le$$

$$\le \int_0^\infty x^{-\alpha}dx \int_0^1 \frac{\mathrm{M}}{t^{s+\varepsilon}}|f(xt)|dt \le \int_0^1 \frac{\mathrm{M}}{t^{s+\varepsilon}}dt \int_0^\infty x^{-\alpha}|f(xt)|dx =$$

$$= \big[xt = \tau\big] = \mathrm{M}\int_0^1 t^{\alpha-1-s-\varepsilon}dt \int_0^\infty \tau^{-\alpha}|f(\tau)|d\tau = \frac{\mathrm{M}}{\alpha-s-\varepsilon}\cdot \|f\|_{\mathcal{L}_{1-\alpha,1}}$$

при $s+\varepsilon < \alpha$. Отсюда следует, что $x^\alpha \varphi(x) \in \mathcal{L}_{1-\alpha,1}$. Утверждения о том, что $x^{\alpha+\nu}\varphi^{(\nu)}(x) \in \mathcal{L}_{\gamma,1}$, $\forall \nu = \overline{1,n}$ доказываются с учетом (3.18) так же, как в теореме 3.6. Теорема доказана.

3.2.3. Решение уравнения типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$ с двумя дробными производными Лиувилля $(\mathcal{D}^\alpha_{0+}y)$

Рассмотрим на полуоси $(0;+\infty)$ неоднородное уравнение типа Эйлера с двумя дробными производными Лиувилля порядка $\alpha+1$:

$$x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{0+}y\big)(x) + \lambda x^\alpha(\mathcal{D}^\alpha_{0+}y)(x) = f(x). \tag{3.19}$$

Потребуем, чтобы $f,\ f' \in \mathcal{L}_{1-\alpha,1}$. Обозначив $y = \mathcal{I}^\alpha_{0+}\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{L}_1(0;+\infty)$, из (3.19) получим уравнение Эйлера:

$$x^{\alpha+1}\frac{d\varphi\,(x)}{dx} + \lambda x^\alpha \varphi\,(x) = f(x).$$

В этом случае многочлен $\mathrm{P}(1-s)=s+\lambda-\alpha-1$ имеет единственный корень $s=\alpha+1-\lambda$ и дробный аналог функции Грина имеет вид:

$$G(x)=\begin{cases} x^{\lambda-\alpha-1}, & 0<x<1, \\ 0, & \left[\begin{array}{l} x\le 0, \\ x\ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Пусть $\lambda>1$. Тогда выполнены условия теоремы 3.6 и уравнение (3.19) имеет единственное решение (3.15).

Пример 3.1. Рассмотрим на полуоси $(0;+\infty)$ неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера порядка $\frac{3}{2}$:

$$x^{\frac{3}{2}}\Big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{3}{2}}y\Big)(x)+x^{\frac{1}{2}}\Big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y\Big)(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}. \tag{3.20}$$

Правая часть $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\in\mathcal{L}_{\frac{1}{2},1}$. Решение $y(x)$ будем искать в классе $\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}}\big(\mathcal{L}_1(0;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка $\frac{1}{2}$ с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;+\infty)$. Обозначив $y=\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}}\varphi$, где $\varphi\in\mathcal{L}_1(0;+\infty)$, из (3.20) получим уравнение:

$$x^{\frac{3}{2}}\frac{d\varphi\,(x)}{dx}+x^{\frac{1}{2}}\varphi\,(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}. \tag{3.21}$$

Далее, возьмем преобразование Меллина от обеих частей уравнения (3.21):

$$\mathcal{M}\left(\varphi\left(\frac{1}{2}+s\right)\right)=\frac{\mathcal{M}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{2}-s}.$$

Введем в рассмотрение дробный аналог функции Грина:

$$G(x)=\mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{P}(1-s)}\right)=\mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right).$$

Тогда $\mathcal{M}G(x)=\frac{1}{s-\frac{1}{2}}$. Нетрудно показать, что тогда:

$$G(x)=\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}, & 0<x<1, \\ 0, & \left[\begin{array}{l} x\le 0, \\ x\ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$x^{\frac{1}{2}}\varphi(x)=\int\limits_0^\infty G(t)f(xt)dt=\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\frac{(xt)^{\frac{1}{2}}}{1+(xt)^2}dt=x^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^1\frac{dt}{1+(xt)^2}=\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x}}.$$

Итак,

$$\varphi(x)=\frac{\operatorname{arctg}\,x}{x};\quad y(x)=\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x\frac{\operatorname{arctg}\,tdt}{t(x-t)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\big[t=x\tau\big]=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}\,(x\tau)d\tau}{\tau(1-\tau)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\,{}_4\mathrm{F}_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1;\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{3}{2};-x^2\right).$$

Заметим, что уравнение (3.20) можно решить без использования дробного аналога функции Грина на основе непосредственного вычисления интеграла Меллина—Барнса с помощью теоремы Слейтер [49]. Применим к обеим частям уравнения (3.20) прямое преобразование Меллина (1.27):

$$\mathcal{M}\Big(x^{\frac{3}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{3}{2}}y\big)(x)+x^{\frac{1}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y\big)(x)\Big)=\mathcal{M}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\Big),$$

$$\mathcal{M}\Big(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\Big)=\int\limits_0^\infty\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t^2}t^{s-1}dt=\int\limits_0^\infty\frac{dt}{(1+t^2)t^{\frac{1}{2}-s}}.$$

Вычислим интеграл $\int\limits_0^\infty\frac{dt}{(1+t^2)t^{\frac{1}{2}-s}}$, сделав замену переменной $t=\sqrt{\tau}$:

$$\int\limits_0^\infty\frac{dt}{(1+t^2)t^{\frac{1}{2}-s}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{\frac{s}{2}-\frac{3}{4}}d\tau}{1+\tau}=\frac{1}{2}\mathrm{B}\Big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4},\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\right)$$

$$\mathcal{M}\Big(x^{\frac{3}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{3}{2}}y\big)(x)+x^{\frac{1}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y\big)(x)\Big)=\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}\Big(\frac{1}{2}-s\Big)\big(\mathcal{M}y\big)(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\Big),\quad \big(\mathcal{M}y\big)(s)=\frac{\frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\big)\,\Gamma\big(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{2}-s\big)}{(\frac{1}{2}-s)\Gamma(1-s)}.$$

Решение уравнения (3.20) задается интегралом Меллина—Барнса [1], [49], [69]:

$$y(x)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{(\frac{1}{2}-s)\Gamma\left(1-s\right)}x^{-s}ds.$$

Вычислим его с помощью теории вычетов на основе теоремы Слейтер [49], [55]:

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{s=-\frac{1}{2}-2m}\frac{\Gamma\big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\big)\,\Gamma\big(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{2}-s\big)}{(\frac{1}{2}-s)\Gamma(1-s)}x^{-s}=$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)!(2x)^{2m}}{(2m+1)(4m+1)!!} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\ {}_4\mathrm{F}_3 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -x^2 \right).$$

3.2.4. Решение уравнения типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$ с тремя дробными производными Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)$. Часть 1

Рассмотрим решение в замкнутой форме неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с тремя дробными производными Лиувилля:

$$\delta x^{\alpha+2}\big(\mathcal{D}^{\alpha+2}_{0+}y\big)(x) + \mu x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{0+}y\big)(x) + \lambda x^{\alpha}(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)(x) = f(x), \qquad (3.22)$$

где $\alpha > 0$ и $\delta,\, \mu,\, \lambda \in \mathbb{C}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0;+\infty)$. Здесь $\big(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y\big)(x)$ — левосторонняя дробная производная Лиувилля (1.8) порядка $\alpha > 0$ [59], [102].

Если $\alpha = m,\ \ m \in \mathbb{N}$, то в соответствии с (1.8)

$$\big(\mathcal{D}^{m}_{0+}y\big)(x) = y^{(m)}(x) \qquad (3.23)$$

и уравнение (3.22) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\delta x^{m+2}y^{(m+2)}(x) + \mu x^{m+1}y^{(m+1)}(x) + \lambda x^{m}y^{(m)}(x) = f(x). \qquad (3.24)$$

Это уравнение известно как уравнение Эйлера [38], [39]. Заменой $t = \ln x$ оно сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами [2], [5], [50], [53]. Поэтому назовем (3.22) дифференциальным уравнением дробного порядка Эйлерова типа.

Используем теорию вычетов для получения решения дифференциального уравнения (3.22) в терминах обобщенной функции Райта (1.22), обобщенной гипергеометрической функции (1.21) и в терминах пси–функции Эйлера (1.19).

Применяя преобразование Меллина (1.27) к (3.22) и учитывая (3.3), имеем:

$$\left[\delta\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-2)}+\mu\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-1)}+\right.$$
$$\left.+\lambda\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha)}\right]\big(\mathcal{M}y\big)(s)=\big(\mathcal{M}f\big)(s). \qquad (3.25)$$

Используя соотношение (1.14) для гамма–функции Эйлера (1.13), перепишем (3.25) в виде:

$$\mathrm{P}_{\alpha}(s)\big(\mathcal{M}y\big)(s) = \big(\mathcal{M}f\big)(s), \qquad (3.26)$$

$$\mathrm{P}_\alpha(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha)}\Big[\delta s^2+(2\delta\alpha-\mu+\delta)s+\delta\alpha^2+(\delta-\mu)\alpha+\lambda\Big].$$

Применяя обратное преобразование Меллина (1.28) к (3.26) и используя равенство $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}f = f$, получим решение уравнения (3.22) в виде:

$$y(x) = \left(\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\mathcal{M}f(s)}{\mathrm{P}_\alpha(s)}\right]\right)(x)\,. \tag{3.27}$$

Введем в рассмотрение функцию:

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \left(\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{P}_\alpha(1-s)}\right]\right)(x) =$$

$$= \left(\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Big(\delta s^2-\big(3\delta+2\delta\alpha-\mu\big)s+\delta\alpha^2+(3\delta-\mu)\alpha-\mu+\lambda+2\delta\Big)\Gamma(s)}\right]\right)(x)\,. \tag{3.28}$$

Пусть $\delta \neq 0$ и $s_1,\ s_2$ есть корни уравнения

$$\delta s^2 - (3\delta + 2\delta\alpha - \mu)s + \delta\alpha^2 + (3\delta - \mu)\alpha - \mu + \lambda + 2\delta = 0,$$

заданные следующим образом:

$$s_{1,2} = \frac{3\delta + 2\delta\alpha - \mu \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2\delta}, \tag{3.29}$$

$\mathrm{D} = (3\delta + 2\delta\alpha - \mu)^2 - 4\delta\big[\delta\alpha^2 + (3\delta - \mu)\alpha - \mu + \lambda + 2\delta\big].$

Тогда $\delta s^2-(3\delta+2\delta\alpha-\mu)s+\delta\alpha^2+(3\delta-\mu)\alpha-\mu+\lambda+2\delta = \delta(s-s_1)(s-s_2)$ и (3.28) запишется так:

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{1}{\delta}\left(\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)(s-s_2)}\right]\right)(x)\,. \tag{3.30}$$

Применяя свойство свертки Меллина

$$\left(\mathcal{M}\int\limits_0^\infty \mathrm{K}(t)f(xt)dt\right)(s) = \big(\mathcal{M}\mathrm{K}\big)(1-s)\cdot\big(\mathcal{M}f\big)(s)\,,$$

где $\mathrm{K}(x) = G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x)$, представим решение (3.27) в виде:

$$y(x) = \int\limits_0^\infty G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(t)f(xt)dt. \tag{3.31}$$

Покажем, что $G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = 0$ для $x > 1$. Из (3.30) имеем:

$$\big(\mathcal{M}G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}\big)(s) = \frac{1}{\delta}\big(\mathcal{M}G_1\big)(s)\cdot\big(\mathcal{M}G_2\big)(s)\,,$$

где
$$(\mathcal{M}G_1)(s) = \frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)},\ (\mathcal{M}G_2)(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Прямое применение преобразования Меллина (1.27) приводит к соотношениям:
$$G_1(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\ 0<x<1, \\ 0,\ x>1, \end{cases} \tag{3.32}$$
$$G_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{s_1-s_2}(x^{-s_1} - x^{-s_2}),\ 0<x<1, \\ 0,\ x>1, \end{cases} \tag{3.33}$$
$$G_2(x) = \begin{cases} -x^{-s_1}\ln x,\ 0<x<1, \\ 0,\ x>1. \end{cases} \tag{3.34}$$

В соответствии со свойством свертки Меллина
$$\left(\mathcal{M}\int\limits_0^\infty \mathrm{K}\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\frac{dt}{t}\right)(s) = \big(\mathcal{M}\mathrm{K}\big)(s)\cdot\big(\mathcal{M}f\big)(s)\,,$$
при $\mathrm{K}(x) = G_1(x)$ и $f(x) = G_2(x)$ имеем:
$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \int\limits_0^\infty G_1\left(\frac{x}{t}\right) G_2(t)\frac{dt}{t},$$
поэтому из (3.32)–(3.34) следует, что $G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = 0$ для $x>1$.

Следовательно, (3.31) дает решение уравнения (3.22)
$$y(x) = \int\limits_0^1 G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(t) f(xt)dt, \tag{3.35}$$
или
$$y(x) = \int\limits_0^x G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\frac{dt}{x}, \tag{3.36}$$
где в соответствии с (1.28) и (3.30):
$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi i\delta}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)(s-s_2)} x^{-s} ds. \tag{3.37}$$

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями, назовем $G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x)$ *дробным аналогом Меллина функции Грина.*

Можно проверить, что $y(x)$ в (3.36) есть частное решение уравнения (3.22). Вычислим интеграл в (3.37), используя теорию вычетов. Известно

[1], [69], что $\Gamma(z)$ аналитическая в $\mathbb{C}$, за исключением простых полюсов $s=-n$, $n\in\mathbb{N}$ с вычетом $\frac{(-1)^n}{n!}$, и справедливо (1.16). Поэтому подынтегральная функция в правой части (3.37):

$$g(s)=\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)(s-s_2)}x^{-s} \tag{3.38}$$

для любого фиксированного $x\neq 0$ есть аналитическая функция от s за исключением простых полюсов $s=s_1$, $s=s_2$ и $s=\alpha-n$, $n\in\mathbb{N}_0$. Следовательно, $G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x)$ в (3.37) будет иметь различные значения в следующих 5 случаях:

Случай 1. $s_1\neq s_2\neq\alpha-k,\ \forall k\in\mathbb{N}_0$.

Случай 2. $s_1=s_2\neq\alpha-k,\ \forall k\in\mathbb{N}_0$.

Случай 3. $\exists n_0\in\mathbb{N}_0$, что $s_1\neq s_2,\ s_1=\alpha-n_0$.

Случай 4. $\exists n_0\in\mathbb{N}_0$, что $s_1\neq s_2,\ s_2=\alpha-n_0$.

Случай 5. $\exists n_0\in\mathbb{N}_0$, что $s_1=s_2=\alpha-n_0$.

Покажем, что $G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x)$ выражается в терминах обобщенной функции Райта (1.22), обобщенной гипергеометрической функции (1.21) и пси–функции Эйлера (1.19).

Первый результат дает решение уравнения (3.22) в случае 1).

Теорема 3.8. *Пусть* $\alpha>0$, $\delta,\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $\delta\neq 0$ *и пусть корни* s_1, s_2 *в* (3.29) *такие, что* $s_1\neq s_2\neq\alpha-k$ *для любого* $k\in\mathbb{N}_0$. *Тогда:*

$$\begin{aligned}G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x)=&\frac{x^{-\alpha}}{\delta}\,{}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(s_1-\alpha,1),(s_2-\alpha,1)\\(\alpha,-1),(s_1-\alpha+1,1),(s_2-\alpha+1,1)\end{matrix}\middle|-x\right]+\\&+\frac{1}{\delta(s_1-s_2)}\left[\frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{\Gamma(s_1)}x^{-s_1}-\frac{\Gamma(s_2-\alpha)}{\Gamma(s_2)}x^{-s_2}\right]=\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}=&\frac{x^{-\alpha}}{\delta(s_1-\alpha)(s_2-\alpha)\Gamma(\alpha)}\,{}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}1-\alpha,s_1-\alpha,s_2-\alpha\\s_1-\alpha+1,s_2-\alpha+1\end{matrix}\middle|x\right]+\\&+\frac{1}{\delta(s_1-s_2)}\left[\frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{\Gamma(s_1)}x^{-s_1}-\frac{\Gamma(s_2-\alpha)}{\Gamma(s_2)}x^{-s_2}\right].\end{aligned} \tag{3.40}$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.22) *задается* (3.35) *и* (3.36) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.35) *и* (3.36) *сходятся.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что простые полюсы $s=s_1$, $s=s_2$ и $s=\alpha-k$, $k\in\mathbb{N}_0$ подынтегральной функции (3.38) в (3.37) не совпадают. Выбрав $\gamma>\max\left[\mathrm{Re}s_1,\,\mathrm{Re}s_2,\,\alpha\right]$ и применяя обычную технику для вычисления интеграла Меллина—Барнса в (3.37), а также принимая во внимание (1.16), имеем:

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x)=\frac{1}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{s=\alpha-k}g(s)+\operatorname*{res}_{s=s_1}g(s)+\operatorname*{res}_{s=s_2}g(s)\right]=$$

$$= \frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{s\to\alpha-k}\frac{(s-\alpha+k)\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\Gamma(s)(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{1}{\delta}\lim_{s\to s_1}\frac{(s-s_1)\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\Gamma(s)(s-s_1)(s-s_2)} +$$

$$+\frac{1}{\delta}\lim_{s\to s_2}\frac{(s-s_2)\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\Gamma(s)(s-s_1)(s-s_2)} = \tag{3.41}$$

$$= \frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{-\alpha+k}}{k!(\alpha-k-s_1)(\alpha-k-s_2)\Gamma(\alpha-k)} +$$

$$+\frac{1}{\delta}\frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{(s_1-s_2)\Gamma(s_1)}x^{-s_1} + \frac{1}{\delta}\frac{\Gamma(s_2-\alpha)}{(s_2-s_1)\Gamma(s_2)}x^{-s_2}.$$

Используя соотношение (1.14), находим:

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{1}{\delta}x^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(s_1-\alpha+k)\Gamma(s_2-\alpha+k)(-x)^k}{\Gamma(\alpha-k)\Gamma(s_1-\alpha+1+k)\Gamma(s_2-\alpha+1+k)k!} +$$

$$+\frac{1}{\delta}\left[\frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{(s_1-s_2)\Gamma(s_1)}x^{-s_1} - \frac{\Gamma(s_2-\alpha)}{(s_1-s_2)\Gamma(s_2)}x^{-s_2}\right]. \tag{3.42}$$

Имеем (3.39) в соответствии с (1.22). Константы в (1.23) и (1.24) имеют вид:

$$\Delta = -1,\ \delta = 1,\ \mu = \alpha + \frac{3}{2}. \tag{3.43}$$

Поэтому функция Райта ${}_2\Psi_3[-x]$ существует по лемме 1.1.

Используя формулы:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \equiv \frac{(-1)^k(1-\alpha)_k}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N}_0,$$

$$\Gamma(z+k) = \Gamma(z)(z)_k, \quad z\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N}_0,$$

из (3.42) получаем (3.40), таким образом, теорема доказана.

Следующее утверждение дает решение $y(x)$ уравнения (3.22) в случае 2).

Теорема 3.9. *Пусть $\alpha > 0$, δ, λ, $\mu\in\mathbb{C}$, $\delta\neq 0$ и пусть корни s_1, s_2 в (3.29) такие, что $s_1 = s_2 \neq \alpha - k$ для любого $k\in\mathbb{N}_0$. Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\delta}\,{}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(s_1-\alpha,1),(s_1-\alpha,1)\\(\alpha,-1),(s_1-\alpha+1,1),(s_1-\alpha+1,1)\end{matrix}\middle| -x\right] +$$

$$+\frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{\delta\Gamma(s_1)}x^{-s_1}\Big[\psi(s_1-\alpha) - \psi(s_1) - \ln x\Big] = \tag{3.44}$$

$$= \frac{x^{-\alpha}}{\delta(s_1-\alpha+1)^2\Gamma(\alpha)}\,{}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}1-\alpha, s_1-\alpha, s_1-\alpha\\ s_1-\alpha+1, s_1-\alpha+1\end{matrix}\middle| x\right] +$$

$$+\frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{\delta\Gamma(s_1)}x^{-s_1}\Big[\psi(s_1-\alpha)-\psi(s_1)-\ln x\Big]. \qquad (3.45)$$

Частное решение $y(x)$ уравнения (3.22) задается (3.35) и (3.36) при условии, что интегралы в правых частях (3.35) и (3.36) сходятся.

Доказательство. Из условий теоремы, подынтегральная функция (3.38) в (3.37) имеет полюс второго порядка $s = s_1 = s_2$ и простые полюсы $s = \alpha - k$ для $k \in \mathbb{N}_0$. Если выбрать $\gamma > \max\big[\mathrm{Re}s_1, \alpha\big]$, то в соответствии с (3.41) и (3.43) имеем:

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{1}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{s=\alpha-k} g(s) + \operatorname*{res}_{s=s_1} g(s)\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{-\alpha+k}}{k!(\alpha-k-s_1)^2\Gamma(\alpha-k)} + \lim_{s\to s_1}\left((s-s_1)^2\frac{\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\Gamma(s)(s-s_1)^2}\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta}x^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(s_1-\alpha+k)(-x)^k}{k!\Gamma^2(s_1-\alpha+1+k)\Gamma(\alpha-k)} +$$

$$+\frac{1}{\delta}\left[\frac{\Gamma'(s_1-\alpha)}{\Gamma(s_1)}x^{-s_1} - \frac{\Gamma(s_1-\alpha)\Gamma'(s_1)}{\Gamma^2(s_1)}x^{-s_1} - \frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{\Gamma(s_1)}x^{-s_1}\ln x\right].$$

Согласно (1.19) и (1.22) получаем (3.44). Из доказательства теоремы 3.8, ${}_2\Psi_3[-x]$ существует, и (3.45) следует из (3.44). Теорема 3.9 доказана.

Пусть

$$\gamma = -\psi(1), \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = 0, \quad n = -1, -2, \dots .$$

Частное решение $y(x)$ уравнения (3.22) в случае 3) дает

Теорема 3.10. *Пусть $\alpha > 0, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \delta \neq 0$ и пусть корни s_1 и s_2 в (3.29) такие, что существует $n_0 \in \mathbb{N}_0$, что $s_1 \neq s_2, s_1 = \alpha - n_0$. Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)(\alpha-k-s_2)\Gamma(\alpha-k)} + \frac{\Gamma(s_2-\alpha)}{\delta\Gamma(s_2)}\frac{x^{-s_2}}{(s_2-\alpha+n_0)} +$$

$$+\frac{(-1)^{n_0}x^{-\alpha+n_0+1}}{\delta}{}_3\Psi_4\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1),(\alpha-n_0-1-s_2,-1)\\(2,1),(n_0+2,1),(\alpha-n_0-s_2,-1),(\alpha-n_0-1,-1)\end{matrix}\Bigg| -x\right] -$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}}{n_0!\delta(\alpha-n_0-s_2)\Gamma(\alpha-n_0)}\left[\gamma+\psi(\alpha-n_0)+\frac{1}{\alpha-n_0-s_2}+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\right] =$$

$$= \frac{x^{-\alpha}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{\Gamma(\alpha-k)(n_0-k)(\alpha-k-s_2)k!} + \frac{\Gamma(s_2-\alpha)}{\delta\Gamma(s_2)}\frac{x^{-s_2}}{(s_2-\alpha+n_0)} +$$

$$+\frac{(-1)^{n_0}\Gamma(1+n_0-\alpha)x^{-\alpha+n_0+1}}{\delta\Gamma(n_0+2)(\alpha-n_0-1-s_2)}\,{}_4\mathrm{F}_3\left[\begin{matrix}1,1,1+n_0+s_2-\alpha,1+n_0-\alpha\\2,n_0+2,2+n_0+s_2-\alpha\end{matrix}\middle|x\right]-$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}}{\delta n_0!(\alpha-n_0-s_2)\Gamma(\alpha-n_0)}\left[\gamma+\psi(\alpha-n_0)+\frac{1}{\alpha-n_0-s_2}+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\right].$$

Частное решение $y(x)$ уравнения (3.22) задается (3.35) и (3.36) при условии, что интегралы в правых частях (3.35) и (3.36) сходятся.

Следующее утверждение, дающее случай 4), доказывается аналогично теореме 3.10 заменой местами s_1 и s_2.

Теорема 3.11. *Пусть $\alpha>0$, δ, λ, $\mu\in\mathbb{C}$, $\delta\neq 0$ и пусть корни s_1, s_2 в (3.29) такие, что существует $n_0\in\mathbb{N}_0$, что $s_1\neq s_2$, $s_2=\alpha-n_0$. Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x)=\frac{x^{-\alpha}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)(\alpha-k-s_1)\Gamma(\alpha-k)}+\frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{\delta\Gamma(s_1)}\frac{x^{-s_1}}{(s_1-\alpha+n_0)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_0}x^{-\alpha+n_0+1}}{\delta}\,{}_3\Psi_4\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1),(\alpha-n_0-1-s_1,-1)\\(2,1),(n_0+2,1),(\alpha-n_0-s_1,-1),(\alpha-n_0-1,-1)\end{matrix}\middle|-x\right]-$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}}{\delta n_0!(\alpha-n_0-s_1)\Gamma(\alpha-n_0)}\left[\gamma+\psi(\alpha-n_0)+\frac{1}{\alpha-n_0-s_1}+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\right]=$$

$$=\frac{x^{-\alpha}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)(\alpha-k-s_1)\Gamma(\alpha-k)}+\frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{\delta\Gamma(s_1)}\frac{x^{-s_1}}{(s_1-\alpha+n_0)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_0}\Gamma(1+n_0-\alpha)x^{-\alpha+n_0+1}}{\delta\Gamma(n_0+2)(\alpha-n_0-1-s_1)}\,{}_4\mathrm{F}_3\left[\begin{matrix}1,1,1+n_0+s_1-\alpha,1+n_0-\alpha\\2,n_0+2,2+n_0+s_1-\alpha\end{matrix}\middle|x\right]-$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}}{\delta n_0!(\alpha-n_0-s_1)\Gamma(\alpha-n_0)}\left[\gamma+\psi(\alpha-n_0)+\frac{1}{\alpha-n_0-s_1}+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\right].$$

Частное решение $y(x)$ уравнения (3.22) задается (3.35) и (3.36) при условии, что интегралы в правых частях (3.35) и (3.36) сходятся.

Последний результат дает частное решение $y(x)$ уравнения (3.22) в случае 5).

Теорема 3.12. *Пусть $\alpha>0$, δ, λ, $\mu\in\mathbb{C}$, $\delta\neq 0$ и пусть корни s_1, s_2 в (3.29) такие, что существует $n_0\in\mathbb{N}_0$, что $s_1=s_2=\alpha-n_0$. Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu,\lambda}(x)=\frac{x^{-\alpha}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)^2\Gamma(\alpha-k)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_0+1}x^{-\alpha+n_0+1}}{\delta}\,{}_3\Psi_4\left[\begin{matrix}(1,1),\,(1,1),\,(1,1)\\(2,1),\,(2,1),\,(n_0+2,1),\,(\alpha-n_0-1,-1)\end{matrix}\middle|-x\right]+$$

$$+\frac{\left[2\psi(\alpha-n_0)\sum\limits_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}-2\psi(1)\sum\limits_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\psi^2(\alpha-n_0)\right]}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}+$$

$$+\frac{\left[\sum\limits_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{(j-n_0)^2}+\left(\sum\limits_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}\right)^2\right]}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}+\frac{(-1)^{n_0}}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}\Big[\Gamma''(1)-$$

$$-2\psi(1)\psi(\alpha-n_0)-\psi'(\alpha-n_0)\Big]x^{n_0-\alpha}+\frac{(-1)^{n_0}}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}\Big[-2\psi(1)+$$

$$+2\psi(\alpha-n_0)+2\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}\Big]x^{n_0-\alpha}\ln x+\frac{(-1)^{n_0}}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}\ln^2 x= \qquad (3.46)$$

$$=\frac{x^{-\alpha}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)^2\Gamma(\alpha-k)}+\frac{(-1)^{n_0+1}x^{-\alpha+n_0+1}}{\delta\Gamma(n_0+2)\Gamma(\alpha-n_0-1)}\times$$

$$\times\,{}_4\mathrm{F}_3\left[\begin{matrix}1,1,1,n_0-\alpha\\2,2,n_0+2\end{matrix}\middle|x\right]+\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}\times$$

$$\times\left[2\psi(\alpha-n_0)\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}-2\psi(1)\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\psi^2(\alpha-n_0)\right]+$$

$$+\frac{\left[\sum\limits_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{(j-n_0)^2}+\left(\sum\limits_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}\right)^2\right]}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}+\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}\Big[\Gamma''(1)-$$

$$-2\psi(1)\psi(\alpha-n_0)-\psi'(\alpha-n_0)\Big]+\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha}\ln x}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}\Big[-2\psi(1)+$$

$$+2\psi(\alpha-n_0)+2\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}\Big]+\frac{(-1)^{n_0}}{2\delta n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}\ln^2 x.$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.22) *задается* (3.35) *и* (3.36) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.35) *и* (3.36) *сходятся.*

С доказательством теорем 3.10, 3.11, 3.12 можно ознакомиться в работах [109], [114].

Замечание 3.5. Обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3\mathrm{F}_2[x]$ в (3.40) можно выразить через гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2\mathrm{F}_1[x]$:

$${}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}1-\alpha,s_1-\alpha,s_2-\alpha\\s_1-\alpha+1,s_2-\alpha+1\end{matrix}\middle|x\right]=$$

$$=\frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{1}{s_1-\alpha}\ {}_2\mathrm{F}_1\left[\begin{matrix}1-\alpha, s_1-\alpha\\ s_1-\alpha+1\end{matrix}\middle| x\right]-\frac{1}{s_2-\alpha}\ {}_2\mathrm{F}_1\left[\begin{matrix}1-\alpha, s_2-\alpha\\ s_2-\alpha+1\end{matrix}\middle| x\right]\right),$$

где $s_1\neq s_2$.

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение (3.22) с $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\delta\neq 0$:

$$\delta x^{\frac{5}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{5}{2}}y\big)(x)+\mu x^{\frac{3}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{3}{2}}y\big)(x)+\lambda x^{\frac{1}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y\big)(x)=f(x),\quad x>0. \tag{3.47}$$

Здесь корни s_1 и s_2 в (3.29) имеют вид:

$$s_{1,2}=\frac{4\delta-\mu\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2\delta},\quad \mathrm{D}=(4\delta-\mu)^2-\delta(3\delta-6\mu+4\lambda).$$

Если $s_1\neq s_2\neq\frac{1}{2}-k,\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0$, тогда по теореме 3.8 будем иметь:

$$G_{\frac{1}{2};\,\delta,\mu,\lambda}(x)=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\delta}\ {}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(s_1-\frac{1}{2},1),(s_2-\frac{1}{2},1)\\ (\frac{1}{2},-1),(s_1+\frac{1}{2},1),(s_2+\frac{1}{2},1)\end{matrix}\middle| -x\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}}\left[\frac{\Gamma(s_1-\frac{1}{2})}{\Gamma(s_1)}x^{-s_1}-\frac{\Gamma(s_2-\frac{1}{2})}{\Gamma(s_2)}x^{-s_2}\right]=$$

$$=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\delta(s_1-\frac{1}{2})(s_2-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\ {}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},s_1-\frac{1}{2},s_2-\frac{1}{2}\\ s_1+\frac{1}{2},s_2+\frac{1}{2}\end{matrix}\middle| x\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}}\left[\frac{\Gamma(s_1-\frac{1}{2})}{\Gamma(s_1)}x^{-s_1}-\frac{\Gamma(s_2-\frac{1}{2})}{\Gamma(s_2)}x^{-s_2}\right].$$

Частное решение (3.47) задается:

$$y(x)=\int\limits_0^1 G_{\frac{1}{2};\,\delta,\mu,\lambda}(t)f(xt)dt=\int\limits_0^x G_{\frac{1}{2};\,\delta,\mu,\lambda}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{x}.$$

Частные случаи и примеры. Рассмотрим уравнение (3.22) с $\lambda=0$, $\delta\neq 0,\ \ \mu\neq 0$:

$$\delta x^{\alpha+2}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+2}y\big)(x)+\mu x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1}y\big)(x)=f(x),\quad x>0. \tag{3.48}$$

Здесь (3.28)—(3.29) принимают вид

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s-\alpha-1)x^{-s}}{\big[\delta s-2\delta+\mu-\alpha\delta\big]\Gamma(s)}ds, \tag{3.49}$$

$$\delta s-2\delta+\mu-\alpha\delta=0,\quad s_1=2+\alpha-\frac{\mu}{2}$$

и (3.35), (3.36) преобразуются к виду

$$y(x)=\int\limits_0^1 G_{\alpha;\,\delta,\mu}(t)f(xt)dt, \tag{3.50}$$

$$y(x)=\int\limits_0^x G_{\alpha;\,\delta,\mu}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{x}. \tag{3.51}$$

Можно проверить, что $y(x)$ в (3.51) есть частное решение уравнения (3.48), которое имеет различные выражения в следующих двух случаях:

1) $\mu\neq\delta(n+1), \quad \forall n\in\mathbb{N}_0$;

2) $\exists n_0\in\mathbb{N}_0$ такое, что $\mu=\delta(n_0+1)$.

Используя (3.49)—(3.51) и результаты теорем 3.8—3.12, получаем следующие утверждения.

Теорема 3.13. *Пусть* $\alpha>0$ *и* $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$ *такие, что* $\mu\neq\delta(n+1)$ *для любого* $n\in\mathbb{N}_0$. *Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu}(x)=\frac{\Gamma(1-\frac{\mu}{\delta})}{\delta\Gamma(2+\alpha-\frac{\mu}{\delta})}x^{-\alpha+\frac{\mu}{\delta}-2}-$$

$$-x^{-\alpha}\,{}_1\Psi_2\left[\begin{matrix}(\delta-\mu,\delta)\\(\alpha+1,-1),(\delta-\mu+1,\delta)\end{matrix}\middle|-x\right]$$

и частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.48) *задается* (3.50) *и* (3.51) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.50) *и* (3.51) *сходятся.*

Теорема 3.14. *Пусть* $\alpha>0$ *и* $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$ *такие, что существует* $n_0\in\mathbb{N}_0$ *такое, что* $\mu=\delta(n_0+1)$. *Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu}(x)=\frac{x^{-\alpha-1}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^kx^k}{k!(n_0-k)\Gamma(\alpha+1-k)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_0}x^{-\alpha+n_0}}{\delta}\,{}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1)\\(n_0+2,1),(2,1),(\alpha-n_0,-1)\end{matrix}\middle|-x\right]-$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha-1}}{\delta n_0!\Gamma(\alpha+1-n_0)}\left[\gamma+\psi(\alpha+1-n_0)+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\right]= \tag{3.52}$$

$$=\frac{x^{-\alpha-1}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^kx^k}{k!(n_0-k)\Gamma(\alpha+1-k)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_0}x^{-\alpha+n_0}}{\delta\Gamma(n_0+2)\Gamma(\alpha-n_0)}\,{}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}1,1,1+n_0-\alpha\\n_0+2,2\end{matrix}\middle|x\right]-$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\alpha-1}}{\delta n_0!\Gamma(\alpha+1-n_0)}\Big[\gamma+\psi(\alpha+1-n_0)+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\Big]. \qquad (3.53)$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.48) *задается* (3.52) *и* (3.53) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.52) *и* (3.53) *сходятся.*

Пример 3.3. Рассмотрим уравнение (3.48) с $\alpha=\frac{1}{2}$:

$$\delta x^{\frac{5}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{5}{2}}y\big)(x)+\mu x^{\frac{3}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{3}{2}}y\big)(x)=f(x), \quad x>0. \qquad (3.54)$$

По теореме 3.13 и 3.14 если $\mu\neq\delta(n+1), \ \ \forall n\in\mathbb{N}_0,$ то

$$G_{\frac{1}{2};\,\delta,\mu}(x)=\frac{\Gamma(1-\frac{\mu}{\delta})}{\delta\Gamma(\frac{5}{2}-\frac{\mu}{\delta})}x^{-\frac{5}{2}+\frac{\mu}{\delta}}-x^{-\frac{1}{2}}\,{}_1\Psi_2\left[\begin{matrix}(\delta-\mu,\delta)\\(\frac{3}{2},-1),(\delta-\mu+1,\delta)\end{matrix}\Big|-x\right],$$

тогда как если $\exists n_0$ такое, что $\mu=\delta(n_0+1),$ то

$$G_{\frac{1}{2};\,\delta,\mu}(x)=\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\delta}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)\Gamma(\frac{3}{2}-k)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\frac{1}{2}}}{\delta}\,{}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(1,1),\quad (1,1)\\(n_0+2,1),(2,1),(\frac{1}{2}-n_0,-1)\end{matrix}\Big|-x\right]-$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-\frac{3}{2}}}{\delta n_0!\Gamma(\frac{3}{2}-n_0)}\Big[\gamma+\psi\big(\frac{3}{2}-n_0\big)+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\ \Big].$$

Частное решение (3.54) задается

$$y(x)=\int_0^1 G_{\frac{1}{2};\,\delta,\mu}(t)f(xt)dt=\int_0^x G_{\frac{1}{2};\,\delta,\mu}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{x}. \qquad (3.55)$$

В частности, уравнение

$$\frac{5}{7}x^{\frac{5}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{5}{2}}y\big)(x)+x^{\frac{3}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{3}{2}}y\big)(x)=f(x), \quad x>0$$

имеет решение (3.55) при $\delta=\frac{5}{7}$ и $\mu=1,$ где

$$G_{\frac{1}{2};\,\frac{5}{7},1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{7\Gamma(-\frac{2}{5})}{5\Gamma(\frac{11}{10})}x^{-\frac{3}{5}}-\,{}_1\Psi_2\left[\begin{matrix}(-\frac{2}{7},\frac{5}{7})\\(\frac{3}{2},-1),(\frac{5}{7},\frac{5}{7})\end{matrix}\Big|-x\right]\right).$$

Рассмотрим уравнение (3.22) с $\delta=0,\ \mu\neq 0,\ \lambda\neq 0:$

$$\mu x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+1}y\big)(x)+\lambda x^{\alpha}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}y\big)(x)=f(x), \quad x>0. \qquad (3.56)$$

В этом случае (3.28)—(3.29) принимают вид:

$$G_{\alpha;\,\mu,\lambda}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s-\alpha)x^{-s}}{\big[\mu s-\mu(1+\alpha)+\lambda\big]\Gamma(s)}ds, \tag{3.57}$$

$$\mu s-\mu(1+\alpha)+\lambda=0,\quad s_1=1+\alpha-\frac{\lambda}{\mu}.$$

Тогда (3.35), (3.36) преобразуются к виду:

$$y(x)=\int\limits_0^1 G_{\alpha;\,\mu,\lambda}(t)f(xt)dt, \tag{3.58}$$

$$y(x)=\int\limits_0^x G_{\alpha;\,\mu,\lambda}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{x}. \tag{3.59}$$

Можно проверить, что $y(x)$ в (3.59) есть частное решение уравнения (3.56), которое имеет различные выражения в следующих двух случаях:

1) $\lambda\neq\mu(n+1),\quad \forall n\in\mathbb{N}_0$;

2) $\exists n_0\in\mathbb{N}_0$ такое, что $\lambda=\mu(n_0+1)$.

Используя (3.57)—(3.59) и результаты теорем 3.8—3.12, получаем следующие утверждения.

Теорема 3.15. *Пусть* $\alpha>0$ *и* $\mu,\lambda\in\mathbb{C}$, $\mu\neq 0$, $\lambda\neq 0$ *такие, что* $\lambda\neq\mu(n+1)$ *для любого* $n\in\mathbb{N}_0$. *Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\mu,\lambda}(x)=\frac{\Gamma(1-\frac{\lambda}{\mu})}{\mu\Gamma(1+\alpha-\frac{\lambda}{\mu})}x^{\frac{\lambda}{\mu}-\alpha-1}-x^{-\alpha}{}_1\Psi_2\left[\begin{matrix}(\mu-\lambda,\mu)\\(\alpha,-1),(\mu-\lambda+1,\mu)\end{matrix}\Big|-x\right].$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.56) *задается* (3.58) *и* (3.59) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.58) *и* (3.59) *сходятся.*

Теорема 3.16. *Пусть* $\alpha>0$ *и* $\mu,\lambda\in\mathbb{C}$, $\mu\neq 0,\lambda\neq 0$ *такие, что существует* $n_0\in\mathbb{N}_0$ *такое, что* $\lambda=\mu(n_0+1)$. *Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\mu,\lambda}(x)=\frac{(n_0+1)x^{-\alpha}}{\lambda}\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)\Gamma(\alpha-k)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_0}(n_0+1)x^{-\alpha+n_0+1}}{\lambda}\,{}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1)\\(n_0+2,1),(2,1),(\alpha-n_0-1,-1)\end{matrix}\Big|-x\right]-$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}(n_0+1)x^{n_0-\alpha}}{\lambda n_0!\Gamma(\alpha-n_0)}\left[\gamma+\psi(\alpha-n_0)+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\right]=$$

$$= \frac{(n_0+1)x^{-\alpha}}{\lambda} \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)\Gamma(\alpha-k)} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n_0}(n_0+1)x^{-\alpha+n_0+1}}{\lambda\Gamma(n_0+2)\Gamma(\alpha-n_0-1)} \, {}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}1,1,n_0-\alpha \\ n_0+\alpha,2\end{matrix}\middle| x\right] -$$

$$- \frac{(-1)^{n_0}(n_0+1)x^{n_0-\alpha}}{\lambda n_0!\Gamma(\alpha-n_0)} \left[\gamma + \psi(\alpha-n_0) + \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{1}{j-n_0} + \ln x\right].$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.56) *задается* (3.58) *и* (3.59) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.58) *и* (3.59) *сходятся.*

Замечание 3.6. *Для* $\lambda = 1$ *результаты теорем* 3.15 *и* 3.16 *были доказаны в* [85] *в теоремах* 5.18, 5.19.

Пример 3.4. Рассмотрим уравнение (3.56) с $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\mu x^{\frac{3}{2}} \big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{3}{2}} y\big)(x) + \lambda x^{\frac{1}{2}} \big(D_{0+}^{\frac{1}{2}} y\big)(x) = f(x), \quad x > 0. \tag{3.60}$$

По теореме 3.15 и 3.16 если $\lambda \neq \mu(n+1), \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, то

$$G_{\frac{1}{2};\mu,\lambda}(x) = \frac{\Gamma(1-\frac{\lambda}{\mu})}{\mu\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{\lambda}{\mu})} x^{\frac{\lambda}{\mu}-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \, {}_1\Psi_2\left[\begin{matrix}(\mu-\lambda,\mu) \\ (\frac{1}{2},-1),(\mu-\lambda+1,\mu)\end{matrix}\middle| -x\right],$$

тогда как если $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0$ такое, что $\lambda = \mu(n_0+1)$, тогда

$$G_{\frac{1}{2};\mu,\lambda}(x) = \frac{(n_0+1)x^{-\frac{1}{2}}}{\lambda} \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!(n_0-k)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n_0}(n_0+1)x^{\frac{1}{2}+n_0}}{\lambda\Gamma(n_0+2)\Gamma(-\frac{1}{2}-n_0)} \, {}_3\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}1,1,n_0-\frac{1}{2} \\ n_0+\frac{1}{2},2\end{matrix}\middle| x\right] -$$

$$- \frac{(-1)^{n_0}(n_0+1)x^{n_0-\frac{1}{2}}}{\lambda n_0!\Gamma(\frac{1}{2}-n_0)} \left[\gamma + \psi(\frac{1}{2}-n_0) + \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{1}{j-n_0} + \ln x\right].$$

Частное решение (3.60) задается

$$y(x) = \int_0^1 G_{\frac{1}{2};\mu,\lambda}(t) f(xt)\,dt = \int_0^x G_{\frac{1}{2};\mu,\lambda}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) \frac{dt}{x}. \tag{3.61}$$

В частности, уравнение

$$\frac{1}{5} x^{\frac{3}{2}} \left(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{3}{2}} y\right)(x) + x^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}} y\right)(x) = f(x), \quad x > 0$$

имеет частное решение (3.61) при $\mu=\frac{1}{5},\quad \lambda=1$:

$$G_{\frac{1}{2};\frac{1}{5},1}(x)=5x^{-\frac{1}{2}}\Bigg(\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k x^k}{k!(4-k)\Gamma(\frac{1}{2}-k)}+$$

$$+x^5\,{}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1)\\(6,1),(2,1),(-\frac{9}{2},-1)\end{matrix}\Bigg|-x\right]\Bigg)-\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{24\Gamma(-\frac{7}{2})}\Big[\gamma+\psi\Big(-\frac{7}{2}\Big)-\frac{25}{12}+\ln x\Big].$$

Рассмотрим уравнение (3.22) с $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\mu=0$:

$$\delta x^{\frac{5}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{5}{2}}y\big)(x)+\lambda x^{\frac{1}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y\big)(x)=f(x),\quad x>0. \tag{3.62}$$

Корни s_1 и s_2 в (3.29) примут вид:

$$s_{1,2}=\frac{4\delta\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2\delta},\quad \mathrm{D}=16\delta^2-\delta(15\delta+4\lambda).$$

По теореме 3.9, если $s_1=s_2\neq\frac{1}{2}-k,\quad \forall k\in\mathbb{N}_0,$ то

$$G_{\frac{1}{2};\,\delta,0,\lambda}(x)=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\delta}\,{}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(s_1-\frac{1}{2},1),(s_1-\frac{1}{2},1)\\(\frac{1}{2},-1),(s_1+\frac{1}{2},1),(s_1+\frac{1}{2},1)\end{matrix}\Bigg|-x\right]+$$

$$+\frac{\Gamma(s_1-\frac{1}{2})}{\delta\Gamma(s_1)}x^{-s_1}\Big[\psi\Big(s_1-\frac{1}{2}\Big)-\psi(s_1)-\ln x\Big]$$

и частное решение $y(x)$ уравнения (3.62) задается:

$$y(x)=\int_0^1 G_{\frac{1}{2};\,\delta,0,\lambda}(t)f(xt)dt=\int_0^x G_{\frac{1}{2};\,\delta,0,\lambda}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{x}.$$

В частности, уравнение

$$x^{\frac{5}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{5}{2}}y\big)(x)+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}\big(\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}}y\big)(x)=f(x),\quad x>0$$

имеет частное решение (3.46) с $\delta=1,\,\lambda=\frac{1}{4}$:

$$G_{\frac{1}{2};\,1,0,\frac{1}{4}}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\,{}_2\Psi_3\left[\begin{matrix}(-\frac{3}{2},-1),(-\frac{3}{2},-1)\\(\frac{1}{2},-1),(-\frac{1}{2},-1),(-\frac{1}{2},-1)\end{matrix}\Bigg|-x\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2\,x^2}\Big[\psi\Big(\frac{3}{2}\Big)-\psi(2)-\ln x\Big].$$

Если $\alpha=m\in\mathbb{N}$, то в соответствии с (3.23), формулы (3.35) и (3.36) дают решения обыкновенного дифференциального уравнения (3.24) в виде

$$y(x)=\int_0^1 G_{m;\,\delta,\mu,\lambda}(t)f(xt)dt,\quad m\in\mathbb{N}, \tag{3.63}$$

или

$$y(x) = \int\limits_0^x G_{m;\,\delta,\mu,\lambda}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\frac{dt}{x}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3.64}$$

где в соответствии с (3.37) и (3.29)

$$G_{m;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi i\delta}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s-m)}{\Gamma(s)(s-s_1)(s-s_2)}x^{-s}ds,\ \gamma = \mathrm{Re}s,\ m \in \mathbb{N}, \tag{3.65}$$

$$s_{1,2} = \frac{3\delta+2\delta m-\mu \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2\delta}, \tag{3.66}$$

$$\mathrm{D} = (3\delta+2\delta m-\mu)^2 - 4\delta\left[\delta m^2+(3\delta-\mu)m-\mu+\lambda+2\delta\right].$$

Из (1.16) для $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ следует:

$$\frac{1}{\Gamma(m-k)} = \frac{1}{(m-k-1)!},\ k = \overline{0, m-1},$$

$$\frac{1}{\Gamma(m-k)} = 0,\ k = m, m+1, \ldots . \tag{3.67}$$

Используя эти соотношения и принимая во внимание (1.22), из теорем 3.8—3.12 получим соответствующие результаты для обыкновенного дифференциального уравнения (3.24). Первые два результата следуют из теорем 3.8 и 3.9.

Теорема 3.17. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\delta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \delta \neq 0$ *и пусть корни* s_1 *и* s_2 *в* (3.66) *такие, что* $s_1 \neq s_2 \neq m-k$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда:*

$$G_{m;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{x^{-m}}{\delta}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(s_1-m)(s_2-m)(m-k-1)!}\frac{(-x)^k}{k!} +$$

$$+\frac{1}{\delta(s_1-s_2)}\left[\frac{\Gamma(s_1-m)}{\Gamma(s_1)}x^{-s_1} - \frac{\Gamma(s_2-m)}{\Gamma(s_2)}x^{-s_2}\right].$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.24) *задается* (3.63) *и* (3.64) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.63) *и* (3.64) *сходятся.*

Теорема 3.18. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\delta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \delta \neq 0$ *и пусть корни* s_1 *и* s_2 *в* (3.66) *такие, что* $s_1 = s_2 \neq m-k$ *для любого* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда:*

$$G_{m;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{x^{-m}}{\delta}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(s_1-m)^2(m-k-1)!}\frac{(-x)^k}{k!} +$$

$$+\frac{\Gamma(s_1-m)}{\delta\Gamma(s_1)}x^{-s_1}\left[\psi(s_1-m)-\psi(s_1)-\ln x\right].$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.24) *задается* (3.63) *и* (3.64) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.63) *и* (3.64) *сходятся.*

При $\alpha = m \in \mathbb{N}$ из теорем 3.10 и 3.11 получим следующие утверждения.

Теорема 3.19. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, δ, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, $\delta \neq 0$ *и пусть корни* s_1 *и* s_2 *в* (3.66) *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $s_1 \neq s_2$, $s_1 = m - n_0$. *Тогда:*

$$G_{m;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{x^{-m}}{\delta} \sum_{k=0, k\neq n_0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!(n_0-k)(m-k-s_2)(m-k-1)!} +$$
$$+\frac{\Gamma(s_2-m)}{\delta\Gamma(s_2)} \frac{x^{-s_2}}{(s_2-m+n_0)} - \frac{(-1)^{n_0} x^{n_0-m}}{\delta n_0!(m-n_0-s_2)\Gamma(m-n_0)} \times$$
$$\times \left[\gamma + \psi(m-n_0) + \frac{1}{m-n_0-s_2} + \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{1}{j-n_0} + \ln x\right].$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.24) *задается* (3.63) *и* (3.64) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.63) *и* (3.64) *сходятся.*

Теорема 3.20. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, δ, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, $\delta \neq 0$ *и пусть корни* s_1 *и* s_2 *в* (3.66) *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $s_1 \neq s_2$, $s_2 = m - n_0$. *Тогда:*

$$G_{m;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{x^{-m}}{\delta} \sum_{k=0, k\neq n_0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!(n_0-k)(m-k-s_1)(m-k-1)!} +$$
$$+\frac{\Gamma(s_1-m)}{\delta\Gamma(s_1)} \frac{x^{-s_1}}{(s_1-m+n_0)} - \frac{(-1)^{n_0} x^{n_0-m}}{\delta n_0!(m-n_0-s_1)\Gamma(m-n_0)} \times$$
$$\times \left[\gamma + \psi(m-n_0) + \frac{1}{m-n_0-s_1} + \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{1}{j-n_0} + \ln x\right].$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.24) *задается* (3.63) *и* (3.64) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.63) *и* (3.64) *сходятся.*

Следующее утверждение следует из теоремы 3.12, если положить $\alpha = m \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.21. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, δ, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, $\delta \neq 0$ *и пусть корни* s_1 *и* s_2 *в* (3.66) *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $s_1 = s_2 = m - n_0$. *Тогда:*

$$G_{m;\,\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{x^{-m}}{\delta} \sum_{k=0, k\neq n_0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!(n_0-k)^2\Gamma(m-k)} +$$
$$+\frac{\left[2\psi(m-n_0) \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{1}{j-n_0} - 2\psi(1) \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{1}{j-n_0} + \psi^2(m-n_0)\right](-1)^{n_0} x^{n_0-m}}{2\delta n_0!\Gamma(m-n_0)} +$$

$$+\frac{\left[\sum\limits_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{(j-n_0)^2}+\left(\sum\limits_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}\right)^2\right](-1)^{n_0}x^{n_0-m}}{2\delta n_0!\Gamma(m-n_0)}+\frac{(-1)^{n_0}}{2\delta n_0!\Gamma(m-n_0)}\Big[\Gamma''(1)-$$

$$-2\psi(1)\psi(m-n_0)-\psi'(m-n_0)\Big]x^{n_0-m}+\frac{(-1)^{n_0}}{2\delta n_0!\Gamma(m-n_0)}\Big[-2\psi(1)+$$

$$+2\psi(m-n_0)+2\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}\Big]x^{n_0-m}\ln x+\frac{(-1)^{n_0}}{2\delta n_0!\Gamma(m-n_0)}\ln^2 x.$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.24) *задается* (3.63) *и* (3.64) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.63) *и* (3.64) *сходятся.*

Далее рассмотрим специальные случаи уравнения (3.24) с $\delta = 0$ и $\lambda = 0$:

$$\mu x^{m+1}y^{(m+1)}(x)+\lambda x^m y^{(m)}(x)=f(x),\quad x>0,\quad m\in\mathbb{N} \tag{3.68}$$

и

$$\delta x^{m+2}y^{(m+2)}(x)+\mu x^{m+1}y^{(m+1)}(x)=f(x),\quad x>0,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{3.69}$$

Решения (3.58), (3.59) и (3.50), (3.51) принимают соответственно вид:

$$y(x)=\int\limits_0^1 G_{m;\,\mu,\lambda}(t)f(xt)dt, \tag{3.70}$$

$$y(x)=\int\limits_0^x G_{m;\,\mu,\lambda}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{x}, \tag{3.71}$$

$$y(x)=\int\limits_0^1 G_{m;\,\delta,\mu}(t)f(xt)dt, \tag{3.72}$$

$$y(x)=\int\limits_0^x G_{m;\,\delta,\mu}\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{x}. \tag{3.73}$$

Используя (3.67) и (1.22), из теорем 3.15 и 3.16 получаем соответствующие результаты для уравнения (3.68).

Теорема 3.22. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$ *и* $\mu,\,\lambda\in\mathbb{C}$, $\mu\neq 0$, $\lambda\neq 0$ *такие, что* $\lambda\neq\mu(n+1)$ *для любого* $n\in\mathbb{N}_0$. *Тогда:*

$$G_{m;\,\mu,\lambda}(x)=\frac{x^{\frac{\lambda}{\mu}-m-1}\Gamma(1-\frac{\lambda}{\mu})}{\mu\Gamma(1+m-\frac{\lambda}{\mu})}-x^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-x)^k}{(m-k-1)!(\mu-\lambda+\mu k)}.$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.68) *задается* (3.70) *и* (3.71) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.70) *и* (3.71) *сходятся.*

Теорема 3.23. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* $\mu,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \mu \neq 0,\ \lambda \neq 0$ *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $\lambda = \mu(n_0+1)$. *Тогда:*

$$G_{m;\,\mu,\lambda}(x) = \frac{(n_0+1)x^{-m}}{\lambda} \sum_{k=0,k\neq n_0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!(n_0-k)(m-k-1)!} -$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}(n_0+1)x^{n_0-m}}{\lambda n_0!\Gamma(m-n_0)}\left[\gamma+\psi(m-n_0)+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\right].$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.68) *задается* (3.70) *и* (3.71) *при условии, что интегралы в правых частях* (3.70) *и* (3.71) *сходятся.*

Аналогично, из (3.67) и (1.22) теоремы 3.13 и 3.14 дают соответствующие результаты для уравнения (3.69).

Теорема 3.24. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C},\ \ \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0$ *такие, что* $\mu \neq \delta(n+1)$ *для любого* $n \in \mathbb{N}_0$. *Тогда:*

$$G_{m;\,\delta,\mu}(x) = \frac{x^{-m+\frac{\mu}{2}-2}\Gamma(1-\frac{\mu}{\delta})}{\delta\Gamma(2+m-\frac{\mu}{\delta})} - x^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-x)^k}{(m-k)!(\delta-\mu+\delta k)}.$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.69) *задается* (3.72) *и* (3.73) *при условии, что интегралы в правой части* (3.72) *и* (3.73) *сходятся.*

Теорема 3.25. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C},\ \ \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0$ *такие, что существует* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $\mu = \delta(n_0+1)$. *Тогда:*

$$G_{\alpha;\,\delta,\mu}(x) = \frac{x^{-1-\alpha}}{\delta}\sum_{k=0,k\neq n_0}^{m-1}\frac{(-x)^k}{k!(n_0-k)(m-k)!} -$$

$$-\frac{(-1)^{n_0}x^{n_0-m-1}}{\delta n_0!\Gamma(m+1-n_0)}\left[\gamma+\psi(m+1-n_0)+\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{1}{j-n_0}+\ln x\right].$$

Частное решение $y(x)$ *уравнения* (3.69) *задается* (3.72) *и* (3.73) *при условии, что интегралы в правой части* (3.72) *и* (3.73) *сходятся.*

Наконец, заметим, что результаты теорем 3.17 и 3.18 остаются справедливыми для предельных случаев для уравнения (3.24) при $\alpha = 0$:

$$\delta x^2 y''(x) + \mu x y'(x) + \lambda y(x) = f(x), \quad x > 0. \tag{3.74}$$

В этом случае соотношения (3.63)—(3.66) принимают вид:

$$y(x) = \int_0^1 G_{\delta,\mu,\lambda}(t) f(xt)dt, \tag{3.75}$$

$$y(x) = \int\limits_0^x G_{\delta,\mu,\lambda}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\frac{dt}{x}, \tag{3.76}$$

$$G_{\delta,\mu,\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi i\delta}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}x^{-s}ds, \quad \gamma = \mathrm{Re}s,$$

$$s_{1,2} = \frac{3\delta-\mu\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2\delta}, \tag{3.77}$$

$$\mathrm{D} = (3\delta-\mu)^2 - 4\delta\big[2\delta-\mu+\lambda\big].$$

Тогда теоремы 3.17 и 3.18 дают следующие результаты.

Теорема 3.26. *Пусть δ, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, $\delta \neq 0$ и пусть корни s_1 и s_2 в* (3.77) *такие, что $s_1 \neq s_2$. Тогда:*

$$G_{\delta,\mu,\lambda}(x)= \frac{1}{\delta(s_1-s_2)}\big(x^{-s_1} - x^{-s_2}\big).$$

Частное решение $y(x)$ уравнения (3.74) *задается* (3.75) *и* (3.76) *при условии, что интегралы в правой части* (3.75) *и* (3.76) *сходятся.*

Теорема 3.27. *Пусть δ, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, $\delta \neq 0$ и пусть корни s_1 и s_2 в* (3.77) *совпадают: $s_1 = s_2$. Тогда:*

$$G_{\delta,\mu,\lambda}(x)= -\frac{1}{\delta}x^{-s_1}\ln x.$$

Частное решение $y(x)$ уравнения (3.74) *задается* (3.75) *и* (3.76) *при условии, что интегралы в правой части* (3.75) *и* (3.76) *сходятся.*

Замечание 3.7. Результаты теорем 3.22 и 3.24 остаются справедливыми в предельном случае $\alpha = 0$ для уравнений (3.68) и (3.69): $\mu xy'(x)+\lambda y(x)=f(x)$, $x > 0$ и $\delta x^2y''(x)+\mu xy'(x)=f(x)$, $x > 0$ соответственно.

3.2.5. Решение уравнения типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$ с тремя дробными производными Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)$. Часть 2

Рассмотрим неоднородное уравнение типа Эйлера с тремя левосторонними дробными производными Лиувилля (1.8) порядка $\alpha+2$ [85], [100]:

$$x^{\alpha+2}\big(\mathcal{D}^{\alpha+2}_{0+}y\big)(x) + \mu x^{\alpha+1}\big(\mathcal{D}^{\alpha+1}_{0+}y\big)(x) + \lambda x^{\alpha}(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y)(x) = f(x). \tag{3.78}$$

Потребуем, чтобы $f,\ f'\ , f'' \in \mathcal{L}_{1-\alpha,1}$. Обозначив $y = \mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{L}_1(0;+\infty)$, из (3.78) получим уравнение Эйлера:

$$x^{\alpha+2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \mu\, x^{\alpha+1}\frac{d\,\varphi(x)}{dx} + \lambda x^{\alpha}\varphi(x) = f(x). \tag{3.79}$$

Далее, используя формулы для преобразования Меллина [8], [9], [45], [49], [59], [85], [102]:

$$\mathcal{M}\big(t^{\alpha}\varphi(t)\big) = \big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha),$$
$$\mathcal{M}\big(t^{\alpha+1}\varphi'(t)\big) = -(s+\alpha)\big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha),$$
$$\mathcal{M}\big(t^{\alpha+2}\varphi''(t)\big) = (s+\alpha+1)(s+\alpha)\big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha),$$

возьмем преобразование Меллина от обеих частей уравнения (3.79):

$$\big(\mathcal{M}\varphi\big)(s+\alpha) = \frac{\big(\mathcal{M}f\big)(s)}{\mathrm{P}(s)}.$$

Введем в рассмотрение дробный аналог функции Грина:

$$G(x) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{P}(1-s)}\right) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\right).$$

Пусть $\operatorname{Re} s_1 < \alpha,\ \operatorname{Re} s_2 < \alpha$. Возможны следующие случаи:

1. Пусть $s_1,\ s_2$ — различные корни многочлена $\mathrm{P}(1-s)$. Тогда:

$$\mathcal{M}G(x) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right).$$

Несложно показать, что тогда:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{s_1-s_2}\left(x^{-s_1} - x^{-s_2}\right), & 0<x<1,\\ 0, \left[\begin{array}{l} x \le 0,\\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

2. Пусть s_1 — корень кратности 2 многочлена $\mathrm{P}(1-s)$. Тогда:

$$\mathcal{M}G(x) = \frac{1}{(s-s_1)^2}.$$

Несложно показать, что тогда:

$$G(x) = \begin{cases} x^{-s_1} - x^{-s_1}\ln x, & 0<x<1,\\ 0, \left[\begin{array}{l} x \le 0,\\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

В обоих случаях выполняются условия теоремы 3.6 и теоремы 3.7 соответственно и уравнение (3.78) имеет единственное решение (3.15).

Краткие выводы по главе. Глава 3 посвящена построению частных решений для неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с тремя и любым конечным числом дробных производных Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ и обобщает результаты, полученные в монографии [85], для неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с двумя дробными производными Лиувилля. С помощью интегрального преобразования Меллина в 3 главе получено представление частных решений дифференциального уравнения типа Эйлера в виде свертки правой части с дробным аналогом Меллина функции Грина. Также в 3 главе дано решение неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ в классе $\mathcal{I}^{\alpha}_{0+}\big(\mathcal{L}_1(0;+\infty)\big)$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $\mathcal{L}_1(0;+\infty)$ в терминах дробного аналога функции Грина. Построены дробные аналоги функции Грина для конечного числа производных Лиувилля в том случае, когда все корни характеристического многочлена различны, а также в случае, когда среди корней характеристического многочлена есть кратные. Сформулированы и доказаны теоремы разрешимости неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$. Рассмотрены частные случаи и примеры. Результаты главы опубликованы в работах [10]–[12], [14], [15], [33], [35], [37], [109]–[111], [114].

ГЛАВА 4

ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ЭЙЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

4.1. Операторы взвешенного дробного интегрирования на интервале $(0;1)$

Многие задачи математической физики и механики сводятся к дифференциальным уравнениям дробного порядка, в частности, к уравнениям Эйлерова типа. В случае, когда порядки соседних производных отличаются на целое число, такие уравнения изучались ранее, например в [11], [15], [21], [22], [85], [100], [109], [110], [113], [114]. Их решение основывалось либо на преобразовании Меллина, либо на сведении к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Если порядки производных произвольные, указанные выше методы применить не удается. В данной 4 главе вводится специальное банахово пространство функций, в котором изучается действие оператора взвешенного дробного интегрирования. С помощью полученных результатов обобщенное дифференциальное уравнение Эйлерова типа с конечным числом производных любого порядка удается свести к системе алгебраических уравнений и дать его решение в замкнутой форме.

По существу в данной главе изучаются операторы дробного интегродифференцирования не в интегральном представлении, а в представлении рядами Тэйлора от аналитических функций. В литературе такие представления операторов дробного интегрирования и дифференцирования получили название: операторы дробного интегродифференцирования Гельфонда–Леонтьева, или Држбашяна–Гельфонда–Леонтьева, см. [59].

Определение 4.1. $\mathrm{PS}_p^+ = \left\{ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k\, x^k \mid x \in (0;1),\ \{f_k\} \in l_p,\ 1 \le p \le +\infty \right\}.$

Пространство PS_p^+ является банаховым с нормой:

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_p^+} = \|\{f_k\}\|_{l_p} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < +\infty,$$

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_\infty^+} = \|\{f_k\}\|_{l_\infty} = \sup_k |f_k|, \quad p = +\infty.$$

Изучим действие на функции из PS_p^+ операторов дробного интегрирования и дифференцирования Римана—Лиувилля порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1,$ определяемых соответственно формулами [59], [102]:

$$(\mathcal{I}_+^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\ (\mathcal{D}_+^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}. \quad (4.1)$$

Пусть $\varphi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$. Обозначим:

$$f(x)=(\mathcal{I}_+^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kt^kdt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{t^kdt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Пусть $x\in(0;1),\ \varepsilon>0.$ В силу свойств степенных рядов $\forall a\in[0;1),$ $\exists n(\varepsilon,a),$ что $\forall n\geq n(\varepsilon,a),\ \ \forall x\in[0;a]:\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}c_kx^k\right|\leq\varepsilon.$ Тогда:

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{\Big(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}c_k\,t^k\Big)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right|\leq\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$

$$=[t=x\tau]=\frac{\varepsilon x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1\frac{d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}=\frac{\varepsilon x^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\leq\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma(\alpha)}a^{\alpha}.$$

Таким образом, f_n сходится к f равномерно на любом отрезке $[0;a],$ $0<a<1.$ Тогда $\forall x\in(0;1)$ имеем:

$$(\mathcal{I}_+^{\alpha}\varphi)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{t^kdt}{(x-t)^{1-\alpha}}=[t=x\tau]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha)}x^{k+\alpha}\int\limits_0^1\frac{\tau^kd\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha)}x^{k+\alpha}\mathrm{B}(k+1,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}x^{k+\alpha}. \quad (4.2)$$

Через $\mathcal{I}_+^{\alpha}\left[\mathrm{PS}_p^+\right]$ обозначим пространство функций, представимых в виде дробного интеграла порядка α с плотностью из PS_p^+. В силу (4.2) и формулы [1], [69]

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}=k^{-\alpha}\Big[1+O\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big]$$

при $k \to \infty$ делаем вывод, что

$$\mathcal{I}_{+}^{\alpha}\left[\mathrm{PS}_{p}^{+}\right]=\left\{f(x)=x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} d_k\, x^k \,\middle|\, \{d_k\, k^{\alpha}\}\in l_p\right\}.$$

Это пространство является банаховым с нормой $\|f\|_{\mathcal{I}_{+}^{\alpha}[\mathrm{PS}_{p}^{+}]} = \|\{d_k\, k^{\alpha}\}\|_{l_p}$. Используя те же рассуждения, что и выше, установим, что

$$(\mathcal{D}_{+}^{\alpha}\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+1-\alpha)\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+2-\alpha)}x^{k-\alpha}.$$

Как известно [59], [102], операторы $\mathcal{I}_{+}^{\alpha}$, $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}$, вообще говоря, не обращают друг друга. Для функций $\varphi \in \mathrm{PS}_{p}^{+}$ имеем: $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}\left[\mathcal{I}_{+}^{\alpha}\right] \equiv \varphi$, $\mathcal{I}_{+}^{\alpha}\left[\mathcal{D}_{+}^{\alpha}\right] \equiv \varphi$. Кроме того, верны операторные равенства: $\mathcal{I}_{+}^{\alpha}\left[\mathcal{I}_{+}^{\beta}\right] \equiv \mathcal{I}_{+}^{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha,\beta \in (0;1)$, $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}\left[\mathcal{D}_{+}^{\beta}\right] \equiv \mathcal{D}_{+}^{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha,\beta \in (0;1)$, что $(\alpha+\beta)\in(0;1)$, $\mathcal{D}_{+}^{\beta}\left[\mathcal{I}_{+}^{\alpha}\right] \equiv \mathcal{I}_{+}^{\alpha-\beta}$, $0<\beta<\alpha<1$.

Определение 4.2.

$$(\mathcal{K}_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}\,(\mathcal{I}_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{x^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad \alpha>0. \tag{4.3}$$

Справедлива следующая

Теорема 4.1. x^m *— собственные функции оператора* $\mathcal{K}_{+}^{\alpha}$ *в* PS_{p}^{+}*, соответствующие собственным значениям*

$$\frac{m!}{\Gamma(m+1+\alpha)}.$$

Доказательство.

$$\mathcal{I}_{+}^{\alpha}(x^m) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}\frac{t^m dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = [t=\tau x] =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{m+\alpha}\int\limits_{0}^{1}\tau^m(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(m+1,\alpha)x^{m+\alpha} =$$

$$=\frac{m!}{\Gamma(m+1+\alpha)}x^{m+\alpha};$$

$$\mathcal{K}_{+}^{\alpha}\left(x^m\right) = \frac{1}{x^{\alpha}}\frac{m!}{\Gamma(m+1+\alpha)}x^{m+\alpha} = \frac{m!}{\Gamma(m+1+\alpha)}x^m = d_m^{\alpha}x^m,$$

где $d_m^\alpha = \frac{m!}{\Gamma(m+1+\alpha)}$. Пусть $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathrm{PS}_p^+$. Тогда:

$$\mathcal{K}_+^\alpha u = \mathcal{K}_+^\alpha \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{K}_+^\alpha \left(x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k^\alpha x^k.$$

Возможность почленного интегрирования обоснована выше. Имеет место

Теорема 4.2. *Оператор* $\mathcal{K}_+^\alpha$ *ограничен в* PS_p^+, $1 \le p \le +\infty$, *при этом:*

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha\| = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Доказательство. При $1 \le p < +\infty$:

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha u\|_{\mathrm{PS}_p^+} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k d_k^\alpha|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_{\mathrm{PS}_p^+} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Можно показать, что последовательность $\{d_m^\alpha\}$ монотонно убывает, поэтому $\left|d_m^\alpha\right|_{\max} = \left|d_0^\alpha\right| = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$. Тогда:

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha u\|_{\mathrm{PS}_p^+} \le \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \|u\|_{\mathrm{PS}_p^+}.$$

Итак, оператор $\mathcal{K}_+^\alpha$ ограничен в PS_p^+.

При $p = +\infty$: $|c_k d_k^\alpha| \le \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sup\limits_k |c_k|$, следовательно:

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha u\|_{\mathrm{PS}_\infty^+} = \sup_k |c_k d_k^\alpha| \le \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sup_k |c_k| \le \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \|u\|_{\mathrm{PS}_\infty^+}.$$

При $u = 1$: $\mathcal{K}_+^\alpha(1) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$, следовательно $\|\mathcal{K}_+^\alpha\| = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Следствие 4.1. *Если* $\alpha > 1$, *то* $\Gamma(1+\alpha) > 1$, *следовательно* $\mathcal{K}_+^\alpha$ *— оператор сжатия.*

Пусть X_1, X_2 — некоторые банаховы пространства функций, $\mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2 = \oslash$, $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2$ — их прямая сумма. Тогда любая функция $f \in \mathrm{X}$ единственным образом представляется в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in \mathrm{X}_1$, $f_2 \in \mathrm{X}_2$. Пространство X банахово с нормой $\|f\|_{\mathrm{X}} = \|f_1\|_{\mathrm{X}_1} + \|f_2\|_{\mathrm{X}_2}$.

Введем следующее весовое пространство аналитических функций.

Определение 4.3. $\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln^\nu x\} = \left\{ f(x) = x^\mu \ln^\nu x \tilde{f}(x),\ \tilde{f}(x) \in \mathrm{PS}_p^+ \right\}$.

Это пространство является банаховым относительно нормы:

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln^\nu x\}} = \|\tilde{f}\|_{\mathrm{PS}_p^+}.$$

В этих пространствах, а также в их прямых суммах будут рассмотрены обобщенные дифференциальные уравнения типа Эйлера.

Пусть $\mathcal{K}_+^\alpha$ — оператор взвешенного дробного интегрирования (4.3).

Теорема 4.3. *Оператор* $\mathcal{K}_+^\alpha$ *ограничен в* $\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}$, $\mu > -1$, $1 \leq p \leq +\infty$, *при этом:*

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.$$

Доказательство.

$$1.\ (\mathcal{K}_+^\alpha\varphi)(x) = \frac{1}{x^\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{\left\{\sum\limits_{n=0}^\infty c_n t^n\right\}t^\mu dt}{(x-t)^{1-\alpha}} =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{x^\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t^{n+\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = [t = x\tau] =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{x^\alpha\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{x^{n+\mu}\tau^{n+\mu}x d\tau}{x^{1-\alpha}(1-\tau)^{1-\alpha}} = x^\mu\sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(n+\mu+1,\alpha)x^n =$$

$$= x^\mu\sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^n = x^\mu\sum_{n=0}^\infty \frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^n.$$

Возможность почленного интегрирования обосновывается так же, как в п. 4.1.

2. Имеем: $\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+1+\mu+\alpha)} \leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}$, следовательно, для $1 \leq p < +\infty$:

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} = \left\{\sum_{n=0}^\infty |c_n|^p\left|\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\left\{\sum_{n=0}^\infty |c_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}}.$$

Для $p = +\infty:$ $\|\mathcal{K}_+^\alpha\varphi\|_{\mathrm{PS}_\infty^+\{x^\mu\}} = \sup\limits_n\left|c_n\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\right| \leq$

$$\leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\sup_n|c_n| = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_\infty^+\{x^\mu\}}.$$

3. Пусть $\varphi = x^\mu$, следовательно $(\mathcal{K}_+^\alpha\varphi)(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}x^\mu$, поэтому:

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.$$

Замечание 4.1. $\mathcal{K}_+^\alpha\left(\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}\right)\neq\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}$.

Действительно, пусть $\varphi=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)x^\mu,\quad f=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_nx^n\right)x^\mu\in\mathrm{PS}_p^+\left(x^\mu\right)$ и $\mathcal{K}_+^\alpha\varphi=f$. Тогда: $x^\mu\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^n=x^\mu\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_nx^n$.

Отсюда, $|c_n|=\left|\frac{\Gamma(n+\mu+1+\alpha)}{\Gamma(n+\mu+1)}g_n\right|=n^\alpha|g_n|\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, и, вообще говоря, $\{c_n\}\notin l_p$.

Теорема 4.4. $\left(\mathcal{D}_+^\alpha\mathcal{I}_+^\alpha\right)\varphi\equiv\varphi,\forall\varphi\in\mathrm{PS}_p^+\left(x^\mu\right)$.

Доказательство. 1. Пусть $0<\alpha<1$, $\varphi=x^\mu\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)$. Тогда:

$$(\mathcal{D}_+^\alpha\mathcal{I}_+^\alpha\varphi)(x)=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x\frac{dt}{(x-t)^\alpha}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right\}=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x\frac{dt}{(x-t)^\alpha}t^{\alpha+\mu}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}t^n\right\}=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\int\limits_0^x\frac{t^{\alpha+\mu+n}dt}{(x-t)^\alpha}=[t=x\tau]=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^{\mu+n+1}\int\limits_0^1\tau^{\alpha+\mu+n}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\mathrm{B}(\alpha+\mu+n+1,1-\alpha)x^{\mu+n+1}=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\mu+n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2+\mu+n)}x^{\mu+n+1}=$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nx^{\mu+n+1}}{\mu+n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{\mu+n}=x^\mu\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\varphi.$$

2. Пусть $\alpha>0$ — произвольное. Тогда $\mathcal{D}_+^\alpha f=\mathcal{D}_+^{[\alpha]}\left(\mathcal{D}_+^{\{\alpha\}}f\right)$.
Доказательство проводится аналогично.

Следствие 4.2. *Пусть* $f\in\mathrm{PS}_p^+\left(x^\mu\right)$. *Равносильны утверждения:*
1. $f=\mathcal{K}_+^\alpha\varphi,\ \varphi\in\mathrm{PS}_p^+\left(x^\mu\right)$;
2. $x^\alpha f(x)\in\mathcal{I}_+^\alpha\left(\mathrm{PS}_p^+\left(x^\mu\right)\right)$.

Рассмотрим $\psi(x)$ — функцию Эйлера. Как известно [57],

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},\ \psi'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}>0,\ \psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x},\ \psi(1)=-C,$$

где $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=0,5772156649...$ — постоянная Маскерони—Эйлера. Положим $\mathrm{F}_\alpha(x)=\psi(x+1)-\psi(x+1+\alpha)$, тогда

$$\mathrm{F}'_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x+1)^2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x+1+\alpha)^2}>0.$$

Следовательно, $\mathrm{F}_\alpha(x)$ возрастает на $(0;+\infty)$. Далее имеем $\mathrm{F}_\alpha(0)=\psi(1)-\psi(1+\alpha)$. Пусть $n-1\le x\le n$. Тогда:

$$\psi(n)-\psi(n+\alpha)\le\psi(x+1)-\psi(x+\alpha)\le\psi(n+1)-\psi(n+1+\alpha),$$

где $\psi(n+1)=\psi(1)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$, $\psi(n+\alpha+1)=\psi(1+\alpha)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+\alpha+1}$. Используя формулу [56]: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha}{(k+1)(k+\alpha+1)}=\frac{1}{\alpha}$, получаем:

$$\mathrm{F}_\alpha(\infty)=\lim_{n\to\infty}\left(\psi(n+1)-\psi(n+\alpha+1)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\psi(1)-\psi(1+\alpha)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha}{(k+1)(k+\alpha+1)}\right)=\psi(1)-\psi(1+\alpha)+\frac{1}{\alpha}.$$

Пусть $0<\alpha<1$. Имеем: $0<\psi(1+\alpha)-\psi(1)<\psi(2)-\psi(1)=1$. Следовательно, $-1<\mathrm{F}_\alpha(0)<0$, $\mathrm{F}_\alpha(\infty)=\psi(1)-\psi(1+\alpha)+\frac{1}{\alpha}=\mathrm{F}_\alpha(0)+\frac{1}{\alpha}>0$. Заметим, что при $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ имеем $|\mathrm{F}_\alpha(\infty)|>|\mathrm{F}_\alpha(0)|$, и при $\alpha\to1$ наоборот $|\mathrm{F}_\alpha(\infty)|<|\mathrm{F}_\alpha(0)|$.

Пусть $\mathrm{M}=\max\{|\mathrm{F}_\alpha(0)|,|\mathrm{F}_\alpha(\infty)|\}$, тогда $|\mathrm{F}_\alpha(x)|\le\mathrm{M}$. Верна формула [28]:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{t^\mu\ln t\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)}x^{\alpha+\mu}\left(\ln x+\mathrm{F}_\alpha(\mu)\right),\ \mu>-1,\ 0<\alpha<1.$$

Теорема 4.5. $(\mathcal{D}_+^\alpha\mathcal{I}_+^\alpha)(x^\mu\ln x)=x^\mu\ln x\,.$

Доказательство. Пусть $0<\alpha<1$. Тогда:

$$\left(\mathcal{D}_+^\alpha\left(\mathcal{I}_+^\alpha(x^\mu\ln x)\right)\right)=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^\alpha}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{\tau^\mu\ln\tau\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right\}=$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha}\left\{\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)}t^{\alpha+\mu}\left(\ln t + \mathrm{F}_\alpha(\mu)\right)\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \frac{t^{\alpha+\mu}\ln t dt}{(x-t)^\alpha}\right\}+$$

$$+\frac{d}{dx}\frac{\Gamma(1+\mu)\mathrm{F}_\alpha(\mu)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\mu)}\int\limits_0^x \frac{t^{\alpha+\mu}dt}{(x-t)^\alpha} =$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1+\alpha+\mu)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)\Gamma(2-\alpha+\alpha+\mu)}x^{1-\alpha+\mu+\alpha}\left(\ln x + \mathrm{F}_{1-\alpha}(\mu+\alpha)\right) +$$

$$+\frac{d}{dx}\frac{\Gamma(1+\mu)\mathrm{B}(\alpha+\mu+1, 1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\mu)}\mathrm{F}_\alpha(\mu)x^{\mu+1} =$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)}\left(\ln x + \mathrm{F}_{1-\alpha}(\mu+\alpha)\right) + \frac{d}{dx}\frac{\mathrm{F}_\alpha(\mu)x^{\mu+1}}{(\mu+1)} =$$

$$= x^\mu\left(\ln x + \mathrm{F}_{1-\alpha}(\mu+\alpha)\right) + \frac{x^\mu}{\mu+1} + \mathrm{F}_\alpha(\mu)x^\mu =$$

$$= x^\mu \ln x + x^\mu\left(\psi(1+\mu+\alpha) - \psi(2+\mu)\right) + \frac{x^\mu}{\mu+1} +$$

$$+x^\mu\left(\psi(\mu+1) - \psi(\alpha+\mu+1)\right) =$$

$$= x^\mu \ln x + x^\mu\Big(\psi(1+\mu+\alpha) - \psi(\mu+1) - \frac{1}{\mu+1}\Big) + \frac{x^\mu}{\mu+1} +$$

$$+x^\mu\left(\psi(\mu+1) - \psi(\alpha+\mu+1)\right) = x^\mu \ln x.$$

Для произвольного $\alpha > 0$ используют $\mathcal{D}_+^\alpha f = \mathcal{D}_+^{[\alpha]}\big(\mathcal{D}_+^{\{\alpha\}} f\big)$.

Теорема 4.6. $(\mathcal{D}_+^\alpha \mathcal{I}_+^\alpha \varphi) \equiv \varphi,\ \forall\varphi \in \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu \ln x\right\}$.

Утверждение теоремы 4.6 вытекает из теоремы 4.5.

Пусть $\mathrm{X} = \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu\right\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu \ln x\right\}$. Пространство X банахово с нормой: $\|\varphi\|_\mathrm{X} = \|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} + \|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}}$.

Теорема 4.7. $(\mathcal{D}_+^\alpha \mathcal{I}_+^\alpha \varphi) \equiv \varphi,\ \forall\varphi \in \mathrm{X}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{X}$, отсюда следует, что $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu\right\}, \varphi_2 \in \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu \ln x\right\}$. Имеем:

$$\left(\mathcal{D}_+^\alpha \mathcal{I}_+^\alpha\right)\varphi = \left(\mathcal{D}_+^\alpha \mathcal{I}_+^\alpha\right)\varphi_1 + \left(\mathcal{D}_+^\alpha \mathcal{I}_+^\alpha\right)\varphi_2 \equiv \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi.$$

Теорема 4.8. *Оператор* $\mathcal{K}_+^\alpha$ *ограниченно действует из* $\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}$ *в* X. *При этом:*

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha \varphi\|_\mathrm{X} \le (\mathrm{M}+1)\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}}.$$

Доказательство.

$$(\mathcal{K}_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{x^\alpha \Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\left\{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right\} t^\mu \ln t dt}{(x-t)^{1-\alpha}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)} \left(\mathrm{F}_\alpha(n+\mu) + \ln x\right) x^{n+\mu} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)} \mathrm{F}_\alpha(n+\mu) x^{n+\mu} +$$

$$+ \ln x \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)} x^{n+\mu} = f_1 + f_2,$$

где $f_1 \in \mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}$, $\quad f_2 \in \mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}$. Имеем:

$$\|f_1\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} \leq \frac{\mathrm{M}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}},$$

$$\|f_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}} \leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}}.$$

Следовательно, $\|\mathrm{K}_+^\alpha \varphi\|_{\mathrm{X}} \leq (\mathrm{M}+1) \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}}$.

Теорема 4.9. *Оператор $\mathcal{K}_+^\alpha$ ограничен в X, при этом:*

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha \varphi\|_{\mathrm{X}} \leq (\mathrm{M}+2) \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \|\varphi\|_{\mathrm{X}}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 \in \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu\right\}$, $\varphi_2 \in \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu \ln x\right\}$, $\mathcal{K}_+^\alpha \varphi = \mathcal{K}_+^\alpha \varphi_1 + \mathcal{K}_+^\alpha \varphi_2$, $\mathcal{K}_+^\alpha \varphi_1 = f_1 \in \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu\right\}$,

$$\|f_1\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} \leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \|\varphi_1\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}},$$

$$\mathcal{K}_+^\alpha \varphi_2 = f_2 + f_3, f_2 \in \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu\right\}, f_3 \in \mathrm{PS}_p^+\left\{x^\mu \ln x\right\},$$

$$\|f_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} \leq \frac{\mathrm{M}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \|\varphi_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}},$$

$$\|f_3\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}} \leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \|\varphi_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}}.$$

Имеем:

$$\|\mathcal{K}_+^\alpha \varphi\|_{\mathrm{X}} = \|\mathcal{K}_+^\alpha (\varphi_1 + \varphi_2)\|_{\mathrm{X}} = \|f_1 + f_2 + f_3\|_{\mathrm{X}} =$$

$$= \|f_1 + f_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} + \|f_3\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}} \leq$$

$$\leq \|f_1\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} + \|f_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} + \|f_3\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}} \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi_1\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} + \frac{\mathrm{M}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}} +$$

$$+\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}}.$$

Имеем:

$$\begin{cases} \|\varphi\|_{\mathrm{X}} = \|\varphi_1\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}}, \\ \|\varphi_1\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{X}}, \\ \|\varphi_2\|_{\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu \ln x\}} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{X}}. \end{cases}$$

Следовательно, $\|\mathcal{K}_+^\alpha \varphi\|_{\mathrm{X}} \leq (\mathrm{M}+2)\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{\mathrm{X}}$.

Замечание 4.2. $\mathcal{K}_+^\alpha\,(\mathrm{X}) \neq \mathrm{X}$.

Проверяется непосредственно тем же способом, что и замечание 4.1.

4.2. Обобщенное неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с производными Римана—Лиувилля любого порядка на интервале $(0;1)$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных Римана—Лиувилля (4.1):

$$a_n x^{m_n}\big(\mathcal{D}_+^{m_n} y\big)(x) + a_{n-1} x^{m_{n-1}}\big(\mathcal{D}_+^{m_{n-1}} y\big)(x) + \ldots + a_1 x^{m_1}\big(\mathcal{D}_+^{m_1} y\big)(x) = f(x), \quad (4.4)$$

где $0 < x < 1$, $m_n > m_{n-1} > \ldots > m_1 > 0$. Здесь $y \in \mathcal{I}_+^{m_n}\{\mathrm{PS}_p^+\}$, f такое, что $x^{-m_n} f(x) \in \mathrm{PS}_p^+$.

Введем следующие обозначения:

$$g = \frac{f}{a_n x^{m_n}},\ \frac{a_{n-1}}{a_n} = A_1,\ \ldots,\ \frac{a_1}{a_n} = A_{n-1};$$

$$m_n - m_{n-1} = \gamma_1,\ \ldots,\ m_n - m_1 = \gamma_{n-1}.$$

Разделим обе части уравнения на $a_n x^{m_n}$ и обозначим $u = \mathcal{D}_+^{m_n} y$. Тогда уравнение (4.4) примет вид:

$$u + A_1 \frac{1}{x^{\gamma_1}} \mathcal{I}_+^{\gamma_1} u + A_2 \frac{1}{x^{\gamma_2}} \mathcal{I}_+^{\gamma_2} u + \ldots + A_{n-1} \frac{1}{x^{\gamma_{n-1}}} \mathcal{I}_+^{\gamma_{n-1}} u = g,$$

где введены обозначения $\mathcal{K}_+^{\gamma_1} u = \frac{1}{x^{\gamma_1}} \mathcal{I}_+^{\gamma_1} u, \ldots, \mathcal{K}_+^{\gamma_{n-1}} u = \frac{1}{x^{\gamma_{n-1}}} \mathcal{I}_+^{\gamma_{n-1}} u$. Тогда:

$$u + A_1 \mathrm{K}_+^{\gamma_1} u + A_2 \mathrm{K}_+^{\gamma_2} u + \ldots + A_{n-1} \mathrm{K}_+^{\gamma_{n-1}} u = g. \quad (4.5)$$

Будем искать решение в пространстве PS_p^+, $g \in \mathrm{PS}_p^+$. Подставляя разложения $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k x^k$, где c_k неизвестны, t_k заданы в уравнение (4.5), получим бесконечную систему уравнений:

$$c_k \left(1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}}\right) = t_k, \ k = \overline{0, \infty}, \tag{4.6}$$

где $d_k^{\gamma_i} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\gamma_i)} = k^{-\gamma_i}\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$ при $k \to \infty$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty} d_k^{\gamma_i} = 0$ и в системе (4.6) лишь конечное число коэффициентов $\left(1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}}\right)$ может обратиться в нуль. Кроме того, $\{c_k\} \in l_p$. Пусть c_k определены из системы (4.6). Тогда решение уравнения (4.4) найдем в виде:

$$y = \mathcal{I}_+^{m_n}(u) = \frac{1}{\Gamma(m_n)} \int\limits_0^x \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k}{(x-t)^{1-m_n}} dt = \frac{1}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_0^x \frac{t^k dt}{(x-t)^{1-m_n}} = [t = \tau x] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m_n} \int\limits_0^1 \tau^k (1-\tau)^{m_n - 1} d\tau = \frac{1}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m_n} \mathrm{B}(k+1, m_n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k!}{\Gamma(k + m_n + 1)} x^{k+m_n} = \frac{x^{m_n}}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k!}{(m_n)_{k+1}} x^k.$$

Суммируя вышеизложенное, заключаем, что верна

Теорема 4.10. 1. *Пусть* $1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}} \neq 0$, $\forall k = \overline{0, \infty}$. *Тогда уравнение* (4.4) *имеет в пространстве* PS_p^+ *единственное решение*

$$y = \frac{x^{m_n}}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k!}{(m_n)_{k+1}} x^k, \tag{4.7}$$

где

$$c_k = \frac{t_k}{1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}}}. \tag{4.8}$$

2. *Пусть* $\exists k_1, ..., k_N :\ 1 + A_1 d_{k_i}^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_{k_i}^{\gamma_{n-1}} = 0$, $i = \overline{1, N}$, *а* $\forall k \neq k_i$, $i = \overline{1, N} :\ 1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + ... + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}} \neq 0$. *Тогда если* $t_{k_i} = 0$, $i = \overline{1, N}$, *то уравнение* (4.4) *имеет в пространстве* PS_p^+ N *линейно независимых решений* (4.7), *где* c_k, $k \neq k_i$, $i = \overline{1, N}$ *находят из* (4.8), c_{k_i}, $i = \overline{1, N}$ *— произвольные постоянные. Если хотя бы одно* $t_{k_i} \neq 0$, $i = \overline{1, N}$, *то уравнение* (4.4) *не имеет решений в* PS_p^+.

4.3. Однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с тремя производными Римана—Лиувилля в пространстве PS_p^+

Рассмотренные в [27] уравнения в силу постановки задачи допускали только аналитические решения. Между тем, при выполнении некоторых условий можно получить решения, имеющие степенные и логарифмические особенности. Так как общий случай в силу громоздкости не поддается эффективному исследованию, рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с тремя дробными производными Римана—Лиувилля (4.1):

$$x^{\alpha+2}\left(\mathcal{D}_+^{\alpha+2}y\right)(x)+\mathrm{A}x^{\alpha+1}\left(\mathcal{D}_+^{\alpha+1}y\right)(x)+\mathrm{B}x^{\alpha}\left(\mathcal{D}_+^{\alpha}y\right)(x)=0, \tag{4.9}$$

где $0<\alpha<1$, $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{C}$ — постоянные коэффициенты. Полагая $u=\mathcal{D}_+^{\alpha+2}y$, представим (4.9) в виде:

$$u(x)+\mathrm{A}\left(\mathcal{K}_+^1u\right)(x)+\mathrm{B}\left(\mathcal{K}_+^2u\right)(x)=0,$$

или в развернутой форме:

$$u(x)+\frac{\mathrm{A}}{x}\int\limits_0^x u(t)dt+\frac{\mathrm{B}}{x^2}\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{4.10}$$

Будем искать решение (4.10) в пространстве $\mathrm{X}=\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\}\oplus\mathrm{PS}_p^+\{x^\mu\ln x\}$, где $\mu>\alpha-1$. Положим:

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{\mu+n}+\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{\mu+n}\ln x.$$

Непосредственно вычисляются интегралы:

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\mu+n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nx^{\mu+n}}{\mu+n+1},$$

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(d_nt^{\mu+n}\right)\ln t dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_nx^{\mu+n}}{\mu+n+1}\big(\ln x+\mathrm{F}_1(\mu+n)\big),$$

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^x(x-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\mu+n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nx^{\mu+n}}{(\mu+n+2)(\mu+n+1)},$$

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^x(x-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}d_nt^{\mu+n}\right)\ln t dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_nx^{\mu+n}}{(\mu+n+2)(\mu+n+1)}\big(\ln x+\mathrm{F}_2(\mu+n)\big),$$

где $\mathrm{F}_1(\mu+n)=\psi(\mu+n+1)-\psi(\mu+n+2)$, $\mathrm{F}_2(\mu+n)=\psi(\mu+n+1)-\psi(\mu+n+3)$. Подставляя эти значения в (4.10), для коэффициентов c_n, d_n получим уравнения:

$$c_n\left(1+\frac{\mathrm{A}}{\mu+n+1}+\frac{\mathrm{B}}{(\mu+n+1)(\mu+n+2)}\right)+$$

$$+d_n\left(\ln x+\frac{\mathrm{A}\ln x}{\mu+n+1}+\frac{\mathrm{A}}{\mu+n+1}\mathrm{F}_1(\mu+n)\right)+$$

$$+\mathrm{B}d_n\left(\frac{1}{(\mu+n+1)(\mu+n+2)}\ln x+\frac{1}{(\mu+n+1)(\mu+n+2)}\mathrm{F}_2(\mu+n)\right)=0,$$

$n=0,1,2\ldots$. Здесь множители при c_n, d_n зависят от суммы $\mu+n$ таким образом, что при уменьшении n увеличивается μ и наоборот. Конечное выражение для $u(x)$ при этом не изменяется. Полагая минимально возможное значение $n=0$, отсюда получим:

$$c_0\left\{1+\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}+\frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}\right\}+d_0\left\{1+\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}+\frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}\right\}\ln x+$$

$$+d_0\left(\mathrm{F}_2(\mu)\frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}+\mathrm{F}_1(\mu)\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}\right)=0. \qquad (4.11)$$

Чтобы в (4.11) существовало решение $c_0\neq 0$, $d_0\neq 0$, необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$1+\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}+\frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}=0, \qquad (4.12)$$

$$\mathrm{F}_2(\mu)\frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}+\mathrm{F}_1(\mu)\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}=0, \qquad (4.13)$$

где

$$\begin{cases}\mathrm{F}_1(\mu)=\psi(\mu+1)-\psi(\mu+2)=-\frac{1}{\mu+1},\\ \mathrm{F}_2(\mu)=\psi(\mu+1)-\psi(\mu+3)=-\frac{1}{\mu+1}-\frac{1}{\mu+2}=-\frac{2\mu+3}{(\mu+1)(\mu+2)}.\end{cases}$$

Отсюда находим: $\mathrm{A}=-2\mu-3$, $\mathrm{B}=(\mu+2)^2$. Подставляя это в (4.12), получим $\left(\mu+\frac{\mathrm{A}+3}{2}\right)^2=0$, откуда $\mu=-\frac{\mathrm{A}+3}{2}$. При этом равенство (4.13) также верно. При $n>0$ имеем $c_n=d_n=0$.

Уравнение (4.12) играет роль характеристического. Таким образом, если характеристическое уравнение (4.12) имеет 1 корень кратности 2 и $-\frac{\mathrm{A}+3}{2}>\alpha-1$, то уравнение (4.10) имеет в X решение:

$$u(x)=c_0x^{-\frac{\mathrm{A}+3}{2}}+d_0x^{-\frac{\mathrm{A}+3}{2}}\ln x, \qquad (4.14)$$

где c_0, d_0 — произвольные постоянные.

Если характеристическое уравнение (4.12) имеет 2 простых корня μ_1 и μ_2, то равенство (4.13) не верно и $d_0 = 0$. Тогда уравнение (4.10) имеет решение:

$$u(x) = c_{01}x^{\mu_1} + c_{02}x^{\mu_2},$$

где константы c_{01}, c_{02} выбираются произвольно. Очевидно в этом случае

$$u(x) \in \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_1}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_2}\}.$$

Для нахождения решения уравнения (4.9) получаем уравнение $\mathcal{D}_+^{\alpha+2}y = u$. При условии $\mu > \alpha - 1$ имеем из (4.14):

$$y_0(x) = \gamma x^{\mu+2} + \delta x^{\mu+2}\ln x. \tag{4.15}$$

В случае различных корней характеристического уравнения из (4.15) получаем:

$$y_0(x) = \gamma x^{\mu_1+2} + \delta x^{\mu_2+2}, \tag{4.16}$$

где γ, δ — произвольные постоянные.

Теорема 4.11. *Однородное уравнение* (4.9) *имеет* 2 *линейно независимых решения вида* (4.15), *если характеристическое уравнение* (4.12) *имеет* 1 *корень кратности* 2 *и вида* (4.16), *если уравнение* (4.12) *имеет* 2 *различных корня. Эти решения принадлежат пространству* $\mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu}\ln x\}$ *или* $\mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_1}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_2}\}$ *соответственно.*

Замечание 4.3. В случае комплексных корней характеристического уравнения будем требовать выполнения условия $\mathrm{Re}\mu > \alpha - 1$.

Общий случай однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с любым числом производных рассматривается аналогично.

4.4. Неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с тремя производными Римана—Лиувилля в пространстве PS_p^+

Стандартный подход к исследованию неоднородного уравнения Эйлера позволяет получить частное решение в явном виде только для правых частей определенного типа. Предложенный в п. 4.3 способ позволяет рассматривать правую часть из максимально широкого класса.

Пусть дано неоднородное уравнение:

$$x^{\alpha+2}\left(\mathcal{D}_+^{\alpha+2}y\right)(x) + \mathrm{A}x^{\alpha+1}\left(\mathcal{D}_+^{\alpha+1}y\right)(x) + \mathrm{B}x^{\alpha}\left(\mathcal{D}_+^{\alpha}y\right)(x) = f(x), \tag{4.17}$$

$0 < x < 1$. Тем же способом, что и в п. 4.3, представим (4.17) в виде:

$$u(x) + \mathrm{A}\left(\mathcal{K}_+^1 u\right)(x) + \mathrm{B}\left(\mathcal{K}_+^2 u\right)(x) = g(x), \tag{4.18}$$

где $u = \mathcal{D}_+^{\alpha+2} y$, $g(x) = x^{-\alpha-2} f(x)$.

Частное решение уравнения (4.18) будем искать в пространстве $\mathrm{PS}_p^+\{x^\nu\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^\nu \ln x\}$, где $\nu > \alpha - 1$, правую часть в силу теоремы 4.9 следует выбирать из этого же пространства. Положим:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n x^{\nu+n} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{d}_n x^{\nu+n} \ln x,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\nu+n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{\nu+n} \ln x.$$

Подставляя эти разложения в (4.18) и приравнивая соответствующие коэффициенты, сведем (4.18) к бесконечной системе уравнений:

$$\tilde{c}_n \left\{1 + \frac{\mathrm{A}}{\nu+n+1} + \frac{\mathrm{B}}{(\nu+n+1)(\nu+n+2)}\right\} +$$

$$+\tilde{d}_n \left\{\mathrm{F}_2(\nu+n)\frac{\mathrm{B}}{(\nu+n+1)(\nu+n+2)} + \mathrm{F}_1(\nu+n)\frac{\mathrm{A}}{\nu+n+1}\right\} = a_n, \tag{4.19}$$

$$\tilde{d}_n \left\{1 + \frac{\mathrm{A}}{\nu+n+1} + \frac{\mathrm{B}}{(\nu+n+1)(\nu+n+2)}\right\} = b_n,\ n = 0, 1, 2, \dots. \tag{4.20}$$

Пусть $\nu = -\frac{\mathrm{A}+3}{2}$ — кратный корень характеристического уравнения (4.12). Тогда из (4.12), (4.13) вытекает, что следует потребовать выполнения условия $b_0 = 0$, $\tilde{c}_0$ и $\tilde{d}_0$ выбираются произвольно. Остальные $\tilde{c}_n$, $\tilde{d}_n$, $n > 0$ определяются из (4.19), (4.20) однозначно. Используя (4.15), получаем общее решение уравнения (4.17) в виде:

$$y(x) = \gamma x^{\nu+2} + \delta x^{\nu+2} \ln x + \mathcal{I}_+^{\alpha+2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{c}_n x^\nu + \tilde{d}_n x^\nu \ln x\right]\right\}, \tag{4.21}$$

где γ, δ — произвольные константы. Это решение принадлежит пространству $\mathrm{PS}_p^+\{x^\nu\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^\nu \ln x\}$.

Пусть уравнение (4.12) имеет 2 различных корня μ_1, μ_2. Если $\nu = \mu_1$ (или $\nu = \mu_2$), требуем $b_0 = 0$. При этом $\tilde{d}_0 = 0$, $\tilde{c}_0$ выбирается произвольно, остальные $\tilde{c}_n$ и $\tilde{d}_n$ находятся из (4.19), (4.20) однозначно. С учетом (4.16) общее решение уравнения (4.17) получим в виде:

$$y(x) = \gamma x^{\mu_1+2} + \delta x^{\mu_2+2} + \mathcal{I}_+^{\alpha+2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{c}_n x^\nu + \tilde{d}_n x^\nu \ln x\right]\right\}. \tag{4.22}$$

При этом $y(x) \in \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_1}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_2}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\nu}\ln x\}$.

Пусть ν не является корнем уравнения (4.12). Если при некотором $n = n_0$ коэффициент при $\tilde{d}_n$ в (4.20) обращается в нуль, то $\tilde{d}_{n_0} = 0$, $\tilde{c}_{n_0}$ выбирается произвольно. Остальные $\tilde{c}_n$, $\tilde{d}_n$ находятся однозначно. При этом требуем $b_{n_0} = 0$. Общее решение уравнения (4.17) находим в форме:

$$y(x) = y_0(x) + \mathcal{I}_+^{\alpha+2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\tilde{c}_n x^{\nu} + \tilde{d}_n x^{\nu}\ln x\right]\right\}, \tag{4.23}$$

где $y_0(x)$ — общее решение однородного уравнения (4.9) вида (4.15) или (4.16). Заметим, что решение (4.23) содержит 2 произвольные константы, так как слагаемое $\mathcal{I}_+^{\alpha+2}(\tilde{c}_{n_0}x^{\nu})$ группируется с одним из слагаемых в (4.15) или (4.16). При этом решение (4.23) принадлежит одному из пространств: $\mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu}\ln x\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\nu}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\nu}\ln x\}$ или $\mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_1}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\mu_2}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\nu}\} \oplus \mathrm{PS}_p^+\{x^{\nu}\ln x\}$.

Таким образом, верна

Теорема 4.12. *Неоднородное уравнение* (4.17) *имеет* 2 *линейно независимых решения вида* (4.21), *если* ν *— кратный корень уравнения* (4.12), *вида* (4.22), *если* ν *— простой корень уравнения* (4.12), *вида* (4.23), *если* ν *не является корнем уравнения* (4.12). *Это решение имеет степенно–логарифмические особенности и принадлежит прямой сумме соответствующих пространств.*

Общий случай неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с любым числом производных рассматривается аналогично.

4.5. Операторы взвешенного дробного интегрирования на полуоси $(1;+\infty)$

Определение 4.4. $\mathrm{PS}_p^- = \left\{ f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} f_k x^k \;\middle|\; x \in (1;+\infty),\ \{f_k\} \in l_p,\ 1 \le p \le +\infty \right\}$.

Пространство PS_p^- банахово с нормой:

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_p^-} = \|\{f_k\}\|_{l_p} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1} |f_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < +\infty,$$

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_\infty^-} = \|\{f_k\}\|_{l_\infty} = \sup_k |f_k|, \quad p = +\infty.$$

Определение 4.5. $\mathrm{PS}_p^{-}\{x^\mu \ln^\nu x\}=\Big\{f(x)= x^\mu \ln^\nu x\tilde{f}(x)\,\Big|\,\tilde{f}\in \mathrm{PS}_p^{-}\Big\}$,

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_p^{-}\{x^\mu \ln^\nu x\}} = \|\tilde{f}\|_{\mathrm{PS}_p^{-}}, \quad 1\leq p\leq +\infty.$$

Дробные интегралы и производные Лиувилля порядка $\alpha\in(0;1)$ на полуоси $(1;+\infty)$ определим по формулам (1.7), (1.9) [59], [102].

Непосредственно вычисляется интеграл:

$$(\mathcal{I}_-^\alpha\varphi)(x^{-\lambda}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^\infty \frac{t^{-\lambda}dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = \frac{\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda)}x^{\alpha-\lambda},\ \forall\lambda>\alpha. \tag{4.24}$$

Дифференцированием по параметру λ получаем:

$$(\mathcal{I}_-^\alpha\varphi)(x^{-\lambda}\ln x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^\infty \frac{t^{-\lambda}\ln t dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = -\frac{d}{d\lambda}\left\{x^{\alpha-\lambda}\frac{\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda)}\right\} =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda)}x^{\alpha-\lambda}\Big\{\ln x - \big(\psi(\lambda-\alpha)-\psi(\lambda)\big)\Big\} =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda)}x^{\alpha-\lambda}\Big\{\ln x - \mathrm{F}_\alpha\big(\lambda-\alpha-1\big)\Big\}, \tag{4.25}$$

где $\mathrm{F}_\alpha\big(\lambda-\alpha-1\big) = \psi(x+1)-\psi(x+1+\alpha)$.

Используя (4.24), (4.25) получим:

$$\mathcal{D}_-^\alpha\mathcal{I}_-^\alpha\{x^{-\lambda}\} = x^{-\lambda},\ \ \mathcal{D}_-^\alpha\mathcal{I}_-^\alpha\{x^{-\lambda}\ln x\} = x^{-\lambda}\ln x.$$

Отсюда вытекает

Теорема 4.13. $\mathcal{D}_-^\alpha\mathcal{I}_-^\alpha\{\varphi\}\equiv\varphi$, *если* φ *принадлежит любому из пространств* PS_p^{-}, $\mathrm{PS}_p^{-}\{x^\mu\}$, $\mathrm{PS}_p^{-}\{x^\mu\ln^\nu x\}$, $\forall\mu<1-\alpha$.

Введем оператор взвешенного дробного интегрирования:

$$(\mathcal{K}_-^\alpha\varphi)(x)=\big(x^{-\alpha}\mathcal{I}_-^\alpha\varphi\big)(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^\infty\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

Из (4.24), (4.25) вытекает:

$$\mathcal{K}_-^\alpha\left\{x^{-\lambda}\right\} = d_\alpha^\lambda x^{-\lambda}, \tag{4.26}$$

$$\mathcal{K}_-^\alpha\left\{x^{-\lambda}\ln x\right\} = d_\alpha^\lambda x^{-\lambda}\Big\{\ln x - \mathrm{F}_\alpha\big(\lambda-\alpha-1\big)\Big\}, \tag{4.27}$$

где $d_\alpha^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda)}$.

Теорема 4.14. *Оператор* $\mathcal{K}_-^\alpha$ *ограничен в* $\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}$, $\mu < 1-\alpha$, $1 \le p < +\infty$, *при этом:*

$$\|\mathcal{K}_-^\alpha\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}} = d_\alpha^{1-\mu}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}$, тогда $\varphi(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k x^{\mu+k}$, где $\{c_k\} \in l_p$. Из (4.26) получаем:

$$(\mathcal{K}_-^\alpha\varphi)(x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k d_\alpha^{-\mu-k} x^{\mu+k}.$$

Почленное интегрирование ряда обосновывается стандартным образом. Верно неравенство:

$$\frac{\Gamma(-k-\mu-\alpha)}{\Gamma(-k-\mu)} \le \frac{\Gamma(1-\mu-\alpha)}{\Gamma(1-\mu)},\ \forall k = -1, -2, \dots .$$

При $1 \le p < +\infty$ имеем:

$$\|\mathcal{K}_-^\alpha\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1} |c_k|^p |d_\alpha^{-\mu-k}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{\Gamma(1-\mu-\alpha)}{\Gamma(1-\mu)} \left\{\sum_{k=-\infty}^{-1} |c_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = d_\alpha^{1-\mu}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}}.$$

Для $p = +\infty$:

$$\|\mathcal{K}_-^\alpha\varphi\|_{\mathrm{PS}_\infty^-\{x^\mu\}} = \sup_k |c_k d_\alpha^{-\mu-k}| \le d_\alpha^{1-\mu} \sup_k |c_k| = d_\alpha^{1-\mu}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_\infty^-\{x^\mu\}}.$$

Если $\varphi(x) = x^{\mu-1}$, то $(\mathcal{K}_-^\alpha\varphi)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu-\alpha)}{\Gamma(1-\mu)} x^{\mu-1}$, откуда вытекает, что $\|\mathcal{K}_-^\alpha\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}} = d_\alpha^{1-\mu}$.

Обозначим $\mathrm{X} = \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\} \oplus \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu \ln x\}$. Любая функция $\varphi \in \mathrm{X}$ единственным образом представляется в виде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}$, $\varphi_2 \in \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu \ln x\}$, $\|\varphi\|_{\mathrm{X}} = \|\varphi_1\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}} + \|\varphi_2\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu \ln x\}}$. Из теоремы 4.13 вытекает

Теорема 4.15. $\mathcal{D}_-^\alpha \mathcal{I}_-^\alpha\{\varphi\} \equiv \varphi,\ \forall\varphi \in \mathrm{X}$.

Пусть $\mathrm{M} = \max\{|\mathrm{F}_\alpha(0)|, |\mathrm{F}_\alpha(+\infty)|\}$.

Теорема 4.16. *Оператор* $\mathcal{K}_-^\alpha$ *ограниченно действует из* $\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu \ln x\}$ *в* X. *При этом:*

$$\|\mathcal{K}_-^\alpha\varphi\|_{\mathrm{X}} \le (\mathrm{M}+1)\, d_\alpha^{1-\mu}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu \ln x\}}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi\in \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu \ln x\}$.

Тогда $\varphi(x)=\ln x\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k x^{\mu+k}$, $\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\ln x\}}=\|c_k\|_{l_p}$. Используя (4.27), имеем:

$$(\mathcal{K}_-^\alpha\varphi)(x)=\mathcal{K}_-^\alpha\left\{\ln x\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k x^{\mu+k}\right\}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k d_\alpha^{-k-\mu} x^{\mu+k}\Big\{\ln x-\mathrm{F}_\alpha(-\mu-k-\alpha-1)\Big\}=$$

$$=x^\mu\ln x\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k d_\alpha^{-k-\mu}x^k - x^\mu\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k d_\alpha^{-k-\mu}\mathrm{F}_\alpha(-\mu-k-\alpha-1)x^k=f_1(x)+f_2(x),$$

где $f_1\in \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\ln x\}$, $f_2\in \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}$. Для норм получим оценки:

$$\|f_1\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\ln x\}}\le d_\alpha^{1-\mu}\|\{c_k\}\|_{l_p}=d_\alpha^{1-\mu}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\ln x\}},$$

$$\|f_2\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}}\le \mathrm{M}d_\alpha^{1-\mu}\|\{c_k\}\|_{l_p}=\mathrm{M}d_\alpha^{1-\mu}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\ln x\}}.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{K}_-^\alpha\varphi\|_{\mathrm{X}}=\|f_1\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\ln x\}}+\|f_2\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}}\le(\mathrm{M}+1)d_\alpha^{1-\mu}\|\varphi\|_{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\ln x\}}.$$

Тем же способом, что и теорема 4.9, доказывается

Теорема 4.17. *Оператор* $\mathcal{K}_-^\alpha$ *ограничен в* X, *при этом:*

$$\|\mathcal{K}_-^\alpha\varphi\|_{\mathrm{X}}\le(\mathrm{M}+2)\,d_\alpha^{1-\mu}\|\varphi\|_{\mathrm{X}}.$$

4.6. Обобщенное неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с производными Лиувилля любого порядка на полуоси $(1;+\infty)$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных Лиувилля (1.9):

$$a_n x^{m_n}(\mathcal{D}_-^{m_n}y)(x)+a_{n-1}x^{m_{n-1}}\big(\mathcal{D}_-^{m_{n-1}}y\big)(x)+\ldots+a_1x^{m_1}(\mathcal{D}_-^{m_1}y)(x)=f(x),\quad(4.28)$$

где $1<x<+\infty$, $m_n>m_{n-1}>\ldots>m_1>0$ — произвольные положительные числа,

$$\big(\mathcal{D}_-^{m_j}y\big)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[m_j]}\mathcal{D}_-^{\{m_j\}}y\,(x)\,,$$

где $[m_j],\{m_j\}$ — соответственно целая и дробная часть числа m_j.

Пусть $y \in \mathcal{I}_-^{m_n}\{\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}\}$, где $\mu < 1-m_n$, f такое, что $x^{-m_n}f(x) \in \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}$. Введем следующие обозначения:

$$g = \frac{f}{a_n x^{m_n}}, \frac{a_{n-1}}{a_n} = A_1, ..., \frac{a_1}{a_n} = A_{n-1};$$
$$m_n - m_{n-1} = \gamma_1, ..., m_n - m_1 = \gamma_{n-1}.$$

Разделив обе части уравнения (4.28) на $a_n x^{m_n}$ и обозначив $u = \mathcal{D}_-^{m_n} y$, приведем указанное уравнение к виду:

$$u + A_1 \frac{1}{x^{\gamma_1}} \mathcal{I}_-^{\gamma_1} u + A_2 \frac{1}{x^{\gamma_2}} \mathcal{I}_-^{\gamma_2} u + ... + A_{n-1} \frac{1}{x^{\gamma_{n-1}}} \mathcal{I}_-^{\gamma_{n-1}} u = g,$$

где введены обозначения $\mathcal{K}_-^{\gamma_1} u = \frac{1}{x^{\gamma_1}} \mathcal{I}_-^{\gamma_1} u, ..., \mathcal{K}_-^{\gamma_{n-1}} u = \frac{1}{x^{\gamma_{n-1}}} \mathcal{I}_-^{\gamma_{n-1}} u$. Тогда:

$$u + A_1 \mathcal{K}_-^{\gamma_1} u + A_2 \mathcal{K}_-^{\gamma_2} u + ... + A_{n-1} \mathcal{K}_-^{\gamma_{n-1}} u = g. \tag{4.29}$$

Решение будем искать в пространстве $\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}$, $g \in \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}$. Подставляя в (4.29) разложения $u = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k x^{\mu+k}$, $g = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} t_k x^{\mu+k}$, где c_k — неизвестные, t_k — заданы, используя (4.26) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим бесконечную систему уравнений:

$$c_k \left(1 + A_1 d_{\gamma_1}^{-\mu-k} + ... + A_{n-1} d_{\gamma_{n-1}}^{-\mu-k}\right) = t_k, \ k = \overline{-\infty, -1}, \tag{4.30}$$

где $d_{\gamma_j}^{-\mu-k} = \frac{\Gamma(-\mu-k-\gamma_j)}{\Gamma(-\mu-k)} = |k|^{-\gamma_j}\left[1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right)\right]$ при $k \to -\infty$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{k\to-\infty} d_{\gamma_j}^{-\mu-k} = 0$ и в системе (4.30) лишь конечное число коэффициентов при c_k может обратиться в нуль. При этом $\{c_k\} \in l_p$.

Пусть c_k определены из системы (4.30), тогда, используя (4.26), решение уравнения (4.28) найдем в виде:

$$y = \mathcal{I}_-^{m_n}\left(u\right) = \mathcal{I}_-^{m_n}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k x^{\mu+k}\right) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \mathcal{I}_-^{m_n}\left(x^{\mu+k}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \frac{\Gamma(-\mu-k-m_n)}{\Gamma(-\mu-k)} x^{m_n+\mu+k} = x^{\mu+m_n} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k d_{m_n}^{-\mu-k} x^k.$$

Из вышеизложенного вытекает

Теорема 4.18. 1. *Пусть* $1 + A_1 d_{\gamma_1}^{-\mu-k} + ... + A_{n-1} d_{\gamma_{n-1}}^{-\mu-k} \neq 0$, $\forall k = \overline{-\infty, -1}$. *Тогда уравнение (4.28) имеет в пространстве* $\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}$ *единственное решение*

$$y = x^{\mu+m_n} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k d_{m_n}^{-\mu-k} x^k, \tag{4.31}$$

где

$$c_k = \frac{t_k}{1 + A_1 d_{\gamma_1}^{-\mu-k} + ... + A_{n-1} d_{\gamma_{n-1}}^{-\mu-k}}. \tag{4.32}$$

2. *Пусть* $\exists k_1, ..., k_N$, *что* $1 + A_1 d_{\gamma_1}^{-\mu-k_j} + ... + A_{n-1} d_{\gamma_{n-1}}^{-\mu-k_j} = 0$, $\forall j = \overline{1, N}$, *а* $\forall k \neq k_j$, $j = \overline{1, N}$: $1 + A_1 d_{\gamma_1}^{-\mu-k} + ... + A_{n-1} d_{\gamma_{n-1}}^{-\mu-k} \neq 0$. *Тогда если* $t_{k_j} = 0, j = \overline{1, N}$, *то уравнение* (4.28) *имеет в пространстве* $\mathrm{PS}_p^- \{x^\mu\}$ N *линейно независимых решений вида* (4.31), *где* c_k, $k \neq k_j$, $j = \overline{1, N}$ *находятся из* (4.32), c_{k_j}, $j = \overline{1, N}$ *выбираются произвольно. Если хотя бы одно из* $t_{k_j} \neq 0, j = \overline{1, N}$, *то уравнение* (4.28) *не имеет решений в* $\mathrm{PS}_p^- \{x^\mu\}$.

4.7. Однородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с тремя производными Лиувилля в пространстве PS_p^-

Пусть $\mathrm{X} = \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\} \oplus \mathrm{PS}_p^-\{x^\mu \ln x\}$.

В общем случае определить условия, при которых уравнение (4.28) имеет решение в X не удается ввиду большой сложности вычислений. Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с тремя дробными производными Лиувилля (1.9):

$$x^{\alpha+2} \left(\mathcal{D}_-^{\alpha+2} y\right)(x) + \mathrm{A} x^{\alpha+1} \left(\mathcal{D}_-^{\alpha+1} y\right)(x) + \mathrm{B} x^{\alpha} \left(\mathcal{D}_-^{\alpha} y\right)(x) = 0. \tag{4.33}$$

Полагая $u = \mathcal{D}_-^{\alpha+2} y$, представим (4.33) в виде:

$$u(x) + \mathrm{A} \left(\mathcal{K}_-^1 u\right)(x) + \mathrm{B} \left(\mathcal{K}_-^2 u\right)(x) = 0. \tag{4.34}$$

Будем искать решение (4.34) в пространстве X с некоторым $\mu < -1 - \alpha$. Положим:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k x^{\mu+k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} b_k x^{\mu+k} \ln x. \tag{4.35}$$

Используя (4.26), (4.27), подставляя (4.35) в (4.34) и приравнивая соответствующие коэффициенты, получим бесконечную систему уравнений:

$$c_k \left(1 + \mathrm{A} d_1^{-\mu-k} + \mathrm{B} d_2^{-\mu-k}\right) x^{\mu+k} + b_k \left(1 + \mathrm{A} d_1^{-\mu-k} + \mathrm{B} d_2^{-\mu-k}\right) x^{\mu+k} \ln x +$$

$$+ b_k \left(-\mathrm{A} d_1^{-\mu-k} \mathrm{F}_1(-\mu-k-2) - \mathrm{B} d_2^{-\mu-k} \mathrm{F}_2(-\mu-k-3)\right) x^{\mu+k} = 0. \tag{4.36}$$

Чтобы уравнение (4.34) имело решение в X, необходимо и достаточно, чтобы система (4.36) имела ненулевое решение. Эта система явно зависит от суммы $(\mu + k)$, поэтому для нахождения μ можно положить $k = -1$.

Используя значения

$$d_1^{1-\mu} = \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1-\mu)} = -\frac{1}{\mu}, \quad d_2^{1-\mu} = \frac{\Gamma(-\mu-1)}{\Gamma(1-\mu)} = \frac{1}{\mu(\mu+1)},$$

$$\mathrm{F}_1(-\mu-1) = \psi(-\mu) - \psi(1-\mu) = \frac{1}{\mu},$$

$$\mathrm{F}_2(-\mu-2) = \psi(-\mu-1) - \psi(-\mu+1) = \frac{2\mu+1}{\mu(\mu+1)},$$

сведем (4.36) при $k = -1$ к системе уравнений:

$$1 - \frac{\mathrm{A}}{\mu} + \frac{\mathrm{B}}{\mu(\mu+1)} = 0, \tag{4.37}$$

$$-\frac{\mathrm{A}}{\mu^2} + \frac{\mathrm{B}(2\mu+1)}{\mu^2(\mu+1)^2} = 0. \tag{4.38}$$

Если при некотором $\mu < -1-\alpha$ оба уравнения этой системы обращаются в верное равенство, то уравнение (4.34) будет иметь решение в пространстве X.

Решая эту систему, находим $\mathrm{A} = 2\mu + 1$, $\mathrm{B} = (\mu+1)^2$. При этом уравнение (4.37) примет вид $\left(\mu - \frac{\mathrm{A}-1}{2}\right)^2 = 0$. Отсюда находим $\mu = \frac{\mathrm{A}-1}{2}$. Равенство (4.38) при этом тоже верно.

Таким образом, если характеристическое уравнение (4.37) имеет кратный корень и $\frac{\mathrm{A}-1}{2} < -1-\alpha$, то уравнение (4.34) будет иметь в X решение:

$$u(x) = c_{-1}x^{\frac{\mathrm{A}-1}{2}} + b_{-1}x^{\frac{\mathrm{A}-1}{2}}\ln x, \tag{4.39}$$

где c_{-1}, b_{-1} — произвольные постоянные (остальные c_k, b_k при $k \neq -1$ следует положить равными нулю).

Если характеристическое уравнение (4.37) имеет 2 простых корня μ_1 и μ_2, то равенство (4.38) не верно и $b_{-1} = 0$. Тогда уравнение (4.34) имеет решение:

$$u(x) = c_{-11}x^{\mu_1} + c_{-12}x^{\mu_2}, \tag{4.40}$$

где константы c_{-11}, c_{-12} выбираются произвольно. В этом случае:

$$u(x) \in \mathrm{PS}_p^-\{x^{\mu_1}\} \oplus \mathrm{PS}_p^-\{x^{\mu_2}\}.$$

Для нахождения решения уравнения (4.33) получаем уравнение $\mathcal{D}_-^{\alpha+2}y = u$. При условии $\mu < -1-\alpha$ имеем из (4.39):

$$y_0(x) = \gamma x^{\mu+2} + \delta x^{\mu+2}\ln x. \tag{4.41}$$

В случае различных корней характеристического уравнения (4.37) из (4.40) находим:

$$y_0(x) = \gamma x^{\mu_1+2} + \delta x^{\mu_2+2}, \tag{4.42}$$

где γ, δ — произвольные постоянные.

Теорема 4.19. *Однородное уравнение* (4.33) *имеет* 2 *линейно независимых решения вида* (4.41), *если характеристическое уравнение* (4.37) *имеет* 1 *корень кратности* 2 *и вида* (4.42), *если уравнение* (4.37) *имеет* 2 *различных корня. Эти решения принадлежат пространству* $\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\}\oplus\mathrm{PS}_p^-\{x^\mu\ln x\}$ *или* $\mathrm{PS}_p^-\{x^{\mu_1}\}\oplus\mathrm{PS}_p^-\{x^{\mu_2}\}$ *соответственно.*

Замечание 4.4. В случае комплексных корней характеристического уравнения будем требовать выполнения условия $\mathrm{Re}\mu < -1-\alpha$.

Замечание 4.5. Соответствующее неоднородное уравнение исследуется так же, как в п. 4.4.

Краткие выводы по главе. В главе 4 введены специальные банаховы пространства функций PS_p^+, PS_p^- и их весовые аналоги, в которых изучено действие операторов взвешенного дробного интегрирования. Рассмотрено обобщенное дифференциальное уравнения Эйлерова типа с конечным числом производных любого порядка на интервале $(0;1)$ и полуоси $(1;+\infty)$. Подробно изучен частный случай такого уравнения — однородное и неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Лиувилля и Римана—Лиувилля. С помощью свойств операторов взвешенного дробного интегрирования данные уравнения сведены к системе алгебраических уравнений, для них сформулированы условия разрешимости и получены решения в замкнутой форме. Результаты главы опубликованы в работах [27], [30]–[32].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе рассмотрено однородное и неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера дробного порядка с дробными производными Лиувилля и Римана—Лиувилля в некоторых функциональных пространствах на интервале $(0;1)$ и полуоси $(0;+\infty)$, $(1;+\infty)$. Введены обобщенный аналог Вронскиана, дробный аналог функции Грина. Изучены их свойства. Введен новый класс функций PS_p. Изучено действие в этом классе операторов взвешенного дробного интегрирования и дифференцирования. Рассмотрено обобщенное неоднородное дифференциальное уравнение типа Эйлера на интервале $(0;1)$ и полуоси $(1;+\infty)$, для него получены условия разрешимости и дано решение в замкнутой форме. С помощью вышеперечисленных конструкций и утверждений получены следующие основные научные результаты.

1. Сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с дробными производными Лиувилля на полуоси $(0;+\infty)$ и доказано, что полученные решения образуют фундаментальную систему [13], [16]—[22], [112], [113].

2. Доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости в терминах характеристической эрмитовой формы и получены формулы представления решений однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с дробными производными Римана—Лиувилля на интервале $(0;1)$ и с дробными производными Лиувилля на полуоси $(1;+\infty)$ [23]—[26], [28], [29], [34], [36].

3. Сформулированы и доказаны теоремы разрешимости в терминах дробного аналога функции Грина, найдены формулы представления частных решений неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(0;+\infty)$ и построено общее решение [10]—[12], [14], [15], [33], [35], [37], [109]—[111], [114].

4. Доказаны теоремы об ограниченности операторов взвешенного дробного интегрирования и получены формулы представления решений обобщенного дифференциального уравнения типа Эйлера с конечным числом производных Лиувилля и Римана—Лиувилля любого порядка в весовых банаховых пространствах аналитических функций [27], [30]—[32].

Литература

[1] Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: в 2 т. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи.—М.: Наука, 1965.—294 с.

[2] Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям / Ю.С. Богданов.— Минск: Вышэйшая школа.—1977.—239 с.

[3] Васильев И.Л. О единственности решения системы уравнений Абеля с постоянными коэффициентами / И.Л. Васильев // Докл. АН БССР.—1981.—Т. XXV.—№ 2.—С. 105–107.

[4] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро–дифференциальных уравнений / В. Вольтерра.—М: Наука.—1982.—304 с.

[5] Гаврилов Н.И. Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.И. Гаврилов.— М.: Высшая школа, 1962.—311 с.

[6] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер.— М: Наука.—1988.—548 с.

[7] Гордиевских Д.М. Бесконечномерная и конечномерная управляемость одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / Д.М. Гордиевских, В.Е. Федоров, М.М. Туров // Челябинский физико–математический журнал.—2018.—Т. 3.—Вып. 1.—С. 5–26.

[8] Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян.—М.: Наука.—1966.—671 с.

[9] Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников.—М.: Наука.—1974.—542 с.

[10] Жуковская Н.В. Решение линейного дифференциального уравнения с тремя дробными производными Лиувилля / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Еругинские чтения–2007: тезисы докладов XII международной научной конференции, Минск, 16–19 мая 2007 г. / Институт математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун–т; редкол.: В.В. Амелькин [и др.].— Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2007.—С. 96–97.

[11] Жуковская Н.В. Решение линейных неоднородных уравнений с дробными производными Лиувилля / А.А. Килбас, Н.В. Жуковская // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: труды международной научной конференции, Т. II, Стерлитамак, 24–28 июня 2008 г. / Стерлитамакский филиал АН РБ; редкол.: К.Б. Сабитов [и др.]. —С. 100–105.
[12] Жуковская Н.В. Решение линейного неоднородного уравнения с дробными производными Лиувилля / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // X Белорусская математическая конференция: тезисы докладов, Минск, 3–7 ноября 2008 г.: в 3 ч. / Институт математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун–т; редкол.: В.И. Корзюк [и др.].—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2008.—Ч. 3.—С. 11–12.
[13] Жуковская Н.В. Однородные уравнения типа Эйлера с дробными производными / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Вестник ГрГУ им. Янки Купалы. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. Биология.—2009.—№ 2(82).—С. 76–80.
[14] Жуковская Н.В. Решение линейных неоднородных уравнений типа Эйлера с правосторонними дробными производными / А.А. Килбас, Н.В. Жуковская // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика, математика, информатика.—2009.—№ 2.—С. 98–103.
[15] Жуковская Н.В. Решение в замкнутой форме линейных неоднородных уравнений типа Эйлера с дробными производными / А.А. Килбас, Н.В. Жуковская // Доклады Национальной академии Наук Беларуси.—2009.—Т. 53.— № 4.—С. 30–36.
[16] Жуковская Н.В. Линейные однородные дифференциальные уравнения Эйлерова типа / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: материалы международного Российско–Болгарского симпозиума, 12–17 мая 2009 г., Россия, г. Нальчик.—С. 91–93.
[17] Жуковская Н.В. Линейные однородные дифференциальные уравнения Эйлерова типа / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Еругинские чтения–2009: тезисы докладов XIII международной научной конференции, Пинск, 26–28 мая 2009 г. / Институт математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун–т, Полесский гос. ун-т; редкол.: И.В. Гайшун [и др.].—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2009.—С. 92–93.
[18] Жуковская Н.В. Линейные однородные дифференциальные уравнения типа Эйлера / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений:

тезисы докладов V международной математической конференции AMADE–2009, Минск, 14–19 сентября 2009 г. / Бел. гос. ун–т, Институт математики НАН Беларуси; редкол.: А.А. Килбас [и др.].— Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2009.—С. 63–64.

[19] Жуковская Н.В. Однородные дифференциальные уравнения типа Эйлера с двумя дробными производными / Н.В. Жуковская // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика, математика, информатика.—2010.— № 1.—С. 103–109.

[20] Жуковская Н.В. Однородные дифференциальные уравнения типа Эйлера с дробными производными / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: материалы международного Российско–Болгарского симпозиума, 2010 г., Россия, г. Нальчик.—С. 88–90.

[21] Жуковская Н.В. Однородные дифференциальные уравнения типа Эйлера с тремя дробными производными / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: труды 5–й международной конференции AMADE–2009: в двух томах.—Т.1. Математический анализ.—Минск: Институт математики НАН Беларуси; ред.: А.А. Килбас и С.В. Рогозин.—2010.—С. 62–69.

[22] Жуковская Н.В. Решение однородных дифференциальных уравнений типа Эйлера дробного порядка / Н.В. Жуковская, А.А. Килбас // Дифференциальные уравнения.—2011.—Т. 47.— № 12.—С. 1693–1704.

[23] Жуковская Н.В. Применение метода Льенара—Шипара к исследованию однородного дробно–дифференциального уравнения Эйлерова типа / Н.В. Жуковская // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов 6–й международной математической конференции AMADE–2011, Минск, 12–17 сентября 2011 г.—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2011.—С. 62.

[24] Жуковская Н.В. Применение метода эрмитовых форм к исследованию однородного дробного дифференциального уравнения типа Эйлера на отрезке / И.Л. Васильев, Н.В. Жуковская // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: труды 6–й международной конференции AMADE–2011: в двух томах.—Т.1. Математический анализ.—Минск: Институт математики НАН Беларуси; ред.: С.В. Рогозин.—2012.—С. 42–43.

[25] Жуковская Н.В. Применение метода эрмитовых форм к исследованию однородного дробно–дифференциального уравнения Эйлерова типа / Н.В. Жуковская // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов международного научного семинара AMADE–2012, Минск, 10–14 сентября 2012 г.—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012.—С. 30–31.
[26] Жуковская Н.В. Применение метода Льенара—Шипара к исследованию однородного дробно–дифференциального уравнения Эйлерова типа на полуоси / Н.В. Жуковская // XI Белорусская математическая конференция: тезисы докладов, Минск, 4–9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун–т; редкол.: В.И. Корзюк [и др.].—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012.—Ч.1.—С. 8–9.
[27] Жуковская Н.В. Обобщенное уравнение типа Эйлера с конечным числом производных / И.Л. Васильев, Н.В. Жуковская // Вести БГПУ. Сер. 3. Физика. Математика. Информатика. Биология. География.—2015.—№ 2(84).—С. 21–23.
[28] Жуковская Н.В. Применение метода эрмитовых форм к исследованию однородного дифференциального уравнения Эйлерова типа на отрезке / Н.В. Жуковская // Вести БГПУ. Сер. 3. Физика. Математика. Информатика. Биология. География.—2015.—№ 2(84).—С. 24–27.
[29] Жуковская Н.В. Применение метода Льенара—Шипара к исследованию однородного дробно–дифференциального уравнения типа Эйлера / Н.В. Жуковская // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов международного научного семинара AMADE–2015, Минск, 14–19 сентября 2015 г.—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2015.—С. 37–38.
[30] Жуковская Н.В. Дробно–дифференциальное уравнение типа Эйлера в прямых суммах некоторых банаховых пространств / И.Л. Васильев, Н.В. Жуковская // Вести БГПУ. Сер. 3. Физика. Математика. Информатика. Биология. География.—2016.—№ 2(88).—С. 16–22.
[31] Жуковская Н.В. Обобщенное уравнение типа Эйлера в банаховом пространстве аналитических функций / Н.В. Жуковская // XII Белорусская математическая конференция: тезисы докладов, Минск, 5–10 сентября 2016 г. : в 5 ч./Институт математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун–т; редкол.: В.И. Корзюк [и др.].—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016.—Ч.1.—С. 8–10.

[32] Жуковская Н.В. Операторы взвешенного дробного интегрирования в прямых суммах банаховых пространств / Н.В. Жуковская, И.Л. Васильев // XII Белорусская математическая конференция: тезисы докладов, Минск, 5–10 сентября 2016 г. : в 5 ч./ Институт математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун–т; редкол.: В.И. Корзюк [и др.].—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016.—Ч.1.—С. 5–6.

[33] Жуковская Н.В. Представление решений дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка с помощью дробного аналога функции Грина / Н.В. Жуковская // Челябинский физико–математический журнал.—2018.—Т. 3.—Вып. 2.—С. 129–143.

[34] Жуковская Н.В. Применение метода Льенара—Шипара к решению однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси / Н.В. Жуковская // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика.—2018.—Том 50.—№ 2.—С. 121–135; DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-121-135.

[35] Жуковская Н.В. Дифференциальные уравнения типа Эйлера дробного порядка / Н.В. Жуковская, С.М. Ситник // Математические заметки СВФУ.—2018.—Т. 25.—№ 2(98).—С. 27–39; DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14228.

[36] Жуковская Н.В. Применение метода Льенара—Шипара к решению однородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на интервале / Н.В. Жуковская, С.М. Ситник // Математические заметки СВФУ.—2018.—Т. 25.—№ 3(99).—С. 33–42; DOI: 10.25587/SVFU.2018.99.16949.

[37] Жуковская Н.В. Представление решений уравнения типа Эйлера с помощью дробного аналога функции Грина / Н.В. Жуковская // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тезисы докладов международного научного семинара AMADE–2018, Минск, 17–21 сентября 2018 г.—Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2018.—С. 32–33.

[38] Зайцев В.Ф. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин.—М.: Физматлит.—1997.—303 с.

[39] Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин.—М.: Физматлит.—2001.—576 с.

[40] Катрахов В.В. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // Современная математика. Фундаментальные направления.—2018.—Том 64.—№ 2.—С. 211—426.

[41] Килбас А.А. Интегральные уравнения: курс лекций / А.А. Килбас.— Мн.: БГУ.—2005.—143 с.
[42] Килбас А.А. Решение в замкнутой форме одного класса линейных дифференциальных уравнений дробного порядка / А.А. Килбас, М. Сайго // Дифференциальные уравнения.—1997.—Т. 33.—№ 2.— С. 195–204.
[43] Килбас А.А. Порядки и типы специальных функций Райта и Миттаг—Леффлера / А.А. Килбас, В.В. Липневич // Труды Института математики.—Минск: Институт математики НАН Беларуси.—2009.—Т.17.—№ 2.—С. 15–22.
[44] Килбас А.А. Обобщенная гипергеометрическая функция как H–функция / А.А. Килбас, В.В. Липневич // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика, математика, информатика.—2010.—№ 2.—С. 64–69.
[45] Князев П.Н. Интегральные преобразования / П.Н. Князев.— Минск: Вышэйшая школа.—1969.—198 с.
[46] Костич М. Разделенные гиперциклические и разделенные топологически перемешивающие свойства вырожденных дробных дифференциальных уравнений / М. Костич, В.Е. Федоров // Изв. вузов. Матем.—2018.—№ 7.—С. 36–53.
[47] Крейн М.Г. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений / М.Г. Крейн, М.А. Наймарк.—Харьков: ОНТИ.—1936.—40 с.
[48] Липневич В.В. Дробный аналог оператора Лапласа и его простейшие свойства / В.В. Липневич // Труды Института математики.—Минск: Институт математики НАН Беларуси.— 2011.—Т.19.—№ 2.—С. 82–86.
[49] Маричев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций / О.И. Маричев.—Мн.: Наука и техника.—1978.—310 с.
[50] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев.—М.: Высшая школа.—1967.—563 с.
[51] Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение / А.М. Нахушев. - Нальчик, 2000. - 298 с.
[52] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. - М. : Высш. шк., 1995.
[53] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский.—М.: Наука.— 1964.—272 с.
[54] Постников М.М. Устойчивые многочлены / М.М. Постников.—М: Наука.—1981.—176 с.
[55] Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов.—М.: Наука.—1984.—432 с.

[56] Прудников А.П. Интегралы и ряды. Т.1. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев.—М.: Наука.—1981.—749 с.

[57] Прудников А.П. Интегралы и ряды. Т.2. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев.— М.: Физматлит.—2003.—749 с.

[58] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка, М: Наука, 2006.

[59] Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.— Мн: Наука и техника.—1987.— 688 с.

[60] Ситник С.М. Метод операторов преобразования для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина.—М.: Физматлит.—2018.—211 с.

[61] Титчмарш Э.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э.Ч. Титчмарш.—М: ОГИЗ.—1948.—418 с.

[62] Федоров В.Е. Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова, Р.Р. Нажимов // Сиб. матем. журн.—2018.—Т. 59.—Вып. 1.—С. 171–184.

[63] Федоров В.Е. Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае / В.Е. Федоров, Е.А. Романова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—2018.—Т. 149.—С. 103–112.

[64] Федоров В.Е. Об аналитических в секторе разрешающих семействах операторов сильно вырожденных эволюционных уравнений высокого и дробного порядков / В.Е. Федоров, Е.А. Романова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—2017.—Т. 137.—С. 82–96.

[65] В.И. Фомин. Векторное уравнение Эйлера второго порядка в банаховом пространстве / Спектр, М., 2012.

[66] Чумаков Ф.В. Уравнение Абеля с гипергеометрическим ядром / Ф.В. Чумаков // Матер. Всесоюз. конф. по краевым задачам.—Казань: Изд-во Казан. ун-та.—1970.—С. 267–271.

[67] Чумаков Ф.В. Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре / Ф.В. Чумаков, И.Л. Васильев // Вестник БГУ им. В.И. Ленина. Сер. I «Физика, математика, механика».—1980.—№ 2.—С. 40–44.

[68] Abel N.H. Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales defines / N.H. Abel // Gesammelte mathematische werke.—1881.—T. 1.—P. 11–27.

[69] Bateman H. Higher transcendental functions. Vol. 1 / H. Bateman, A. Erdelyi.—McGraw–Hill, 1953.—302 p.
[70] Bonilla B. Calculo fraccionario y ecuaciones diferenciales fraccionaries / B. Bonilla, A.A. Kilbas, J.J. Trujillo.— Madrid: Uned, 2003.—206 p. (in spanish)
[71] Bonilla B. Modified Bessel–type function and solution of differential and integral equations / B. Bonilla, A.A. Kilbas, M. Rivero et al. // Indian journal of pure and applied mathematics.—2000.—Vol. 31.—№ 1.—P. 93–109.
[72] Debnath L. Integral transforms and their applications / L. Debnath, D. Bhatta.—Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.—2007.— 688 p.
[73] Ditkin V.A. Integral transforms and operational calculus / V.A. Ditkin, A.P. Prudnikov.—Oxford: Pergamon Press.—1965. — 529 p.
[74] Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol.I. / A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricemi.—New York: McGraw-Hill.—1953; Reprinted: Krieger, Melbourne–Florida .—1981.
[75] Gantmacher F.R. The theory of matrices / F.R. Gantmacher.—Vol. 1.—1959.—374 p.
[76] Gantmacher F.R. The theory of matrices / F.R. Gantmacher.—Vol. 2.—1959.—277 p.
[77] Gorenflo R. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. Fractals and fractional calculus in continuum mechanics / R. Gorenflo, F. Mainardi // CISM courses and lectures.— 1997.—Vol. 378.—Springer–Verlag, Berlin.— P. 277–290.
[78] Gorenflo R. Mittag–Leffler functions, related topics and applications: theory and applications / R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi, S.V. Rogosin.—Springer–Verlag Berlin Heidelberg.—2014.—443 p.—(Springer Monographs in Mathematics).
[79] Grinko A.P. On composition of generalized fractional integrals / A.P. Grinko, A.A. Kilbas // J. math. res. and exposit.—1991.—Vol. 11.—№2.—P. 165–171.
[80] Grinko A.P. On composition of generalized fractional integrals and evaluation of definite integrals with Gauss hypergeometric functions / A.P. Grinko, A.A. Kilbas // J. math. res. and exposit.—1991.—Vol. 11.—№3.—P. 443–446.
[81] Kilbas A.A. Cauchy–type problem for diffusion–wave equation with the Riemann–Liouville partial derivative / A.A. Kilbas, J.J. Trujillo, A.A. Voroshilov // Fractional calculus & applied analysis.—2005.—Vol. 8.—№4.—P. 403–430.
[82] Kilbas A.A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems — I / A.A. Kilbas, J.J. Trujillo // Applicable analysis.—2001.—Vol. 78.—№1.—P. 153–192.

[83] Kilbas A.A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems — II / A.A. Kilbas, J.J. Trujillo // Applicable analysis.—2002.—Vol. 81.—№3–4.—P. 435–493.
[84] Kilbas A.A. H–Transforms. Theory and applications. Analytic methods and special functions / A.A. Kilbas, M. Saigo.—Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.—2004.—401 p.
[85] Kilbas A.A. Theory and applications of fractional differential equations. Mathematics Studies / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo.—Amsterdam: Elsevier.—2006.—Vol. 204.—524 p.
[86] Kilbas A.A. On the generalized Wright function / A.A. Kilbas, M. Saigo, J.J. Trujillo // Fract. calc. appl. anal.—2002.— Vol.5.—№ 4.—P. 437–460.
[87] Krein M.G. The method of symmetric and Hermitian forms in the theory of separation of the roots of algebraic equations / M.G. Krein, M.A. Naimark // Linear and multilinear algebra.—Vol. 10(4).—1981.—P. 265–308; DOI: 10.1080/03081088108817420.
[88] Liouville J. Memoire sur quelques questions de geometrie et de mecanique, et sur un nouveau genre de calcul pour resoudre ces questions / J. Liouville // J. l'ecole roy.—1832.—T. 13, sect. 21.—P. 1–69.
[89] Luchko Y.F. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives / Y.F. Luchko, R. Gorenflo // Acta mathematika Vietnam.—1999.—Vol. 24.—№ 2.—P. 207–233.
[90] Luchko Y.F. An operational method for solving some classes of integro–differential equations / Y.F. Luchko, S.B. Jakubovich // Differential equations.—1994.—Vol. 30.—№ 2.—P. 247–256.
[91] Luchko Y.F. The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus / Y.F. Luchko, H.M. Srivastava // Computation mathematics and applications.—1995.—Vol. 29.—№ 8.—P. 73–85.
[92] Mainardi F. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / F. Mainardi // CISM courses and lectures.—1997.—Vol. 378.—Springer–Verlag, Berlin.—P. 291–348.
[93] Mandelbrojt S. Sulla generalizzazione del calcolo delle variazione / S. Mandelbrojt // Atti accad. naz. lincei. rend. cl. sci. fis. mat.—Natur.—Ser. 6.—1925.—Vol. 1.—P. 151–156.
[94] Mathai A.M. The H–function: theory and applications / A.M. Mathai, R.K. Saxena, H.J. Haubold.—Springer–Verlag: Berlin.—2010.—268 p.
[95] Miller K.S. Fractional differential equations / K.S. Miller // J. fract. calc.—1993.—Vol. 3.—P. 49–57.
[96] Miller K.S. Fractional Green's functions / K.S. Miller, B. Ross // Indian j. pure appl. math.—1991.—Vol. 22.—№ 9.—P. 763–767.

[97] Miller K.S. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations / K.S. Miller, B. Ross.—New York: Wiley and Sons.—1993.—384 p.
[98] Oldham K.B. The fractional calculus / K.B. Oldham, J. Spanier.— New York, London: Academic Press.—1974.—234 p.
[99] Olver F.W.J. NIST handbook of mathematical functions / F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark.—Cambridge University Press.—2010.— 951 p.
[100] Podlubny I. Fractional differential equations / I. Podlubny.—San Diego: Academic Press.—1999.—340 p.
[101] Post E.L. Discussion of the solution of $(d/dx)^{\frac{1}{2}}y = \frac{y}{x}$ (problem 433) / E.L. Post // Amer. math. monthly.—1919.—Vol.26.—P. 37–39.
[102] Samko S.G. Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev.—Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers.—1993.—1012p. (in english)
[103] O'Shaughnessy L. Problem 433 / L. O'Shaughnessy // Amer. math. monthly.—1918.—Vol. 25.—P. 172–173.
[104] Titchmarsh E.C. Introduction to the theory of Fourier integrals / E.C. Titchmarsh.—London: Oxford University Press, 1948.—418 p.
[105] Vogt D. Euler partial differential equations and Schwartz distributions // arXiv:1806.00763v1.— 2018. — 8 p.
[106] Voroshilov A.A. Conditions for the existence of a classical solution of a Cauchy type problem for the diffusion equation with a Riemann–Liouville partial derivative / A.A. Voroshilov, A.A. Kilbas // Differential equations.—2008. — Vol. 44.— №6.—P. 789–806.
[107] Yakubovich S.B. The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Mathematics and its applications / S.B. Yakubovich, Yu.F. Luchko.— Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.—1994.— 332 p.
[108] Yakubovich S.B. Index Transforms / S.B. Yakubovich.—Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific Publishing Company.—1995.—264 p.
[109] Zhukovskaya N.V. Solution of Euler–type non–homogeneous differential equations with three fractional derivatives / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE–2006.—A.A. Kilbas and S.V. Rogosin eds.—Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, Cambridge: CSP.— 2008.—P. 111–137.
[110] Zhukovskaya N.V. Euler–type non–homogeneous differential equations with three Liouville fractional derivatives / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Fractional calculus & applied analysis.—2009.— Volume 12.— Number 2.—P. 205–234.

[111] Zhukovskaya N.V. Euler–type non–homogeneous linear fractional differential equations / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Современные проблемы математики, механики и их приложений: материалы международной конференции, посвященной 70–летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего.—Москва, 30 марта–02 апреля 2009 г. / МГУ им. М.В. Ломоносова.—Москва, 2009.—С. 259–260.
[112] Zhukovskaya N.V. Euler–type homogeneous linear differential equations / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: тезисы докладов международной конференции, посвященной памяти академика А.А. Самарского.—Москва, 16–18 июня 2009 г./ Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.—Москва.—2009.—С. 192.
[113] Zhukovskaya N.V. Solutions of Euler–type homogeneous differential equations with finite number of fractional derivatives / N.V. Zhukovskaya // Integral transforms and special functions.—2012.—Vol. 23.—№ 3.—P. 161–175; DOI: 10.1080/10652469.2011.570094.
[114] Zhukovskaya N.V. Solution of Euler–type non–homogeneous differential equations with three fractional derivatives / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE–2009.—S.V. Rogosin eds.—Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, Cambridge: CSP.—2012.—P. 71–95.