На правах рукописи

Котова Ольга Викторовна

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

01.01.01. — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Ростов–на–Дону — 2017

Работа выполнена в Донецком национальном университете на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений, доработана в ФГАОУ ВО "Южный Федеральный университет" на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений.

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук, профессор
Тригуб Роальд Михайлович

Официальные оппоненты:

Гольдман Михаил Львович,
доктор физико–математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО "Российский университет дружбы народов",
профессор кафедры нелинейного анализа
и оптимизации

Умархаджиев Салаудин Мусаевич,
кандидат физико–математических наук, доцент,
Академия наук Чеченской Республики,
заведующий отделом прикладной семиотики

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО "Тульский государственный университет"

Защита состоится 24 апреля 2017 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8–а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЮФУ по адресу: 344103, г. Ростов–на–Дону, ул. Р. Зорге, 21–ж, и в сети "Интернет"по адресу http://hub.sfedu.ru/diss/announcement/08b12cae-0d5c-4a35-816e-099285e5e9ed/.

Автореферат разослан "____" ____________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.208.29 Кряквин Вадим Донатович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. В теории приближений функций, возникшей в трудах П. Л. Чебышева, К. Вейерштрасса, А. Лебега, С. Н. Бернштейна, Д. Джексона и Ш. Ж. Валле–Пуссена, появились прямые и обратные теоремы о порядке (скорости) приближения функций на прямой полиномами и целыми функциями экспоненциального типа в зависимости от гладкости функций и степени (типа). С. М. Никольский применил прямые и обратные теоремы для функций нескольких переменных к доказательству, в частности, теорем вложения. Появились пространства Никольского–Бесова. Назовем монографии А. Ф. Тимана (1960) и С. М. Никольского (1977), которые неоднократно издавались на английском языке.

Гладкость функций измеряют обычно модулями гладкости разных порядков. Их свойства изучали А. Лебег, M. A. Marchaud, О. В. Бесов, Р. М. Тригуб, H. S. Shapiro, J. Boman, М. Ф. Тиман. Для определения точного порядка приближения, особенно в кратном случае, введены специальные модули гладкости, а затем и K–функционалы, которые возникли (I. L. Lions, I. Petre) при реализации вещественного метода интерполяции пары банаховых пространств. См. монографии R. A. De Vore and G. G. Lorentz (1993), Р. М. Тригуба и Э. С. Белинского (2004), В. К. Дзядыка и И. А. Шевчука (2008).

В процессе аппроксимации линейные операторы можно без увеличения погрешности заменять на сверточные операторы. Таким образом возникла задача исследования аппроксимативных свойств разных методов суммирования рядов и интегралов Фурье. Известны классические методы суммирования Абеля–Пуассона, Фейера–Джексона, Рогозинского–Бернштейна, Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера– Рисса, Марцинкевича и др. Вопрос о сравнении разных методов суммирования для индивидуальных функций по скорости сходимости возник еще в 1968 г. (H. S. Shapiro, Р. М. Тригуб). Еще ранее Р. М. Тригуб впервые нашел точный порядок (двусторонние оценки) приближения некоторыми классическими методами суммирования рядов Фурье периодических функций одного переменного. Этой проблемой занимались В. В. Жук, Э. А. Стороженко, М. Ф. Тиман и В. Г. Пономаренко, Э. С. Белинский, О. И. Кузнецова, Ю. Л. Носенко. А после статьи Z. Ditzian, K. G. Ivanov (1993) такие результаты стали называть "strong converse theorem". Назовем еще V. Totik, К. В. Руновский, X. L. Zhou, С. Г. Прибегин, Ю. С. Коломойцев, М. Л. Гольдман и А. В. Малышева. См. также список литературы в статье B. R. Draganov (Journal Appr. Theory, 2010).

Двусторонние оценки приближения средними рядов и интегралов Фурье через модули гладкости дают, в частности, новые формулы для K–функционалов (ответ на вопрос, поставленный З. Чесельским в Трудах МИАН, 1983).

В диссертационной работе исследуются некоторые методы суммирования рядов и интегралов Фурье, а также некоторые общие вопросы теории приближений функций.

Цель и задачи работы.

Объектом исследования в диссертационной работе являются некоторые методы суммирования рядов (метод Бернштейна–Стечкина) и интегралов Фурье (приближение функций на прямой целыми функциями экспоненциального типа, а в случае функции нескольких переменных — методы Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера–Рисса, Марцинкевича–Рисса).

Предметом исследования являются оценки сверху и снизу и точный порядок приближения периодических функций известными тригонометрическими полиномами или, в случае функции на прямой, целыми функциями экспоненциального типа не выше σ.

Целью данной диссертационной работы является изучение аппроксимативных свойств некоторых методов суммирования рядов и интегралов Фурье.

Для реализации поставленной цели в работе были сформулированы такие *задачи*:

1) получить новые прямые, а для некоторых методов приближения и обратные теоремы;

2) исследовать вопрос об оценке снизу приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина с помощью модулей гладкости;

3) найти точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина;

4) изучить аппроксимативные свойства методов Марцинкевича–Рисса, Гаусса–Вейерштрасса суммирования двойных рядов Фурье и найти точный порядок приближения;

5) найти точный порядок приближения индивидуальных функций классическими методами суммирования Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера–Рисса и Марцинкевича–Рисса интегралов Фурье в кратном случае.

Научная новизна полученных результатов. Все результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, являются новыми. В частности, обнаружено, что давно известный метод суммирования, указанный для улучшения порядка сходимости С. Н. Берштейном, существенно отличается от всех классических методов, что сильно усложнило определение точного порядка приближения. При этом предельно усилена общая оценка приближения сверху, найденная С. Б. Стечкиным.

Теоретическая и практическая ценность. Все результаты диссертации относятся к области фундаментальных исследований по теории функций.

Они носят теоретический характер, дополняют многочисленные исследования ряда авторов, могут быть использованы для получения новых прямых и обратных теорем приближения функций и для нахождения точного порядка сходимости.

Методы исследования. В настоящее время используются два метода получения доказательства таких результатов. Они отличаются от классического метода, в котором используют оценки ядер полиномиальных операторов (Бернштейн, Джексон, Марцинкевич, Стечкин и др.). Первый из этих двух методов основан на экстремальных свойствах полиномов (целых функций экспоненциального типа не выше σ) и известных прямых теоремах. Этот метод применим и к нелинейным методам (операторам) приближения (см. монографию В. В. Жука (1982)). Второй метод доказательства основан на принципе сравнения мультипликаторов Фурье, т.е. сверток функций с разными мерами.

Применяют метод мультипликаторов Фурье, которые определяются введением множителей в интеграл Фурье (для периодических функций — в ряд Фурье, см., ниже (1)). В пространстве L_p, $p \in (1, +\infty)$ известны достаточные условия Й. Марцинкевича, С. Г. Михлина, Л. Хермандера, П. И. Лизоркина. В пространстве L_1 определяющим является представление функции–множителя в виде преобразования Фурье конечной борелевской комплекснозначной меры, т.е. принадлежность известной банаховой алгебре Винера. Недавно на эту тему появилась обзорная статья E. Liflyand, S. Samko, R. Trigub (Analysis and Math.Physics, 2012). См. также монографию R. M. Trigub, E. S. Belinsky (Kluwer–Springer, 2004).

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Получены необходимые и достаточные условия приближения линейными операторами с оценкой через модуль гладкости сверху и отдельно — снизу.

2. Найден точный порядок убывания наилучшего приближения $A_\sigma(f)$ функции f на прямой целыми функциями экспоненциального типа не выше σ в зависимости от поведения модулей гладкости функции f и σ.

3. В общей прямой теореме Стечкина такая же оценка приближения снизу невозможна. Найден точный порядок приближений периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина через новые модули гладкости порядков 2, 3 и 4.

4. Проведен сравнительный анализ методов Марцинкевича–Рисса суммирования двойных рядов Фурье при разных положительных значениях параметров α и β и найден точный порядок приближения при $\alpha = 1$, $\beta > 0$.

5. Найден точный порядок приближения индивидуальных функций клас-

сическими методами суммирования Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера–Рисса интегралов Фурье в кратном случае и методом Марцинкевича–Рисса для двойных интегралов Фурье.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов исследования. Полученные результаты не противоречат результатам других авторов и опубликованы в ведущих рецензируемых журналах.

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на научном семинаре "Анализ Фурье и теория приближений функций" в Донецком национальном университете (руководитель профессор Р. М. Тригуб) в период с 2006 по 2016 гг.; на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V", 26 апреля — 01 мая 2015 г., г. Ростов–на–Дону.

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано семь работ [1] — [7]:

— 5 научных статей ([1], [2], [4]— [6]) изданы в журналах, которые входят в международные наукометрические базы, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ: [2] и [6] индексированы в Scopus; [1], [4] и [5] — zbMath;

— 1 научная статья [3] — в журнале, рекомендованном ВАК Украины;

— 1 тезисы докладов международной научной конференции [7].

Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, полученные автором самостоятельно. Работы [2], [4] — [6] опубликованы в соавторстве с Р. М. Тригубом. В этих работах автору принадлежат такие результаты: [2] — основная теорема и леммы (кроме леммы 4); [4] — теоремы 1 – 3, 8 – 10, а также пример 1; [5] — теоремы 1.1 – 1.4, 2.3 – 2.5; [6] — теоремы 3 – 5 и следствие. Р. М. Тригубу принадлежит постановка задач, указание методов исследования, а также общее руководство.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, раздела, содержащего основные обозначения и определения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка цитированной литературы. Объем работы составляет 135 страниц, библиография — 61 источник.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы и сформулирована цель диссертации, определены основные задачи исследования, на решение которых направлена данная работа. Представлена история вопроса и показана научная новизна полученных результатов, дается короткий обзор диссертации по главам и параграфам.

В **первой главе** диссертации изучаются аппроксимативные свойства методов суммирования интегралов Фурье.

Функция f на вещественной оси приближается целыми функциями экспоненциального типа не выше σ при $\sigma \to \infty$.

Для формулировки результатов приведем некоторые необходимые обозначения и определения.

Пусть $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$, — пространство измеримых функций, суммируемых с p–той степенью по Лебегу на $\mathbb{R}$, где

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(x)\big|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

(для периодических функций интегральная норма при $p < \infty$ вычисляется по периоду).

Функцию g называют целой функцией экспоненциального типа не выше σ, если она целая и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R = R(\varepsilon)$ такое, что при $|z| \geq R$

$$\big|g(z)\big| \leq e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}.$$

Будем обозначать $W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$ — множество целых функций экспоненциального типа не выше σ, сужение которых на $\mathbb{R}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$.

Через $\Delta_h^s(f)(x)$ обозначают s–тую разность функции f шага h:

$$\Delta_h^s(f)(x) = \sum_{\nu=0}^{s} (-1)^\nu \binom{s}{\nu} f(x + \nu h),$$

где $\binom{s}{\nu}$ — биномиальные коэффициенты:

$$\binom{s}{\nu} = \frac{s!}{\nu!(s-\nu)!},$$

тогда модуль гладкости в L_p порядка s и шага $h > 0$ определяют так:

$$\omega_s(f; h)_{L_p} = \sup_{0 < \delta \leq h} \big\|\Delta_\delta^s f(\cdot)\big\|_{L_p}.$$

Если $f \in L_p$, то через $A_\sigma(f)_{L_p}$ обозначают наилучшее приближение (в L_p)

функции f целыми функциями экспоненциального типа не выше σ:

$$A_\sigma(f)_{L_p} = \inf_{g\in W_{p,\sigma}} \|f-g\|_{L_p}.$$

В работе мы будем использовать обозначение $f \asymp g$. При $f, g \geq 0$ эта запись означает, что найдутся две положительные константы $c_1 < c_2$ такие, что $c_1 g \leq f \leq c_2 g$ с указанием зависимости (или независимости) констант от конкретных параметров.

Здесь и далее через $c(...)$ с индексами будем обозначать положительные константы, зависящие только от величин, стоящих в скобках.

Параграф 1.1 содержит предварительные сведения.

В параграфе 1.2 получены необходимые и достаточные условия приближения линейными операторами с оценкой через модуль гладкости сверху и отдельно — снизу.

Теорема 1.1 *Пусть* G_σ *— линейный непрерывный оператор* $L_p(\mathbb{R}) \to W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$ $(p \geq 1)$. *Для того чтобы при данном* $s \in \mathbb{N}$ *для всех функций* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *и* $\sigma > 0$ *выполнялось неравенство*

$$\|f - G_\sigma(f)\|_{L_p} \leq c_1(s)\omega_s\Big(f; \frac{1}{\sigma}\Big)_{L_p}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p\to L_p} < \infty,$$

и

$$\|g - G_\sigma(g)\|_{L_p} \leq c_2(s)\frac{1}{\sigma^s}\big\|g^{(s)}\big\|_{L_p}$$

для любой функции $g \in W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$.

Теорема 1.2 *Пусть* G_σ *— линейный непрерывный оператор* $L_p(\mathbb{R}) \to W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$ $(p \geq 1)$. *Для того чтобы при данном* $s \in \mathbb{N}$ *для всех функций* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *и* $\sigma > 0$ *выполнялось неравенство*

$$\|f - G_\sigma(f)\|_{L_p} \geq c_3(s)\omega_s\Big(f; \frac{1}{\sigma}\Big)_{L_p}$$

необходимо, а если $\sup\limits_{\sigma} \|G_\sigma\|_{L_p \to L_p} < \infty$, *то и достаточно*

$$\|g - G_\sigma(g)\|_{L_p} \geq c_4(s) \frac{1}{\sigma^s} \left\|g^{(s)}\right\|_{L_p}$$

для любой функции $g \in W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$.

При $p = \infty$ из этих теорем следуют сразу такие же предложения для периодических функций, так как любая периодическая целая функция экспоненциального типа из $W_{p,\sigma}$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше σ. Эти теоремы новые и в периодическом случае.

В параграфе 1.3 найден точный порядок убывания наилучшего приближения $A_\sigma(f)$ функции f на прямой целыми функциями экспоненциального типа не выше σ в зависимости от поведения модулей гладкости функции f и σ.

Теорема 1.3 *Пусть* $f \in L_p(\mathbb{R}), p \geq 1$, *и* $s \in \mathbb{N}$. *Для того чтобы при* $\sigma \to \infty$ *выполнялось двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от* f *и* σ,

$$A_\sigma(f)_{L_p} \asymp \omega_s\Big(f; \frac{1}{\sigma}\Big)_{L_p}$$

необходимо и достаточно, чтобы при $h \to +0$

$$\omega_s(f; h)_{L_p} = O\big(\omega_{s+1}(f; h)_{L_p}\big).$$

Для периодических функций эта теорема доказана R. K. S. Rathore (1994).

В следующей Теореме 1.4 показана разница между случаями $p \in (1, \infty)$ и $p = 1$ или $p = \infty$.

Теорема 1.4 *Пусть*

$$S_\sigma(f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(x - \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{\sin t}{t} dt,$$

а

$$G_\sigma(f) = S_\sigma(f) - \beta \Delta^s_{\frac{\alpha}{\sigma}} S_\sigma(f), \quad \beta \neq 0, \ \alpha \in (0, 2\pi).$$

Если $p \in (1, 2]$, *тогда выполняется двустороннее неравенство с положи-*

тельными константами, зависящими только от s, α, β и p:

$$\|f - G_\sigma(f)\|_{L_p} \asymp \omega_s\Big(f; \frac{1}{\sigma}\Big)_{L_p}.$$

Если же $p = 1$, то указанная оценка приближения сверху, как в Теореме 1.1, имеет место только в случае

$$e^{is\alpha} = (-1)^s, \qquad \beta = (1 - e^{i\alpha})^{-s}.$$

Результаты первой главы опубликованы в [4] и [5].

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению аппроксимативных свойств одного метода суммирования рядов Фурье. Непрерывная 2π–периодическая функция f на $[-\pi, \pi]$ приближается тригонометрическими полиномами Бернштейна–Стечкина.

Пусть $C(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных 2π–периодических функций на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, где

$$\|f\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{\mathbb{T}} \big|f(x)\big| < \infty.$$

Для доказательства теорем второй и третьей главы используется метод мультипликаторов Фурье, основанный, в случае пространства C, на представлении некоторых функций g_n в виде

$$g_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} d\mu_n(y),$$

где μ_n — конечная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная борелевская мера при ограниченной по n полной вариации μ_n.

Комплекснозначная числовая последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ является мультипликатором из $C(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$, т.е. $\{\lambda_k\} \in M$, если для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \widehat{f}_k e^{ikx} \sim \Lambda f \tag{1}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Lambda f \in C(\mathbb{T})$ и

$$\big\|\{\lambda_k\}\big\|_M = \sup_{\|f\|_C \le 1} \|\Lambda f\|_C < \infty.$$

Такие операторы перестановочны со сдвигом и являются свертками функции f с некоторыми мерами на окружности.

Для мультипликаторов Фурье приходится определять принадлежность функции–множителя пространству $A(\mathbb{R})$ — алгебре абсолютно сходящихся интегралов Фурье на $\mathbb{R}$:

$$A(\mathbb{R}) = \Big\{ f : f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ixt} dt, \quad \|f\|_{A(\mathbb{R})} = \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} < \infty \Big\}.$$

Параграф 2.1 содержит предварительные сведения.

Общую прямую теорему с модулем гладкости ω_s при $s = 1$ получил Д. Джексон, при $s = 2$ — А. Зигмунд и Н. И. Ахиезер.

При любом порядке $s \geq 3$ С. Б. Стечкин (1951), используя при $r \geq s + 2$ следующие полиномы (далее будем обозначать как случай (s, r)):

$$\tilde{\tau}_{s,r,n}(f; x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=1}^{s} (-1)^{\nu+1} \binom{s}{\nu} f(x + \nu t) D_n^r(t) dt,$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}, \qquad \alpha_{r,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^r(t) dt,$$

доказал неравенство

$$\big\| f - \tilde{\tau}_{s,r,n}(f) \big\|_C \leq c(r) \omega_s \Big(f; \frac{1}{n} \Big).$$

Ранее С. Н. Бернштейн (1947) использовал такие полиномы для доказательства подобного неравенства в частном случае $\omega_s(f; h) = O(h^\alpha)$, $\alpha > 0$.

Изучим приближение функций полиномами Бернштейна–Стечкина. Отличие этих полиномов от других состоит в том, что не только константы являются неподвижными точками операторов $\tilde{\tau}_{s,r,n}$.

В 2010 г. на Международной конференции в Москве, посвященной 90-летию С. Б. Стечкина, профессор В. И. Иванов поставил вопрос о точном порядке приближения полиномами $\tilde{\tau}_{s,r,n}$ (видео доклада можно посмотреть в разделе "Видеотека" портала math-net.ru).

В параграфе 2.2 доказано, что обычный модуль гладкости, который подходит для оценки приближения сверху, не годится для оценки снизу уже при $(s, r) = (2, 4)$.

Теорема 2.1 *Неравенство*

$$\omega_2\Big(f;\frac{1}{n}\Big) \le c_5\|f-\tilde\tau_{2,4,n}(f)\|$$

с положительной константой c_5, не зависящей от f и n, неверно.

Параграф 2.3. содержит основные вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теорем второй главы: принцип сравнения мультипликаторов, достаточное условие A. Beurling принадлежности $A(\mathbb{R})$, теорема Бюдана–Фурье для определения точного числа всех действительных корней многочлена.

В параграфе 2.4 приведена теорема, содержащая оценки сверху и снизу с помощью обычного модуля гладкости для суммы двух приближений.

Теорема 2.2 *Для любых натуральных $s\ge 2$, четных $r\ge s+4$ и $s_1 = s+\frac{1}{2}\big(1+(-1)^{s+1}\big)$ существует величина $c_6(r)$ такая, что при $n\ge \frac{r}{c_6(r)}+1$ и $N=[\frac{c_6(r)}{r}n]$ (целая часть) для любой функции $f\in C(\mathbb{T})$ выполняются двусторонние неравенства с положительными константами, зависящими только от r:*

$$\|f-\widetilde\tau_{s,r,N}(f)\|_C+\|f-\widetilde\tau_{s,r,n}(f)\|_C \asymp \omega_{s_1}\Big(f;\frac{1}{n}\Big).$$

Полиномы $\tilde\tau_{s,r,n}$ можно представить в виде $\big(\varphi_n(x)=0$ при $|x|\ge r+\frac{1}{n}\big)$

$$\tilde\tau_{s,r,n}(f)=\sum_k \varphi_n\Big(\frac{|k|}{n}\Big)\hat f_k e^{ikx},\qquad \varphi_n(0)=1,$$

где $\hat f_k$ — коэффициенты Фурье функции f.

Ранее результат, подобный Теореме 2.2, получили при функции–множителе φ, не зависящей от n, Ю. С. Коломойцев и Р. М. Тригуб (2012). Для оценки приближения снизу оставить одно из двух слагаемых нельзя. В этом случае нужно вводить специальный модуль гладкости (разностный оператор).

Р. М. Тригуб (2012) ввел усредненную разность, связанную с точкой $t\in(-2\pi,0)\cup(0,2\pi)$,

$$\Delta^1_{h,t}f(x)=\int_0^1\big[\Delta^1_{hu}f(x)-\lambda\Delta^2_{hu}f(x)\big]du,$$

где

$$\lambda = \lambda(t) = \frac{2(it + 1 - e^{it})}{2it + 3 - 4e^{it} + e^{2it}}$$

(вещественная часть знаменателя $2(1-\cos t)^2 > 0$), а

$$\Delta^1_{h,0} f(x) = \int_0^1 \Delta^1_{hu} f(x) du.$$

Параграф 2.5 посвящен нахождению точного порядка приближения непрерывных 2π–периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина $\tilde{\tau}_{s,r,n}(f;x)$ для некоторых значений параметров s и r.

В диссертации рассмотрены случаи $(s,r) = (2,4)$, $(s,r) = (3,5)$ и $(s,r) = (4,6)$. Есть различие при четном s (см. Теоремы 2.3, 2.5) и нечетном s (Теорема 2.4). В работе доказано, что четная функция–множитель $\varphi_n(x)$ равна единице при $x > 0$ и любом n лишь в одной точке x_n, когда $(s,r) = (2,4)$ и $(s,r) = (3,5)$, и в двух точках $x_{1,n}$ и $x_{2,n}$, когда $(s,r) = (4,6)$ (см. подробнее ниже).

В Теоремах 2.3, 2.4 и 2.5 получены двусторонние неравенства с положительными абсолютными константами.

Теорема 2.3 *При $(s,r) = (2,4)$ для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется двустороннее неравенство с положительными абсолютными константами:*

$$\|f - \widetilde{\tau}_{2,4,n}(f)\|_C \asymp \left\|\Delta^1_{\frac{1}{n},x_n} \Delta^1_{\frac{1}{n},-x_n} f(\cdot)\right\|_C.$$

Теорема 2.4 *При $(s,r) = (3,5)$ для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется двустороннее неравенство с положительными абсолютными константами:*

$$\|f - \widetilde{\tau}_{3,5,n}(f)\|_C \asymp \|\Delta^2_{\frac{1}{n},0} \Delta^1_{\frac{1}{n},x_n} \Delta^1_{\frac{1}{n},-x_n} f(\cdot)\|_C.$$

Теорема 2.5 *При $(s,r) = (4,6)$ для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется двустороннее неравенство с положительными абсолютными константами:*

$$\|f - \widetilde{\tau}_{4,6,n}(f)\|_C \asymp \left\| \prod_{j=1}^{2} \Delta^1_{\frac{1}{n},x_{j,n}} \Delta^1_{\frac{1}{n},-x_{j,n}} f(\cdot)\right\|_C.$$

Из этих теорем следуют такие же двусторонние неравенства и по норме в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$.

Функция–множитель φ_n – это четный непрерывный сплайн, "склеенный" в случае $(s, r) = (2, 4)$ из восьми алгебраических полиномов третьей степени, а в случае $(s, r) = (3, 5)$ — из 18 алгебраических полиномов четвертой степени. Графики предельных функций

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

в этих случаях проиллюстрированы соответственно на рис. 1 и рис. 2 (эти и следующие рисунки см. ниже).

В случае $(s, r) = (4, 6)$ функция–множитель $\varphi_n(x)$ — это четный непрерывный сплайн, "склеенный" из 24 алгебраических полиномов пятой степени. График предельной функции $\varphi(x)$ — на рис. 3. Для уточнения графика покажем интервал $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]$, которому принадлежат точки x_1 и $-x_1$ такие, что $\varphi(\pm x_1) = 1$, в большем масштабе (см. рис. 4).

Графики $\varphi_n(x)$ такого же вида соответственно.

С увеличением r число точек, в которых $\varphi(x) = 1$ растет, а функция–множитель $\varphi_n(x)$ — это четный непрерывный сплайн, уже при $r > 6$ "склеенный" из более, чем 24 алгебраических полиномов $r - 1$ степени. Поэтому получение результатов подобных Теоремам 2.3–2.5 технически трудно.

Позднее точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина для $r \ge 6$, $2 \le s \le r - 2$ при всех достаточно больших n был найден Р. М. Тригубом (2013).

Результаты второй главы опубликованы в [1], [2] и [3].

Третья глава диссертационной работы посвящена изучению аппроксимативных свойств некоторых методов суммирования рядов и интегралов Фурье в случае функции нескольких переменных: исследована сходимость средних Марцинкевича–Рисса и аналога средних типа Гаусса–Вейерштрасса для двойных рядов Фурье; проведено сравнение методов Марцинкевича–Рисса суммирования двойных рядов Фурье при разных значениях параметров; найден точный порядок приближения индивидуальных функций классическими методами суммирования Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера–Рисса и Марцинкевича–Рисса интегралов Фурье в кратном случае.

Параграф 3.1 содержит предварительные сведения и обозначения, а также утверждения необходимые для доказательства теорем третьей главы: другая формулировка принципа сравнения мультипликаторов, $\frac{1}{f}$–теорема Винера, один критерий для радиальных функций и общая схема для нахождения точного порядка приближения функции через K-функционал (см. (3)).

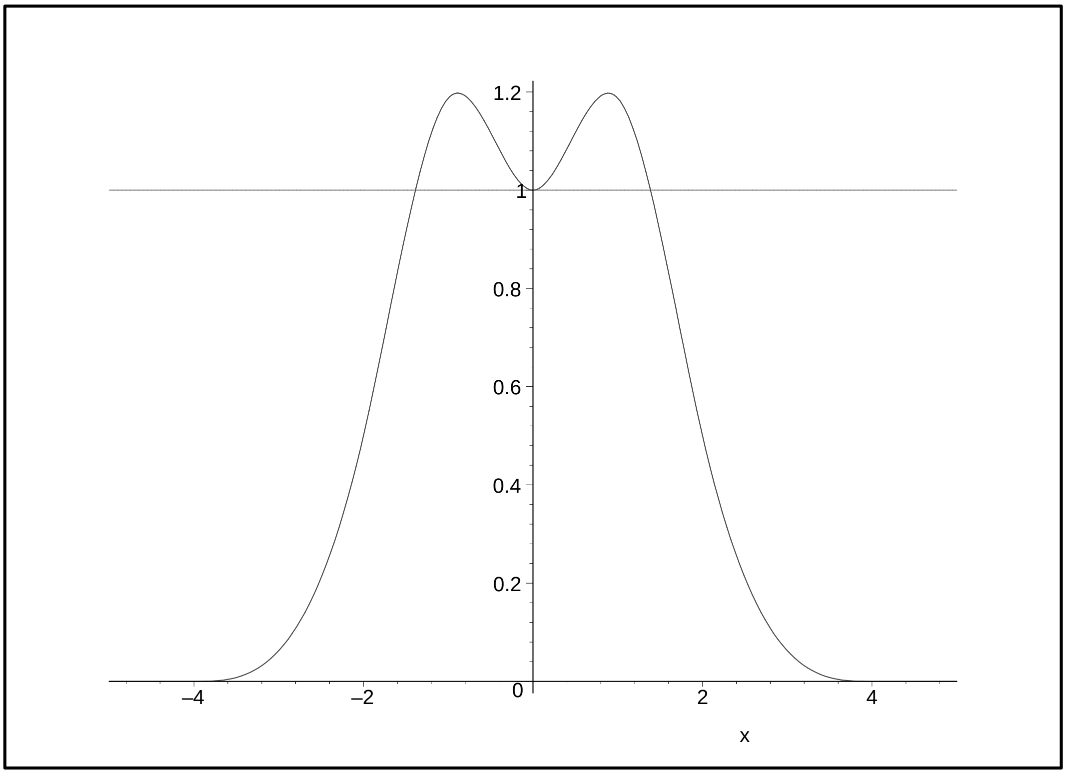

Рис. 1: *График функции* $\varphi(x)$. *Случай* $(2, 4)$

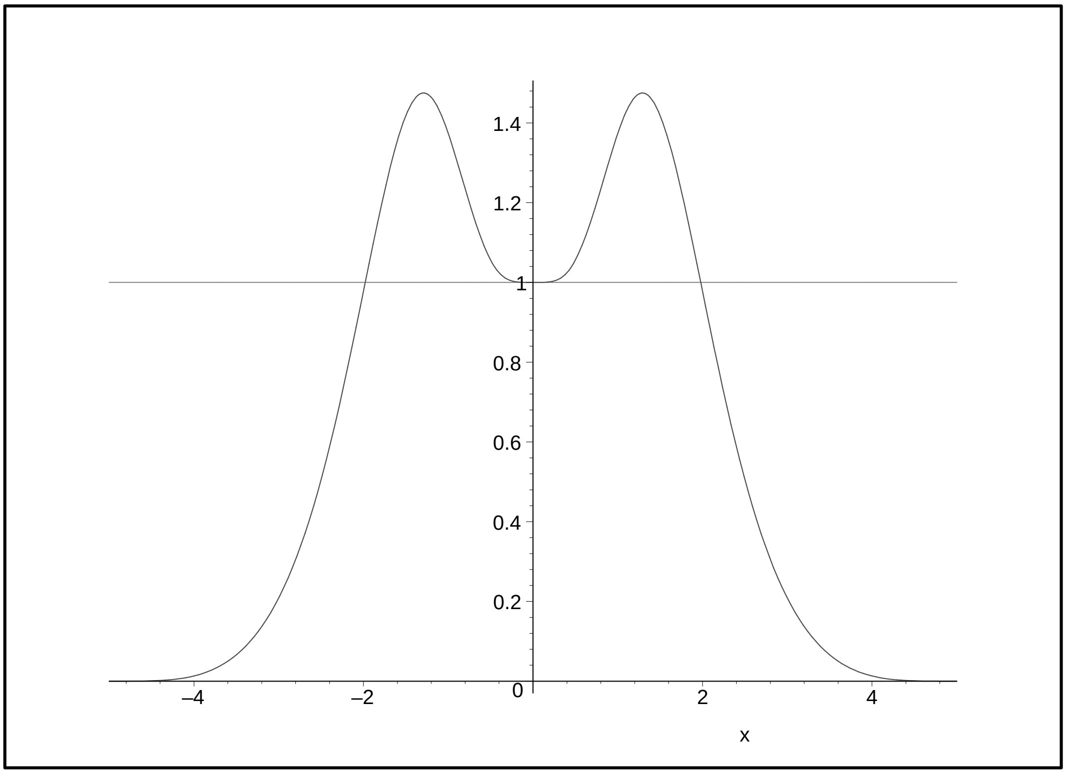

Рис. 2: *График функции* $\varphi(x)$. *Случай* $(3, 5)$

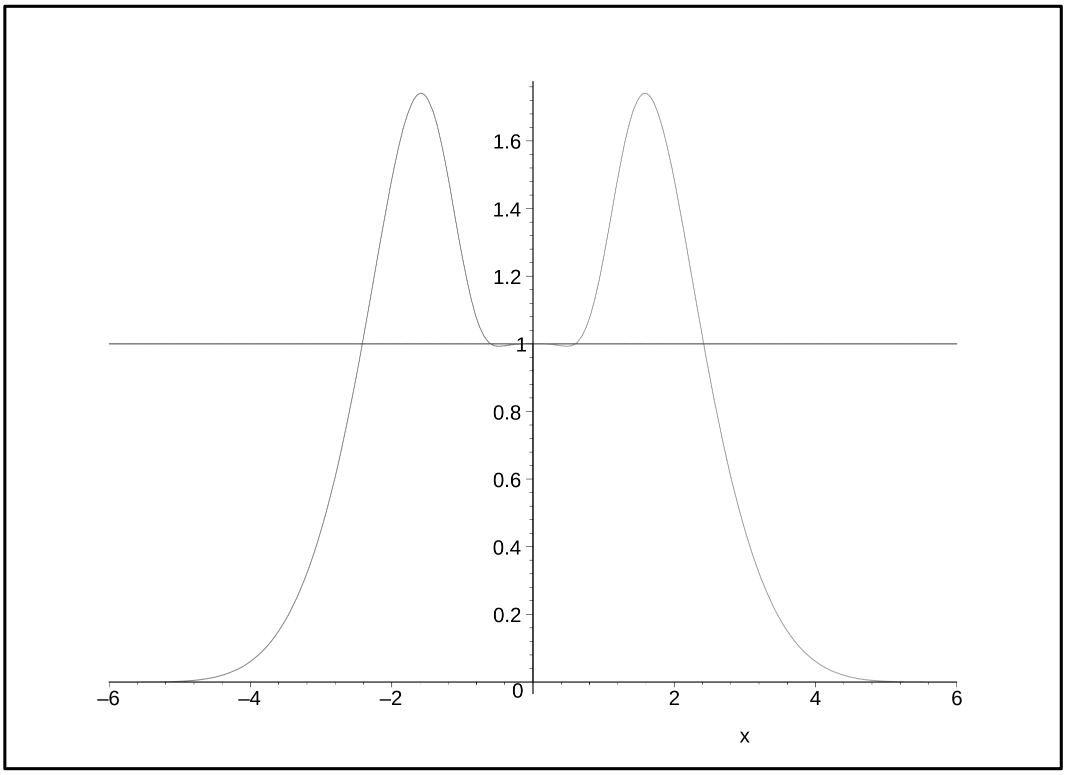

Рис. 3: *График функции* $\varphi(x)$. *Случай* $(4, 6)$

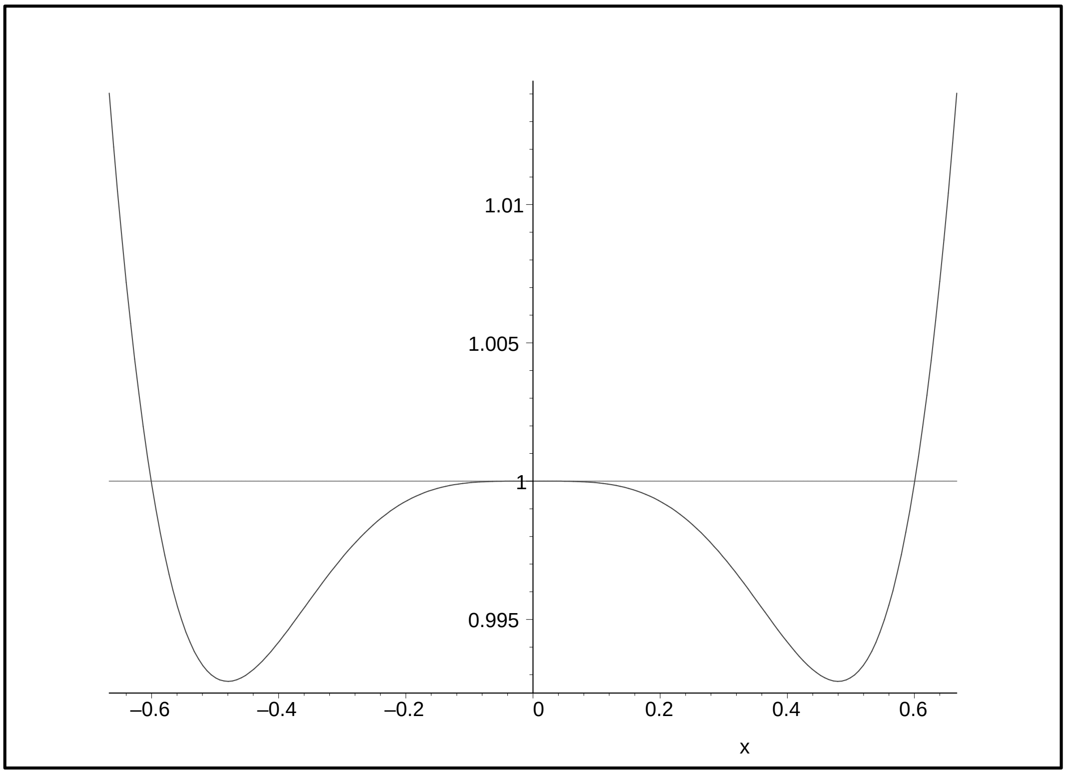

Рис. 4: График $\varphi(x)$. Случай $(4, 6)$. Интервал $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$

Пусть $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$ — d–мерный ($d \geq 1$) тор.

При α и $\beta > 0$ функция $\varphi_{\alpha,\beta}(t)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \left(1 - t^{\alpha}\right)^{\beta}, & t \in [0, 1], \\ \\ 0, & t > 1. \end{cases} \tag{2}$$

В параграфе 3.2 рассматриваются средние Марцинкевича–Рисса рядов Фурье ($\alpha > 0$, $\beta > 0$)

$$\sigma^{\square}_{n,\alpha,\beta}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \varphi_{\alpha,\beta}\Big(\frac{1}{n}\max\{|k_1|, |k_2|\}\Big)\widehat{f}_k e_k$$

и средние типа Гаусса–Вейерштрасса рядов Фурье ($\alpha > 0$)

$$G^{\square}_{n,\alpha}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{1}{n^{\alpha}}\max\{|k_1|^{\alpha}, |k_2|^{\alpha}\}}\widehat{f}_k e_k.$$

Теорема 3.1 *При любых α и $\beta > 0$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p \in [1, +\infty]$ ($L_\infty = C$)*

$$\big\|f - \sigma^{\square}_{n,\alpha,\beta}(f)\big\|_{L_p} + \big\|f - G^{\square}_{n,\alpha}(f)\big\|_{L_p} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

В следующей теореме дано сравнение методов суммирования Марцинкевича–Рисса при разных значениях параметров α и β.

Теорема 3.2

1) При любых α, β_1 и $\beta_2 > 0$, при любом n и $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p \in [1, +\infty]$ ($L_\infty = C$) выполняется неравенство

$$\big\|f - \sigma^{\square}_{n,\alpha,\beta_1}(f)\big\|_{L_p} \leq c_7(\alpha, \beta_1, \beta_2)\big\|f - \sigma^{\square}_{n,\alpha,\beta_2}(f)\big\|_{L_p},$$

то есть порядок приближения не зависит от β.

2) При $\beta > 0$ и $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, при любом n и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p \in [1, +\infty]$ ($L_\infty = C$) выполняется неравенство

$$\big\|f - \sigma^{\square}_{n,\alpha_2,\beta}(f)\big\|_{L_p} \leq c_8(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\big\|f - \sigma^{\square}_{n,\alpha_1,\beta}(f)\big\|_{L_p},$$

то есть с ростом α скорость сходимости может расти.

Стоит отметить, что противоположного неравенства в п. 2) для всех функций f и любого n при $\beta > 0$ и $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ быть не может.

Р. М. Тригуб определил точный порядок приближения индивидуальных периодических функций классическими средними рядов Фурье. В кратном случае приходится обычно вводить специальные модули гладкости. При $\alpha = \beta = 1$ точный порядок приближения периодических функций суммами Марцинкевича нашла О. И. Кузнецова (1980). А при $p \in (1, \infty)$ подходят для сумм Марцинкевича и обычные модули (см. работу М. Ф. Тимана, В. Г. Пономаренко (1975)).

Пусть $\dot{\Delta}_h^2 f(x) = f(x - 2h) - 2f(x) + f(x + 2h)$ — вторая симметричная разность в направлении вектора h, e_1° и e_2° — орты осей в $\mathbb{R}^2$. Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 3.3 *При любых $\beta > 0$, любом $n \in \mathbb{N}$ и $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p \in [1, +\infty]$ ($L_\infty = C$) выполняется двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от β:*

$$\left\| f - \sigma_{n,1,\beta}^{\square}(f) \right\|_{L_p} \asymp \left\| \int_1^\infty \frac{\left(\dot{\Delta}^2_{(e_1^\circ + e_2^\circ)\frac{u}{n}} + \dot{\Delta}^2_{(e_1^\circ - e_2^\circ)\frac{u}{n}} \right) f(\cdot)}{u^2} du \right\|_{L_p}.$$

В работе найден точный порядок приближения полиномами $\sigma_{n,\alpha,\beta}^{\square}$ при любом $\alpha > 0$ через специальный K–функционал.

K–функционал при ($\varepsilon > 0$) определяют следующим образом:

$$K_\alpha(\varepsilon, f) = \inf_g \Big(\|f - g\|_{L_p} + \varepsilon^\alpha \|d_\alpha(g)\|_{L_p} \Big), \tag{3}$$

где $d_\alpha(f)$ — дифференциальный оператор

$$d_\alpha(f) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \max \left\{ |k_1|^\alpha, |k_2|^\alpha \right\} \hat{f}_k e^{i(k,x)}.$$

Теорема 3.4 *При любых* α, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $1 \le p \le \infty$ $(L_\infty = C)$ *выполняется двустороннее неравенство с положительными константами зависящими только от* α, β:

$$\left\| f - \sigma^{\square}_{n,\alpha,\beta}(f) \right\|_{L_p} \asymp K_\alpha\Big(\frac{1}{n}, f, L_p, d_\alpha\Big).$$

Следствие 3.1 *При любом* $\varepsilon > 0$

$$K_1(\varepsilon, f, L_p, d_1) \asymp \left\| \int\limits_1^\infty \frac{\Big(\dot{\Delta}^2_{(e_1^\circ+e_2^\circ)\varepsilon u} + \dot{\Delta}^2_{(e_1^\circ-e_2^\circ)\varepsilon u}\Big) f(\cdot)}{u^2} du \right\|_{L_p}.$$

В параграфе 3.3 найден точный порядок приближения методами Гаусса-Вейерштрасса, Бохнера–Рисса интегралов Фурье в кратном случае и методом Марцинкевича–Рисса для двойных интегралов Фурье.

Пусть

$$\Phi_\sigma(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(x - \frac{t}{\sigma}\Big) \widehat{\varphi}(t) dt,$$

где

$$\widehat{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ixt} dx, \qquad \varphi(0) = 1,$$

тогда средние типа Гаусса–Вейерштрасса:

$$G_{\varepsilon,\alpha}(f) = \Phi_{\frac{1}{\varepsilon}}(f), \quad \varphi(x) = e^{-|x|^\alpha} \ (\alpha > 0),$$

и пусть симметричная разность порядка r шага $h > 0$:

$$\dot{\Delta}^r_h = \dot{\Delta}(\dot{\Delta}^{r-1}_h), \quad \dot{\Delta}^1_h f(x) = f(x+h) - f(x-h), \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Теорема 3.5 *При любом* $p \in [1, +\infty]$, $\alpha > 0$, *натуральном* $r > \frac{1}{2}(\alpha + d - 1)$ *для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *и* $\varepsilon \in (0, 1]$ *выполняется двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от* α *и* r:

$$\left\| f - G_{\varepsilon,\alpha}(f) \right\|_{L_p} \asymp \left\| \int\limits_{|u| \ge 1} \frac{1}{|u|^{r+\alpha}} \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \cdot u} f(\cdot) du \right\|_{L_p}.$$

Точный порядок приближения средними типа Бохнера–Рисса интегралов Фурье определен в следующей теореме.

Пусть при $r \in \mathbb{N}$, $\delta > \frac{1}{2}(d-1)$ и $\varepsilon > 0$

$$R_{\varepsilon,r,\delta}(f) = \Phi_{\frac{1}{\varepsilon}}(f), \qquad \varphi(x) = (1 - |x|^{2r})_+^\delta.$$

Теорема 3.6

1) При любом $p \geq 1$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ и $\varepsilon \in (0,1]$ (Δ — оператор Лапласа)

$$\big\|f - R_{\varepsilon,r,\delta}(f)\big\|_{L_p} \asymp \Bigg\| \int\limits_{|u|\leq 1} \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot) du \Bigg\|_{L_p} \asymp \inf_{g \in W_p^r(\mathbb{R}^d)} \Big(\|f-g\|_{L_p} + \varepsilon^{2r} \|\Delta^r g\|_{L_p} \Big).$$

2) При $p \in (1,+\infty)$ для любой $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ и $\varepsilon \in (0,1]$

$$\big\|f - R_{\varepsilon,r,\delta}(f)\big\|_{L_p} \asymp \sup_{|u|\leq 1} \Big\| \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot) \Big\|_{L_p}.$$

Средние Марцинкевича–Рисса двойных интегралов Фурье ($d = 2, \beta > 0$)

$$M_{\varepsilon,\beta}(f) = \Phi_\varepsilon(f), \qquad \varphi(x_1, x_2) = \big(1 - \max\{|x_1|, |x_2|\}\big)_+^\beta.$$

При $\beta = 1$ этот метод суммирования двойных рядов Фурье изучал Марцинкевич (это средние арифметические квадратных частных сумм).

Теорема 3.7 *При любом $\beta > 0$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p \geq 1$, $\varepsilon \in (0,1]$ выполняются двусторонние неравенства с положительными константами, зависящими лишь от β:*

$$\big\|f - M_{\varepsilon,\beta}(f)\big\|_{L_p} \asymp \Big\| \int\limits_1^\infty \frac{1}{u^2} \Big(\dot{\Delta}^2_{\varepsilon u(e_1^\circ + e_2^\circ)} + \dot{\Delta}^2_{\varepsilon u(e_1^\circ - e_2^\circ)} \Big) f(\cdot) du \Big\|_{L_p},$$

$$\big\|f - M_{\varepsilon,\beta}(f)\big\|_{L_p} \asymp \inf_g \big(\|f-g\|_{L_p} + \varepsilon \|d(g)\|_{L_p} \big),$$

где e_1° и e_2° — орты осей $\mathbb{R}^2$ и для гладких функций

$$d(f;x) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(y) \max\{|y_1|, |y_2|\} e^{i(x,y)} dy.$$

Результаты третьей главы опубликованы в [4], [5] и [6].

В **заключении** диссертационной работы приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Получены необходимые и достаточные условия приближения линейными операторами с оценкой через модуль гладкости сверху и отдельно — снизу.

2. Найден точный порядок убывания наилучшего приближения $A_\sigma(f)$ функции f на прямой целыми функциями экспоненциального типа не выше σ в зависимости от поведения модулей гладкости функции f и σ.

3. В общей прямой теореме Стечкина такая же оценка приближения снизу невозможна. Найден точный порядок приближений периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина через новые модули гладкости порядков 2, 3 и 4.

4. Проведен сравнительный анализ методов Марцинкевича–Рисса суммирования двойных рядов Фурье при разных положительных значениях параметров α и β и найден точный порядок приближения при $\alpha = 1$, $\beta > 0$.

5. Найден точный порядок приближения индивидуальных функций классическими методами суммирования Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера–Рисса интегралов Фурье в кратном случае и методом Марцинкевича–Рисса для двойных интегралов Фурье.

В заключении также приводятся некоторые нерешенные задачи, имеющие непосредственное отношение к результатам диссертации:

1. В случае полиномов Бернштейна–Стечкина вид разностного оператора известен, но точный порядок приближения получен при всех (!) степенях n только для специальных модулей малых порядков.

2. Как выглядит точный порядок приближения суммами Марцинкевича для периодических функций трех и более переменных (какой разностный оператор нужно использовать)?

Автор выражает признательность научному руководителю д. ф.–м. н., проф. Р. М. Тригубу за постановку задач, руководство в подготовке и постоянное внимание к работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Котова, О. В. *О приближении периодических функций полиномами Стечкина* / О. В. Котова // Труды Института прикл. матем. и механики. — 2011. — Т. 22. — С. 131 – 134.

[2] Котова, О. В. *Точный порядок приближения периодических функций одним неклассическим методом суммирования рядов Фурье* / О. В. Котова, Р. М. Тригуб // Укр. матем. журнал. — 2012. — Т. 64, № 7. — С. 954 – 969.

[3] Котова, О. В. *О приближении непрерывных периодических функций полиномами Стечкина* / О. В. Котова // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. — 2013. — Вип. 18. — С. 104 – 124.

[4] Котова, О. В. *Аппроксимативные свойства методов суммирования интегралов Фурье* / О. В. Котова, Р. М. Тригуб // Доклады НАН Украины. — 2015. — № 1. — С. 13 – 19.

[5] Котова, О. В. *Аппроксимативные свойства методов суммирования интегралов Фурье* / О. В. Котова, Р. М. Тригуб // Укр. матем. вестник. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 222 – 242.

[6] Котова, О. В. *Новое достаточное условие принадлежности алгебре абсолютно сходящихся интегралов Фурье и его применение к вопросам суммируемости двойных рядов Фурье* / О. В. Котова, Р. М. Тригуб // Укр. матем. журнал. — 2015. — Т. 67, № 8. — С. 1082 – 1096.

[7] Котова, О. В. *О приближении функций на прямой целыми функциями экспоненциального типа* / О. В. Котова // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — V". Тезисы докладов. — Ростов н/Д: Изд. центр ДГТУ. — 2015. — С. 81 – 82.