На правах рукописи

Хазова Юлия Александровна

ДИНАМИКА СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на кафедре дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Белан Евгений Петрович

Официальные оппоненты: **Разгулин Александр Витальевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва,
профессор кафедры математической физики

Куликов Дмитрий Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова», г. Ярославль,
доцент кафедры дифференциальных уравнений

Ведущая организация: ФГБУН **Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН**,
г. Новосибирск

Защита состоится «20» февраля 2018 г., в ч на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 Южного федерального университета по адресу:
г. Ростов-на-Дону, улица Мильчакова, 8а, ауд. 211

Автореферат разослан « » декабря 2017 г.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: 344103, г. Ростов–на–Дону, ул. Р. Зорге, 21–ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу
http://hub.sfedu.ru/diss/announcement/0cf00477-cf5a-4010-b5aa-9a47fafdae71/

Ученый секретарь
диссертационного совета В.Д. Кряквин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В реальных условиях практически все системы, в которых не происходит притока энергии извне, являются устойчивыми самоподдерживающимися образованиями с характерными пространственно временными структурами. Эти структуры представляют интерес в различных прикладных областях, например радиофизике, механике, нелинейной оптике или теории горения.

Расширение исследований в нелинейной оптике вызвано интенсивным использованием оптических систем в информационных технологиях. Среди нелинейных оптических систем одной из самых популярных является система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура обратной связи. Принципиальная особенность таких систем заключается в том, что внешний контур обратной связи может быть использован для непосредственного воздействия на нелинейную динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами и другими устройствами. Эксперименты, проведенные С.А. Ахмановым, М.А. Воронцовым, В.Ю. Ивановым показывают, что использование даже простейших типов преобразований (отражение, поворот) позволяет реализовать широкий спектр самоорганизации светового поля.

Параболические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием аргументов искомой функции, используемые для моделирования оптических систем с обратной связью, представляют собой новый класс уравнений для исследования феномена структурообразования. В таких нелинейных оптических системах внешний контур обратной связи может быть использован для управления нелинейной динамикой системы с помощью управляемых координат. Таким образом, исследование модельных уравнений для нелинейных оптических систем с управляемым преобразованием аргументов в контуре обратной связи является актуальным направлением современных нелинейных процессов (теоретической и прикладной нелинейной оптики). Стационарные пространственно неоднородные структуры, бегущие волны, ротационные волны, движущиеся фронты представляют значительный интерес при исследовании процессов, описываемых нелинейными параболическими уравнениями.

Степень научной разработанности темы. Одним из основных предметов исследования нелинейной динамики являются устойчивые пространственно-временные структуры, которые изучались в работах таких авторов как А.В. Разгулин, А.Л. Скубачевский, А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Е.П. Белан, В.А. Чушкин, М.А. Воронцов, С.А. Кащенко, Т.Е. Романенко, Е.М. Варфоломеев, О.Б. Лыкова.

В 1976 году была издана книга Дж. Марсдена, М. Мак-Кракена (J. Marsden, M. McCracken) — фундаментальный труд по теории бифуркаций. Применяемая в ней техника основана на методе инвариантных многообразий. Общая теорема о центральном многообразии для отображений в банаховом пространстве используется в этой монографии для доказательства теоремы о центральном многообразии для полупотоков. В 1981 году опубликована фундаментальная монография Д. Хенри (D. Henry), в которой теоремы об инвариантных многообразиях и центральных многообразиях доказываются непосредственно для широкого класса полулинейных параболических уравнений. Указан и обоснован метод построения центрального многообразия в виде асимптотически сходящегося степенного ряда. Фундаментальные работы Д. Рюэля (D. Ruelle) и Ф. Такенса (F. Takens) показали, что метод центральных многообразий можно успешно применять в теории бифуркаций Пуанкаре-Андронова-Хопфа.

Обоснование метода центральных многообразий для параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованным аргументом впервые было дано в работе Е.П. Белана. Метод центральных многообразий, в дальнейшем, был использован для исследования бифуркаций вращающихся и пространственно неоднородных структур в кольце и круге для случая поворота, а также в круге для преобразования поворота совместно с радиальным сжатием.

В работах С.А. Кащенко, Е.В. Григорьевой, H. Haken, A. Pelster методом квазинормальных форм исследованы вопросы существования, формы и устойчивости стационарных решений в параболической задаче на окружности с малой диффузией и преобразованием поворота, близкого к рационально соизмеримому с π. В случае параболической задачи на симметричном относительно нуля отрезке и преобразованием отражения, бифуркационному анализу рождения из пространственно однородного стационарного решения пространственно неоднородных стационарных решений посвящены работы В.А. Чушкина, А.В. Разгулина. Аналогичные вопросы исследовались в работах М.А. Воронцова. Указанная задача исследовалась Е.П. Беланом построением иерархии упрощенных моделей — галеркинских аппроксимаций исходной задачи. Подчеркнем, что в параболических задачах с малой диффузией при определенных условиях возникают метаустойчивые структуры — медленно меняющиеся решения. Фундаментальные результаты по исследованию метаустойчивых структур в параболической задаче Неймана на отрезке и малой диффузией принадлежат авторам J. Carr, R.L. Pego, G. Fusco, J.K. Hale.

Бифуркация рождения периодических решений на гладкой области S с условиями Неймана на S и гладким обратимым преобразованием q исследована А.Л. Скубачевским, а так же Е.М. Варфоломеевым. Бегущие волны, возникающие в параболическом уравнении на окружности и преобразованием поворота пространственной переменной исследовались в работах С.А. Кащенко, А.В. Разгулина, Т.Е. Романенко. Задача о бифуркации рождения вращающихся структур для параболического уравнения на круге с преобразованием поворота и радиального сжатия пространственных переменных рассматривалась в публикациях Е.П. Белана, О.Б. Лыковой. Похожие вопросы исследовались в работах Д.А. Куликова и А.Н. Куликова.

Несмотря на указанные публикации остаются не решенными вопросы представления решения параболического уравнения с преобразованием пространственной переменной вблизи точки бифуркации и в области надкритичности, а также не исследовались сценарии развития рождающихся структур при отходе бифуркационного параметра от критического значения в область надкритичности. Актуальность темы предопределила постановку цели и основных задач, выбора объекта и предмета исследования.

Целью диссертационной работы является исследование условий рождения пространственно неоднородных стационарных решений и решений типа бегущей волны для краевой задачи функционально-дифференциального параболического уравнения с преобразованием пространственной переменной и условиями на ограниченной области, анализ поведения решений в зависимости от бифуркационного параметра и определение характера устойчивости рожденных решений при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности (т.е. изменение бифуркационного параметра от бифуркационного значения параметра до значения, принадлежащего области надкритичности).

Для достижения цели необходимо было решить следующие **задачи**

- описать условия существования и форму решений функционально-дифференциального параболического уравнения с преобразованием пространственной переменной (отражение, поворот) и условиями на окружности и отрезке в зависимости от бифуркационного параметра;

- проанализировать динамику устойчивости рождающихся пространственно неоднородных структур и структур типа бегущая волна при изменении бифуркационного параметра, используя метод центральных многообразий;

- исследовать условия возникновения метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений);

- для определенных фиксированных параметров (интенсивность входного поля, контрастность интерференционной картины) и типа обратной связи (отражение, поворот) провести анализ формы и устойчивости структур на основе серии вычислительных экспериментов, основанных на методе центральных многообразий и методе Галеркина.

Объект исследования — функционально-дифференциальные параболические уравнения с преобразованием пространственной переменной и условиями на ограниченной области.

Предмет исследования — пространственно неоднородные стационарные решения и решения типа бегущей волны, их устойчивость и асимптотическая форма; медленно меняющиеся (метаустойчивые) структуры.

Гипотеза исследования заключается в том, что применение метода центральных многообразий и метода Галеркина к функционально-дифференциальным параболическим уравнениям с преобразованием пространственной переменной и условиями на ограниченной области (окружность, отрезок) приводит к качественно правильным результатам. Такой новый подход к построению приближенных решений указанных уравнений и исследованию динамики формы и устойчивости найденных решений при изменении бифуркационного параметра может быть использован в различных теоретических, прикладных и экспериментальных исследованиях.

Теоретико-методологическую основу диссертации составляют методы функционального анализа, качественная теория полулинейных параболических дифференциальных уравнений, теория устойчивости, теория бифуркаций, метод центральных многообразий, метод Галеркина. В частности, в работе используется схема построения и исследования периодических структур в параболических уравнениях, которая сочетает метод Галеркина и метод центральных многообразий.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

- впервые проведен анализ решений функционально-дифференциальных уравнений параболического типа с преобразованием пространственной переменной (отражение, поворот) и условиями на окружности и отрезке, когда в качестве бифуркационного параметра выбирается коэффициент диффузии;

- выполнено оригинальное исследование динамики формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений и решений типа бегущая волна при изменении бифуркационного параметра (уменьшении и отходе от бифуркационного значения в область надкритичности);

- впервые получены и исследованы метаустойчивые структуры в параболических задачах с отражением пространственной переменной и условиями на окружности и отрезке;

- разработан и апробирован метод исследования пространственно неоднородных стационарных решений и решений типа бегущая волна, сочетающий метод центральных многообразий и метод Галеркина.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании пространственно неоднородных стационарных решений параболического уравнения с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями периодичности на окружности; а также доказана теорема о существовании пространственно неоднородных стационарных решений параболического уравнения с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями на отрезке.

2. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании решений типа бегущая волна для параболического уравнения с преобразованием поворота пространственной переменной и условиями периодичности на окружности.

3. В параболической задаче с преобразованием отражения пространственной переменной на окружности и отрезке на основе метода Галеркина исследованы форма и устойчивость пространственно неоднородных стационарных решений, рождающихся в результате бифуркации типа «вилка».

4. В параболической задаче с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности на основе метода Галеркина проведен анализ формы и устойчивости решений типа бегущая волна, рождающиеся в результате бифуркации Андронова-Хопфа.

5. На основе формализма метода Галеркина, согласованного с методом центральных многообразий, проведено исследование динамики пространственно неоднородных стационарных структур при изменении бифуркационного параметра (уменьшении и отходе от бифуркационного значения в область надкритичности) и исследована динамика решений типа бегущая волна при изменении бифуркационного параметра.

6. Показано, что в параболической задаче с преобразованием отражения пространственной переменной на окружности и отрезке существуют метаустойчивые структуры (медленно меняющиеся решения), возникающие в результате седло-узловых бифуркаций.

7. Обоснована качественная и количественная достоверность результатов исследования динамики возникающих в результате бифуркаций решений на основе метода Галеркина, согласованного с методом центральных многообразий.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов. Результаты работы использованы в учебном процессе на факультете математики и информатики Таврической академии ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» в спецкурсах «Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений», «Структуры в параболических задачах с преобразованием пространственных переменных», «Элементы теории бифуркаций» и «Динамика структур в бесконечномерных динамических системах». Результаты могут быть использованы для постановки экспериментов по изучению явлений в оптических системах с обратной связью. Сведения из диссертации могут быть полезны как специалистам, работающим в области функционально-дифференциальных уравнений и функционального анализа, так и в исследованиях прикладного характера.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались на конференциях: Международная конференция «Моделирование, управление, устойчивость» (MSC-2012) (10–14 сентября 2012, Севастополь, Украина); The 4-th international conference «Nonlinear dynamics-2013» (19–22 June 2013, Sevastopol, Ukraine); «Боголюбовские чтения DIF-2013» (23–30 июня 2013, Севастополь, Украина); Крымская международная математическая конференция «КМMК-2013» (22 сентября – 4 октября 2013, Судак, Украина); Международная конференция «Метод функций Ляпунова MFL-2014» (15–20 сентября 2014, Алушта, Россия); XXV Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2014» (21–30 сентября 2014, Судак, РФ); XXVI Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2015» (17–29 сентября 2015, Батилиман (Ласпи), РФ); Международный научный форум молодых ученых «Наука молодых – наука будущего-2015» (29 сентября–2 октября 2015, Севастополь, РФ); Молодежный форум: технические и математические науки-2015 (9–12 ноября 2015, Воронеж, РФ); Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI (24–29 апреля 2016, Ростов-на-Дону, РФ); Международная конференция «Метод функций Ляпунова MFL-2016» (15–18 сентября 2016, Алушта, РФ); XXVII Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2016» (16–29 сентября 2016, Батилиман (Ласпи), РФ); Международная школа-конференция «Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании» (12–15 декабря 2016, Москва, РФ); Международная школа-конференция «Соболевские чтения-2016» (18–22 декабря 2016, Новосибирск, РФ); Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII, (23–29 апреля 2017 год, Ростов-на-Дону, РФ); Международная конференция «Математика в современном мире» (14–19 августа 2017, Новосибирск, РФ); Международная школа-конференция «Соболевские чтения-2017» (20–23 августа 2017, Новосибирск, РФ); на семинарах: семинары кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (руководители д.ф.-м.н., проф. О.В. Анашкин, д.ф.-м.н., проф. Е.П. Белан); семинар кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (руководитель д.ф.-м.н., проф. Н.Д. Копачевский); семинар лаборатории дифференциальных и разностных уравнений Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (руководитель д.ф.-м.н., проф. Г.В. Демиденко); семинар кафедры вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета (руководитель д.ф.-м.н., проф. М.Ю. Жуков).

Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях [1]–[7], 6 из которых входят в перечень ВАК Минобрнауки РФ, 17 — в тезисах докладов [8]–[24]. Работа [1] опубликована в журнале, рекомендованном ВАК Украины; [2], [3] — индексированы в zbMath; [2]–[5] — индексированы в РИНЦ. Статья [2] выполнена совместно с научным руководителем: в этой работе Е.П. Белану принадлежит постановка задачи и выбор метода исследования, а автору принадлежит доказательство теоремы, применение метода и исследование полученных решений. Остальные работы выполнены Ю.А. Хазовой самостоятельно.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех разделов, заключения, списка иллюстраций, списка литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 134 страницы с 37 рисунками. Список литературы содержит 121 наименование.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение раскрывает сущность и состояние проблемы, её значимость. Обосновывается актуальность темы, характеризуется ее научная разработанность, формулируются цель и задачи исследования, объект и предмет исследования, научная новизна и положения, выносимые на защиту, а так же практическое значение полученных результатов и апробация работы.

В **разделе 1** изучается математическая модель нелинейного интерферометра с преобразованием отражения и обратной связью

$$u_t + u = D\triangle u + K(1 + \gamma\cos u(\pi - \varphi, t)),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t). \tag{2}$$

Краевая задача (1)–(2) моделирует динамику фазовой модуляции $u(\varphi, t)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$, световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения координаты в контуре обратной связи в одномерном приближении. Здесь D — коэффициент диффузии нелинейной среды, положительный коэффициент K пропорционален интенсивности входного поля, γ — видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$, $\triangle$ — одномерный оператор Лапласа, u_t — производная функции u по переменной t.

Рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений, определяемых из уравнения

$$\omega = K(1 + \gamma\cos\omega). \tag{3}$$

С ростом K количество корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \to \infty$ их состав постоянно меняется: возникают новые состояния равновесия и исчезают старые. Фиксируем гладкую ветвь решений

$$\omega = \omega(K, \gamma),\ 1 + K\gamma\sin\omega(K, \gamma) \neq 0, \tag{4}$$

уравнения (3). Затем линеаризуем (1)–(2) на $\omega(K, \gamma)$. В результате получаем уравнение $v_t + Lv = 0$, где $Lv = v - Dv_{\varphi\varphi} - \Lambda Qv$, $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma\sin\omega$, оператор отражения Q определяется равенством $Qv(\varphi, t) = v(\pi - \varphi, t)$.

Лемма 1.1. Оператор L с условием периодичности (2) в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ имеет полную ортогональную систему собственных функций $1, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi \dots$, соответствующих собственным значениям $\lambda_0 = 1-\Lambda$, $\lambda_1^c = 1+D+\Lambda$, $\lambda_1^s = 1+D-\Lambda$, $\lambda_2^c = 1+4D-\Lambda$, $\lambda_2^s = 1+4D+\Lambda \dots$. Функциям $\cos k\varphi$ соответствуют $\lambda_k^c = 1+k^2D-(-1)^k\Lambda$, а $\sin k\varphi$ — значения $\lambda_k^s = 1 + k^2D - (-1)^{k+1}\Lambda$. Функции $\cos\varphi, \sin 2\varphi, \cos 3\varphi, \sin 4\varphi, \dots$, собственные значения которых могут поменять знак, называются критическими.

Фиксируем теперь K такое, что выполняется следующее **условие 1**. $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) < -1$.

Из леммы 1.1 и условия 1 следует, что при фиксированном K и $D \gg 1$, $\omega = \omega(K, \gamma)$ — устойчивое решение задачи (1)–(2). При уменьшении D и его прохождении через значение $D_1 = -(1+\Lambda)$, решение $u = \omega(K, \gamma)$ теряет устойчивость. Индекс неустойчивости решения $\omega(K,\gamma)$ при $\frac{D_1}{4} < D < D_1$ равен 1, т.е. одно собственное значение решения $\omega(K,\gamma)$ поменяло знак на противоположный. При уменьшении D и его прохождении через следующие значения $\frac{D_1}{(k+1)^2}$, $k = 1, 2, 3\ldots$ каждый раз индекс неустойчивости решения ω повышается на единицу.

В качестве бифуркационного параметра примем D. Замена $u = v + \omega$ приводит уравнение (1) к виду

$$v_t + Lv = \Lambda\frac{1}{2!}ctg\omega \cdot Qv^2 - \Lambda\frac{1}{3!}\cdot Qv^3 + O(v^4),\ \ v(\varphi+2\pi,t) = v(\varphi,t), \tag{5}$$

где $L = 1 - D\triangle - \Lambda Q$, $\Lambda = -K\gamma\sin\omega$, $Qv = v(\pi-\varphi,t)$. При помощи метода центральных многообразий доказана теорема о существовании и форме пространственно неоднородных стационарных решениях задачи (1)–(2).

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие 1. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $0 < D - D_1 < \delta_0$, то задача (1)–(2) имеет два решения: $u^{\pm}(\varphi,D) = \omega + v^{\pm}(\varphi,D)$. Здесь*

$$v^{\pm}(\varphi,D) \approx \pm\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)^{1/2}\cos\varphi +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)\frac{\Lambda}{2}ctg\,\omega((\lambda_0 - 2\lambda_1^c)^{-1} + (\lambda_2^c - 2\lambda_1^c)^{-1}\cos 2\varphi)\pm$$

$$\pm\frac{1}{3!}\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)^{3/2}(\lambda_3^c - 3\lambda_1^c)^{-1}\left(\frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4}\Lambda^2 ctg^2\,\omega(\lambda_2^c - 2\lambda_1^c)^{-1}\right)\cos 3\varphi. \tag{6}$$

и выполняется $c_1(D) = \frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda ctg\,\omega)^2((\lambda_0 - 2\lambda_1^c)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_2^c - 2\lambda_1^c)^{-1}) < 0$. Решения $u^{\pm}(\varphi,D)$ асимптотически устойчивы.

Условие 2. $\cos\omega = 0$. Это условие позволяет вместо задачи исследования стационарных структур () использовать модельную задачу, качественно правильно отражающую поведение решений исходной параболической задачи. Модельное уравнение с кубической нелинейностью

$$v_t + v = Dv_{\varphi\varphi} + \Lambda Qv - \frac{\Lambda}{6}Qv^3. \tag{7}$$

Для дальнейшего исследования рождающихся решений при уменьшении бифуркационного параметра D и его отходе в область надкритичности рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (7) в виде

$$v = \sum_{s=0}^{N} z_s\cos s\varphi + \sum_{k=1}^{N} z_{k+N}\sin k\varphi. \tag{8}$$

Подставим (8) в уравнение (7). Приравнивая коэффициенты при $\cos s\varphi$ и $\sin k\varphi$, $s = \overline{0,N}$, $k = \overline{1,N}$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_s &= -\lambda_s^c z_s + g_s(z),\ \ s = \overline{0,N}, \\ \dot{z}_{k+N} &= -\lambda_k^s z_{k+N} + g_{k+N}(z),\ \ k = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{9}$$

Функции $g_s(z)$, $g_{k+N}(z)$ зависят от порядка аппроксимации N (в связи с громоздкостью выражения для $g_s(z)$, $g_{k+N}(z)$ не приводятся), вектор $z=(z_0,z_1,\ldots,z_{2N})$.

Система уравнений (9) обладает рядом общих свойств. Для каждого N нулевое решение (9) — асимптотически устойчиво, если значение параметра $D>D_1$. Нулевое решение (9) теряет устойчивость при прохождении параметра D через значение D_1. Максимальная точка спектра нулевого решения проходит в этом случае через нуль с ненулевой скоростью. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две устойчивые непрерывные ветви неподвижных точек $\pm z^1(D,N)=\pm\{(z^1_s(D,N),0,\ldots,0)$, $s=\overline{0,N}\}$, где от нуля отличны координаты с индексами $2s-1$, $s=\overline{1,p}$, $p=N/2$, если N — четное и $p=[N/2]+1$, если N — нечетное. Выполняется неравенство: $|z^1_1(D,N)|>|z^1_3(D,N)|>\ldots$.

В силу (8) и определения $z^1(D,N)$ справедлива следующая форма приближенного решения

$$v_1(\varphi,D)\approx\sum_{s=1}^{p} z^1_{2s-1}(D,N)\cos(2s-1)\varphi. \tag{10}$$

Амплитуда функций (10) монотонно возрастает с убыванием параметра D, приближаясь к значению $2\sqrt{\frac{6(\Lambda-1)}{\Lambda}}$ при $D\to 0$. Перейдем теперь к вопросу об устойчивости стационарного решения $v_1(\varphi,D)$. С этой целью обратимся к динамике спектра ветви неподвижных точек $z^1(D,N)$ системы (9). Проведенный анализ показал, что характер поведения спектра зависит от значений параметра Λ. Если $\Lambda\in(a,-1)$, где a зависит от выбранных K и γ, то при убывании параметра D точки спектра сближаются. При этом максимальная точка спектра $\mu^1_1<0$ — убывает, а остальные точки — возрастают. Решение $v_1(\varphi,D)$ при $\Lambda\in(a,-1)$ асимптотически устойчиво на промежутке $(0,D_1)$ изменения параметра D. Пусть теперь $\Lambda<a$. Тогда при убывании параметра D точки спектра $\sigma(z^1(D,N))$ сближаются. При этом его максимальная точка спектра $\mu^1_1<0$ с некоторого значения параметра D начинает приближаться к нулю, при $D=D^*(N)$ переходит с ненулевой скоростью через нуль, а остальные точки спектра — возрастают, но остаются на отрицательной полуоси. В этом случае имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилка». Существует $D^*(N)$, такое что при уменьшении D и прохождении через $D^*(N)$ от $z^1(D,N)$ ответвляются две непрерывные по D ветви неподвижных точек $z^1_\pm(D,N)=(z^1_{s,\pm},0)$, $s=\overline{0,N}$, определенные для $D\in(0,D^*(N))$. Пара $z^1_\pm(D,N)$ рождается устойчивой и остается таковой на всем отрезке $(0,D^*(N))$ изменения параметра D. При этом $z^1(D,N)$ становится неустойчивой с индексом неустойчивости 1. Непрерывным по D ветвям $z^1_+(D,N)$, $z^1_-(D,N)$ стационарных точек (9) в силу (8) отвечают непрерывные ветви приближенных пространственно неоднородных стационарных решений $v^1_\pm(\varphi,D)$ уравнения (7).

Перейдем теперь к анализу формы и устойчивости стационарных решений $\pm v_2(\varphi,D)$ уравнения (7). Эта пара решений рождается из нуля неустойчивой с индексом неустойчивости 1 тогда, когда параметр D, убывая, проходит через $D_2=\frac{D_1}{4}$. Для анализа поведения $\pm v_2(\varphi,D)$ при отходе параметра D от точки бифуркации обратимся к системе (9). В этой системе индекс неустойчивости нуля повышается на 1 и становится равным 2 тогда, когда параметр D, убывая, проходит через D_2. В результате имеет место бифуркация «вилки» — от нуля ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек $\pm z^2(D,N)=\pm\{(0,z^2_{k+N}(D,N))$, $k=\overline{1,N}\}$, где от нуля отличны только координаты с индексами $4k-2+N$, $k=1,2,\ldots$.

Как и выше, воспользовавшись разложением (8), приходим к следующей приближенной форме

$$v_2(\varphi, D) \approx \sum_{k=1}^{N} z^2_{k+N}(D,N)\sin k\varphi. \tag{11}$$

Форма (11) позволяет описать динамику $v_2(\varphi, D)$ при убывании D. Отметим, что при $D\to 0$ функция $v_2(\varphi, D)$ приближается к ступенчатой, принимающей значения $\pm\sqrt{\frac{6(\Lambda-1)}{\Lambda}}$ с точками разрыва $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Вопрос об устойчивости $v_2(\varphi, D)$ при уменьшении параметра D приводит к вопросу о динамике максимального собственного значения $\mu_1^2(D,N)$ неподвижных точек $z^2(D,N)$ системы (9) при уменьшении параметра D. Спектр матрицы устойчивости $z^2(D,N)$ лежит на вещественной оси и его максимальная точка $\mu_1^2(D,N)$ при малых $D_2-D>0$ принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра лежат на отрицательной полуоси.

В системе (9) реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра D. В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (9) появляются две непрерывные по D ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра D, которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (9) отвечают в силу (8) две непрерывные ветви приближенных стационарных решений (7) типа внутреннего переходного слоя.

Обозначим через $u(v_2^s)$, $u(v_2^u)$ решения уравнения (7) с начальными условиями $v_2^s = v_2^s(\varphi, D, N)$, $v_2^u = v_2^u(\varphi, D, N)$. Данные решения на значительных промежутках изменения времени меняются медленно. Приближенные решения v_2^s, v_2^u порождают метаустойчивые структуры.

В **разделе 2** рассматривается параболическая задача с преобразованием отражения пространственной переменной на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$u_t(x,t)+u(x,t) = Du_{xx}(x,t) + K(1+\gamma\cos u(-x,t)),\ \ t>0, \tag{12}$$

$$u_x\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0. \tag{13}$$

В краевой задаче (12)–(13) с условиями на отрезке, оператор Q: $Qu(x,t) = u(-x,t)$ задает преобразование отражения пространственной переменной. Параметры D, K, γ остаются прежними.

Лемма 2.1. Оператор $L = 1 - D\triangle - \Lambda Q$ с условиями (13) имеет полную ортогональную систему собственных функций 1, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$, $\cos 4x, \ldots$, соответствующих собственным значениям $\lambda_0 = 1-\Lambda$, $\lambda_1 = 1+D+\Lambda$, $\lambda_2 = 1+4D-\Lambda$, $\lambda_3 = 1+9D+\Lambda, \ldots$.

Критическими являются функции $\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \ldots$, собственные значения которых могут менять знак при изменения бифуркационного параметра D. Аналогично задаче (1)–(2), сохраняется условие 1. $\Lambda < -1$.

Утверждение 2.1. Если $D > D_1 = -(1+\Lambda)$, то $\omega = \omega(K,\gamma)$ — асимптотически устойчивое решение задачи (12)–(13). При уменьшении D и его прохождении через значение $D_1 = -(1+\Lambda)$ решение теряет устойчивость.

Утверждение 2.2. Индекс неустойчивости решения ω при $D_3 < D < D_1$ равен 1. При уменьшении D и его прохождении через следующие значения $D_{2k+1} = (2k+1)^{-1}D_1$, $k \geq 2$ каждый раз индекс неустойчивости решения ω повышается на единицу.

Как и в главе 1, уравнение (12) заменой $u = \omega + v$ сводится к виду

$$v_t + Lv = \Lambda \frac{1}{2!} ctg\omega \cdot Qv^2 - \Lambda \frac{1}{3!} \cdot Qv^3,$$

где $Lv = v - D\triangle v - \Lambda Qv$, $Qv(x,t) = v(-x,t)$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие 1. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $0 < D - D_1 < \delta_0$, то задача (12)–(13) имеет два стационарных пространственно неоднородных решения: $u_1^{\pm}(x,D) = \omega + v_1^{\pm}(x,D)$, где*

$$v_1^{\pm}(x,D) = \pm \left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D_1)}\right)^{1/2} \sin x +$$

$$-\left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D_1)}\right) \frac{\Lambda ctg\omega}{4} \left((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2x\right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{24} \left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D_1)}\right)^{3/2} \left(3\Lambda^2 ctg^2\omega(\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} - \Lambda(\lambda_3 - 3\lambda_1)^{-1}\right) \sin 3x + O((D - D_1)^2),$$

$$c_1(D_1) = -\frac{1}{4}\Lambda^2 ctg^2\omega \left((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1}\right) + \frac{1}{8}\Lambda < 0.$$

Решения $u_1^{\pm}(x,D)$ — асимптотически устойчивы.

Будем рассматривать модельное уравнение для параболической задачи (12)–(13) с сохранением только кубического слагаемого в виде

$$v_t + Lv = -\frac{\Lambda}{6} Qv^3, \tag{14}$$

где $Lv = L(D)v = v - D\triangle v - \Lambda Qv$, $Qv(x,t) = v(-x,t)$.

Сохраняется **условие 2:** $\cos\omega = 0$. Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (14) в виде

$$v = z_0 + \sum_{k=1}^{N} z_k \sin((2k-1)x) + \sum_{k=1}^{N} z_{k+N} \cos(2k\, x). \tag{15}$$

Подставим (15) в уравнение (14). Приравняв затем коэффициенты при $\sin kx$, $k = \overline{1,N}$, приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered} \dot{z}_0 = -\lambda_0 z_0 + g_0(z), \\ \dot{z}_s = -\lambda_{2s-1} z_s + g_s(z), \quad s = \overline{1,N}, \\ \dot{z}_{k+N} = -\lambda_{2k} z_{k+N} + g_{k+N}(z), \quad k = \overline{1,N}. \end{gathered} \tag{16}$$

Следуя методике, описанной в разделе 1, получены такие результаты для уравнения (14). Нулевое решение (16) теряет устойчивость при прохождении параметра D

через значение D_1. Максимальная точка спектра нулевого решения проходит в этом случае через нуль. В результате бифуркации от нуля ответвляются две устойчивые непрерывные ветви неподвижных точек $\pm z^1(D,N) = \pm(0, z_1^1(D,N), z_2^1(D,N), \ldots, z_N^1(D,N))$. Верхний индекс 1 соответствует бифуркационному значению D_1, нижний индекс соответствует номеру координаты неподвижной точки.

В силу (15) и определения $z^1(D,N)$ справедливо следующая приближенная форма решения

$$\pm v_1(x,D) \approx \pm \sum_{s=1}^{N} z_s^1(D,N) \sin((2s-1)x). \tag{17}$$

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости стационарного решения $v_1(x,D)$. Если $\Lambda \in (a,-1)$, где a зависит от выбранных K и γ, то при убывании параметра D точки спектра сближаются. При этом максимальная точка спектра $\mu_1^1 < 0$ — убывает, а остальные точки — возрастают. Решение $v_1(x,D)$ при $\Lambda \in (a,-1)$ асимптотически устойчиво на промежутке $(0,D_1)$ изменения параметра D. Пусть теперь $\Lambda < a$. Тогда при убывании параметра D точки спектра $\sigma(z^1(D,N))$ сближаются. При этом его максимальная точка спектра $\mu_1^1 < 0$ с некоторого значения параметра D начинает приближаться к нулю, при $D = D^*(N)$ переходит с ненулевой скоростью через нуль, остальные точки спектра — возрастают, но остаются на отрицательной полуоси. В этом случае имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилки». Существует $D^*(N)$, такое что при уменьшении D и прохождении через $D^*(N)$ от $z^1(D,N)$ ответвляются две непрерывные по D ветви неподвижных точек $z_\pm^1(D,N) = \{(z_{\pm,s}^1),\ s = \overline{0,2N}\}$, определенные для $D \in (0, D^*(N))$. Пара $z_\pm^1(D,N)$ рождается устойчивой и остается таковой на всем отрезке $(0, D^*(N))$ изменения параметра D. При этом $z^1(D,N)$ становится неустойчивой с индексом неустойчивости 1. Непрерывным по D ветвям $z_+^1(D,N)$, $z_-^1(D,N)$ стационарных решений (16) в силу (15) отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений уравнения (14).

Утверждение 2.3. Существует значение D^* такое, что при уменьшении D и прохождении через D^* от $v_\pm^1(x,D)$ ответвляются две непрерывные по D ветви неподвижных точек $z_\pm^1(x,D)$, определенные для $D \in (0, D^*)$. Решения $v_\pm^1(x,D)$ рождаются устойчивыми и сохраняют устойчивость при уменьшении параметра D.

Перейдем теперь к анализу формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений $\pm v_3(x,D)$ уравнения (14). Эта пара решений рождается из нуля неустойчивой с индексом неустойчивости 1 тогда, когда параметр D, убывая, проходит через $D_3 = \frac{D_1}{9}$. Для анализа поведения $\pm v_3(x,D)$ при уменьшении параметра D обратимся к системе (16). В этой системе индекс неустойчивости нуля повышается на единицу и становится равным двум тогда, когда параметр D, убывая, проходит через D_3. В результате имеет место бифуркация «вилка» — от нуля ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек $\pm z^3(D,N) = \pm\{(z_s^3(D,N), z_{k+N}^3(D,N)),\ s = \overline{0,N}\}$, где от нуля отличны только координаты с индексами $2,5,8,\ldots$. Как и выше, воспользовавшись представлением (15), приходим к следующей форме приближенного решения

$$\pm v_3(x,D) \approx \pm \left(\sum_{s=1}^{N} z_s^3(D,N) \sin((2s-1)x) + \sum_{s=1}^{N} z_{s+N}^3(D,N) \cos(2s\,x) \right). \tag{18}$$

При $D \to 0$ $v_3(x,D)$ приближается к ступенчатой функции, принимающей значения

$\pm\sqrt{\frac{6(\Lambda-1)}{\Lambda}}$ и точками перехода $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$. Вопрос об устойчивости $\pm v_3(x, D)$ при уменьшении параметра D приводит к вопросу о поведении максимального собственного значения решений $\pm v_3(x, D)$. В этой связи обратимся к вопросу о динамике максимального собственного значения $\mu_1^3(D, N)$ неподвижных точек $\pm z^3(D, N)$ системы (16) при уменьшении параметра D. Спектр ветвей неподвижных точек $\pm z^3(D, N)$ лежит на вещественной оси и его максимальная точка $\mu_1^3(D, N)$ при малых $D_3 - D > 0$ принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра лежат на отрицательной полуоси.

Динамика спектра $\pm z^3(D, N)$ зависит от параметра Λ. Пусть $\Lambda \in (a, -1)$. Если $N = 3n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3\ldots$, то с уменьшением D $\mu_1^3(D, N)$ убывая приближается к нулю, затем медленно меняется вблизи нуля, оставаясь на положительной полуоси. Если $N \neq 3n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3\ldots$, то $\mu_1^3(D, N)$ приближается к нулю при уменьшении параметра D и при некотором $D = D^{**}(N)$ становится отрицательным. Пусть теперь $\Lambda < a$. Тогда, как и выше, убывание D от D_3 приводит к убыванию $\mu_1^3(D, N)$. При этом точки спектра $z^3(D, N)$ сближаются, максимальная точка спектра $\mu_1^3 > 0$ — убывает, а остальные точки — возрастают. Однако, начиная с некоторого $D_3^{**})$ еще две точки спектра начинают возрастать и переходят на положительную полуось.

В системе (16) реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра D. В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (16) появляются две непрерывные по D ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра D, которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (16) отвечают в силу (15) две непрерывные ветви приближенных стационарных решений (14) типа внутреннего переходного слоя. Приближенные решения (14) указанного типа отвечают седло-узловым бифуркациям в системе (16). Реализация в системе (16) бифуркаций седло-узел с указанными выше свойствами вызвана медленной эволюцией вблизи нуля максимальной точки спектра ветвей стационарных точек $\pm z^3(D, N)$ на достаточно большом интервале изменения параметра D.

Обозначим через $u(v_3^s)$, $u(v_3^u)$ решения уравнения (14) с начальными условиями $v_3^s = v_3^s(x, D, N)$, $v_3^u = v_3^u(x, D, N)$. Приближенные решения v_3^s, v_3^u порождают метаустойчивые структуры. Согласно численным расчетам на значительных промежутках изменения времени решения v_3^s, v_3^u меняются медленно. Затем за короткий, по сравнению с этапом медленной эволюции, промежуток времени переходит на устойчивое стационарное решение. Анализ решений уравнения, содержащего квадратичное и кубическое слагаемые дает результаты, схожие с описанными результатами уравнения (14).

В **разделе 3** описывается исследование параболического уравнения с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности S^1

$$u_t = \mu\triangle u - u - \Lambda Q u + \Lambda\frac{1}{2!}\operatorname{ctg}\omega \cdot Qu^2 + \frac{\Lambda}{6}Qu^3, \;\; t > 0 \tag{19}$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t), \tag{20}$$

где $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma\sin\omega$, $Qu(\varphi, t) = u(\varphi + h, t)$ — оператор поворота. Угол поворота выбирается несоизмеримым с 2π. Зафиксируем угол поворота $h = \frac{2\pi}{3}$. Здесь μ — бифуркационный параметр, $\triangle$ — одномерный оператор Лапласа.

Лемма 3.1. Собственными функциями оператора $L(\mu)u = \mu\triangle u - u - \Lambda Qu$, рассматриваемого в качестве неограниченного оператора на пространстве $L_2(S^1)$, являются функции $e^{ik\varphi}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ с соответствующими собственными числами $\lambda_k(\mu) = -1 - k^2\mu - \Lambda e^{ik\frac{2\pi}{3}}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Условие 3: $\Lambda > 2$. Существует такое значение параметра $\mu = \mu^*$, что при $\mu > \mu^*$ нулевое решение задачи (19)–(20) экспоненциально устойчиво. При уменьшении μ и его прохождении через μ^* нулевое решение задачи (19)–(20) теряет устойчивость. Пара комплексно сопряженных точек спектра проходит через мнимую ось с ненулевой скоростью. В результате от нулевого решения бифурцирует однопараметрическое семейство периодических по t решений типа бегущих волн.

Воспользуемся для построения представления бегущих волн методом центральных многообразий. Построим решение (19)–(20) в виде

$$u(\varphi, t) = ze^{i\varphi} + \overline{z}e^{-i\varphi} + \sigma_3(ze^{i\varphi}, \overline{z}e^{-i\varphi}) + \sigma_5(ze^{i\varphi}, \overline{z}e^{-i\varphi}) + \ldots, \tag{21}$$

где $z = z(t)$, $\overline{z} = \overline{z}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{z} = (\lambda_1(\mu) + c_3|z|^2 + c_5|z|^4 + \ldots)z,$$
$$\dot{\overline{z}} = (\overline{\lambda}_1(\mu) + \overline{c}_3|\overline{z}|^2 + \overline{c}_5|\overline{z}|^4 + \ldots)\overline{z}. \tag{22}$$

Здесь черта над символом обозначает комплексное сопряжение. Функции $\sigma_3(ze^{i\varphi}, \overline{z}e^{-i\varphi})$, $\sigma_5(ze^{i\varphi}, \overline{z}e^{-i\varphi})$ — форма 3-й, 5-й степени относительно $z, \overline{z}$.

теорема 3.1. *Пусть выполнено условие 3 ($\Lambda > 2$). Тогда существует такое $\delta_0 > 0$, что если $0 < \mu^* - \mu < \delta_0$, то задача (19)-(20) имеет приближенное решение типа бегущая волна вида:*

$$u(\varphi, t) = \rho_1(\mu)e^{i\omega_1(\mu)t}e^{i\varphi} + \rho_1(\mu)e^{-i\omega_1(\mu)t}e^{-i\varphi} +$$
$$+\frac{\Lambda}{2}\frac{\rho_1^3(\mu)e^{3i\omega_1(\mu)t}e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\Lambda}{2}\frac{\rho_1^3(\mu)e^{-3i\omega_1(\mu)t}e^{-3i\varphi}}{3\overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_3} + \ldots,$$

где $\rho_1(\mu) > 0$ является положительным корнем уравнения

$$Re\,\lambda_1(\mu) + (Re\,c_3)\rho_1^2(\mu) + (Re\,c_5)\rho_1^4(\mu) = 0,$$
$$\omega_1(\mu) = Im\,\lambda_1(\mu) + (Im\,c_3)\rho_1^2(\mu) + (Im\,c_5)\rho_1^4(\mu).$$

$Re\,c_3 < 0$, $Re\,\overline{c}_3 < 0$. Решения $u(\varphi, t)$ — периодические по t орбитально устойчивые решения.

Для изучения формы и устойчивости решений типа бегущая волна, рождающихся в задаче (19)–(20), при уменьшении бифуркационного параметра μ, используем галеркинскую аппроксимацию в таком виде

$$u = \sum_{k=1}^{N}\left(z_k e^{ik\varphi} + \overline{z}_k e^{-ik\varphi}\right). \tag{23}$$

Подставим (23) в (19) и затем в полученном равенстве приравняем коэффициенты при $e^{\pm ik\varphi}$, $k = \overline{1, N}$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{gathered} \dot{z}_k = \lambda_k z_k + g_k(z, \overline{z}), \\ \dot{\overline{z}}_k = \overline{\lambda}_k \overline{z}_k + \overline{g}_k(z, \overline{z}), \;\; k = \overline{1, N}, \end{gathered} \tag{24}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_N)$, $\overline{z} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_N)$, g_k, $\overline{g}_k$ — формы 3-й степени относительно $(z, \overline{z})$, $\lambda_k = \lambda_k(\mu)$. Таким образом переходим от исследования задачи (23) в (19) к изучению системы (24).

При уменьшении параметра μ и его переходе через критическое значение μ_1^* такое, что $Re\lambda_1(\mu_1^*) = 0$ нулевое решение (19)–(20) теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения (19)–(20) ответвляется периодическое по t решение типа бегущая волна. Для построения указанного решения (19)–(20) воспользуемся системой (24), в которой нулевое решение теряет устойчивость при уменьшении μ и его прохождении через μ_1^*.

Для определения неизвестных z_k, $\overline{z}_k$ в системе (24) проведем замену вида $z_k = \rho_k e^{ik(\varphi_k + \alpha_k)}$, $\overline{z}_k = \overline{\rho}_k e^{-ik(\varphi_k + \alpha_k)}$. Покажем построение решения при фиксированном порядке аппроксимации $N = 5$, т.е.

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \; z_3 = \rho_3 e^{i(3\varphi_1 + \alpha_3)}, \; z_5 = \rho_5 e^{i(5\varphi_1 + \alpha_5)} \tag{25}$$

$$\rho_i = \rho_i(t, \mu), \;\; \varphi_1 = \varphi_1(t, \mu)$$

и соответствующие им комплексные компоненты $\overline{z}_1$, $\overline{z}_3$, $\overline{z}_5$. Остальные компоненты в (24) нулевые. В полученной после подстановки (25) в (24) системе находим стационарные $\rho_k = \rho_k(\mu) > 0$, $k = 1, 2, 3$, α_3, α_5 и $\dot{\varphi}_1 = \omega_1(\mu)$. Следовательно, система (24) имеет периодическое решение

$$z_1 = \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)t}, \; z_3 = \rho_3(\mu) e^{i(3\omega_1(\mu)t + \alpha_3)}, \; z_5 = \rho_5(\mu) e^{i(5\omega_1(\mu)t + \alpha_5)},$$

$$\overline{z}_1 = \rho_1(\mu) e^{-i\omega_1(\mu)t}, \; \overline{z}_3 = \rho_3(\mu) e^{-i(3\omega_1(\mu)t + \alpha_3)}, \; \overline{z}_5 = \rho_5(\mu) e^{-i(5\omega_1(\mu)t + \alpha_5)}. \tag{26}$$

Подставив (26) в (23) получим приближенное периодическое решение (23) типа бегущая волна. Это решение рождается орбитально устойчивым периодическим решением.

При уменьшении μ и его прохождении через значение μ_2^*: $Re\lambda_2(\mu_2^*) = 0$ от нулевого решения (19)–(20) в результате бифуркации типа Андронова-Хопфа рождается решение типа бегущая волна. Для построения указанного периодического решения вновь переходим к (24). Аналогично зафиксируем N и строим решения (24) в виде

$$z_2 = \rho_2 e^{i2\varphi_2}, \; z_6 = \rho_6 e^{i(6\varphi_2 + \beta_3)}, \; z_{10} = \rho_{10} e^{i(10\varphi_2 + \beta_5)} \tag{27}$$

и соответствующие им комплексные компоненты $\overline{z}_2$, $\overline{z}_6$, $\overline{z}_{10}$. Остальные компоненты в (24) нулевые. В полученной системе относительно ρ_2, ρ_6, ρ_{10} находим стационарные $\rho_k = \rho_k(\mu) > 0$, $k = 2, 6, 10$, β_3, β_5 и $\dot{\varphi}_2 = \omega_2(\mu)$. Следовательно, система (24) имеет периодическое решение при $\mu < \mu_2^*$ вида

$$z_2 = \rho_2(\mu) e^{i2\omega_2(\mu)t}, \; z_6 = \rho_6(\mu) e^{i(6\omega_2(\mu)t + \beta_3)}, \; z_{10} = \rho_{10}(\mu) e^{i(10\omega_2(\mu)t + \beta_5)},$$

$$\overline{z}_2 = \rho_2(\mu) e^{-i2\omega_2(\mu)t}, \; \overline{z}_6 = \rho_6(\mu) e^{-i(6\omega_2(\mu)t + \beta_3)}, \; \overline{z}_{10} = \rho_{10}(\mu) e^{-i(10\omega_2(\mu)t + \beta_5)}. \tag{28}$$

Решение (28) системы (24) рождается неустойчивым с индексом неустойчивости 2.

Обратимся к вопросу о динамике устойчивости решения (28) при уменьшении μ. Для этого перейдем к анализу линеаризованной системе (24) в окрестности периодического решения (28). Для получения этой системы линеаризуем исходное уравнение (19)–(20) на найденном периодическом решении (28). В результате получаем

$$\dot{u} = \mu\triangle u - u - \Lambda Qu + \Lambda Qu_2 \cdot Qu + \frac{\Lambda}{2}Qu_2^2 \cdot Qu, \tag{29}$$

где u_2 — вторая бегущая волна.

Перейдем от линеаризованной задачи (29) к системе дифференциальных уравнений относительно неизвестных z_k, $\overline{z}_k$. В системе линейных дифференциальных уравнений проведем замену переменных вида $z_k = e^{ik\omega t}\xi_k$, $\overline{z}_k = e^{-ik\omega t}\xi_{k+N}$. В результате получаем систему из $2N$ дифференциальных уравнений относительно $\xi = (\xi_k, \xi_{k+N})$ с постоянными коэффициентами

$$\dot{\xi}_k = (\lambda_k - ik\omega)\xi_k + \xi_k \sum_{k=1}^{N} \rho_k^2 + \Xi(\rho_k, \xi_k, \xi_{k+N}),$$

$$\dot{\overline{\xi}}_{k+N} = (\overline{\lambda}_k + ik\omega)\xi_{k+N} + \xi_{k+N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k^2 + \Xi(\rho_k, \xi_k, \xi_{k+N}), \tag{30}$$

Исследовались две модельные задачи: задача с кубической нелинейностью

$$u_t = \mu\triangle u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{6}Qu^3,\ t > 0,$$

а также задача с квадратичным и кубическим слагаемыми

$$u_t = \mu\triangle u - u - \Lambda Qu + \Lambda\frac{1}{2!}\operatorname{ctg}\omega \cdot Qu^2 + \frac{\Lambda}{6}Qu^3,\ t > 0,$$

с условиями периодичности $u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t)$, где линейный оператор $L(\mu) = -1 - \mu\triangle - \Lambda Q$, а оператор поворота $Qu(\varphi) = u(\varphi + \frac{2\pi}{3})$, $Q^3 = I$.

Численный эксперимент основан на предложенном алгоритме выявления структуры решения с помощью метода центральных многообразий и формализма метода Галеркина, согласованного с методом центральных многообразий. Зафиксируем следующие параметры $K = 8$, $\gamma = 0.6$, $\omega = -0.675132$, $\Lambda = 3$ и будем исследовать численно решение типа бегущая волна в зависимости от параметра μ. Численный анализ показал, что первая бегущая волна, рождающаяся в результате бифуркации Андронова-Хопфа, при переходе бифуркационного параметра μ через $\mu_1^* = 0.5$, рождается орбитально устойчивой. Данное решение возникает, когда собственное значение нулевого решения переходит через ноль колебательным образом. Используя метод Галеркина проанализирована динамика изменений решения при уменьшении параметра μ. Так, при отходе бифуркационного параметра от критического значения в область надкритичности, амплитуда решения незначительно возрастает, а точки отрицательного спектра возрастают и приближаются к нулю, но не переходят на положительную полуось. Максимальной точкой спектра на всем промежутке изменения параметра $(0, \mu_1^*)$ является 0. Это в свою очередь позволяет сделать вывод, что первая бегущая волна сохраняет устойчивость на всем промежутке изменения параметра $(0, \mu_1^*)$.

Вторая бегущая волна, рождающаяся в результате бифуркации Андронова-Хопфа, при переходе бифуркационного параметра μ через $\mu_2^* = 0.125$ для указанных ранее параметров. Решение рождается неустойчивым с индексом неустойчивости два, т.к. две комплексно сопряженные точки спектра имеют положительную действительную часть. Исследование динамики спектра при уменьшении параметра μ показало различное поведение максимальных точек спектра для упрощенной, содержащей только кубическую нелинейность, и полной (с квадратичным и кубическим слагаемыми) задач. В упрощенной задаче согласно анализу при уменьшении μ и прохождении через μ_2^* положительная пара комплексно сопряженных точек спектра переходит на отрицательную полуось и остается там при дальнейшем уменьшении бифуркационного параметра. В отличие от упрощенной модельной задачи, в задаче с квадратичным и кубическим слагаемыми положительная пара комплексно сопряженных точек спектра переходит на отрицательную полуось, некоторый промежуток изменения бифуркационного параметра остаются отрицательными, а потом снова возвращаются на положительную полуось. Такое поведение точек спектра дает возможность сделать вывод, что в системе реализуется бифуркация рождения семейства двупарметрических торов. Дальнейший анализ поведения рожденных торов является более сложной задачей. Данное направление может быть предметом дальнейших исследований.

В **заключении** подводятся итоги диссертационной работы, формулируются основные выводы.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Хазова Ю.А.* Динаміка стаціонарних структур в параболічної задачі з відображенням просторової змінної / Ю.А. Хазова // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. — 2014. — Вип. 22. — С. 30–40. 0,7 п.л.

2. *Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной / Ю.А. Хазова // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32). — № 3–4. — С. 245–257. 0,8 п.л.

3. *Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной / Е.П. Белан, Ю.А. Хазова // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32). — № 1–2. — С. 43–57. 0,9 п.л.

4. *Хазова Ю.А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной / Ю.А. Хазова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 82–95. 0,9 п.л.

5. *Хазова Ю.А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной / Ю.А. Хазова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. — Т. 3. — № 8–4 (19-4). — С. 314–317. 0,25 п.л.

6. *Хазова Ю.А.* Бегущие волны в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности / Ю.А. Хазова // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т.9. — № 5. — С. 705–716. 1 п.л.

7. *Хазова Ю.А.* Решение типа бегущие волны в параболической задаче с преобразо-

ванием поворота / Ю.А. Хазова // Прикладная нелинейная динамика. — 2017. — Т.6. 1,2 п.л.

Другие издания:

8. *Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной в случае окружности/ Ю.А. Хазова// Международная конференция «Моделирование, управление, устойчивость» (MSC-2012), 10–14 сентября 2012, Севастополь, Украина. 0,1 п.л.

9. *Хазова Ю.А.* Структуры в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной / Ю.А. Хазова // «Боголюбовские чтения, DIF-2013», 23–30 июня 2013, Севастополь, Украина. — С. 169–170. 0,1 п.л.

10. *Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной / Ю.А. Хазова // Крымская международная математическая конференция «КММК-2013», 22 сентября–4 октября 2013, Судак, Украина. — С. 58. 0,1 п.л.

11. *Хазова Ю.А.* Метаустойчивые структуры в параболической задаче с преобразованием отражения / Ю.А. Хазова // Метод функций Ляпунова «MFL-2014», 15–20 сентября 2014, Алушта, Россия. — С. 32–33. 0,1 п.л.

12. *Хазова Ю.А.* Метаустойчивые структуры в параболической задаче с преобразованием отражения / Ю.А. Хазова // XXV Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2014», 21–30 сентября 2014, Судак, Россия. — С. 60–61. 0,1 п.л.

13. *Хазова Ю.А.* Стационарные структуры в параболической задаче/ Ю.А. Хазова // XXVI Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2015», 17-29 сентября 2015, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 64. 0,1 п.л.

14. *Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур для параболической задачи с отражением пространственной переменной/ Ю.А. Хазова // Международный научный форум молодых ученых, 29 сентября–2 октября 2015, Севастополь, Россия. — Т. 1. — С. 355–359. 0,3 п.л.

15. *Хазова Ю.А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной/ Ю.А. Хазова // Молодежный форум: технические и математические науки, 9–12 ноября 2015, Воронеж, Россия. — Т. 1. — С. 314–317. 0,25 п.л.

16. *Хазова Ю.А.* Метаустойчивые структуры в параболической задаче/ Ю.А. Хазова // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI, ISBN: 978-5-9908135-0-2, 24–29 апреля 2016, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 129. 0,1 п.л.

17. *Хазова Ю.А.* Динамика бегущих волн в параболической задаче с преобразованием поворота/ Ю.А. Хазова // Метод функций Ляпунова «MFL-2016», 15–18 сентября 2016, Алушта, Россия. — С. 27. 0,1 п.л.

18. *Хазова Ю.А.* Исследование параболической задачи с преобразованием поворота пространственной переменной / Ю.А. Хазова // XXVII Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2016», 16–29 сентября 2016, Батилиман (Ласпи), Россия. 0,1 п.л.

19. *Хазова Ю.А.* Параболическая задача на круге / Ю.А. Хазова // Международная школа-конференция «Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании», 12–15 декабря 2016 год, Москва, Россия. — С. 162–163. 0,1 п.л.

20. *Хазова Ю.А.* Динамика структур в параболической задаче с преобразованием пространственной переменной/ Ю.А. Хазова // Международная школа-конференция «Соболевские чтения-2016», 18-22 декабря 2016, Новосибирск, Россия. — С. 154. 0,1 п.л.

21. *Хазова Ю.А.* Решение типа бегущей волны в параболической задаче/ Ю.А. Хазова // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII, ISBN: 978-5-7890-1271-0, 23–28 апреля 2017, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 120. 0,1 п.л.

22. *Хазова Ю.А.* Бегущие волны в параболической задаче с поворотом на окружности / Ю.А. Хазова // Международная конференция «Математика в современном мире», 14–19 августа 2017, Новосибирск, Россия. — С. 258. 0,1 п.л.

23. *Хазова Ю.А.* Решения параболической задачи с преобразованием поворота на окружности / Ю.А. Хазова // Международная школа-конференция «Соболевские чтения-2017», 20–23 августа 2017, Новосибирск, Россия. — С. 102. 0,1 п.л.

24. *Hazova Yu. A.* Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with the reflection of the spatial variable / Yu.A. Hazova // The 4th international conference «Nonlinear dynamics», 19–22 June, 2013, Sevastopol, Ukraine. — P. 253–258. 0,4 п.л.